НОВОЕ
В ЖИЗНИ, НАУКЕ,
ТЕХНИКЕ

ЗНАНИЕ

АРХИТЕКТУРА МАТЕМАТИКИ

1/1972

СЕРИЯ
МАТЕМАТИКА,
КИБЕРНЕТИКА

АРХИТЕКТУРА МАТЕМАТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»
МОСКВА 1972

51
А87

А87 **Архитектура математики.** М., «Знание», 1972.

32 стр. (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика», 1).

В брошюру включены две статьи, в которых рассматриваются особенности математики как отрасли знания. Первая статья Н. Бурбаки «Архитектура математики» перепечатана из собрания сочинений, изданных на русском языке (Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. Перев. с фр. И. Г. Башмаковой. Под ред. К. А. Рыбникова. М., Изд-во иностр. лит., 1963, стр. 245—259); вторая статья написана для брошюры акад. АН УССР Б. В. Гнеденко.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей.

2—2—1 51

СОДЕРЖАНИЕ

АРХИТЕКТУРА МАТЕМАТИКИ *(Сборник)*

Редактор *В. Ю. Иваницкий*

Художественный редактор *В. Н. Конюхов*

Технический редактор *Т. В. Самсонова*

Корректор *В. В. Каночкина*

А-14009 Сдано в набор 27/X-1971 г. Подписано к печати 15/XII 1971 г. Формат бумаги 60×90[1]/16 Бумага типографская № 3 Бум. л. 1,0 Печ л. 2,0 Уч.-изд. л. 2,00 Тираж 47500 экз. Заказ 2118 Цена 6 коп.

Издательство «Знание». Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4.

Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР г. Чехов, Московской области

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современную математику часто сравнивают с большим городом. Это — прекрасное сравнение, поскольку в математике, как и в большом городе, происходит непрерывный процесс роста и совершенствования. В математике возникают новые области, строятся изящные и глубокие новые теории подобно строительству новых кварталов и зданий. Но прогресс математики не сводится только к изменению лица города из-за строительства нового. Приходится изменять и старое. Старые теории включаются в новые, более общие; возникает необходимость укрепления фундаментов старых построек. Приходится прокладывать новые улицы, чтобы устанавливать связи между далекими кварталами математического города. Но этого мало — архитектурное оформление требует значительных усилий, поскольку разностильность различных областей математики не только портит общее впечатление от науки, но и мешает пониманию науки в целом, установлению связей между различными ее частями.

Нередко используется и другое сравнение: математику уподобляют большому ветвистому дереву, которое систематически дает новые побеги. Каждая ветвь дерева — это та или иная область математики. Число ветвей не остается неизменным, поскольку вырастают новые ветви, срастаются воедино ветви, сначала росшие раздельно, некоторые из ветвей засыхают, лишенные питательных соков. Оба сравнения удачны и очень хорошо передают действительное положение дела.

Несомненно, что в построении математических теорий большую роль играет требование красоты. Само собой разумеется, что ощущение красоты весьма субъективно и нередко встречаются достаточно уродливые представления на этот счет. И все же приходится удивляться тому единодушию, которое вкладывается математиками в понятие «красота»: результат считается красивым, если из малого числа условий удается получить общее заключение, относящееся к широкому кругу объектов. Математический вывод считается красивым, если в нем простыми и короткими рассуждениями удается доказать значительный математический факт. Зрелость математика, его талант угадываются по тому, насколько развито у него чувство красоты. Эстетически завершенные и математически совершенные результаты легче понять, запомнить и использовать; легче выявлять и их взаимоотношения с другими областями знания.

Математика в наше время превратилась в научную дисциплину со множеством направлений исследований, огромным количеством результатов и методов исследований. Математика теперь настолько велика, что нет возможности одному человеку охватить ее во всех ее частях, нет возможности быть в ней специалистом-универсалом. Потеря связей между отдельными направлениями ее — безусловно отрицательное следствие бурного развития этой науки. Однако в основе развития всех отраслей математики есть общее — истоки развития, корни древа математики.

В первой статье, помещенной в данной брошюре, рассказывается о сложности структуры современной математики. Автор статьи Н. Бурбаки — псевдоним, за которым скрывается целая группа выдающихся французских математиков наших дней. Во второй статье брошюры сделана попытка показать особенности развития математики как науки. Эта статья, по нашему замыслу, должна дополнять статью Н. Бурбаки, обрисовывая математику с материалистических позиций, показывая ее как науку, тесно связанную с практической деятельностью человека.

Б. В. ГНЕДЕНКО,
академик АН УССР

Н. БУРБАКИ

АРХИТЕКТУРА МАТЕМАТИКИ

Математика или математики? [1]

Дать в настоящее время общее представление о математической науке — значит заняться таким делом, которое, как кажется, с самого начала наталкивается на почти непреодолимые трудности благодаря обширности и разнообразию рассматриваемого материала. В соответствии с общей тенденцией в науке с конца XIX в. число работ, посвященных математике, значительно возросло. Статьи по чистой математике, публикуемые во всем мире в среднем в течение одного года, охватывают многие тысячи страниц. Не все они имеют, конечно, одинаковую ценность; тем не менее после очистки от неизбежных отбросов оказывается, что каждый год математическая наука обогащается массой новых результатов, приобретает все более разнообразное содержание и постоянно дает ответвления в виде теорий, которые беспрестанно видоизменяются, перестраиваются, сопоставляются и комбинируются друг с другом. Ни один математик не в состоянии проследить это развитие во всех подробностях, даже если он посвятит этому всю свою деятельность. Многие из математиков устраиваются в каком-либо закоулке математической науки, откуда они и не стремятся выйти, и не только почти полностью игнорируют все то, что не касается предмета их исследований, но не в силах даже понять язык и терминологию своих собратьев, специальность которых далека от них. Нет такого математика, даже среди обладающих самой обширной эрудицией, который бы не чувствовал себя чужеземцем в некоторых областях огромного математического мира; что же касается тех, кто подобно Пуанкаре или Гильберту оставляет печать своего гения почти во всех его областях, то они составляют даже среди наиболее великих редчайшее исключение.

Поэтому даже не возникает мысли дать неспециалисту точное представление о том, что даже сами математики не могут

[1] La Mathématique ou les Mathématiques? (т. е. одна математика или несколько математик?). — *Прим. перев.*

постичь во всей полноте. Но можно спросить себя, является ли это обширное разрастание развитием крепко сложенного организма, который с каждым днем приобретает все больше и больше согласованности и единства между своими вновь возникающими частями, или, напротив, оно является только внешним признаком тенденции к идущему все дальше и дальше распаду, обусловленному самой природой математики; не находится ли эта последняя на пути превращения в Вавилонскую башню, в скопление автономных дисциплин, изолированных друг от друга как по своим методам, так и по своим целям и даже по языку? Одним словом, существуют в настоящее время одна математика или несколько математик?

Хотя в данный момент этот вопрос особенно актуален, ни в коем случае не надо думать, что он нов; его ставили с первых же шагов математической науки. Ведь действительно, если даже не принимать в расчет прикладной математики, между геометрией и арифметикой (по крайней мере, в их элементарных разделах) существует очевидная разница в происхождении, поскольку последняя вначале была наукой о дискретном, а первая — наукой о непрерывной протяженности (два аспекта, которые были коренным образом противопоставлены друг другу после открытия иррациональностей). Именно это открытие оказалось роковым для первой попытки унификации нашей науки — арифметизации пифагорейцев («все вещи суть числа»).

Мы бы зашли слишком далеко, если бы от нас потребовали проследить те превратности судьбы, которым подвергалась унитарная концепция математики от пифагорейцев до наших дней. Кроме того, это — работа, к которой более подготовлен философ, чем математик, так как общей чертой всех попыток объединить в единое целое математические дисциплины — все равно, идет ли речь о Платоне, о Декарте или Лейбнице, об арифметизации или логистике XIX в., — является то, что они делались в связи с какой-либо более или менее претенциозной философской системой, причем исходным пунктом для них всегда служили априорные воззрения на отношения между математикой и двойной действительностью внешнего мира и мира мысли. Самое лучшее, что мы сумеем сделать, — это отослать читателя по этому вопросу к историческому и критическому исследованию Л. Брунсвига «Этапы математической философии» [1]. Наша задача более скромна и более точно очерчена; мы намереваемся остаться внутри математики и искать ответ на поставленный вопрос, анализируя ее собственное развитие.

---

[1] Brunschvig L. Les étapes de la philosophie mathématique. Paris, Alcana, 1912.

Логический формализм и аксиоматический метод

После более или менее очевидного банкротства различных систем, на которые мы указывали выше, в начале этого века, казалось, почти полностью отказались от взгляда на математику как на науку, характеризуемую единым предметом и единым методом; скорее наблюдалась тенденция рассматривать ее как «ряд дисциплин, основывающихся на частных, точно определенных понятиях, связанных тысячью нитей»[1], которые позволяют методам, присущим одной из дисциплин, оплодотворять одну или несколько других. В настоящее время, напротив, мы думаем, что внутренняя эволюция математической науки, вопреки видимости, более чем когда-либо упрочила единство ее различных частей и создала своего рода центральное ядро, которое является гораздо более связным целым, чем когда бы то ни было. Существенное в этой эволюции заключается в систематизации отношений, существующих между различными математическими теориями; ее итогом явилось направление, которое обычно называют «аксиоматическим методом».

Иногда говорят также «формализм» или «формалистический метод»; но необходимо с самого начала остерегаться путаницы, которую вызывают эти недостаточно четко определенные слова и которая и без того часто используется противниками аксиоматического метода. Каждому известно, что внешней отличительной чертой математики является то, что она представляется нам той «длинной цепью рассуждений», о которой говорил Декарт. Каждая математическая теория является цепочкой высказываний, которые выводятся друг из друга согласно правилам логики, во всем существенном совпадающей с логикой, известной со времен Аристотеля под названием «формальной логики», соответствующим образом приспособленной к специфическим потребностям математики. Таким образом, утверждение, что «дедуктивное рассуждение» является для математики объединяющим началом, — тривиальная истина. Но столь поверхностное замечание не может, конечно, служить объяснением единства различных математических теорий, точно так же, как нельзя, например, объединить в единой науке физику и биологию под предлогом, что и та, и другая используют экспериментальный метод. Способ рассуждения, заключающийся в построении цепочки силлогизмов, является только трансформирующим механизмом, который можно применять независимо от того, каковы посылки, к которым он применяется и который, следовательно, не может характеризовать природу этих последних. Другими словами, это лишь

[1] Л. Брунсвиг, цит. соч., 447.

внешняя форма, которую математик придает своей мысли, орудие, делающее ее способной объединяться с другими мыслями [1], и, так сказать, язык, присущий математике, но не более того. Упорядочить словарь этого языка и уточнить его синтаксис — это значит сделать очень полезное дело, эта работа и составляет действительно одну из сторон аксиоматического метода, а именно ту, которую следует назвать логическим формализмом (или, как еще говорят, «логистикой»). Но — и мы настаиваем на этом — *это только одна сторона* и при том наименее интересная.

То, что аксиоматика ставит перед собой в качестве основной цели — уразумение существа математики, именно этого не может дать логический формализм, взятый сам по себе. Точно так же, как экспериментальный метод исходит из априорной уверенности в постоянстве законов природы, аксиоматический метод берет за точку опоры убеждение в том, что если математика не является нанизыванием силлогизмов в направлении, избранном наугад, то она тем более не является более или менее хитрым искусством, состоящим из произвольных сближений, в котором господствует одна техническая ловкость. Там, где поверхностный наблюдатель видит лишь две или несколько теорий, совершенно отличных друг от друга по своему внешнему виду, и где вмешательство гениального математика приводит к обнаружению совершенно «неожиданной помощи» [2], которую одна из них может оказать другой, там аксиоматический метод учит нас искать глубокие причины этого открытия, находить общие идеи, скрывающиеся за деталями, присущими каждой из рассматриваемых теорий, извлекать эти идеи и подвергать их исследованию.

Понятие «структуры»

Какую форму приобретает этот метод? Именно здесь аксиоматика больше всего сближается с экспериментальным методом. Черпая из картезианского источника, она «разделяет трудности, чтобы лучше их разрешить». В доказательствах какой-либо теории она стремится разъединить главные пружины фигурирующих там рассуждений; затем, беря каждое из соответствующих положений *изолированно* и возводя его в общий принцип, она выводит из них следствия; наконец, возвращаясь к изученной теории, она снова *комбинирует* предва-

[1] Каждый математик, впрочем, знает, что доказательство не является «понятным» в подлинном смысле этого слова, если ограничиться лишь проверкой правильности выводов, которые его составляют, и не пытаться понять отчетливо идеи, которые привели к созданию этой цепочки выводов предпочтительно перед всякой другой.

[2] Л. Брунсвиг, цит. соч., стр. 446.

рительно выделенные составные элементы и изучает, как они взаимодействуют между собой. Конечно, нет ничего нового в этом классическом сочетании анализа и синтеза; вся оригинальность этого метода заключается в том, как его применяют.

Чтобы проиллюстрировать примером только что описанный метод, мы рассмотрим наиболее старую (и наиболее простую) аксиоматическую теорию — теорию абстрактных групп. Рассмотрим следующие три операции: 1° *сложение действительных чисел,* при котором сумма двух действительных чисел (положительных, отрицательных и нуля) определена обычным образом; 2° *умножение целых чисел по простому модулю p,* причем элементами, которые мы рассматриваем, являются числа 1, 2, 3, ..., $p-1$, а произведением двух таких чисел является, по определению, остаток от деления на p их произведения в обычном смысле; 3° *«композицию» перемещений* в евклидовом трехмерном пространстве, причем результатом этой композиции (или произведением) двух перемещений T и S (взятых в данном порядке) мы будем считать, по определению, перемещение, полученное в результате выполнения сначала перемещения T, а затем S. В каждой из этих трех теорий двум элементам x и y, взятым в данном порядке, рассматриваемого множества (в первом случае множества всех действительных чисел, во втором — множества чисел 1, 2, 3, ..., $p-1$, в третьем — множества всех перемещений) ставится в соответствие (с помощью особой для каждого множества процедуры) третий однозначно определенный элемент того же множества, который мы условимся во всех трех случаях символически обозначать $x\tau y$ (это будет сумма, если x и y — действительные числа; их произведение по модулю p, если они — натуральные числа $\leqslant p-1$; результат их композиции, если они являются перемещениями). Если теперь рассмотреть свойства этой «операции» в каждой из трех теорий, то обнаружится замечательный параллелизм; внутри же каждой из этих теорий эти свойства зависят друг от друга, и анализ логических связей между ними приводит к выделению небольшого числа тех свойств, которые являются независимыми (т. е. таких, что ни одно из них не является логическим следствием остальных). Можно, например[1], взять три следующих свойства, которые мы выразим с помощью наших символических обозначений, но которые, конечно, легко перевести на язык каждой из этих теорий:

a) каковы бы ни были элементы x, y, z, имеем $(x\tau y)\tau z=x\tau(y\tau z)$ (ассоциативность операции $x\tau y$);

b) существует элемент e такой, что для всякого элемента x $e\tau x=x\tau e=x$ (для сложения действительных чисел — чис-

[1] Этот выбор не является единственно возможным, и известны различные системы аксиом, «эквивалентных» рассматриваемой, причем аксиомы каждой системы являются логическими следствиями аксиом любой другой системы.

ло 0, для умножения по модулю p — число 1, для композиции перемещений — «тождественное перемещение», которое оставляет на своем месте каждую точку пространства);

c) для каждого элемента x существует элемент x', такой, что $x\tau x'=x'\tau x=e$ (для сложения действительных чисел — противоположное число $-x$, для композиции перемещений — обратное перемещение, т. е. такое, которое каждую точку, перемещенную смещением x, возвращает в исходное положение; для умножения по модулю p существование x' следует из очень простого арифметического рассуждения [1].

Тогда мы устанавливаем, что те свойства, которые при помощи общих обозначений возможно выразить одним и тем же образом в каждой из этих трех теорий, являются следствием трех предыдущих. Например, поставим перед собой цель доказать, что из $x\tau y=x\tau z$ следует $y=z$. Можно было бы это сделать в каждой из этих теорий, используя рассуждения, специфические для данной теории. Но можно избрать следующий образ действий, который применим ко всем трем случаям. Из соотношения $x\tau y=x\tau z$ мы выводим равенство $x'\tau(x\tau y)=$ $=x'\tau(x\tau z)$ (x' имеет смысл, определенный выше). Далее, применяя a, получим $(x'\tau x)\tau y=(x'\tau x)\tau z$. Используя c, запишем это соотношение в виде $e\tau y=e\tau z$, и наконец, применяя b, получаем $y=z$, что и требовалось доказать. В этом рассуждении мы полностью абстрагировались от природы элементов x, y, z, т. е. нам незачем было знать, являются ли они действительными числами, натуральными числами $\leqslant p-1$ или перемещениями. Единственная посылка, которой мы пользовались, заключалась в том, что операция $x\tau y$ над элементами x, y удовлетворяет свойствам a, b, c. Для того чтобы избежать скучных повторений, приходят, таким образом, к мысли, что удобно раз и навсегда вывести логические следствия из этих трех единственных свойств. Необходимо, конечно, для удобства речи принять общую терминологию. Говорят, что множество, на котором определена операция $x\tau y$, характеризуемая тремя свойствами a, b и c, снабжено *структурой группы* (или, более коротко, является *группой*). Условия a, b, c называются аксиомами группы[2] и вывести из них их следствия — значит построить аксиоматическую теорию групп.

Теперь можно объяснить, что надо понимать в общем случае под *математической структурой*. Общей чертой различных понятий, объединенных этим родовым названием, является то,

---

[1] Заметим, что остатки от деления на p чисел 1, x, $x^2, \ldots, x^n \ldots$ не могут быть все различными. Приравняв два из них друг другу, легко показать, что степень x^{k-l} $(k>l)$ от x имеет остаток, равный 1. Если x' является остатком от деления x^{k-l-1} на p, то произведение xx' по модулю p равно 1.

[2] Разумеется, этот смысл «аксиома» не имеет ничего общего с общепринятым смыслом выражения «очевидная истина».

что они применимы к множеству элементов, природа которых[1] не определена. Чтобы определить структуру, задают одно или несколько отношений, в которых находятся его элементы[2] (в случае групп — это отношение $x\tau y = z$ между тремя произвольными элементами); затем постулируют, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям (которые перечисляют и которые являются *аксиомами* рассматриваемой структуры[3]. Построить аксиоматическую теорию данной структуры — это значит вывести логические следствия из аксиом структуры, *отказавшись от каких-либо* других предположений относительно рассматриваемых элементов (в частности, от всяких гипотез относительно их «природы»).

Основные типы структур

Отношения, являющиеся исходной точкой в определении структуры, могут быть по своей природе весьма разнообразными. То отношение, которое фигурирует в групповых структурах,

---

[1] Мы становимся здесь на «наивную» точку зрения и не касаемся щекотливых вопросов, полуфилософских, полуматематических, возникших в связи с проблемой «природы» математических «объектов». Ограничимся замечанием, что первоначальный плюрализм в наших представлениях этих «объектов», мыслимых сначала как идеализированные «абстракции» чувственного опыта и сохраняющих всю разнородность этих последних, в результате аксиоматических исследований XIX-XX вв был заменен единой концепцией, посредством последовательного сведения всех математических понятий сначала к понятию целого числа, затем на втором этапе к понятию *множества*. Последнее, рассматриваемое долгое время как «первоначальное» и «неопределимое», было объектом многочисленных споров, вызванных характером его исключительной общности и весьма туманной природой представлений, которые оно у нас вызывает. Трудности исчезли только тогда, когда исчезло само понятие множества (и с ним все метафизические псевдопроблемы относительно математических «объектов») в результате недавних исследований о логическом формализме. С точки зрения этой концепции единственными математическими объектами становятся, собственно говоря, математические структуры. Читатель найдет более подробное развитие этой точки зрения в следующих двух статьях: Dieudonné J.. Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques. *Revue Scientifique,* 78 (1939), 224—232; Cartan H.. Sur le fondement logique des mathématiques. *Revue Scientifique,* 81 (1943), 3—11.

[2] В действительности это определение структуры не является настолько общим, насколько этого требуют нужды математики. Нужно также охватить и тот случай, когда отношения, определяющие структуру, имеют место не между элементами рассматриваемого множества, а между *подмножествами* этого множества, и даже, в более общем случае, между элементами множеств еще более высокой «степени» в так называемой «лестнице типов». Дальнейшие детали читатель найдет в наших Eléments de Mathématique, книга I (сводка результатов), Actual. Scient. et Industr., № 846.

[3] В случае групп надо было бы, если соблюдать полную строгость, считать аксиомой, кроме *a, b, c,* и утверждение о том, что соотношение $z = x\tau y$ определяет одно и только одно z, когда даны x, y. Обычно считают, что это свойство молчаливо подразумевается самой записью этого отношения.

называют «законом композиции»; это такое отношение между тремя элементами, которое определяет однозначно третий элемент как функцию двух первых. Когда отношения в определении структуры являются «законами композиции», соответствующая структура называется алгебраической структурой (например, структура поля определяется двумя законами композиции с надлежащим образом выбранными аксиомами: сложение и умножение действительных чисел определяют структуру поля на множестве этих чисел).

Другой важный тип представляют собой структуры, определенные отношением порядка; на этот раз это — отношение между двумя элементами x, y, которое чаще всего мы выражаем словами «x меньше или равно y» и которое мы будем обозначать в общем случае xRy. Здесь больше не предполагается, что это отношение однозначно определяет один из элементов x, y как функцию другого. Аксиомы, которым оно подчиняется, таковы: a) для всех x xRx; b) из соотношений xRy, yRx следует $x=y$; c) из соотношений xRy, yRz следует xRz. Очевидным примером множества, снабженного такой структурой, является множество целых чисел (или множество действительных чисел), причем здесь знак R заменяется на $\leqslant$. Но надо заметить, что мы не включили в число аксиом аксиому, отражающую следующее свойство, которое кажется неотделимым от того понятия порядка, каким мы пользуемся в обыденной жизни; «каковы бы ни были x, y, имеет место xRy или yRx». Другими словами, не исключается случай, когда два элемента могут оказаться *несравнимыми*. На первый взгляд это может показаться странным, но легко привести очень важные примеры структур порядка, для которых имеет место именно это обстоятельство. Именно с таким положением вещей мы сталкиваемся, когда X, Y означают подмножества некоторого множества, а XRY означает «X содержится в Y», или когда x, y являются натуральными числами, а xRy означает «x делит y», или, наконец, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются действительными функциями, определенными на интервале $a\leqslant x\leqslant b$, а $f(x)Rg(x)$ означает: «каково бы ни было x, $f(x)\leqslant g(x)$». Эти примеры в то же время показывают, сколь велико разнообразие областей, где появляются структуры порядка, и заранее дают представление о том, насколько интересно их изучение.

Мы скажем еще несколько слов о третьем важном типе структур — *топологических структур* (или *топологиях*); в них находят абстрактную математическую формулировку интуитивные понятия *окрестности, предела* и *непрерывности*, к которым нас приводит наше представление о пространстве.

Для перехода к абстракции, находящей свое выражение в аксиомах такой структуры, требуются усилия, значительно большие тех, которые имели место в предыдущих примерах, и размеры настоящей статьи вынуждают нас отослать читателей, желающих получить более подробные сведения по этому вопросу, к специальной литературе [1].

Стандартизация математических орудий

Мы думаем, что нами сказано достаточно для того, чтобы читатель мог создать себе достаточно ясное представление об аксиоматическом методе. Наиболее бросающейся в глаза его чертой, как это видно из изложенного выше, является реализация значительной *экономии мысли.* «Структуры» являются *орудиями* математика; в каждый раз, когда он замечает, что между изучаемыми им элементами имеют место отношения, удовлетворяющие аксиомам структуры определенного типа, он сразу может воспользоваться всем арсеналом общих теорем, относящихся к структурам этого типа, тогда как раньше он должен был бы мучительно трудиться, выковывая сам средства, необходимые для того, чтобы штурмовать рассматриваемую проблему, причем их мощность зависела бы от его личного таланта и они были бы отягчены часто излишне стеснительными предположениями, обусловленными особенностями изучаемой проблемы. Таким образом, можно было бы сказать, что аксиоматический метод является не чем иным, как «системой Тейлора» в математике [2].

Но это сравнение — недостаточное. Математик не работает подобно машине; мы должны особенно подчеркнуть, что в рассуждениях математика основную роль играет особая *интуиция* [3], отличная от обыденной чувственной интуиции и заключающаяся скорее в непосредственном угадывании (предшествующем всякому рассуждению) нормального положения вещей, которое, как кажется, он вправе ожидать от математических объектов, ставших в результате его частого оперирования с ними столь же для него привычными, как и объекты реального мира. Но ведь каждая структура сохраняет в своем языке интуитивные отзвуки той специфической теории, откуда ее извлек аксиоматический анализ, описанный нами выше. И когда исследователь неожиданно открывает эту структуру в изученных им явлениях, это для него является как бы толч-

---

[1] См., например, наши Eléments, книга III, введение к главе I, Actual. Scient. et Industr., № 858.

[2] Система Тейлора — капиталистическая система организации труда, предложенная американским инженером Ф. У. Тейлором для получения максимальной прибыли. Одним из элементов этой системы является изучение трудовых процессов путем их разложения на составные элементы. — *Прим. ред.*

[3] Интуиция, которая, впрочем, часто ошибается (как и всякая).

ком, который сразу направляет интуитивный поток его мыслей в неожиданном направлении, и в результате этого математический ландшафт, по которому он движется, получает новое освещение. Чтобы ограничиться старым примером, вспомним прогресс, осуществленный в начале XIX в. благодаря геометрической интерпретации мнимых величин; с нашей точки зрения, это было обнаружение в множестве комплексных чисел хорошо известной топологической структуры — структуры евклидовой плоскости — со всеми следующими отсюда возможностями приложений, — открытие, которое в руках Гаусса, Абеля, Коши и Римана, менее чем за одно столетие обновило весь анализ.

Такие примеры умножились за последние 50 лет: пространство Гильберта и более общие функциональные пространства, вводящие топологические структуры в множества, элементами которых являются уже не точки, а функции; p-адические числа Гензеля, посредством которых — еще более удивительное обстоятельство! — топология воцарилась в той области, которая до этих пор считалась царством дискретного, разрывного по преимуществу — в множестве целых чисел; мера Хаара, безгранично расширившая область применения понятия интеграла и способствовавшая весьма глубокому анализу свойств непрерывных групп, — таковы решающие моменты в прогрессе математики, т. е. повороты, когда свет гения определял новое направление теории, обнаруживая в ней структуру, которая, как казалось a priori, не играла там никакой роли.

Это говорит о том, что в настоящее время математика менее чем когда-либо сводится к чисто механической игре с изолированными формулами, более чем когда-либо интуиция безраздельно господствует в генезисе открытий; но теперь и в дальнейшем в ее распоряжении находятся могущественные рычаги, предоставленные ей теорией наиболее важных структур, и она окидывает единым взглядом унифицированные аксиоматикой огромные области, в которых некогда, как казалось, царил самый бесформенный хаос.

Обзор в целом

Руководствуясь концепцией аксиоматики, попытаемся представить теперь математический мир в целом. Конечно, мы более не распознаем здесь традиционный порядок, который подобно первым классификациям видов животных ограничивался тем, что расставлял рядом друг с другом теории, представляющие наибольшее внешнее сходство. Вместо точно разграниченных разделов алгебры, анализа, теории чисел и геометрии мы увидим, например, теорию простых чисел по соседству с теорией алгебраических кривых или евклидову геометрию рядом с интегральными уравнениями, и упорядочивающим принципом будет концепция *иерархии* структур, идущей от простого к сложному, от общего к частному.

В центре находятся основные типы структур, из которых мы только что перечислили главнейшие, так сказать, *порождающие структуры* (les structrures — mères). В каждом из этих типов господствует уже достаточное разнообразие, так как там надо различать наиболее общую структуру рассматриваемого типа с наименьшим числом аксиом и структуры, которые получаются из нее в результате ее обогащения дополнительными аксиомами, каждая из которых влечет за собой и новые следствия. Именно, таким образом, теория групп, помимо тех общих положений, которые справедливы для всех групп и зависят только от аксиом, перечисленных выше, содержит, в частности, теорию конечных групп (в которой добавляют аксиому, гласящую, что число элементов группы конечно), теорию абелевых групп (в которых имеем $x\tau y = y\tau x$, каковы бы ни были x, y), а также теорию *конечных абелевых групп* (в которой предполагаются выполненными обе вышеуказанные аксиомы). Точно так же среди *упорядоченных* множеств различают те, в которых (как при упорядоченности в множестве целых или в множестве действительных чисел) любые два элемента сравнимы и которые называются *линейно упорядоченными* (totalement ordonnée); среди этих последних особо изучают множества, называемые *вполне упорядоченными* (в которых, так же как в множестве натуральных чисел, каждое подмножество имеет «наименьший элемент»). Подобная же градация существует и для топологических структур.

За пределами этого первоначального ядра появляются структуры, которые можно было бы назвать *сложными* (multiples) и в которые входят одновременно одна или несколько порождающих структур, но не просто совмещенные друг с другом (что не дало бы ничего нового), а органически *скомбинированные* при помощи одной или нескольких связывающих их аксиом. Именно такой характер носит *топологическая алгебра,* изучающая структуры, определяемые одним или несколькими законами композиций и одной топологией, которые связаны тем условием, что алгебраические операции являются непрерывными функциями (для рассматриваемой топологии) элементов, над которыми они производятся. Не менее важной является *алгебраическая топология,* которая рассматривает некоторые множества точек пространства, определенные топологическими свойствами (симплексы, циклы и т. д.), как элементы, над которыми производятся алгебраические операции. Соединение структуры порядка и алгебраической структуры точно так же изобилует результатами, приводя, с одной стороны, к теории делимости идеалов, а с другой стороны — к теории интегрирования и к «спектральной теории» операторов, где точно так же топология играет свою роль.

Наконец, далее начинаются собственно частные теории, в которых элементы рассматриваемых множеств, которые до сего момента в общих структурах были совершенно неопределенными, получают более определенную индивидуальность. Именно таким образом получают теории классической математики: анализ функций действительной и комплексной переменной, дифференциальную геометрию, алгебраическую геометрию, теорию чисел. Но они теряют свою былую автономность и являются теперь перекрестками, на которых сталкиваются и взаимодействуют многочисленные математические структуры, имеющие более общий характер.

Чтобы сохранить правильную перспективу, необходимо после этого беглого обзора сейчас же добавить, что он должен рассматриваться как весьма грубое приближение к истинному положению дел в математике. Он является одновременно *схематическим, идеализированным* и *застывшим*.

Схематическим — так как в деталях не все идет так гладко и планомерно, как это может представиться после того, что мы рассказали. Между прочим, имеются неожиданные возвращения назад, когда теория, носящая ярко выраженный частный характер, как, например, теория действительных чисел, оказывает помощь, без которой нельзя обойтись при построении какой-либо общей теории, как, например, топологии или теории интегрирования.

Идеализированным — потому что далеко не во всех разделах математики некоторая определенная часть каждой из основных структур распознана и вмещена в четко очерченные границы. В некоторых теориях (например, в теории чисел) существуют многочисленные изолированные результаты, которые до сего времени не умеют ни классифицировать, ни связать удовлетворительным образом с известными структурами.

Наконец — застывшим, так как нет ничего более чуждого аксиоматическому методу, чем статическая концепция науки, и мы не хотели оставить у читателя впечатление, будто бы мы претендовали дать очерк ее окончательного состояния. Структуры не остаются неизменными ни по их числу, ни по их сущности; вполне возможно, что дальнейшее развитие математики приведет к увеличению числа фундаментальных структур; открыв плодотворность введения новых аксиом или новых сочетаний аксиом, можно заранее оценить значение этих открытий, если судить о них по тем, которые дали уже известные структуры. С другой стороны, последние ни в коем случае не являются чем-то законченным, и было бы весьма удивительно, если бы их жизненная сила была уже исчерпана.

Введя эти неизбежные поправки, можно лучше понять внутреннюю жизнь математики, понять то, что создает ее единство и вносит в нее разнообразие, понять этот большой город, чьи предместья не перестают разрастаться несколько хаотическим образом на окружающем его пространстве, в то время как центр периодически перестраивается, следуя каждый раз все более и более ясному плану и стремясь к все более и более величественному расположению, в то время как старые кварталы с их лабиринтом переулков сносятся для того, чтобы проложить к окраине улицы все более прямые, все более широкие, все более удобные.

Возвращение к прошлому и заключение

Концепция, которую мы только что пытались изложить, возникла не сразу, а лишь в результате более чем полувековой эволюции и была встречена не без сопротивления как со стороны философов, так и со стороны математиков. Многие из этих последних долго не могли согласиться рассматривать аксиоматику как что-либо большее, чем ненужные тонкости логиков, неспособные оплодотворить какую-либо теорию. Эта критика объясняется, без сомнения, исторической случайностью: аксиоматизации, которые появились первыми и которые имели наибольший отклик (аксиоматизации арифметики Дедекинда и Пеано, евклидовой геометрии Гильберта), касались унивалентных теорий, т. е. таких, которые полностью определялись совокупностью своих аксиом, причем система этих аксиом не могла быть применена к какой-либо другой теории, кроме той, из которой она была извлечена (в противоположность тому, что мы видели, например, в теории групп). Если бы это имело место для всех структур, то упрек в бесплодности, выдвинутый по адресу аксиоматического метода, был бы полностью оправдан[1]. Но этот метод доказал свою мощь своим развитием, и отвращение к нему, которое еще встречается там и сям, можно объяснить лишь тем, что разум по естественной причине затрудняется допустить мысль, что в конкретной задаче может оказаться плодотворной форма интуиции, отличная от той, которая непосредственно подсказывается данными (и которая возникает в связи с абстракцией более высокого порядка и более трудной).

[1] Мы были свидетелями также, особенно в то время, когда аксиоматический метод только что начал развиваться, расцвета уродливых структур, полностью лишенных приложений, единственное достоинство которых заключалось в том, что, изучая их, можно было дать точную оценку значимости каждой аксиомы, выясняя, что происходит, когда эту аксиому удаляют или видоизменяют. Очевидно, в тот период можно было поддаться искушению и сделать вывод, что это — единственные результаты, которые следует ожидать от этого метода.

Что касается возражений со стороны философов, то они относятся к области, где мы не решаемся всерьез выступать из-за отсутствия компетентности; основная проблема состоит во взаимоотношении мира экспериментального и мира математического[1]. То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь, — это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого (если только этим словам можно приписать какой-либо смысл) и, быть может, мы их никогда и не узнаем. Во всяком случае сделанное замечание могло бы побудить философов в будущем быть более благоразумными при решении этого вопроса. Перед тем как началось революционное развитие современной физики, было потрачено немало труда из-за желания во что бы то ни стало заставить математику рождаться из экспериментальных истин; но, с одной стороны, квантовая физика показала, что эта «макроскопическая» интуиция действительности скрывает «микроскопические» явления совсем другой природы, причем для их изучения требуются такие разделы математики, которые, наверное, не были изобретены с целью приложений к экспериментальным наукам, а с другой стороны, аксиоматический метод показал, что «истины», из которых хотели сделать средоточие математики, являются лишь весьма частным аспектом общих концепций, которые отнюдь не ограничивают свое применение этим частным случаем. В конце концов, это интимное взаимопроникновение, гармонической необходимостью которого мы только что восхищались, представляется не более чем случайным контактом наук, связи между которыми являются гораздо более скрытыми, чем это казалось a priori.

В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм — математических структур, и оказывается (хотя по существу и неизвестно, почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм. Конечно, нельзя отрицать, что большинство этих форм имело при своем возникновении вполне определенное интуитивное содержание; но как раз сознательно лишая их этого содержания, им сумели придать всю их действенность, которая и составляет их силу, и сделали для них

---

[1] Мы не касаемся здесь возражений, вызванных применением правил формальной логики к рассуждениям в аксиоматических теориях; они связаны с логическими трудностями, на которые наталкивается теория множеств. Заметим только, что эти трудности могут быть преодолены таким образом, что не останется никакой неуверенности или сомнения относительно правильности рассуждений. По поводу этого можно обратиться к статьям Картана и Дьёдонне, которые были цитированы выше.

возможным приобрести новые интерпретации и полностью выполнить свою роль в обработке данных.

Только имея в виду этот смысл слова «форма», можно говорить о том, что аксиоматический метод является «формализмом». Единство, которое он доставляет математике, это — не каркас формальной логики, не единство, которое дает скелет, лишенный жизни. Это — питательный сок организма в полном развитии, податливый и плодотворный инструмент исследования, который сознательно используют в своей работе, начиная с Гаусса, все великие мыслители-математики, все те, кто следуя формуле Лежена—Дирихле, всегда стремились *«идеи заменить вычислениями»*.

Текст напечатан в книге: Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. Перев. с фр. И. Г. Башмаковой. Под ред. К. А. Рыбникова./М., Изд-во иностр. лит., 1963, стр. 245—259.

Б. В. ГНЕДЕНКО, академик АН УССР

МАТЕМАТИКА — НАУКА ДРЕВНЯЯ И МОЛОДАЯ

Особенности развития математического знания

Несомненно, что математика наряду с астрономией является одной из древнейших наук. В памятниках материальной культуры, дошедших до нас из глубины тысячелетий, наряду с описанием исторических событий содержатся и определенные математические сведения. Конечно, зачастую такие сведения носят отрывочный характер и воссоздать по ним полную картину об уровне и особенностях математических знаний тех времен, а также широте их распространения затруднительно. Но на помощь приходят данные языка, предметы обихода, наблюдения этнографов над народами, находившимися еще совсем недавно в первобытном состоянии. Все это, вместе взятое, позволяет составить весьма поучительную картину состояния и развития математических знаний за многовековую историю человеческого общества.

Очень важно подчеркнуть, что математические знания не оставались неизменными, а находились и находятся в непрестанном развитии. Это позволяет математике сохранять свою вечную молодость. На протяжении тысячелетий математика прошла огромный путь, о котором будет позднее сказано несколько подробнее. Слабый росток математических знаний, которым обладало человечество в глубокой древности, развился в огромное цветущее дерево, приносящее ценные плоды как человеческой культуре, так и общественной практике во всем ее разнообразии. Очень существенно, что каждой ступени развития человеческого общества соответствует определенная стадия математического развития. Для каждой исторической эпохи математика имела свое специфическое лицо, несла свои особенные идеалы. Конечно, эти представления не умирали при переходе от рабовладельческого общества к феодальному или от феодального к капиталистическому, но значимость их менялась соответственно изменениям общественных интересов.

При всем нашем уважении к культуре эпохи эллинизма нет возможности даже представить себе, что в ту пору мог возникнуть функциональный анализ или общая теория меры. Такого не могло случиться попросту потому, что в ту пору не было для этого ни условий, ни питательной среды. И именно потому в Древней Греции так и не развился математический анализ, хотя Демокрит и Архимед в сущности вплотную подошли к представлениям о пределе и бесконечно малых величинах. Более того, они фактически использовали эти представления и приемы, с ними связанные, для вывода формул объема тел и площадей плоских фигур или же простейших поверхностей. Однако данные идеи, исключительные по своей важности для прогресса всей человеческой культуры, не получили должного развития в то время по той простой причине, что для них еще не созрели общественные условия. И человечеству пришлось ждать более полутора тысяч лет, пока они фактически на той же математической почве дали бурные всходы — во времена Ньютона и Лейбница те же идеи сразу нашли многочисленные применения и подготовленную почву как в общественных запросах, так и в сознании людей.

Значимость математических знаний в наше время несравнимо возросла. Попробуйте отнять у современного человечества понятия числа, функции, функционала, вероятности — и сразу человеческая культура и практическая жизнь катастрофически обеднеют. Без числа невозможно производить взаимные расчеты, измерять, вычислять, находить оптимальные решения, проектировать. Экономика, техника, естественные науки не могли бы существовать без них. Это означает, что существо математики не сводится к тому, как заявляют вслед за Анри Пуанкаре некоторые философы-математики, чтобы быть свободным от противоречий. Чтобы математическое понятие или математическая теория выжили и вошли в жизнь общества, требуется несравненно больше, чем отсутствие противоречий. А ведь математические теории не только выжили — они превратились в орудие точного исследования в естествознании, вошли в технику, экономику, производство. Более того, математика в наши дни превратилась в производительную силу общества. Процесс математизации знаний является не данью моде, а непременным элементом современного научно-технического прогресса.

То обстоятельство, что математика в наше время стала играть столь выдающуюся роль, вызывает большой интерес к познанию особенностей математики, как целостной научной системы. Такой взгляд необходим, с одной стороны, для выработки представлений об основных тенденциях развития современной математики, с другой — представлений о прикладных возможностях математики, и с третьей — для выявления причин столь широких прикладных ее возможностей.

Конечно, разветвленность математики, приводящая к тому, что нередко математик, работающий в одной ее области, не только не знает, но зачастую и не понимает того, что делает математик другого направления, мешает выработке такого взгляда. Так, как правило, алгебраисты и топологи, увлеченные решением проблем своей области математики, далеки от вопросов теории вероятностей или теории оптимального управления, точно так же, как многие специалисты по математической статистике не интересуется проблемами математической логики. Это обстоятельство создает огромные трудности для детального анализа места и роли каждой ветви математики. Более того, данное обстоятельство является огромным сдерживающим фактором для развития нашей науки, поскольку методы и идеи, возникающие в одной части математики, как правило, имеют фундаментальное значение и для развития других ее частей. Достаточно вспомнить, какое огромное преобразующее влияние на теорию вероятностей оказали идеи теории множеств и теории меры. Точно так же на наших глазах возникли насущные задачи программирования для электронных вычислительных машин. Оказалось, что для данной цели можно привлечь методы математической логики. В то же время эти новые для математики задачи со всей остротой поставили ряд новых вопросов перед математической логикой.

Хорошо известно, что многие проблемы математики, ее результаты и понятия могут показаться странными, искусственными, оторванными от жизни, если к ним подходить с позиций окончательно сформировавшегося и формализованного изложения. Но положение резко изменяется при попытке подойти к ним с позиций исторического развития. Тогда они начинают играть всеми красками, приобретают глубокий жизненный смысл, становятся естественными и необходимыми. Вот почему так важно, говоря о настоящем и будущем математики, вспоминать об ее прошлом. Как настоящее выросло из прошлого, так и будущее разовьется из настоящего и в какой-то мере будет нести в себе влияние прошлого. Отсутствие представлений о прошлом может исказить наши представления о современной математике, ее понятиях и идеях, а также может привести к утрате перспектив ее будущего развития. Вот почему ближайший раздел этой статьи будет посвящен нами обзору основных этапов пути, проделанного математикой в своем развитии.

Экскурс в историю математики

За тысячелетия своего существования математика прошла огромный путь, на протяжении которого она изменяла свое содержание и свой характер. В процессе развития математика не отбрасывала приобретенные знания, а критически их переоценивала, оставляя то, что представляло действительную ценность, и обобщая те понятия, которые уже переставали удовлетворять требованиям, сложившимся на основе общественной практики (в том числе, конечно, и науки). Само собой разумеется, что этот непрерывный процесс обновления математики, непрерывное совершенствование ее методов и понятий, в зависимости от требований практики, является одной из причин ее прикладной мощи, приложимости ее методов к разнообразным процессам природы, техники, экономики. Мощь ее ковалась в прошлом и куется в настоящее время под влиянием запросов практики, с одной стороны, и внутренних потребностей развития математики — с другой.

Первый период развития математики можно назвать **подготовительным**. Он был особенно длительным. В тот период создавались первоначально смутные представления о понятиях «больше», «меньше», «равно», причем указанные понятия сначала были теснейшим образом связаны с конкретными предметами. Вероятно, представления о неравенстве числа предметов, неравенстве размеров и расстояний появились у людей раньше, чем представления о числе предметов. Формирование идеи счета потребовало от человечества очень большого времени. Ведь еще в прошлом веке (и даже в наше время) путешественники встречались с народами, у которых не только не были выработаны правила арифметических действий, но и не существовало понятия числа. Однако идея сравнения двух совокупностей предметов уже имелась. Интересные эпизоды счета, как сравнения двух совокупностей, у жителей Новой Гвинеи привел Миклухо-Маклай. Подобные же описания имеются у путешественников, побывавших на островах Океании, в Южной Америке, у эскимосов и т. д.

Первоначально числа один, два, три,... были связаны со счетом определенных предметов и поэтому в некоторых африканских языках сохранились разные слова для обозначения, например, трех ракушек и трех коров. Абстрактные понятия чисел один, два, три и т. д. явились результатом длительного процесса выделения абстрактных понятий первых членов ряда натуральных чисел. В целом же формирование идеи счета и даже формулирование простейших свойств суммы целых чисел в пределах единиц относится к тому периоду истории человечества, от которого не сохранилось письменных памятников. Это вполне естественно, поскольку речь, навыки примитивного мышления, элементы счета относятся к временам значительно более ранним, чем появление самой несовершенной письменности.

Интересно отметить, что счет предметов, как правило, производился с помощью «инструмента», который постоянно находился при человеке — с помощью пальцев. Именно эта причина и привела к тому, что разные народы, лишенные общения между собой, пришли в конце концов к одной и той же десятичной системе счисления. И только некоторые народы создали двадцатиричную систему (по числу пальцев на руках и ногах).

Если бы система счисления формировалась иным способом, например исходя из соображения логического или технического удобства, можно было бы утверждать, что мы имели бы иную систему счисления — двоичную, двенадцатиричную или какую-нибудь еще. И действительно, когда человечество столкнулось с необходимостью выбрать систему счисления для современных электронных вычислительных машин, то оказалось, что для технического осуществления особенно удобна двоичная система.

Известно, что Ф. Энгельс, критикуя философа Дюринга, писал: «Подобно основным формам бытия, г-н Дюринг считает также возможным вывести всю чистую математику непосредственно из головы, априорно, т. е. не прибегая к опыту, который мы получаем из внешнего мира... Но совершенно неверно, будто в чистой математике разум имеет дело только с продуктами своего собственного творчества и воображения. Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира. Десять пальцев, на которых люди учились читать, т. е. производить первую арифметическую операцию, представляет собой все, что угодно, только не продукт свободного творчества разума. Чтобы считать, надо иметь не только предметы, подлежащие счету, но обладать уже и способностью отвлекаться при рассматривании этих предметов от всех прочих их свойств кроме числа, а эта способность есть результат долгого, опирающегося на опыт исторического развития» [1].

---

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 20, стр. 36, 37.

Следующий период, примыкающий непосредственно к периоду первоначального накопления знаний,— **период элементарной математики**. Общественное развитие, хозяйственные потребности вынуждали людей совершенствовать орудия труда, правила счета, измерения расстояний, площадей и объемов. В течение длительного времени накопленные сведения были рецептурными и приобретались они эмпирическим путем. Интересно отметить, что и на этой ступени развития математические знания различных народов поразительно близки как по форме, так и по содержанию. Для примера скажем, что правила вычисления площадей простейших фигур и объемов простейших тел, которыми пользовались в Вавилоне и Древнем Египте, были тождественны аналогичным правилам Древнего Китая.

Примитивный математический аппарат счета и измерения, вызванный к жизни несложными потребностями охотника, скотовода, земледельца и воина тех далеких времен, оказался явно недостаточным, когда торговля достигла более высокого развития и суда стали совершать далекие плавания в открытом море. Потребовалось разработать новые методы навигации, совершенствовать управление государством. Древние культуры Вавилона, Египта и Китая накопили значительные сведения по математике, однако наивысшего расцвета период элементарной математики достиг в Древней Греции, где математика впервые стала разрабатываться как самостоятельная отрасль знаний. Математика из науки полуэмпирической превратилась здесь в науку дедуктивную. На смену рецептурному изложению пришла система логических доказательств, впервые были сформулированы системы аксиом, на базе которых строились величественные здания геометрии и теории чисел.

Здесь не место выяснять причины этого скачка в развитии математики, связанного с эллинской культурой. Несомненно, что основная роль в этом принадлежит социальной системе греческих городов-республик, демократической системе правления (распространявшейся, правда, только на свободных граждан), резко отличавшейся от деспотических систем правления в других государствах того времени. Необходимость обосновывать логическими доказательными рассуждениями как государственные действия, так и юридические решения, несомненно, оказала влияние и на систему построения математики как науки.

Очень существенно и другое обстоятельство. В Древней Греции дифференцировалось обучение математике,— с одной стороны, молодые люди аристократического происхождения изучали математику как логическую систему, а с другой стороны — ремесленники воспринимали математику лишь как сборник рецептов при решении стандартных вопросов их специальности. В диалогах Платона об этом говорится особенно ярко. Согласно Платону, человек, посвящающий себя управлению государством или управлению войсками, должен изучать математику не как простой ремесленник, «для бытных нужд», а для познания «сущего». Человечество впервые в своем развитии осознало важность математического познания как такового, безотносительно к задачам, которые выдвигала повседневная ремесленная практика. Собственно с этого времени берет свое начало и разделение математики на чистую и прикладную.

В XVII веке наступил новый качественный скачок в развитии математики. Требования практики — естествознания, инженерного дела, кораблевождения, артиллерии — привели к необходимости разрабатывать методы изучения движения. В математику вошла в качестве основного объекта исследования переменная величина — начался **период математики переменных величин**. Прекрасно об этом сказал Ф. Энгельс: «Поворотным пунктом в математике была Декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление,* которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем» [1].

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 20, стр. 573.

К этой мысли Ф. Энгельс обратился вновь, заявив, что «лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только *состояния*, но и *процессы:* движение» [1].

Математика неизмеримо расширила содержание и одновременно изменила лицо своих древних разделов. Появилось большое число новых ветвей математической науки — теория дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, проективная геометрия, теория вероятностей, аналитическая геометрия, дифференциальная геометрия. Одновременно невиданно расширились прикладные возможности математики. На базе математического анализа возникла аналитическая механика, давшая огромный толчок развитию астрономии. Началась математизация физики. Появилась необходимость пересмотра логического фундамента анализа бесконечно малых, в связи с чем была разработана теория пределов. Математика изменила свое лицо, ее архитектурный облик, даже по сравнению с началом XVII века, преобразился коренным образом. Это сказалось даже на такой классической области, как теория чисел, в которую стали проникать аналитические методы.

Только что указанные тенденции в математике, появившись в XVII веке, прошли через весь XVIII век и продолжились в XIX и даже в XX столетии. Но уже в первой половине XIX века возникла и новая особенность, вновь революционным образом преобразившая облик математики.

Если до XIX века в геометрии изучались лишь образы трехмерного евклидова пространства, включая и образы плоскости, то исследования Н. И. Лобачевского «воображаемой геометрии» положили начало новому направлению — изучению возможных пространственных форм. То, что Лобачевский придавал этому глубокое и в то же время конкретное представление, говорят некоторые его высказывания. Так в произведении «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» он писал: «В природе мы познаем собственно только движение, без которого чувственные впечатления невозможны. Итак, все прочие понятия, например Геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения; а потому пространство, само собой, отдельно, для нас не существует. После чего в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой Геометрии» [2]. Далее он добавляет, что «такой Геометрии (геометрии Лобачевского.— *Б. Г.*), может быть, следуют молекулярные силы...» [3].

Указанный пересмотр общепринятых концепций математики был продолжен в теории групп, когда введенное понятие группы расширило представление о количественных отношениях. Число перестало быть единственным объектом изучения алгебры. Это понятие формировалось постепенно на базе запросов классических областей математики. Позднее, уже в нашем веке, понятие группы получило многочисленные приложения в физике, кристаллографии и других областях знания.

Процесс развития математики на этом не закончился. В недрах математики переменных величин созрели предпосылки для начала нового периода — периода современной математики. Так, уже в прошлом веке в математике отказались от мысли, что геометрия ограничивается изучением только окружающего нас трехмерного пространства. Возникли многомерные геометрические системы. Этому в значительной мере помогли нужды физики, в которой было введено понятие о фазовом пространстве. Следующий шаг был осуществлен уже в нашем столетии, когда для целей математического анализа, а позднее и для физики, было разработано учение о функциональных пространствах и функциональный анализ.

---

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 20, стр. 587.

[2] Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. II. М.—Л., Гостехиздат, 1949, стр. 158—159.

[3] Там же, стр. 159.

Изменение содержания математики, расширение численности объектов ее изучения неизбежно привели и к изменению характера ее построения. Аксиоматический метод изложения стал в математике доминирующим. Пожалуй, именно это обстоятельство является наиболее важной чертой современной математики.

Об определении математики

Математика на протяжении всей своей истории, как мы видим, не стояла на месте, а в зависимости от общественных условий изменяла свое содержание и характер. Любое знание никогда не дается в готовом виде. «Наука — исторически сложившаяся и непрерывно развивающаяся на основе общественной практики система знаний о природе, обществе и мышлении, об объективных законах их развития»[1]. В это определение прекрасно укладываются многочисленные естественные науки, история, экономика и многие другие. Действительно, как бы ни изменялось содержание биологии или физики, они изучают с различных сторон вполне определенные группы явлений природы. Какое же, спрашивается, место в этом определении отводится математике? Иными словами, что представляет собой тот объект, изучению которого посвятила себя наша наука?

Несомненно, что каждое общее определение неизбежно должно отвлекаться от множества характерных черт и особенностей отдельных ветвей математики, а тем более от точек зрения и вкусов отдельных ученых. Такое определение должно отражать то общее, что свойственно содержанию данной ветви науки, ее устремлениям. Нужно сказать, что давалось уже немало определений, в которых, подчеркивая какую-нибудь одну частную сторону математики, пытались придать ей значение всеобщности. Очевидно, что такого типа определения на самом деле не могут и не должны считаться определениями. По нашему мнению, в настоящее время в литературе заслуживают внимания лишь два определения. Одно из них дано Ф. Энгельсом, а другое — Н. Бурбаки. Мы приведем каждое их них и проанализируем их смысл и содержание.

Согласно Ф. Энгельсу, «математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира»[2].

Данное определение прекрасно передает содержание математики трех первых отмеченных нами этапов ее развития и, кроме того, указывает место математики в содружестве наук. Нам остается проанализировать соответствие определения Энгельса математике последнего периода. Возражения некоторых ученых в отношении определения математики, предложенного

[1] БСЭ, изд. 2-е, т. 29, стр. 241 (статья «Наука»).
[2] К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 20, стр. 37.

Ф. Энгельсом, касаются именно этого времени. Прежде всего отмечают, что теперь математика изучает не только пространственные формы действительного мира, но и многомерные пространства, которые в действительном мире не существуют. Далее, в математике рассматриваются функциональные пространства и значительное место теперь занимает математическая логика. Изучение бесконечных множеств пронизывает всю современную математику. Можно ли данную часть математики считать количественными отношениями или пространственными формами действительного мира?

В связи со сказанным, А. Д. Александров предложил заменить слова «пространственные формы» на «пространственно-подобные формы». Само собой разумеется, что с таким же успехом можно было бы в определении Энгельса слова «количественные отношения» заменить на «количественно-подобные отношения», но, по нашему убеждению, в этом нет необходимости. Действительно, мы знаем, что ни одно понятие в науке не остается без развития, без изменения. Вспомним, что слово «число» первоначально имело смысл лишь целого положительного числа, но позднее необходимость заставила включить в понятие числа отрицательные, дробные, иррациональные числа — идея развития свойственна науке. Изучение природы во всем ее разнообразии неумолимо заставляет изменять и расширять наши представления. Так, использование в физике фазовых пространств позволяет считать пространственными формами действительного мира и объекты многомерных пространств. Точно так же объекты теории множеств могут быть рассматриваемы как с позиций пространственных форм, так и с позиций количественных отношений и их обобщений. Но в конце концов сейчас обсуждается лишь терминологический вопрос, а не вопрос по существу.

На наш взгляд, несколько сложнее обстоит дело с математической логикой, в которой изучается не только то, что указано в определении Энгельса, но и метод получения математических результатов, т. е. логика рассуждения. В этом смысле математическая логика должна относиться к логике, составлять одну из ее ветвей. В то же время изучение метода науки в какой-то мере принадлежит самой науке.

В заключительной части статьи Н. Бурбаки, приведенной в данной брошюре, говорится, что «в своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм — математических структур». Сказано не плохо, однако здесь требуется множество дополнительных разъяснений. Важно отметить то, что любая ветвь современной математики действительно изучает математические структуры, и данное определение отнюдь не находится в антагонистических отношениях с определением Ф. Энгельса, а лишь с определенных позиций его дополняет.

Определение Ф. Энгельса полнее отражает содержание математики, ее истоки и историческое развитие, а также место ее в жизни. Оно увязывает математику с познанием окружающего нас мира и выдвигает перед ней генеральную задачу — исследование не произвольно выбранных объектов изучения, а лишь тех из них, которые содействуют решению основной задачи науки — познанию закономерностей природы, общественного развития и мышления. Более того, определение Энгельса выясняет причины, в силу которых такая абстрактная наука как математика позволяет получать положительные знания о предметах реального мира. В связи со сказанным уместно привести следующую небольшую цитату: «...как и во всех других областях мышления, законы, абстрагированные из реального мира, на известной ступени развития отрываются от реального мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, с которыми мир должен сообразовываться. Так было с обществом и государством, так, а не иначе, *чистая* математика *применяется* впоследствии к миру, хотя она заимствована из этого самого мира и только выражает часть присущих ему форм связей, — и как раз *только поэтому* и может вообще применяться» [1].

Столь ясной и определенной точке зрения в статье «Архитектура математики» Н. Бурбаки противопоставляется несколько пессимистическая позиция: «То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь, — это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого (если только этим словам можно приписать какой-нибудь смысл) и, быть может, мы их никогда и не узнаем».

Вполне возможно, что наш житейский язык не смог передать тех глубоких оттенков мысли, которую хотели выразить авторы этого утверждения. Но если не мудрствовать лукаво, то соответствие математических результатов фактам и закономерностям окружающего нас мира должно казаться совершенно естественным, поскольку сам математический аппарат создавался и создается для изучения этого мира. И если существующий математический аппарат плохо передает природу вещей, то, следовательно, нужно создать другие математические инструменты, которые могли бы лучше передать сложность изучаемых явлений. В том, что математика не остается на месте, а непрерывно совершенствует свои методы, вводит новые понятия и правила действий с ними на основе учета тех трудностей, с которыми человечество сталкивалось ранее при

---

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 20, стр. 38.

решении возникавших вопросов, в этом и заключается один из основных источников мощи математики.

Совсем недавно в полный рост перед человечеством встали вопросы оптимального управления процессами (технологическими, информационными и иными). Появилась необходимость использования математических методов в решении возникших здесь задач. Таких методов еще не существовало, а те, что были, обладали рядом недостатков. Возникла неотложная потребность создания такой математической теории, которая, возможно, точнее соответствовала бы природе вещей. Элементы такой теории теперь уже созданы трудами Л. С. Понтрягина, его учеников и последователей. Математика получила новое орудие и тем самым увеличила свою познавательную мощь. Но перед человечеством вновь возникают и будут еще возникать многочисленные вопросы, для которых созданных средств исследования, в том числе и теории оптимального управления, будет недостаточно и человечество вновь станет напряженно искать математические средства, которые позволили бы продвинуться в решении новых задач.

О происхождении нового в математике

Наука, в отличие от рецептурных знаний, непрерывно развивается, выдвигая новые проблемы, концепции, идеи, создавая новые области исследования. Без постоянной смены идей, ломки понятий, без непрерывного стремления к новому наука прекратила бы свое существование как наука, перестала бы служить целям познания, потеряла бы для общества свою ни с чем не сравнимую ценность. Об этом хорошо сказал Давид Гильберт в своем знаменитом докладе на втором Международном Конгрессе математиков: «...развитие науки протекает непрерывно. Мы знаем, что каждый век имеет свои проблемы, которые последующая эпоха или решает, или отодвигает в сторону как бесплодные, чтобы заменить их новыми... Всякая научная область жизнеспособна, пока в ней избыток новых проблем. Недостаток новых проблем означает отмирание или прекращение самостоятельного развития... Сила исследователя познается в решении проблем: он находит новые методы, новые точки зрения, он открывает более широкие и свободные горизонты» [1].

Откуда же берутся новые проблемы математики? Что является источником новых проблем и идей в математике? Каковы те причины, которые приводят к появлению новых математических идей и задач, приобретающих всеобщий интерес?

---

[1] Проблемы Гильберта. М., «Наука», 1969, стр. 13.

Математика как в прошлом, на протяжении всей своей истории, получала основные импульсы развития от практики, так и теперь практика является основным источником новых ее проблем. Невозможно здесь не привести слова П. Л. Чебышева, которые можно без преувеличения назвать гимном практике. «Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы существенно новые для науки и, таким образом, вызывает на изыскание совершенно новый метод. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае науки находят себе верного руководителя в практике» [1].

Сам П. Л. Чебышев был ярким выразителем такого направления в математике, и недаром, воздавая должное учителю, его ученик А. М. Ляпунов писал в некрологе, что «детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание этим путем более или менее общей теории — таково направление большинства работ П. Л. Чебышева и ученых, усвоивших его взгляды» [2].

В творчестве П. Л. Чебышева задачи практики служили источником математического вдохновения, и ряд его превосходных исследований — по теории вероятностей, теории интерполирования, теории наилучшего приближения функций и ряд других — имели своим источником совершенно определенные насущные задачи — практики артиллерийских расчетов, построения механизмов с заданными свойствами, оценки ошибок измерений и т. д. Пожалуй, наиболее ярко сказалась эта тенденция в постановке задач теории наилучшего приближения функций, в частности задачи разыскания полинома, наименее отклоняющегося от нуля. Исходным вопросом, приведшим Чебышева к постановке данной задачи, открывшей целую новую математическую теорию, было стремление его построить механизм, для которого при превращении вращатель-

---

[1] П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч., т. V. М.—Л., Изд.-во АН СССР, 1951, стр. 150.

[2] П. Л. Чебышев. Избранные математические труды. М. — Л., Гостехиздат, 1946, стр. 20.

ного движения в поступательное уклонение от прямолинейного движения на всем отрезке было бы минимальным.

Без всякого труда можно привести ряд других примеров, возникших уже в наше время, когда истоком создания новых математических теорий послужили вопросы практики — научной, экономической или производственной. Достаточно вспомнить теорию линейного и нелинейного программирования, теорию информации, теорию случайных процессов, теорию массового обслуживания, теорию автоматов, теорию оптимального управления, теорию обобщенных функций, чтобы высказанная мысль обрела конкретное содержание. И если теория информации и теория массового обслуживания возникли в недрах теории связи, то теория случайных процесов и теория обобщенных функций имели своим источником запросы физики. Каждая из только что названных областей исследования оказала решающее влияние не только на какую-то одну определенную узкую область науки, но серьезно заставила пересмотреть взгляды на ряд математических дисциплин и на многочисленные прикладные вопросы.

Другим источником математических проблем следует считать создание математических теорий, когда решается не только данная конкретная задача, но и все мыслимые постановки задач данного направления. Поясним данную мысль на примере. Со времен Муавра в теории вероятностей было известно, что суммы большого числа независимых случайных величин подчинены при некоторых специальных условиях почти нормальному закону распределения. Для конкретной задачи практики такого знания, быть может, и достаточно, но математика как наука не может удовлетвориться им. Она ставит перед собой вопрос о тех естественных условиях, при которых имеет место такой факт. Усилиями П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова, А. А. Маркова решение данного вопроса было продвинуто весьма далеко. Однако математическая задача все еще не была решена — необходимые и достаточные условия удалось найти только во второй четверти нашего столетия в результате усилий С. Н. Бернштейна, А. Я. Хинчина, В. Феллера и П. Леви.

Но решение указанной задачи было только частью того, что нужно для теории. И здесь возникли новые вопросы: ограничивается ли класс распределений, к которым могут быть близки суммы большого числа независимых случайных величин, нормальным распределением? Как охарактеризовать класс таких распределений? Как быстро сближаются распределения сумм с аппроксимирующим распределением по мере увеличения числа слагаемых? Насколько существенно предположение независимости слагаемых?

Построение теории предполагает не только решение отдельных задач, но и создание методов исследования, а также системы изложения, позволяющей с единых позиций излагать большую группу казалось бы различных вопросов. Для нашего времени таким объединяющим изложением, такой общей идеей, соединившей огромное число первоначально разрозненных факторов и теорий, явился функциональный анализ.

Математика должна знать свойства своих понятий. Изучение данных свойств должно производить независимо от существующих запросов практики, так как только в этом случае математика будет орудием, готовым к действию, обладающим большим числом методов исследования. Характерным примером могут быть задачи аддитивной и мультипликативной теории чисел. Для практики пока несущественно, что каждое целое число можно представить в виде суммы не более чем четырех квадратов, но это общее свойство всех целых чисел, свойство основного понятия не только математики, но всей человеческой культуры. Доказательство гипотезы Гольдбаха, что каждое целое положительное число представимо в виде суммы не более, чем трех простых чисел, едва ли в ближайшее время даст ощутимый практический эффект, но для познания свойств целого положительного числа, для создания мощных математических методов исследования оно даст очень много.

Третий источник появления новых идей связан с обоснованием математики, т. е. с критическим пересмотром ее исходных положений, основных ее понятий и доказательств. Такой критический подход к математике впервые был предпринят еще в Древней Греции и привел к созданию строгой логической системы — геометрии Евклида. В конце XVIII — начале XIX века, когда математический анализ накопил огромное число новых фактов, потребовалось пересмотреть основные понятия математического анализа и в первую очередь смутное в то время понятие предельного перехода. Данные вопросы на протяжении всего XIX столетия занимали видное место в работах крупнейших математиков — О. Коши, Г. Кантора, К. Вейерштрасса и др. Результаты этой напряженной работы вошли теперь во все учебники математического анализа.

Созданная в древности логическая система геометрии вызвала со временем обоснованную критику и в конце XIX века в ответ на нее появились многочисленные исследования, завершенные известной работой Д. Гильберта. Данные исследования послужили основой для построения современных аксиоматических систем изложения ряда дисциплин. В частности, была завершена работа, начатая С. Н. Бернштейном и Р. Мизесом по аксиоматическому построению основ теории вероятностей. А. Н. Колмогорову удалось построить аксиоматику на основе теоретико-множественных концепций и общем понятии меры множества и, в сущности, завершить эти исследования, на важность которых в уже упоминавшемся своем знаменитом докладе обратил внимание Д. Гильберт.

В течение первой четверти XX века фактически вся математика была перестроена на базе теоретико-множественных концепций, оказавшихся исключительно плодотворными. В частности, такой подход позволил установить логическое единство практически всей математики.

Аксиоматическое построение математических теорий в наше время стало выходить за пределы собственно математики, поскольку современная практика все с большей настойчивостью стала требовать отчетливости мышления и строгого перечисления тех посылок, на основе которых производятся заключения. Особенное значение в смысле практического приложения имеют вопросы автоматического управления технологическими, информационными и иными процессами.

Пожалуй, в наше время появилась еще одна особенность математики — широкое использование неконструктивных рассуждений, чистых доказательств существования. Характерные примеры подобных рассуждений — доказательства, предложенные Г. Кантором для установления существования бесконечного множества трансцендентных чисел, счетности множества всех алгебраических чисел и т. д. Одна из особенностей современной математики тесно связана с систематическим использованием понятия бесконечных множеств. Со времен Древней Греции эта особенность, по-видимому, оказалась одним из центральных методологических изменений характера математики.

Очень большую роль заняли в современной математике исследования по теории доказательств, по их формализации. Здесь удалось обнаружить ряд фундаментальных результатов, среди которых следует отметить доказательство Курта Гёделя о невозможности полной аксиоматизации математических теорий. Благодаря данному открытию начала выясняться фундаментальная роль содержательных предложений в любой формализованной математической теории. Это обстоятельство нам представляется исключительно важным и с точки зрения поддержания постоянных тесных связей математики с практикой во всем их многообразии.

Попытки ряда математиков отделить математику от задач практики и заставить ее развиваться изолированно от всей остальной деятельности не могут привести ни к чему хорошему и сулят лишь катастрофическое обеднение самой математики. Сейчас мы наблюдаем интереснейшие и глубокие сдвиги внутри математики, связанные с появлением электронных вычислительных машин и все ускоряющимся процессом математизации знаний — естественном элементе переживаемого нами научно-технического прогресса.

9 коп.

Индекс 70096

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»
МОСКВА 1972