1

И. А. Виноградова
С. Н. Олехник
В. А. Садовничий

Математический анализ в задачах и упражнениях

Дифференциальное и интегральное исчисление

И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий

Математический анализ в задачах и упражнениях

Том 1

Дифференциальное и интегральное исчисление

Электронное издание

Москва
Издательство Московского университета
Издательство МЦНМО
2017

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я73
В49

Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.
Математический анализ в задачах и упражнениях.
Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисление.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2017.
412 с.
ISBN 978-5-4439-1120-5

Сборник задач соответствует программе курса математического анализа для студентов механико-математических и математических факультетов университетов, педагогических и технических вузов. Он может использоваться на семинарских занятиях по математическому анализу и для самостоятельной работы студентов. Пособие содержит широкий круг упражнений по основным темам курса, представлена большая подборка теоретических задач. Изложение каждой темы предваряется определениями и формулировками основных теорем, а также примерами решения задач от типовых упражнений до заданий повышенного уровня сложности.

В томе 1 рассматриваются дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, а также дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

В книге обобщён и методически переработан опыт преподавания математического анализа на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова за последние десятилетия.

Для студентов и преподавателей университетов, педагогических и технических вузов, а также лиц, изучающих математический анализ самостоятельно.

Подготовлено на основе книги:
Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.
Математический анализ в задачах и упражнениях: В 3-х т. Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. — Новое изд. — М.: Изд-во Московского университета; МЦНМО, 2017. — 412 с. — ISBN 978-5-4439-1120-5

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-1120-5

Предисловие

Отечественную школу преподавания математики всегда отличало сочетание чёткости рассуждений с глубиной содержания и в то же время с простотой, доступностью, конкретностью изложения материала, которые предпочитаются формальным конструкциям. Математическое образование и математическая культура составляют стержень научного знания, и значение математики как основы фундаментальных исследований постоянно возрастает. Для решения этих задач требуются учебники, отражающие современное состояние и мировоззренческие принципы данной области науки.

Издавая новые книги по математике, особенно для использования в учебном процессе, важно помнить слова Н. И. Лобачевского из предисловия к его «Алгебре»: «Новая книга начал математики не должна напрасно умножать число существующих, потому что их и без того уже много». Эти слова навеяны известным изречением Екклесиаста и несут в себе мудрость, данную от века.

Предлагаемое вниманию читателей учебное пособие «Задачи и упражнения по математическому анализу» является руководством для проведения семинарских занятий по основному курсу математического анализа для вузов, оно также удобно для самостоятельной работы студентов. В книге обобщён и методически переработан опыт преподавания предмета на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова за последние десятилетия.

Пособие содержит широкий круг упражнений по основным темам курса, представлена большая подборка теоретических задач. Изложение каждой темы предваряется полной системой определений и формулировок основных теорем, а также примерами решения задач от типовых упражнений до заданий повышенного уровня сложности. Все упражнения снабжены ответами, к наиболее трудным упражнениям и теоретическим задачам приводятся указания.

Настоящее пособие выходит в трёх томах:

том 1 «Дифференциальное и интегральное исчисление»,

том 2 «Ряды и несобственные интегралы»,

том 3 «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы».

Новое издание представляет собой переработку и дополнение книг «Задачи и упражнения по математическому анализу» и «Математический анализ в задачах и упражнениях», выходивших с 1988 г. по 2003 г. Целью этой переработки явилось, во-первых, большее соответствие изменившимся за прошедшее время курсам математического анализа на механико-математическом факультете МГУ и, во-вторых, внесение поправок и уточнений, необходимость которых выяснилась в ходе работы с указанными пособиями.

При подготовке нового издания главное внимание уделено методической части и теоретическим задачам. Основной упор ставится на пояснение постановки определённого класса задач, прояснение связи с соответствующим разделом теоретического курса, описание общих методов решений. Теоретические задачи выделены в отдельные параграфы, но их разбор следует проводить параллельно с решением практических задач соответствующей главы в целях формирования целостной картины предмета изучения.

Переработка книги вызвала изменения как в разбивке на главы, так и в нумерации задач по сравнению с предыдущими изданиями. Более того, поскольку объём представленных задач велик, а диапазон уровня их сложности широк, проведена некоторая классификация. Символом $^\circ$ отмечены задачи «нулевого» уровня, обычно сводящиеся к непосредственному применению готовой формулы или решаемые практически в уме; зачастую такие задачи являются вводными при рассмотрении новой темы. Символом ✓ отмечены типичные для данной темы задачи, умение решать которые является необходимым минимумом. Звёздочкой отмечены задачи повышенной сложности, решение которых уже показывает достаточную свободу владения изучаемым материалом.

Вся большая и сложная работа по переработке пособия была проведена группой сотрудников кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ, в которую вошли Ю. В. Андрианова, А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин, А. И. Камзолов, Д. В. Копьёв, О. Н. Косухин, А. К. Кравцева, Т. П. Лукашенко, С. М. Лыткин, Е. В. Мартынова, Ю. В. Межевова, А. В. Мелешкина, С. С. Пухов, Т. В. Родионов, Т. В. Салова, А. П. Солодов, А. А. Флёров, В. В. Фуфаев, Д. В. Фуфаев, А. И. Штерн. Авторы благодарят всех коллег, затративших силы и время на кропотливый и ответственный труд по подготовке настоящего издания.

Академик
Российской Академии наук
В. А. Садовничий

Глава 1

Построение эскизов графиков функций

§1.1. Элементарные преобразования графиков

Основными элементарными функциями считаются: *степенная функция* $y = x^a$, *показательная функция* $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, *логарифмическая функция* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, *тригонометрические функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, *обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. Иногда к основным тригонометрическим функциям причисляют также функции $y = \sec x$ (*секанс*), $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, и $y = \operatorname{cosec} x$ (*косеканс*), $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$.

Элементарной называется функция, полученная из основных элементарных функций конечным числом их композиций и арифметических операций.

Рассмотрим построение эскизов графиков функций путём качественного анализа с наименьшим числом вычислений. Мы выделим некоторые классы элементарных функций и установим их главные свойства, опираясь на известные свойства основных элементарных функций и правила преобразования графика при определённых операциях с функцией. Техника дифференцирования практически применяться не будет; она либо излишняя (нет необходимости пользоваться производной для определения положения вершины параболы или максимумов синусоиды), либо слишком громоздка, например при анализе рациональных дробей. Но некоторые утверждения, которые строго доказываются с помощью дифференциального исчисления, будут сформулированы, и соответствующие свойства функций и их графиков будут использоваться. Более конкретно о том, что именно должен иллюстрировать в поведении функции эскиз её графика, будет сказано в соответствующих замечаниях и при разборе примеров.

Допустим, что построен график функции $y = f(x)$. В следующей таблице описано, как изменяется этот график при определённом преобразовании функции $f(x)$ или её аргумента.

Построение графика функции $y = Cf(ax + b) + D$ $(a \neq 0)$ в общем случае сводится к ряду преобразований (сдвиг, сжатие, отражение и т. д.) графика функции $f(x)$.

Представим y в виде $y = Cf\left(a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right) + D$. Из такого представления y видно, что для построения графика этой функции достаточно построить график функции $y_1 = Cf\left(a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right)$.

Для построения графика функции y_1 достаточно построить график функции $y_2 = f\left(a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right)$. В свою очередь для построения графика функции y_2

Функция	**Преобразование, которое следует провести с графиком $y=f(x)$ на плоскости xOy**
$f(x)+a,\ a\neq 0$	Сдвиг графика функции $y=f(x)$ вверх по оси Oy на a единиц, если $a>0$, и сдвиг вниз на $\lvert a\rvert$ единиц, если $a<0$
$f(x-a),\ a\neq 0$	Сдвиг вправо по оси Ox на a единиц, если $a>0$, сдвиг влево на $\lvert a\rvert$ единиц, если $a<0$
$kf(x),\ k>0,\ k\neq 1$	Растяжение вдоль оси Oy относительно оси Ox в k раз, если $k>1$, сжатие вдоль оси Oy в $1/k$ раз, если $0<k<1$
$f(kx),\ k>0,\ k\neq 1$	Сжатие вдоль оси Ox относительно оси Oy в k раз, если $k>1$, и растяжение в $1/k$ раз, если $0<k<1$
$-f(x)$	Симметричное отражение графика относительно оси Ox
$\lvert f(x)\rvert$	Замена части графика, лежащей в области $y<0$ (ниже оси Ox), на симметрично отражённую относительно оси Ox часть графика, расположенную в области $y>0$ (выше оси Ox); часть графика, лежащая в полуплоскости $y\geqslant 0$, остаётся без изменения
$f(-x)$	Симметричное отражение графика относительно оси Oy
$f(\lvert x\rvert)$	Замена части графика, лежащей в области $x<0$ (слева от оси Oy), на симметрично отражённую относительно оси Oy часть графика, расположенную в области $x>0$ (справа от оси Oy); часть графика, лежащая в полуплоскости $x\geqslant 0$, остаётся без изменения

достаточно построить график функции $y_3=f(ax)$. Итак, для построения графика функции $y=Cf\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)+D$ необходимо с графиком функции $f(x)$ произвести следующие преобразования.

1. Сжать или растянуть график функции $f(x)$ вдоль оси Ox относительно оси Oy, если $a>0$; симметрично отразить относительно оси Oy и сжать или растянуть вдоль оси Ox относительно оси Oy, если $a<0$.

2. Сдвинуть по оси Ox полученный график функции $f(ax)$ на $\left|\frac{b}{a}\right|$ единиц: влево, если $\frac{b}{a}>0$, и вправо, если $\frac{b}{a}<0$.

3. Сжать или растянуть полученный график функции $f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)$ вдоль оси Oy относительно оси Ox, если $C>0$; симметрично отразить относительно оси Ox и сжать или растянуть вдоль оси Oy относительно оси Ox, если $C<0$.

4. Если $D\neq 0$, то сдвинуть полученный график функции $Cf\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)$ на D единиц вверх, если $D>0$, и вниз на $\lvert D\rvert$, если $D<0$.

Последовательность этих преобразований при построении графика функции $y=Cf(ax+b)+D$ можно представить символически в виде цепочки

$$f(x)\to f(ax)\to f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)\equiv f(ax+b)\to Cf(ax+b)\to Cf(ax+b)+D.$$

На практике удобнее построение графика функции $y=Cf(ax+b)+D$ начинать с написания цепочки

$$Cf(ax+b)+D\leftarrow Cf(ax+b)\leftarrow f(ax+b)\equiv f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)\leftarrow f(ax)\leftarrow f(x).$$

Отсюда видно, график какой функции в этой цепочке является базовым для построения графика последующей функции.

График квадратичной функции: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

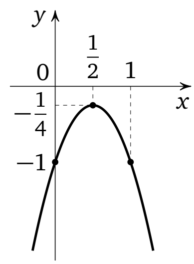
После тождественного преобразования: $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$ видно, что график квадратичной функции представляет собой параболу — график функции $y_1 = ax^2$, — сдвинутую по оси Ox на $\left|\dfrac{b}{2a}\right|$ вправо или влево в зависимости от знака $\dfrac{b}{2a}$ и по оси Oy на $\left|c - \dfrac{b^2}{4a}\right|$ вверх или вниз в зависимости от знака этой разности. Характерной для параболы точкой является её *вершина* — точка с координатами $\left(-\dfrac{b}{2a}, c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$. Парабола симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через вершину, — прямой $x = -\dfrac{b}{2a}$, ветви параболы направлены вверх или вниз в зависимости от знака a (вверх при $a > 0$, вниз при $a < 0$). Для окончательного выяснения расположения данной параболы на координатной плоскости находим ещё одну точку этой параболы, проще всего точку пересечения с осью Oy, т. е. точку $(0, c)$, если она не совпадает с вершиной ($b \neq 0$).

Пример 1.1. Построим график функции $y = 3x - 3x^2 - 1$.

Решение. Равенство

$$y = -3(x^2 - x) - 1 = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} - 1 = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

показывает, что вершина искомой параболы находится в точке $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$, а ось Oy парабола пересекает в точке $(0, -1)$. Ветви параболы направлены вниз, как и должно быть, если коэффициент при x^2 отрицателен. □



$y = 3x - 3x^2 - 1$

График дробно-линейной функции: $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, $c \neq 0$, $ad \neq bc$.

Если $ad = bc$, то числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель $\left(x + \dfrac{d}{c}\right)$, поэтому функция y всюду, кроме $x = -\dfrac{d}{c}$, есть постоянная $\dfrac{a}{c}$ и её график имеет вид, изображённый на рис. 1. Обратите внимание на отличие этого графика от графика функции $y = \dfrac{a}{c}$!

Если $ad \neq bc$ (т. е. рассматриваемая дробь несократима), то после тождественного преобразования

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{\dfrac{bc - ad}{c^2}}{x + \dfrac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{k}{x + \dfrac{d}{c}}, \quad k \neq 0,$$

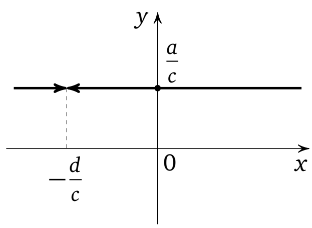
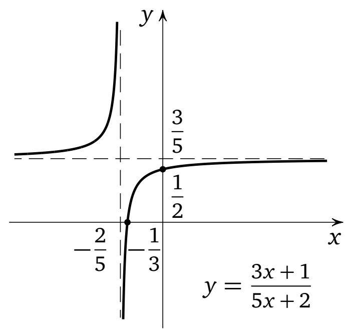


Рис. 1

видно, что график дробно-линейной функции представляет собой кривую обратной пропорциональности $y = \dfrac{k}{x}$ (гиперболу), сдвинутую по оси Ox на $\left|\dfrac{d}{c}\right|$ вправо или влево в зависимости от знака $\dfrac{d}{c}$ и по оси Oy на $\left|\dfrac{a}{c}\right|$ вверх или вниз в зависимости от знака $\dfrac{a}{c}$. Таким образом, для построения графика дробно-линейной функции достаточно знать её асимптоты и расположение относительно них одной из ветвей гиперболы, так как вторая ветвь симметрична первой относительно точки пересечения асимптот. Асимптотами являются прямые $x=-\frac{d}{c}$ и $y=\frac{a}{c}$, а положение одной определяется точкой пересечения гиперболы с осью Ox или Oy.

Пример 1.2. Построим график функции $y=\frac{3x+1}{5x+2}$.

Решение. Асимптоты гиперболы — прямые $x=-\frac{2}{5}$, $y=\frac{3}{5}$; точка её пересечения с осью Oy есть $(0, y(0))=\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Следовательно, одна из ветвей рассматриваемой гиперболы лежит в четвёртой четверти относительно асимптот, вторая, симметричная с первой, — во второй. □



Пример 1.3. Построим график функции $y=\log_3(1-2x)$.

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\log_3(1-2x) \equiv \log_3\left(-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) \xleftarrow[\text{на } 1/2 \text{ вправо}]{\text{сдвиг}} \log_3(-2x) \leftarrow \log_3(2x) \leftarrow \log_3 x.$$

Итак, построение графика функции $y=\log_3(1-2x)$ начинаем с построения графика $y_1=\log_3 x$, затем сжатия этого графика вдоль оси Ox относительно оси Oy в два раза, затем симметричного отражения относительно оси Oy и, наконец, сдвига полученного графика на $1/2$ вправо вдоль оси Ox (см. рис. 2). □

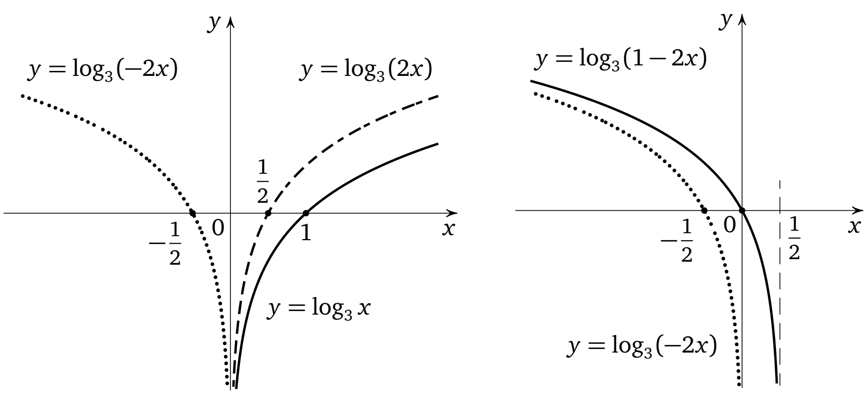


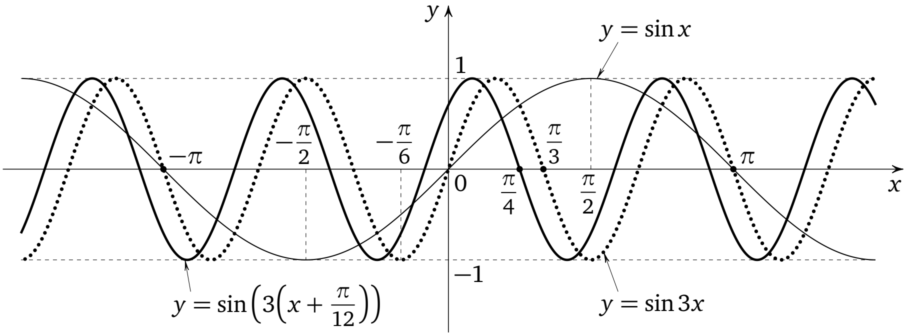
Рис. 2

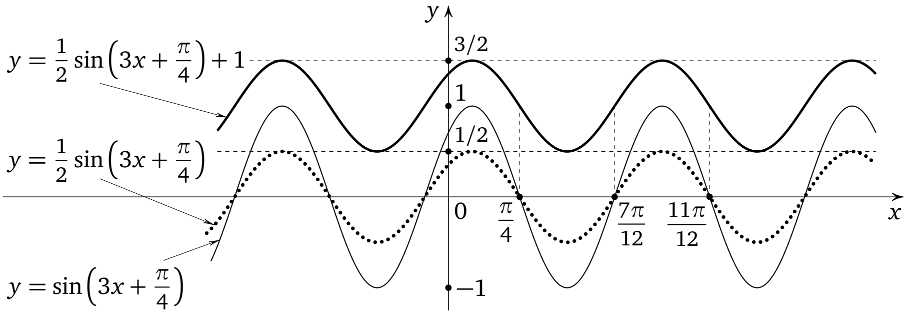
Подчеркнём ещё раз: величина сдвига вдоль оси Ox определяется той константой, которая прибавляется непосредственно к аргументу x, а не к аргументу ax. Поэтому для нахождения этой константы выражение $ax+b$ сначала преобразуется к виду $a\left(x+\frac{b}{a}\right)$.

В связи с этим рекомендуется операцию сдвига вдоль оси Ox проводить после операций сжатия или растяжения вдоль оси Ox относительно оси Oy.

Пример 1.4. Построим график функции $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

Решение. Напишем цепочку преобразований: $\frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1\leftarrow$
$\leftarrow\ \frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\ \leftarrow\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\equiv\sin\left(3\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right)\leftarrow\sin 3x\ \leftarrow\ \sin x$.

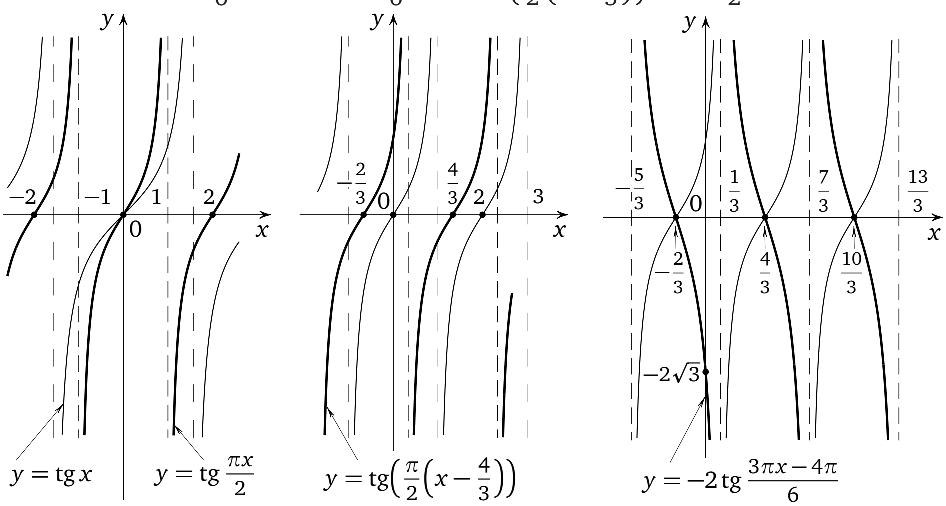




Этапы построения графика см. выше. □

Пример 1.5. Построим график функции $y=-2\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x-4\pi}{6}$.
Решение. Напишем цепочку преобразований

$$-2\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x-4\pi}{6}\leftarrow\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x-4\pi}{6}\equiv\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{4}{3}\right)\right)\leftarrow\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}\leftarrow\mathrm{tg}\,x.$$



Этапы построения графика см. выше. □

Обратите внимание, что графики функций $y=\sin x$ и $y=\operatorname{tg} x$ касаются прямой $y=x$ в нуле, т. е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$

(см. с. 117), причём $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ при $0<x<\pi/2$ (докажите!).

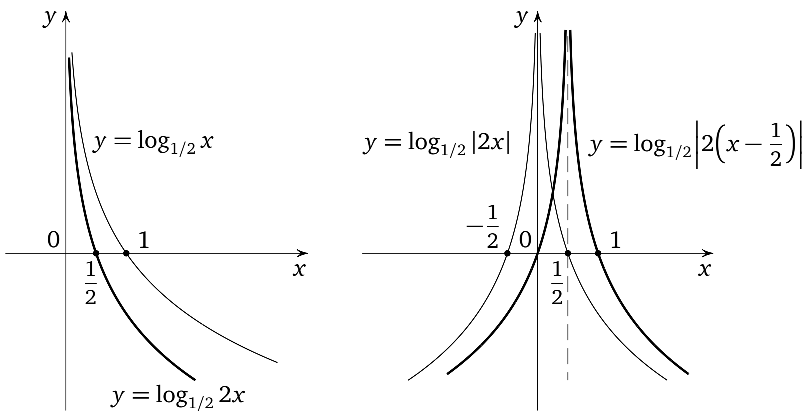
Пример 1.6. Построим график функции $y=\log_{1/2}\bigl|1-2||x|-1|\bigr|$.

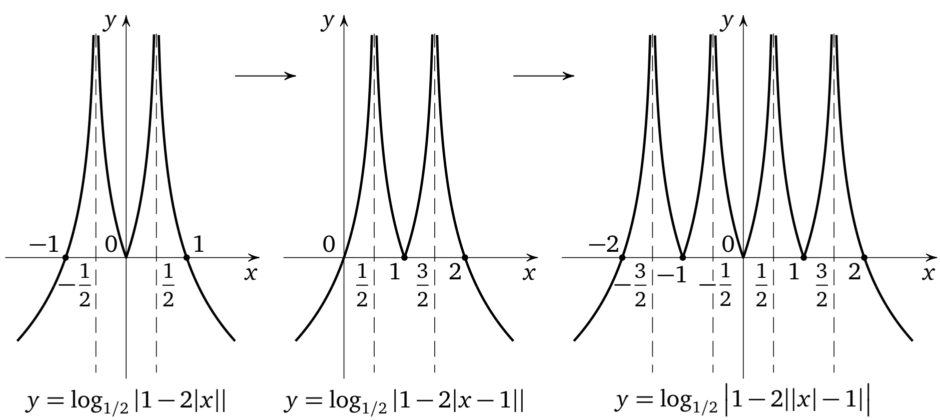
Решение. Напишем цепочку преобразований

$$\log_{1/2}\bigl|1-2||x|-1|\bigr| \xleftarrow{x>0} \log_{1/2}|1-2|x-1|| \xleftarrow[\text{на 1 вправо}]{\text{сдвиг}}$$

$$\leftarrow \log_{1/2}|1-2|x|| \xleftarrow{x>0} \log_{1/2}|1-2x| \equiv \log_{1/2}|2x-1| \equiv$$

$$\equiv \log_{1/2}\left|2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right| \xleftarrow[\text{на 1/2 вправо}]{\text{сдвиг}} \log_{1/2}|2x| \xleftarrow{x>0} \log_{1/2}2x \xleftarrow[\text{в 2 раза}]{\text{сжатие}} \log_{1/2}x.$$



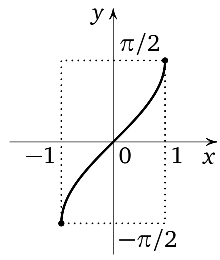


Этапы построения графика см. выше. □

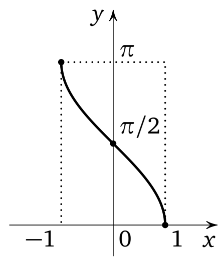
Аналогичным методом строятся графики функций с применением и других преобразований.

§ 1.2. Обратные тригонометрические функции и их графики

Функция $y = \sin x$, рассматриваемая на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, не является монотонной. Чтобы говорить об обратной функции, выделим участок монотонности функции $y = \sin x$, на котором она принимает все значения из $[-1; 1]$, например отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функцию, обратную к функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, обозначим через $y = \arcsin x$, т. е. запись $y = \arcsin x$ означает, что $x = \sin y$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если рассмотрим функцию $y = \sin z$ на другом участке, например $\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то существует обратная функция, которая выражается через $y = \arcsin z$ следующим образом: $y = \pi - \arcsin z$ (почему?).



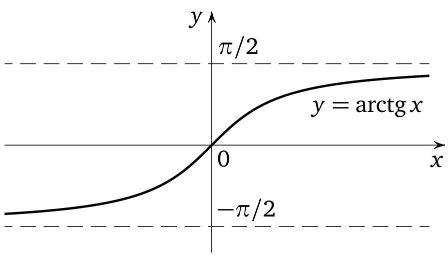
$y = \arcsin x$

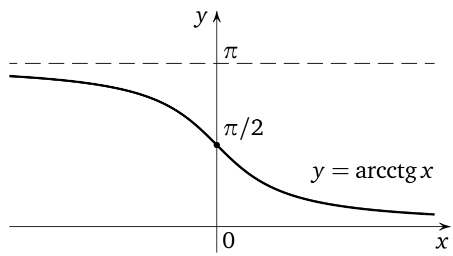


$y = \arccos x$

Аналогично задают обратную функцию $y = \arccos x$: запись $y = \arccos x$ означает, что $x = \cos y$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Для функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ определяется обратная функция $y = \operatorname{arctg} x$, т. е. запись $y = \operatorname{arctg} x$ означает, что $x = \operatorname{tg} y$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Для функции $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ определяется обратная функция $y = \operatorname{arcctg} x$, т. е. запись $y = \operatorname{arcctg} x$ означает, что $x = \operatorname{ctg} y$ и $0 < y < \pi$.

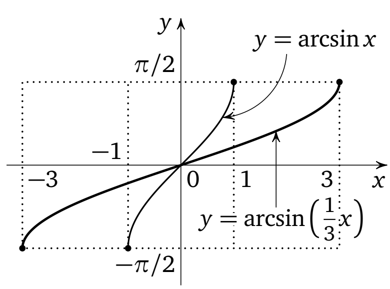


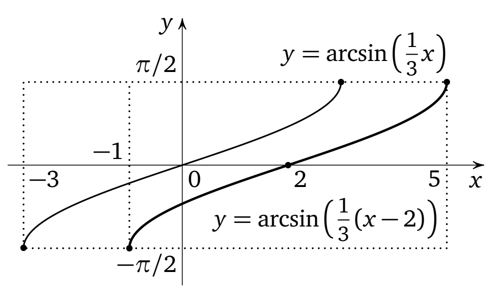


Пример 1.7. Построим график функции $y = \arcsin \frac{x-2}{3}$.

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\arcsin \frac{x-2}{3} \equiv \arcsin\left(\frac{1}{3}(x-2)\right) \xleftarrow[\text{на 2 вправо}]{\text{сдвиг}} \arcsin\left(\frac{1}{3}x\right) \leftarrow \arcsin x.$$





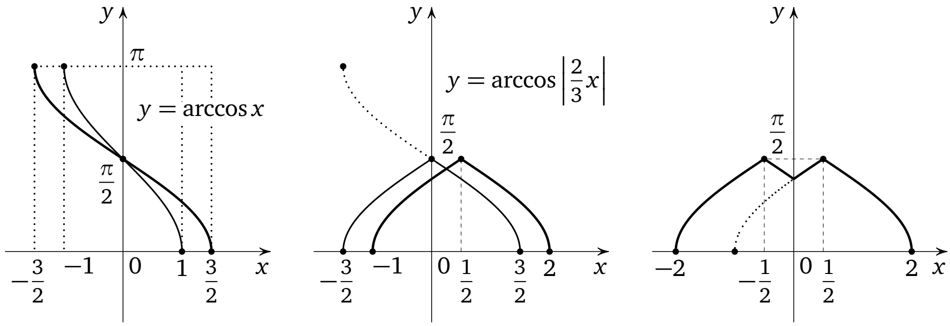
Этапы построения графика см. выше. □

Пример 1.8. Построим график функции $y = \arccos \dfrac{|1-2|x||}{3}$.

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\arccos \frac{|1-2|x||}{3} \xleftarrow{x>0} \arccos \frac{|1-2x|}{3} \equiv \arccos\left|\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right| \xleftarrow[\text{на } 1/2 \text{ вправо}]{\text{сдвиг}}$$

$$\leftarrow \arccos\left|\frac{2}{3}x\right| \xleftarrow{x>0} \arccos\left(\frac{2}{3}x\right) \leftarrow \arccos x.$$



$y = \arccos\left(\frac{2}{3}x\right)$ $\qquad$ $y = \arccos\left|\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|$ $\qquad$ $y = \arccos \frac{|1-2|x||}{3}$

Этапы построения графика см. выше. □

Справедливы следующие формулы:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad |x| \leqslant \frac{\pi}{2}; \qquad \sin(\arcsin x) = x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \quad \cos(\arccos x) = x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}; \qquad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad |x| < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}; \qquad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad 0 < x < \pi;$$

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 0 < x < 1;$$

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad x > 0;$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y}, \quad x > 0,\ y > 0;$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}, \quad x > 0,\ y > 0;$$

$$\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{xy-1}{x+y}, \quad x > 0,\ y > 0.$$

Докажем некоторые из этих формул.

1. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $|x| \leqslant 1$.

Пусть $\arccos(-x) = \alpha$, тогда $\cos\alpha = -x$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Из соотношения $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ получаем $0 \leqslant \pi - \alpha \leqslant \pi$, а из равенства $\cos\alpha = -x$ следует, что $\cos(\pi - \alpha) = x$. Поэтому $\pi - \alpha = \arccos x$, откуда $\alpha = \pi - \arccos x$, т. е. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

2. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \leqslant 1$.

Пусть $\arcsin x = \alpha$, $\arccos x = \beta$, тогда $x = \sin\alpha = \cos\beta$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$. Имеем $\sin\alpha = \cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha, \frac{\pi}{2} - \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Поэтому $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, откуда получаем, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

3. $\arcsin x = \arccos\sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1$. Обозначим $\arcsin x = \alpha$, тогда $x = \sin\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Значит, $\cos\alpha = +\sqrt{1 - x^2}$, откуда $\alpha = \arccos\sqrt{1 - x^2}$, т. е. $\arcsin x = \arccos\sqrt{1 - x^2}$, что и требовалось доказать.

4. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{1 - xy}{x + y}$, $x > 0$, $y > 0$.

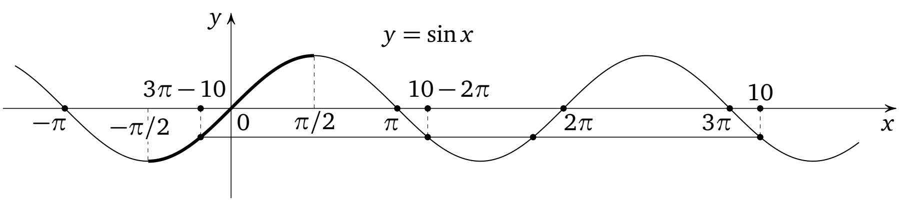
Обозначим $\operatorname{arctg} x = \alpha$, $\operatorname{arctg} y = \beta$, $x > 0$, $y > 0$. Тогда $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha + \beta < \pi$. Поэтому

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{1 - xy}{x + y}, \quad \alpha + \beta = \operatorname{arcctg}\frac{1 - xy}{x + y}, \quad \text{т. е.}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{1 - xy}{x + y}.$$

Пример 1.9. Вычислим $\arcsin(\sin 10)$.

Решение. Имеем $\arcsin(\sin x) = x$ при $|x| \leqslant \pi/2$.



Пользуясь свойствами функций $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$, а также периодичностью функции $y = \sin x$, имеем

$$\arcsin(\sin 10) = \arcsin(\sin(10 - 2\pi)) = \arcsin(\sin(\pi - (10 - 2\pi))) = 3\pi - 10,$$

поскольку $|3\pi - 10| < \frac{\pi}{2}$. □

Пример 1.10. Построим график функции $y = \arccos(\sin x^2)$.

Решение. Областью определения функции является вся ось Ox. Из тождества $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ при $|x| \leqslant 1$ имеем $\arccos(\sin x^2) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x^2)$ (так как $|\sin x^2| \leqslant 1$ для любого x). В силу чётности функции $\arcsin(\sin x^2)$ до-

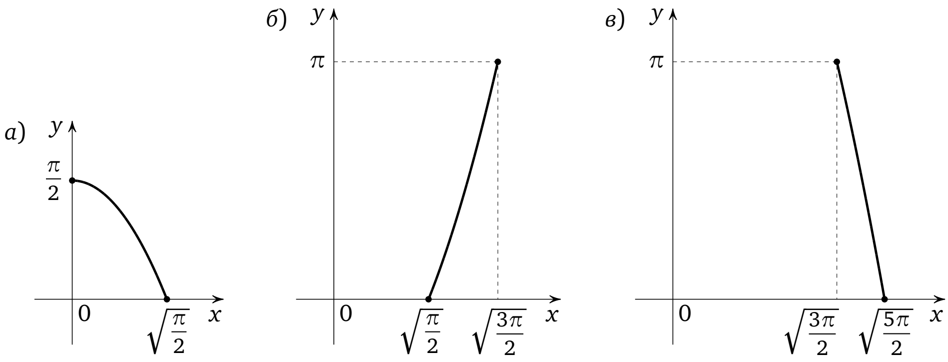
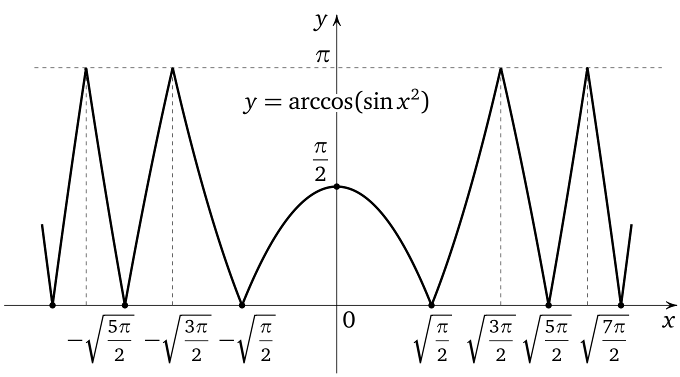


Рис. 3

статочно построить её график в полуплоскости $x \geqslant 0$. Поскольку $\arcsin(\sin x) = x$, если $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin x^2) = x^2$ при $x^2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, т. е. при $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Поэтому $\arccos(\sin x^2) = \frac{\pi}{2} - x^2$ при $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (см. рис. 3 *а*). Если $x \in \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right)$, то $x^2 \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, а поскольку $x^2 - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\sin(x^2 - \pi) = -\sin x^2$, то

$$\arcsin(\sin x^2) = \arcsin(-\sin(x^2-\pi)) = -\arcsin(\sin(x^2-\pi)) = -(x^2-\pi) = \pi - x^2.$$

Поэтому при $x \in \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right)$ график исходной функции совпадает с графиком функции $y = \frac{\pi}{2} - (\pi - x^2)$, т. е. $y = x^2 - \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 3 *б*). При $x \in \left(\sqrt{\frac{3\pi}{2}}; \sqrt{\frac{5\pi}{2}}\right)$ имеем, что $x^2 \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$, $x^2 - 2\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, и так как $\sin x^2 = \sin(x^2 - 2\pi)$, то $\arcsin(\sin x^2) = x^2 - 2\pi$. Поэтому при $x \in \left(\sqrt{\frac{3\pi}{2}}; \sqrt{\frac{5\pi}{2}}\right)$ график исходной функции совпадает с графиком функции $\frac{\pi}{2} - (x^2 - 2\pi) = \frac{5\pi}{2} - x^2$ (см. рис. 3 *в*).



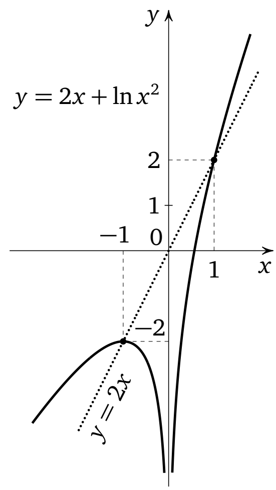
Аналогично при $x \in \left(\sqrt{(2k-1)\frac{\pi}{2}}; \sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right)$, $k \geqslant 3$, график исходной функции совпадает с графиком функции $y = \frac{\pi}{2} + (-1)^{k+1}(x^2 - \pi k)$. □

§ 1.3. Общие характеристики эскиза графика функции

Рассмотренные преобразования графиков основных элементарных функций не изменяли вида кривой: парабола оставалась параболой, синусоида — синусоидой и т. д.; поэтому мы и использовали термин «график функции». Теперь рассмотрим графические результаты других операций с функциями, при которых будем получать кривые другого вида, не столь однозначно определённые, и относительно этих кривых будем употреблять термин «эскиз графика», даже если часть этой кривой и совпадает с графиком основной элементарной функции.

При построении эскиза графика обязательно учитывается область определения функции, а остальное зависит от качественных характеристик данной функции, таких как чётность или нечётность, обращение в нуль или сохранение знака, монотонность и т. п. Приведём два примера построения эскиза графика при арифметических действиях с функциями.

Пример 1.11. Построим эскиз графика функции $y = 2x + \ln(x^2)$.



Решение. Областью определения y является ось Ox с выколотым началом координат ($x \neq 0$). Если $x > 0$, то $y = 2x + 2\ln x$. Второе слагаемое положительно на луче $(1; +\infty)$, следовательно, на этом луче искомая кривая лежит выше прямой $y = 2x$, причём расстояние между ними неограниченно растёт при $x \to +\infty$. При $x = 1$ кривая пересекает прямую $y = 2x$ ($y(1) = 2 + 0$). На интервале $(0; 1)$ второе слагаемое отрицательно и стремится к $-\infty$ при $x \to 0+$, следовательно, и вся сумма стремится к $-\infty$. Заметим ещё, что на луче $(0; +\infty)$ оба слагаемых возрастают, поэтому и сумма является возрастающей функцией.

Если $x < 0$, то $y = 2x + 2\ln(-x)$. Как и на луче $(0; +\infty)$, график лежит выше прямой $y = 2x$ на луче $(-\infty; -1]$, пересекает эту прямую при $x = -1$, лежит ниже неё на интервале $(-1; 0)$ и стремится к $-\infty$ при $x \to 0-$. Но на интервале $(-\infty; 0)$ нельзя сделать вывод о монотонности суммы, поскольку первое слагаемое возрастает, а второе убывает. На самом деле из справедливого на луче $[1; +\infty)$ неравенства $\ln x < x$ получаем, что на луче $(-\infty; -1]$ имеем неравенство

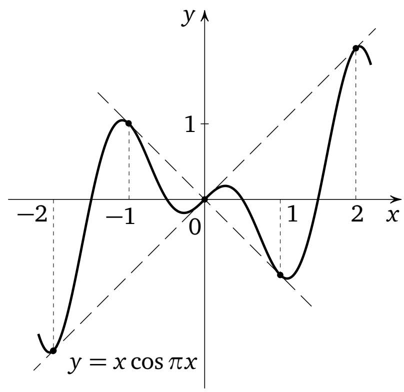
$$2\ln|x| < -2x, \quad \text{или} \quad 2x + 2\ln|x| < 0,$$

т. е. рассматриваемая кривая лежит ниже оси Ox; более того, так как

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln|x|}{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{e^t}\right) = 0$$

(это будет доказано в гл. 4), кривая при $x \to -\infty$ стремится к $-\infty$, так что на луче $(-\infty; 0)$ она будет иметь точку максимума. Отметим, что мы строим эскиз графика функции y, поэтому более точно ни участки её монотонности, ни положение экстремальных точек не исследуем. □

Пример 1.12. Построим эскиз графика функции $y = x\cos\pi x$.



Решение. Функция y, как произведение нечётной и чётной функций, нечётна, поэтому строим эскиз её графика только на луче $[0; +\infty)$, а затем продолжаем налево симметрично относительно начала координат.

Для $x \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$-x \leqslant x\cos\pi x \leqslant x.$$

Следовательно, искомая кривая лежит между прямыми $y = x$ и $y = -x$; при $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, кривая имеет общую точку с верхней прямой, при $x = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, — с нижней; $y > 0$ на интервале $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ и на интервалах $\left(2k - \frac{1}{2}; 2k + \frac{1}{2}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, $y < 0$ на интервалах $\left(2k - \frac{3}{2}; 2k - \frac{1}{2}\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что хотя множитель $\cos\pi x$ достигает экстремальных значений при $x \in \mathbb{N}$, все произведение имеет экстремум несколько правее для $x > 0$ и несколько левее для $x < 0$ за счёт увеличения модуля первого множителя. □

Одной из существенных качественных характеристик функции является её поведение у «границы области определения», т. е. при $x \to a$, где a — граничная точка области определения, и при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, если область определения не ограничена справа или слева. Введём некоторые количественные оценки этого поведения.

Пусть обе функции f и g при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ неограниченно растут. Если при этом разность $f(x) - g(x) \to 0$, то говорят, что функции f и g на плюс или минус бесконечности ведут себя асимптотически одинаково; если функция g по структуре более «проста», чем f, — например, является основной элементарной функцией, — то говорят, что f асимптотически ведёт себя как g. Если отношение $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$, то говорят, что g растёт быстрее, чем f, если же на некотором луче $x > a$ выполняется соотношение $0 < C_1 \leqslant \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant C_2$, то говорят, что f имеет порядок роста g.

Пример 1.13. Рассмотрим функцию $y = \frac{x^4 + e^{3x}}{x^2 + e^{2x}}$. После тождественных преобразований получим

$$\frac{x^4 + e^{3x}}{x^2 + e^{2x}} = e^x + \left(\frac{x^4}{e^{2x}} - \frac{x^2}{e^x}\right) : \left(\frac{x^2}{e^{2x}} + 1\right) = x^2 + \frac{e^{2x} - x^2 e^{2x}}{x^2 + e^{2x}}.$$

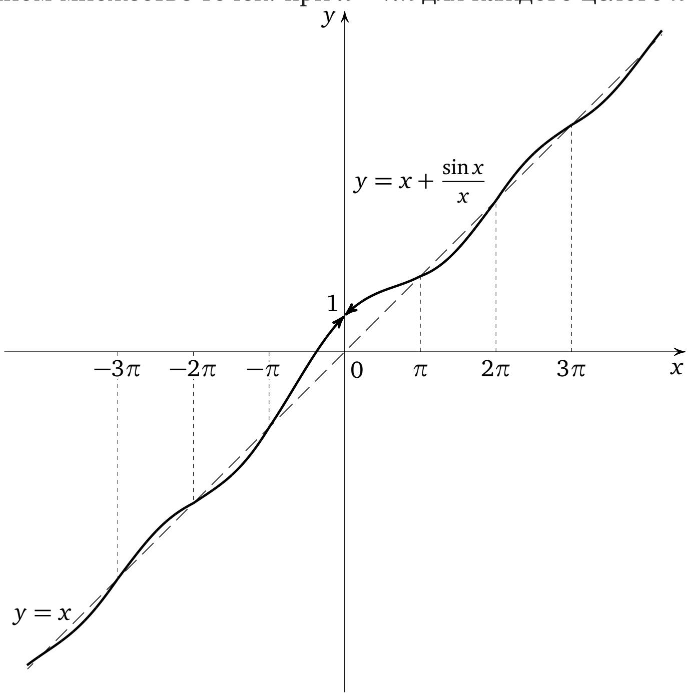
Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ (показательная функция $y = a^x$, $a > 1$, на плюс бесконечности растёт быстрее степенной $y = x^a$, $a > 0$, это строго доказывается в примере 4.38 на с. 121), то полученное соотношение показывает, что рассматриваемая функция $y(x)$ при $x \to +\infty$ асимптотически ведёт себя как e^x и при $x \to -\infty$ — как x^2. □

Если $g(x)=kx+b$ и $f(x)-g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, то говорят, что график функции имеет правую (левую) асимптоту, наклонную при $k\neq 0$, горизонтальную при $k=0$. Правая асимптота существует тогда и только тогда, когда существуют оба предела:

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x} \quad \text{и} \quad b_+ = \lim_{x\to+\infty}(y(x)-k_+x);$$

левая — когда существуют $k_- = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y(x)}{x}$ и $b_- = \lim\limits_{x\to-\infty}(y(x)-k_-x)$. Если правая и левая асимптоты совпадают, то говорят, что график функции имеет асимптоту (наклонную или горизонтальную).

Пример 1.14. Рассмотрим функцию $y=x+\dfrac{\sin x}{x}$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ (почему?), то прямая $y=x$ является асимптотой графика данной функции. Обратите внимание, что полученная кривая пересекает свою асимптоту в бесконечном множестве точек: при $x=\pi k$ для каждого целого $k\neq 0$.

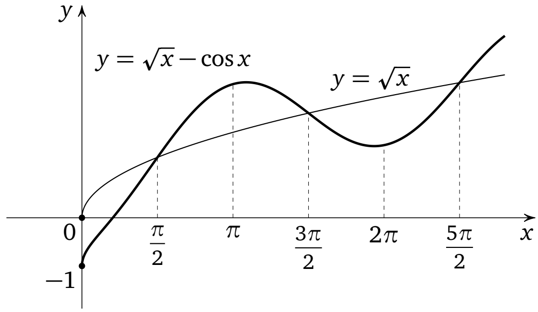


Кроме того, функция $y(x)$ не определена при $x=0$, но $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=1$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел, см. с. 117). □

Если при $x\to a$ $(x\to a+,\ x\to a-)$ функция f стремится к бесконечности, то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой (двусторонней или односторонней) её графика. Если при этом $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, то говорят, что g растёт при $x\to a$ быстрее, чем f; если выполняется соотношение $0<C_1\leqslant\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant C_2$, то говорят, что f имеет порядок роста g.

Если $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$, где y_1 и y_2 — элементарные функции, график функции y_1 в точке $(x_0, y_1(x_0))$ касается вертикали, а график функции y_2 не обладает этим свойством, то график суммарной функции $y(x)$ также касается вертикали в точке $(x_0, y(x_0))$.

Пример 1.15. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x} - \cos x$.



Её график касается оси Oy в точке $(0, -1)$, поскольку график функции $y = \sqrt{x}$ имеет в точке $x = 0$ одностороннюю вертикальную касательную. □

§ 1.4. Гиперболические функции и обратные к ним

Наряду с тригонометрическими функциями широко используются также *гиперболические* функции, определяемые формулами

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{(гиперболический косинус);}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{(гиперболический синус).}$$

Подобно тому как тригонометрические функции определяются как координаты точки $A(\cos t, \sin t)$ на окружности $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 4), гиперболические функции можно определить как координаты точки $A(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ на ветви гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$ (рис. 5). При этом параметр t и в первом, и во втором случае равен удвоенной площади сегмента, выделенного на рисунке.

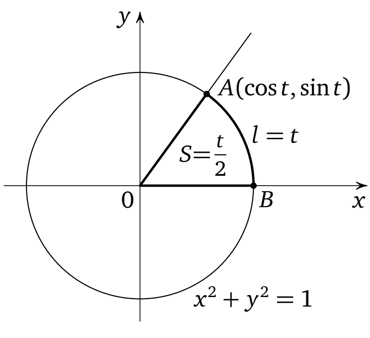


Рис. 4

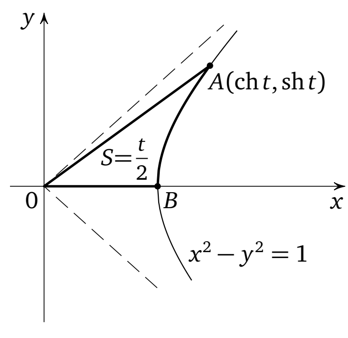


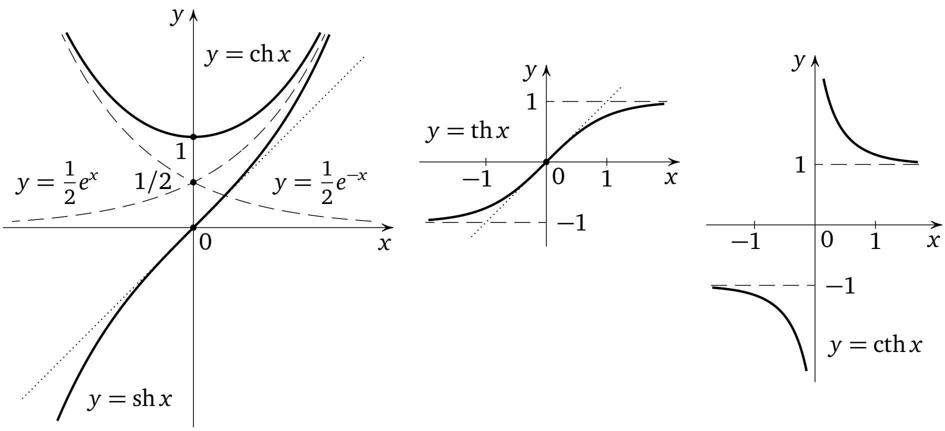
Рис. 5

Определяются также функции

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{и} \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

которые называются соответственно гиперболическим тангенсом и гиперболическим котангенсом.

Перечислим основные свойства гиперболических функций. Функция $y = \operatorname{ch} x$ определена на всей числовой прямой, чётна, убывает на луче $(-\infty; 0]$, и возрастает на луче $[0; +\infty)$, $\operatorname{ch} 0 = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$. Функция $y = \operatorname{sh} x$ определена и возрастает на всей числовой прямой, нечётна, $\operatorname{sh} 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = -\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$. Функция $y = \operatorname{th} x$ определена и возрастает на всей числовой прямой, нечётна, $\operatorname{th} 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = -\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = 1$. Функция $y = \operatorname{cth} x$ определена на луче $(-\infty; 0)$ и на луче $(0; +\infty)$, на каждом из них убывает, нечётна, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{cth} x = -\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{cth} x = 1$, $\lim\limits_{x\to0+} \operatorname{cth} x = -\lim\limits_{x\to0-} \operatorname{cth} x = +\infty$.



Отметим, что аналогично соответствующим тригонометрическим функциям графики функций $y = \operatorname{sh} x$ и $y = \operatorname{th} x$ касаются в нуле прямой $y = x$, причём при $x > 0$ справедливо неравенство $\operatorname{th} x < x < \operatorname{sh} x$ (в отличие от неравенства $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$).

Соотношения между гиперболическими функциями во многом аналогичны соотношениям между обычными тригонометрическими функциями. Например, гиперболические синус и косинус при всех значениях x удовлетворяют *основному гиперболическому тождеству* $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ (аналог основного тригонометрического тождества), которое можно проверить и непосредственно, исходя из их определения через показательную функцию. Приведём некоторые другие полезные соотношения гиперболической тригонометрии (все они также доказываются непосредственным переходом к экспоненте):

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad \operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y; \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 2\operatorname{sh}^2 x + 1; \quad \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}; \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}.$$

Функция $y=\operatorname{sh} x$ возрастает на всей числовой прямой, поэтому для неё существует обратная функция $y=\operatorname{arsh} x$ — *ареасинус*[1]. Разрешая уравнение $\frac{e^y-e^{-y}}{2}=x$ относительно y, получим явное выражение для ареасинуса:

$$y=\operatorname{arsh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Функция $y=\operatorname{ch} x$ не является монотонной на всей числовой прямой. Выделим участок, на котором она является возрастающей функцией, а именно луч $[0;+\infty)$. Обратная к ней функция на этом участке $y=\operatorname{arch} x$ называется *ареакосинусом* и выражается явно по формуле

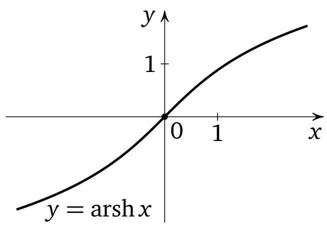
$$y=\operatorname{arch} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad x\geqslant 1.$$

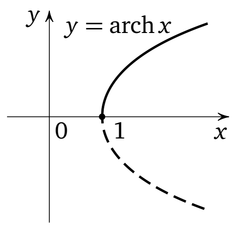
Заметим, что на промежутке $(-\infty;0]$ обратной к функции $y=\operatorname{ch} x$ является

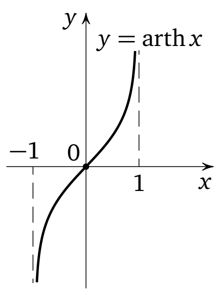
$$y=-\operatorname{arch} x=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right), \quad x\geqslant 1.$$

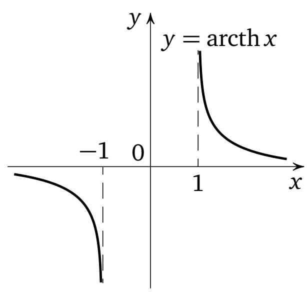
Обратные к гиперболическим тангенсу и котангенсу являются соответственно функции *ареатангенс* и *ареакотангенс*:

$$y=\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1; \quad y=\operatorname{arcth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\ |x|>1.$$







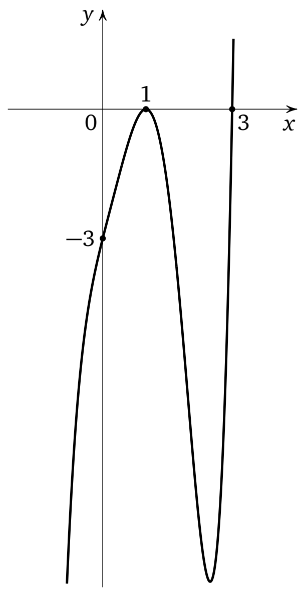


§ 1.5. Рациональные и алгебраические функции

Определение. *Рациональной функцией* (рациональной дробью) называют отношение двух многочленов: $R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно).

[1] От лат. *area* — «площадь»; название объясняется тем, что эта функция по координате точки на гиперболе восстанавливает площадь гиперболического сектора, подобно тому как обратные тригонометрические функции — аркфункции — восстанавливают длину дуги окружности (лат. *arc* — «дуга»).

Класс многочленов является подклассом рациональных функций, при этом $Q_m(x)$ — многочлен нулевой степени ($m=0$), т. е. ненулевая константа. На эскизе графика многочлена выше второй степени должны быть видны его корни и знак на интервалах между корнями. При $x \to \infty$ многочлен неограниченно растёт, причём порядок его роста есть x^n.



$y=(x^3-1)(x^2-4x+3)$

Пример 1.16. Построим эскиз графика функции $y=(x^3-1)(x^2-4x+3)$.

Решение. Раскладывая многочлен на множители, получим $y=(x-3)(x-1)^2(x^2+x+1)$. Отсюда видно, что y обращается в нуль, т. е. кривая имеет общие точки с осью Ox, при $x=1$ и $x=3$, причём при переходе x через 1 функция y не меняет знака, т. е. кривая касается оси Ox, а при переходе через 3 функция y меняет знак, т. е. кривая пересекает ось Ox. Многочлен неположителен на луче $(-\infty; 3)$ и положителен на луче $(3; +\infty)$. При $x \to \infty$ порядок роста многочлена есть x^5. □

Из эскиза графика рациональной дроби должны быть видны следующие свойства: знак, нули и точки неопределённости функции, её поведение около точек неопределённости и асимптотическое поведение на бесконечности.

Всякая рациональная дробь $R(x)$ представляется в виде суммы многочлена и правильной дроби (степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя), т. е. $R(x)=T_q(x)+\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$, $k<m$, где T_q, P_k, Q_m — многочлены. Правильная дробь при $x \to \infty$ стремится к нулю (почему?), поэтому $R(x)$ на бесконечности асимптотически ведёт себя как многочлен $T_q(x)$, в частности, при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ или уходит в бесконечность, или имеет один и тот же конечный предел. Если рассматривать только несократимые дроби, то через каждую точку неопределённости (нуль знаменателя) проходит вертикальная асимптота; если $x=a$ — нуль знаменателя кратности k, т. е. знаменатель имеет вид $(x-a)^k Q(x)$, $Q(a) \neq 0$, то порядок роста функции около такой точки есть $1/(x-a)^k$.

Если a — корень числителя кратности m, то функция в окрестности точки $x=a$ ведёт себя как $C(x-a)^m$.

Пример 1.17. Построим эскиз графика функции $y=\dfrac{4x^5+13x^4}{(x+2)^2(1-x^2)}$.

Решение. Запишем равенства

$$\frac{4x^5+13x^4}{(x+2)^2(1-x^2)}=-4x+3+\frac{25x^2+4x-12}{(x+2)^2(1-x)(1+x)}=\frac{x^4(4x+13)}{(x+2)^2(1-x^2)}.$$

Отсюда заключаем, что точки $x=0$, $x=-13/4$ — нули функции, прямые $x=-2$, $x=-1$, $x=1$ — вертикальные асимптоты графика, а наклонная асимптота — прямая $y=-4x+3$. Перемена знака функции происходит в точках $x=-13/4$, $x=-1$, $x=1$; точка $x=0$ — корень чётного порядка числителя, точка $x=-2$ — знаменателя, поэтому в этих точках знак функции не меняет-

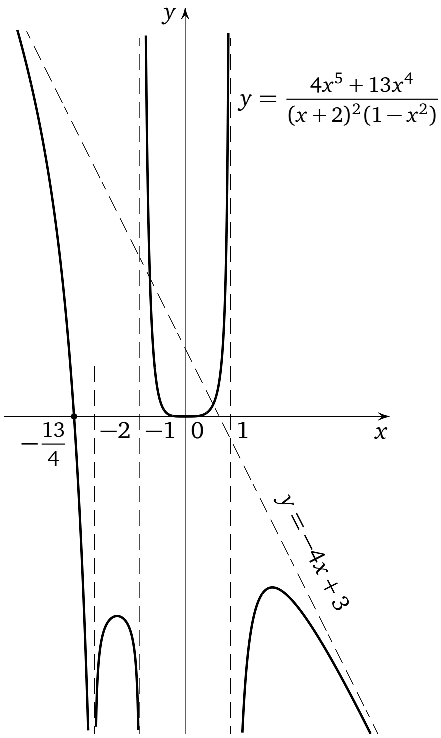


Рис. 6

ся. Эскиз графика представлен на рис. 6. Заметим, что на промежутке $(-1; 1)$ кривая дважды пересекла асимптоту $y = -4x + 3$. Поскольку многочлен $25x^2 + 4x - 12$ более двух корней иметь не может, больше точек пересечения графика функции с этой асимптотой нет.

Вообще, точное положение таких точек чаще всего находить не обязательно, достаточно ограничиться качественным анализом, как в этом примере. Точно так же чисто качественные рассуждения о поведении функции приводят к выявлению экстремальных точек на промежутках $(-2; -1)$, $(1; +\infty)$. $\square$

Определение. *Алгебраической функцией* называют функцию вида $y = P_1^{r_1}(x)P_2^{r_2}(x) \cdot \ldots \cdot P_k^{r_k}(x)$, где $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ — многочлены, а $r_1, \ldots, r_k$ — рациональные числа, а также конечные суммы таких произведений. После выделения множителей вида $(x-a)^s$, $s > 0$, произведение $P_1^{r_1} \ldots P_k^{r_k}$ равно

$$P_1^{r_1}(x)P_2^{r_2}(x) \cdot \ldots \cdot P_k^{r_k}(x) = \frac{(x-a_1)^{s_1}(x-a_2)^{s_2}\ldots(x-a_p)^{s_p}}{(x-b_1)^{t_1}(x-b_2)^{t_2}\ldots(x-b_q)^{t_q}} \cdot T(x), \tag{1}$$

где $s_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $t_j \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant q$, числа $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q$ все различны, $T(x)$ всюду определённая и не обращающаяся в нуль функция. Если в (1) все s_i — натуральные числа, все t_j равны нулю и $T(x)$ — многочлен, то числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ называются *корнями*, а числа $s_1, s_2, \ldots, s_p$ называются *кратностями* соответствующих корней; в общем случае принято говорить о порядке корня в числителе и в знаменателе.

Например, функция $y=x\sqrt[3]{\dfrac{x}{(x+2)^2}}$ имеет в числителе корень $x=0$ порядка $4/3$, а в знаменателе корень $x=-2$ порядка $2/3$.

Отметим основные свойства степенной функции $y=x^r$ с положительным рациональным показателем $r=m/n$, где $m, n\in\mathbb{N}$.

Если n чётное, то функция $y=x^{m/n}$ определена для $x\geqslant 0$ и $y=x^{m/n}=(x^m)^{1/n}=\sqrt[n]{x^m}$.

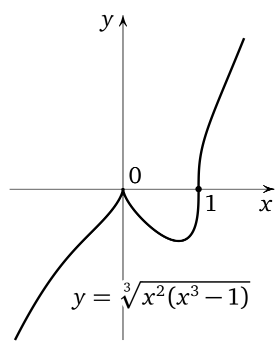
Если n нечётное, то функция $y=x^{m/n}$ определена для всех действительных x, причём для $x>0$ имеем $y=(\sqrt[n]{x})^m=\sqrt[n]{x^m}$, $y(-x)=(\sqrt[n]{-x})^m=(-\sqrt[n]{x})^m=(-x^{1/n})^m$. Отсюда видно, что функция $y=x^{m/n}$ нечётна, если m и n нечётны, и чётна, если n нечётно, а m чётно. Поэтому для любого рационального r достаточно рассматривать поведение функции $y=x^r$ на положительной полуоси, а её поведение на отрицательной полуоси, если она там определена, обусловливается свойством чётности или нечётности[1].

Так как $r>0$, то график функции $y=x^r$ проходит через начало координат, точку $(1, 1)$ и функция стремится к плюс бесконечности при $x\to+\infty$. Чем больше r, тем ближе к оси Ox график функции $y=x^r$ на промежутке $(0; 1)$ и дальше от оси Ox на промежутке $(1; +\infty)$. При $r>1$ график функции $y=x^r$ не только лежит ниже прямой $y=x$ на $(0; 1)$, но и касается в нуле горизонтальной оси Ox, а при $x>0$ направлен выпуклостью вниз; а если $0<r<1$, то график функции $y=x^r$ лежит на $(0; 1)$ выше прямой $y=x$ и касается в $(0; 0)$ вертикальной оси Oy, а при $x>0$ направлен выпуклостью вверх.

Эти характерные свойства степенной функции используются для построения эскизов графиков.

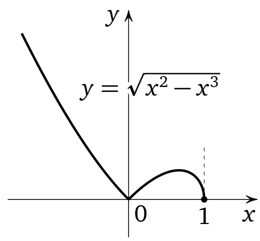
Отметим ещё, что график функции $y=(x-a)^r\cdot h(x)$ (если $h(a)\neq 0$ и график функции $h(x)$ не имеет в точке $x=a$ вертикальной касательной) имеет в точке $x=a$ вертикальную или горизонтальную касательную одновременно с графиком функции $y=(x-a)^r$.

Пример 1.18. Для функции $y=\sqrt[3]{x^2(x^3-1)}$ поведение в окрестности точки $x=0$ определяется множителем $\left(-\sqrt[3]{x^2}\right)$, поскольку $y=-\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{1-x^3}$ и $\sqrt[3]{1-x^3}\neq 0$ при $x=0$. В точке $x=1$ поведение функции $y=\sqrt[3]{x^2(x^3-1)}$ определяется множителем $\sqrt[3]{x-1}$, поскольку $y=\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x^2(x^2+x+1)}$ и $\sqrt[3]{x^2(x^2+x+1)}\neq 0$ при $x=1$. При $x\to\infty$ порядок роста рассматриваемой функции есть $x\sqrt[3]{x^2}$, поэтому при достаточно больших положительных x кривая направлена выпуклостью вниз, а при достаточно больших отрицательных — вверх. □



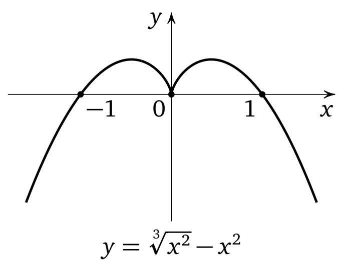
[1] Несмотря на то, что обычно степень с рациональным показателем определяют лишь для неотрицательных значений аргумента, мы считаем запись $x^{m/n}$ корректной только в случае, если дробь m/n несократима, и тогда введённое определение степенной функции с рациональным показателем непротиворечиво.

Пример 1.19. Построим эскиз графика функции $y=\sqrt{x^2-x^3}$.



Решение. Областью определения функции является луч $(-\infty; 1]$. Функция неотрицательна и обращается в нуль при $x=0$ и $x=1$. Поскольку $y=\sqrt{x^2}\sqrt{1-x}$, поведение функции в точке $x=0$ определяется множителем $|x|$, а в точке $x=1$ — множителем $\sqrt{1-x}$. При $x\to-\infty$ порядок роста рассматриваемой функции есть $|x|\sqrt{|x|}$ и $y>0$, поэтому кривая направлена выпуклостью вниз. □

Пример 1.20. Построим эскиз графика функции $y=\sqrt[3]{x^2}-x^2$.



Решение. Рассматриваемая функция чётна, поэтому строим эскиз её графика только на луче $[0; +\infty)$, а затем продолжаем налево симметрично относительно оси Oy. Если $x=0$, то функция обращается в нуль и её график касается вертикали — оси Oy; запись $y=\sqrt[3]{x^2}(1-x\sqrt[3]{x})$ показывает, что $y>0$ на интервале $(0; 1)$, $y(1)=0$. При $x\to+\infty$ порядок роста функции есть x^2, $y<0$ на луче $(1; +\infty)$, поэтому кривая направлена выпуклостью вверх. □

На эскизе графика функции $y=P_1^{r_1}(x)\cdot P_2^{r_2}(x)\cdot\ldots\cdot P_m^{r_m}(x)$, где $P_i(x)$ — многочлены, r_i — рациональные числа, должны быть видны асимптоты этой кривой, точки пересечения с осями координат, расположение кривой относительно осей координат, точки, в которых кривая имеет вертикальную или горизонтальную касательную, угловые точки (т. е. такие точки, в которых график функции касается одной прямой справа и другой прямой слева; строгое определение будет дано в гл. 5).

Пример 1.21. Построим эскиз графика функции

$$y=\frac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}\cdot\sqrt[3]{x-2}}{x\sqrt[6]{(x+1)^4(x+4)}}.$$

Решение. Функция определена при $x\geqslant-2$ и $x\neq0$, $x\neq-1$. Точки $x=-2$, $x=1$, $x=2$ — нули функции, прямая $x=-1$ и ось Oy — вертикальные асимптоты, перемена знака функции происходит в точках $x=0$ и $x=2$, график имеет вертикальные касательные в точках $x=-2$ и $x=2$, точка $x=1$ — угловая (так как в окрестности этой точки данная функция имеет вид $C\sqrt{(x-1)^2}=C|x-1|$). После преобразования, тождественного при $x>2$, имеем

$$y=\frac{\sqrt{(1-1/x)^2(1+2/x)}\cdot\sqrt[3]{1-2/x}}{\sqrt[6]{(1+1/x)^4(1+4/x)}}.$$

Отсюда видно, что при $x\to+\infty$ прямая $y=1$ — горизонтальная асимптота. Эскиз графика функции представлен на рис. 7.

При построении подобных эскизов, вообще говоря, не требуется ответа на вопрос, пересекается ли график функции со своими асимптотами. В данном

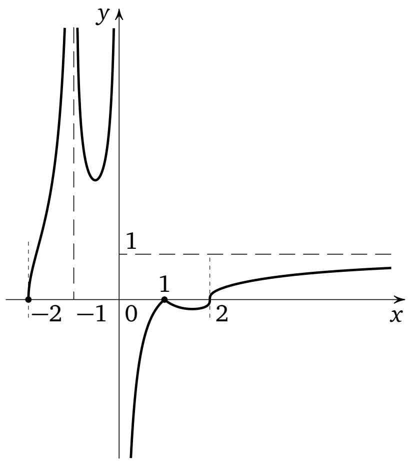


Рис. 7

примере можно показать, что при $x>2$ график функции на этом промежутке лежит ниже асимптоты. Действительно, при $x>2$ справедливы неравенства

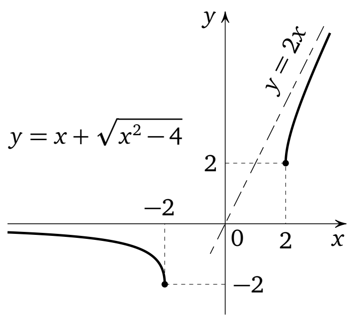
$$(x-1)^6(x+2)^3(x-2)^2=(x-1)^6(x^2-4)^2(x+2)<$$
$$< x^6(x+4)(x^2-4)^2< x^6(x+4)(x^2+2x+1)^2,$$

следовательно, $y=\dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^6(x+2)^3(x-2)^2}}{\sqrt[6]{x^6(x+1)^4(x+4)}}<1$, т. е. на этом участке кривая лежит ниже асимптоты. □

Пример 1.22. Построим эскиз графика функции $y=x+\sqrt{x^2-4}$.

Решение. Функция определена на лучах $(-\infty;\,-2]$ и $[2;\,+\infty)$. При $x=2$ значение функции равно 2; её график касается вертикали — прямой $x=2$; функция возрастает на $[2;\,+\infty)$ и порядок её роста при $x\to+\infty$ есть x. Выясним, имеет ли данная кривая наклонную асимптоту:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)=2,$$
$$\lim_{x\to+\infty}(y(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0.$$



Полученные равенства показывают, что прямая $y=2x$ является правой асимптотой данной кривой.

Для рассмотрения поведения функции на луче $(-\infty;\,-2]$ сделаем замену $z=-x$, тогда $y=\sqrt{z^2-4}-z=\dfrac{-4}{\sqrt{z^2-4}+z}$, откуда следует, что при $z=2$ $(x=-2)$ функция принимает значение -2; её график касается вертикали — прямой $x=-2$; функция на $(-\infty;\,-2]$ убывает и стремится к нулю при $x\to-\infty$. □

§ 1.6. Композиции функций

Для построения эскиза графика функции вида $y=f(g(x))$ сначала проводим построение эскиза графика промежуточной функции $t=g(x)$, затем функции $y=f(t)$, а затем уже окончательной: $y=f(g(x))$, руководствуясь следующими соображениями. Область определения композиции определяется областью определения её компонент — функций $g(x)$ и $f(t)$; асимптотическое поведение и участки монотонности композиции определяются асимптотическим поведением и участками монотонности её компонент. Остановимся более подробно на свойстве монотонности. Если функция $g(x)$ монотонна на интервале $(a;b)$, функция $f(t)$ возрастает на интервале $(g(a);g(b))$, то функция $y(x)=f(g(x))$ на интервале $(a;b)$ имеет тот же характер монотонности, что и $g(x)$; если же функция $f(t)$ убывает на $(a;b)$, то функция $y(x)=f(g(x))$ монотонна на $(a;b)$, но характер монотонности меняется на противоположный. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.23. Построим эскиз графика функции $y=\log_{1/2}(x^2+x)$.

Решение. Построим графики функций $t=g(x)$, где $g(x)=x^2+x$, и $y=f(t)$, где $f(t)=\log_{1/2}t$ (см. рис. 8 *а*, *б*).

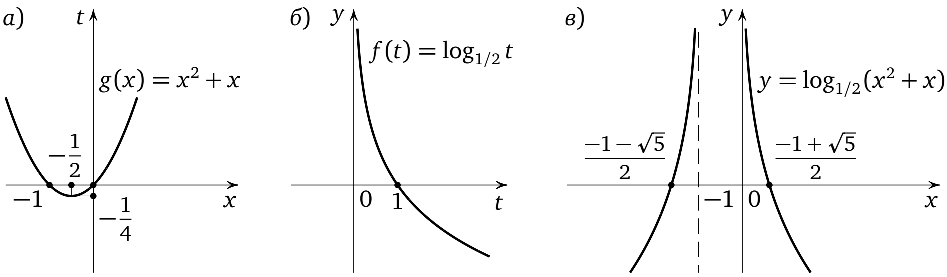


Рис. 8

Поскольку $g(x)\leqslant 0$ на отрезке $[-1;0]$, функция $y(x)=\log_{1/2}g(x)$ определена на лучах $(-\infty;-1)$ и $(0;+\infty)$. На луче $(-\infty;-1)$ функция $t=g(x)$ убывает от плюс бесконечности до нуля, а при таком изменении переменной t функция $f(t)$ возрастает от минус до плюс бесконечности. На луче $(0;+\infty)$ функция $g(x)$ возрастает от нуля до плюс бесконечности, а при таком изменении переменной t функция $f(t)$ убывает от плюс до минус бесконечности. Для наглядности составим таблицу:

x	$-\infty \nearrow -1$	$0 \nearrow +\infty$
$t=x^2+x$	$+\infty \searrow 0$	$0 \nearrow +\infty$
$f=\log_{1/2}t$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow -\infty$

Эскиз графика функции приведён на рис. 8 *в*). □

Пример 1.24. Построим эскиз графика функции $y=\dfrac{1}{1-2\sin\pi x}$.

Решение. Построим график функции $t=g(x)$, где $g(x)=1-2\sin\pi x$ (см. рис. 9). Функция $g(x)$ определена на всей оси Ox и периодична с периодом 2, следовательно, и функция $y(x)$ периодична с периодом 2. Областью определения $y(x)$ является ось Ox за исключением тех точек, в которых функция $g(x)$ обращается в нуль: $x \neq (-1)^k \frac{1}{6} + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Построим эскиз графика на интервале $\left(\frac{1}{6}; \frac{13}{6}\right)$, а затем продлим его на остальные интервалы области определения по условию периодичности.

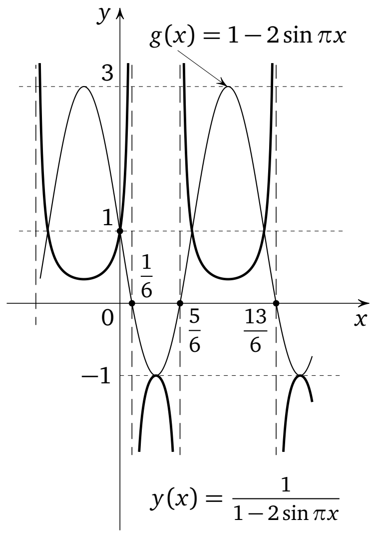


Рис. 9

На интервале $\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$ функция $g(x)$ отрицательна, её график симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$ и имеет минимум в точке $\left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$. Функция монотонна на интервалах $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$, $\lim\limits_{x\to 1/2+} g(x) = \lim\limits_{x\to 5/6-} g(x) = 0$. На интервале $\left(\frac{5}{6}; \frac{13}{6}\right)$ функция $g(x)$ положительна, её график симметричен относительно прямой $x = \frac{3}{2}$, и имеет максимум в точке $\left(\frac{3}{2}, g\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$. Функция монотонна на интервалах $\left(\frac{5}{6}; \frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{6}\right)$, $\lim\limits_{x\to 5/6+} g(x) = \lim\limits_{x\to 13/6-} g(x) = 0$. Следовательно, функция $f(g(x))$, где $f(t) = \frac{1}{t}$, на интервале $\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$ отрицательна, её график симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$, имеет максимум в точке $(2, -1)$ и монотонно уходит в минус бесконечность при $x \to \frac{1}{6}+$ и при $x \to \frac{5}{6}-$; на интервале $\left(\frac{5}{6}; \frac{13}{6}\right)$ функция $y(x) = f(g(x))$ положительна, её график симметричен относительно прямой $x = \frac{3}{2}$, имеет минимум в точке $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)$ и монотонно уходит в плюс бесконечность при $x \to \frac{5}{6}+$ и при $x \to \frac{13}{6}-$. □

Пример 1.25. Построим эскиз графика функции $y = 2^{1/x}$.

Решение. Построим графики функций $t = g(x)$, где $g(x) = \frac{1}{x}$ и, $y = f(t)$, где $f(t) = 2^t$ (см. рис. 10 *а* и *б*). Функция $g(x)$ определена на всей оси Ox за исключением начала координат, $x \neq 0$. На луче $(0; +\infty)$ переменная t положительна и убывает от плюс бесконечности до нуля, следовательно, функция $y(x) = f(g(x))$ убывает от плюс бесконечности до 1. На луче $(-\infty; 0)$ переменная g отрицательна и убывает от нуля до минус бесконечности, следовательно, функция $y(x) = f(g(x))$ убывает от 1 до нуля.

Рассмотрим более подробно поведение функции при $x \to 0-$. Как уже указывалось выше (см. пример 1.13), $\lim\limits_{z\to+\infty} \frac{z^2}{e^z} = 0$, следовательно, для достаточно больших значений z (в некоторой окрестности несобственной точки $+\infty$) имеем неравенство $z^2 < e^z$. Полагая $z = -\frac{1}{x}$, получим, что для достаточно малых по

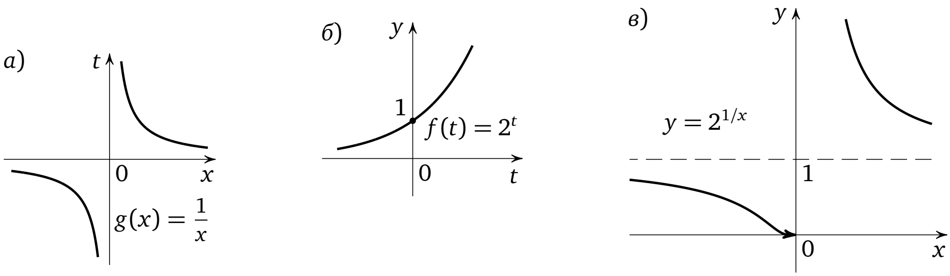


Рис. 10

модулю отрицательных значений x (в некоторой левой полуокрестности нуля) выполнено неравенство $0<e^{1/x}<x^2$, следовательно, рассматриваемая кривая при $x\to 0-$ касается оси Ox. Эскиз графика функции приведён на рис. 10 *в*. □

Пример 1.26. Построим эскиз графика функции $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x^2-1}$.

Решение. Построим график функции $y=f(t)$, где $f(t)=\operatorname{arcctg} t$ (см. рис. 11 *а*). Для построения эскиза графика функции $t=g(x)$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, построим сначала график знаменателя $z(x)=x^2-1$. В силу чётности функции $g(x)$ строим эскиз на луче $[0;+\infty)$, а затем продолжаем его налево симметрично относительно оси Oy. На полуинтервале $[0;1)$ функция $z(x)$ отрицательна и возрастает от -1 до нуля, следовательно, функция $g(x)=\dfrac{1}{z(x)}$ отрицательна и убывает от -1 до $-\infty$. На луче $(1;+\infty)$ функция $t(x)$ положительна и возрастает от нуля до $+\infty$, следовательно, функция $g(x)=\dfrac{1}{z(x)}$ положительна и убывает от $+\infty$ до нуля (см. рис. 11 *б*).

В силу чётности функции $y(x)$ опять рассматриваем эскиз её графика только на луче $[0;+\infty)$. На полуинтервале $[0;1)$ переменная t отрицательна и убывает от -1 до минус бесконечности, следовательно, функция $y(x)=\operatorname{arcctg}(g(x))$ возрастает от $\dfrac{3\pi}{4}$ до π. На луче $(1;+\infty)$ переменная t положительна и убывает от

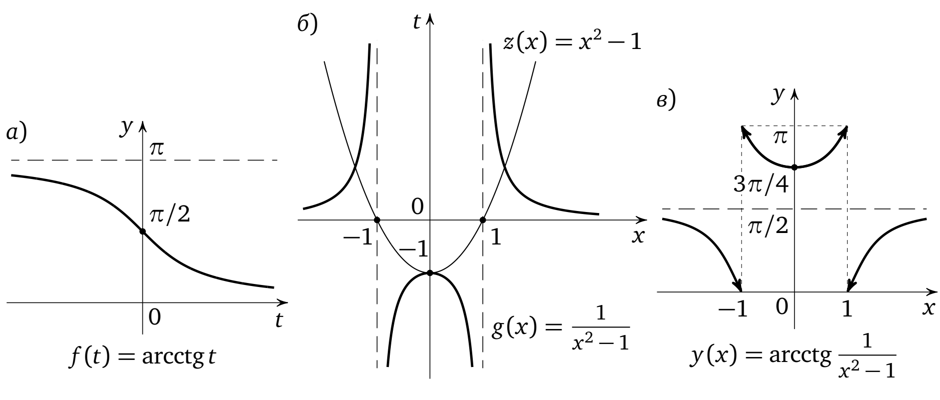


Рис. 11

плюс бесконечности до нуля, следовательно, функция возрастает от нуля до $\frac{\pi}{2}$. Эскиз графика функции приведён на рис. 11 *в*. □

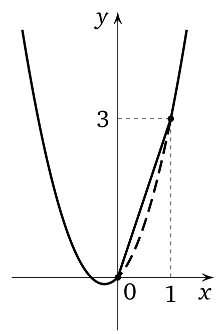
При построении эскиза графика композиции, в которую входят функции

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

наиболее естественно выделить и рассмотреть отдельно промежутки, на которых выражение под знаком модуля или sgn не меняет знака. Сто́ит обратить внимание на то, что функция $y = |x|$ элементарная (почему?) и непрерывная, но имеет в нуле угловую точку, так что и в композиции с этой функцией непрерывность не нарушается, но могут появиться угловые точки, а функция $y = \operatorname{sgn} x$ разрывна, и в композиции с этой функцией могут появиться точки разрыва.

Пример 1.27. Построим график функции

$$y = x^2 + 2x + |x^2 - x|.$$



Решение. Разность $(x^2 - x)$ отрицательна на интервале $(0; 1)$ и неотрицательна вне его, следовательно, $y = 2x^2 + x = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$, если $x \leqslant 0$ или $x \geqslant 1$, и $y = 3x$, если $0 < x < 1$. □

Пример 1.28. Построим эскиз графика функции

$$y = \frac{\operatorname{sgn}(1 - x^2)}{1 + x^2}.$$

Решение. Начнём с построения эскиза графика функции $g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. Знаменатель — функция $t(x) = 1 + x^2$ — чётная, положительна на всей оси, убывает от плюс бесконечности до 1 на луче $(-\infty; 0]$, принимает минимальное значение, равное 1, при $x = 0$, возрастает от 1 до плюс бесконечности на луче $[0; +\infty)$. Следовательно, функция $g(x)$ чётная, определённая на всей оси Ox, возрастает от нуля до 1 на луче $(-\infty; 0]$, принимает максимальное значение, равное 1, при $x = 0$, убывает от 1 до нуля на луче $[0; +\infty)$. Эскиз графика функции $g(x)$ приведён на рис. 12.

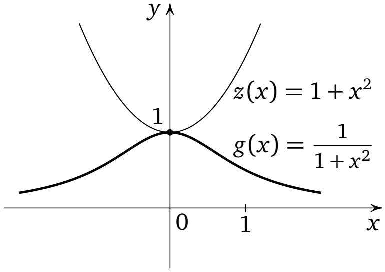


Рис. 12

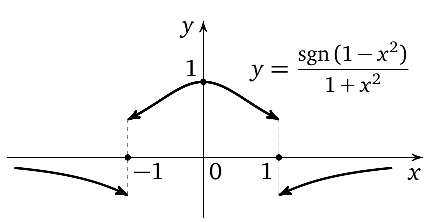


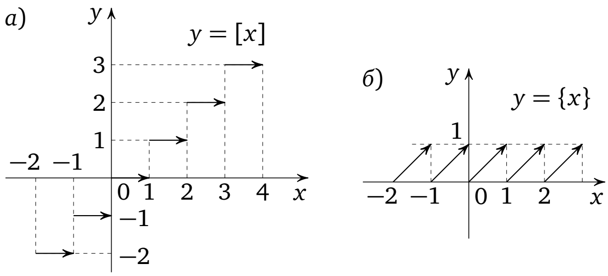
Рис. 13

Поскольку

$$\operatorname{sgn}(1-x^2) = \begin{cases} 1, & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ -1, & |x|>1, \end{cases} \quad \text{то} \quad y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ \dfrac{-1}{1+x^2}, & |x|>1. \end{cases}$$

Эскиз графика данной функции приведён на рис. 13. □

Рассматривают также композиции элементарных функций с функциями $y=[x]$ (*целая часть* числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x) и $y=\{x\}=x-[x]$ (*дробная часть* числа x), графики которых изображены ниже.



Пример 1.29. Построим графики функций $y_1(x)=[\sqrt{x}]$ и $y_2(x)=\{\sqrt{x}\}$. Функции определены при $x \geqslant 0$, причём $y_1(x)=n$, $y_2(x)=\sqrt{x}-n$ при $n^2 \leqslant x < (n+1)^2$, где $n=0, 1, 2, \ldots$

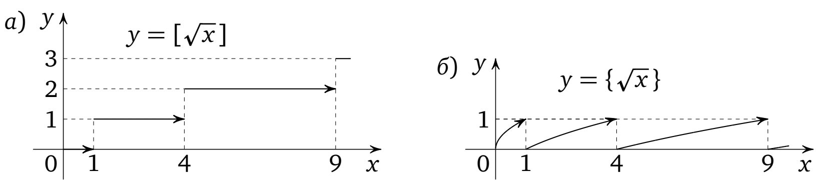


Рис. 14

Искомые графики приведены на рис. 14 *а*, *б*. □

§ 1.7. Кривые, заданные параметрически

Кривой, заданной параметрически, называется множество точек плоскости xOy, координаты которых определяются из соотношений $x=x(t)$, $y=y(t)$ при каждом фиксированном t из некоторого множества T. Обычно в качестве множества T берётся некоторый промежуток. Если от функций $x(t)$ и $y(t)$ потребовать только непрерывность на промежутке T, то образом этого промежутка при отображении $x=x(t)$, $y=y(t)$ может быть множество в плоскости xOy, совсем непохожее на интуитивное представление о кривой. Например, можно задать такое отображение, что образом будет внутренность квадрата. Не углубляясь в теорию кривых, предполагаем, что рассматриваемый промежуток T изменения параметра t разбивается на конечное число промежутков, на каждом из которых функция $x(t)$ монотонна (т. е. возрастает или убывает). На таком промежутке определена обратная функция $t(x)$, и $y = y(t(x))$. Итак, каждому промежутку монотонности $x(t)$ соответствует функция $y(t(x))$, график которой называется *ветвью* данной кривой. Количество ветвей определяется количеством участков монотонности $x(t)$. Если точка $(x(t_0), y(t_0))$ не является общей для нескольких ветвей данной кривой, то в окрестности этой точки можно определить ту ветвь, которая проходит через эту точку.

Для построения эскиза кривой, заданной параметрически, на плоскости xOy необходимо отдельно рассматривать участки монотонности $x(t)$, а затем проводить рассуждения, аналогичные тем, которые проводятся при рассмотрении сложной функции. Пусть t возрастает. Тогда если $x(t)$ и $y(t)$ возрастают, то движение по кривой происходит направо вверх; если $x(t)$ убывает, а $y(t)$ возрастает, то движение по кривой происходит влево вверх и т. д. Если при $t \to t_0$ имеем $x \to a$, а $y(t)$ стремится к бесконечности, то кривая имеет вертикальную асимптоту $x = a$. Если при $t \to t_0$ имеем, что $x(t)$ стремится к бесконечности, а $y(t) \to b$, то кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = b$. Наклонная асимптота может быть только тогда, когда при $t \to t_0$ функции $x(t)$ и $y(t)$ одновременно стремятся к бесконечности. Коэффициенты k и b асимптоты $y = kx + b$ вычисляются по формулам на с. 17 с заменой условия $x \to \infty$ $(x \to +\infty, x \to -\infty)$ на условие $t \to t_0$ $(t \to t_0+, t \to t_0-)$.

Пример 1.30. Построим эскиз кривой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$.

Решение. Поскольку точки $(x(t_0 + 2\pi), y(t_0 + 2\pi))$ и $(x(t_0), y(t_0))$ совпадают, достаточно рассматривать t на промежутке $[0; 2\pi]$. Построим эскизы графиков функций $x(t)$ и $y(t)$ (см. рис. 15 *а*, *б*).

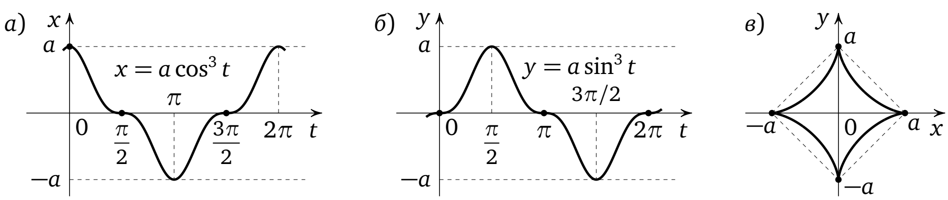


Рис. 15

Промежутками монотонности $x(t)$ являются $[0; \pi]$ и $[\pi; 2\pi]$. Когда t растёт от 0 до $\frac{\pi}{2}$, движение по кривой происходит влево вверх от точки $(x(0), y(0)) = (a, 0)$ до точки $\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, a)$; когда t растёт от $\frac{\pi}{2}$ до π, движение по кривой происходит влево вниз до точки $(x(\pi), y(\pi)) = (-a, 0)$. В этой точке начинается вторая ветвь кривой. Когда t растёт от π до $\frac{3\pi}{2}$, движение по кривой происходит вправо вниз до точки $\left(x\left(\frac{3\pi}{2}\right), y\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = (0, -a)$. Когда t растёт от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π, движение по кривой происходит вправо вверх до точки $(x(2\pi), y(2\pi)) = (a, 0)$. Так как $x(2\pi - t_0) = x(t_0)$, $y(2\pi - t_0) = -y(t_0)$, $x(\pi - t_0) = -x(t_0)$, $y(\pi - t_0) = y(t_0)$, то вместе с точкой (x_0, y_0) на кривой лежат точки $(-x_0, y_0)$ и $(x_0, -y_0)$, т. е. она симметрична относительно обеих координатных осей. Пусть t меняется на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Соответствующие точки кривой лежат в первой четверти. Рассмотрим множество точек $x = a\cos^2 t$, $y = a\sin^2 t$. Это часть прямой $x + y = a$, лежащая в первой четверти. Поскольку при любом $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $a\cos^3 t < a\cos^2 t$ и $a\sin^3 t < a\sin^2 t$, то исследуемая кривая лежит ниже этой прямой. Эскиз кривой представлен на рис. 15 *в*. □

Пример 1.31. Построим эскиз кривой $x = a\cos 2t$, $y = a\sin 3t$, $a > 0$.

Решение. Поскольку точки $(x(t_0 + 2\pi), y(t_0 + 2\pi))$ и $(x(t_0), y(t_0))$ совпадают, достаточно рассматривать t на промежутке длины 2π. Из соотношений

$$x(-t) = x(t), \quad y(-t) = -y(t), \quad x(\pi - t) = x(t), \quad y(\pi - t) = y(t)$$

следует, что при изменении t на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ получаются те же точки кривой, что и при изменении t на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, а при изменении t на промежутке $[-\pi; 0]$ получаются точки кривой, симметричные относительно оси Ox точкам, полученным при изменении t на $[0; \pi]$. Таким образом, достаточно рассматривать t на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Построим графики функций $x(t)$ и $y(t)$ (см. рис. 16 *а*, *б*).

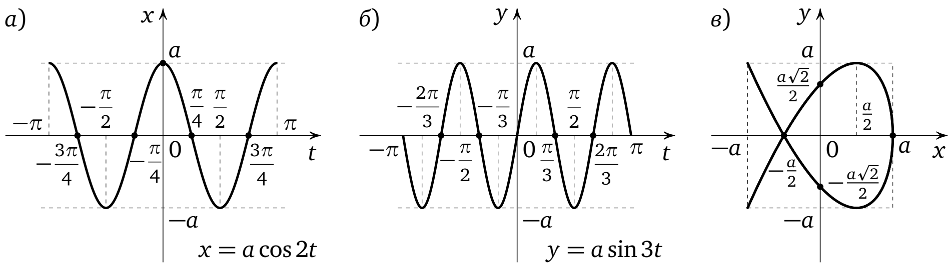


Рис. 16

На промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $x(t)$ убывает, следовательно, этому промежутку соответствует одна ветвь кривой. Когда t растёт от 0 до $\frac{\pi}{6}$, движение по кривой происходит влево вверх от точки $(x(0), y(0)) = (a, 0)$ до точки $\left(x\left(\frac{\pi}{6}\right), y\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{a}{2}, a\right)$. Когда t растёт от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{2}$, движение по кривой происходит влево вниз до точки $\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-a, -a)$, при этом кривая пересекает ось Oy в точке $\left(x\left(\frac{\pi}{4}\right), y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(0, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ и ось Ox в точке $\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right), y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{a}{2}, 0\right)$. При дальнейшем росте t от $\frac{\pi}{2}$ до π, как было отмечено выше, точки $(x(t), y(t))$ лежат на той же самой кривой. При изменении t от $-\pi$ до 0 получаем вторую ветвь кривой, симметричную первой относительно оси Ox. Эскиз кривой представлен на рис. 16 *в*. □

Пример 1.32. Построим эскиз кривой $x = \frac{t^3 + 1}{t^2}$, $y = \frac{t^2 + t + 2}{t^2(t + 2)}$.

Решение. Начнём с построения эскизов графиков функций $x(t)$ и $y(t)$.

Функция $x(t)$ рациональная, обращается в нуль при $t = -1$, положительна при $t \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$, отрицательна при $t \in (-\infty; -1)$, уходит в $+\infty$ при $t \to 0$ и $t \to +\infty$ и в $-\infty$ при $t \to -\infty$, ось Ox является вертикальной асимптотой её графика; эти характеристики показывают, что на луче $(0; +\infty)$ функция $x(t)$ имеет минимум $x_0 = x(t_1)$, см. рис. 17 *а*.

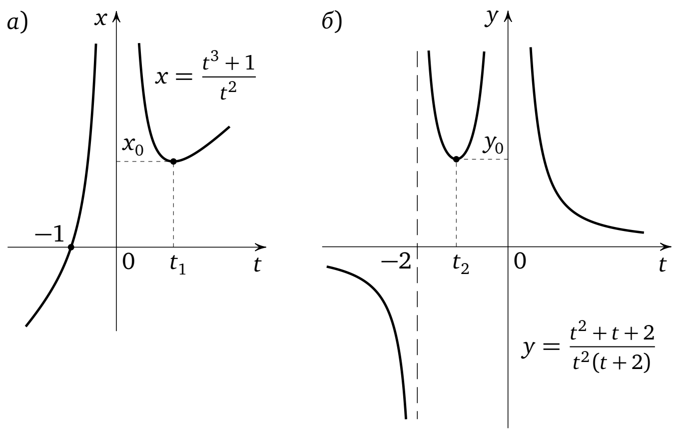


Рис. 17

Функция $y(t)$ рациональная, нулей не имеет, положительна при $t \in (-2; 0) \cup \cup (0; +\infty)$, отрицательна при $t \in (-\infty; -2)$, уходит в $+\infty$ при $t \to -2+$ и $t \to 0$, уходит в $-\infty$ при $t \to -2-$, $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. ось Ot является горизонтальной асимптотой её графика, прямая $t = -2$ и ось Oy являются вертикальными асимптотами; эти характеристики показывают, что на интервале $(-2; 0)$ функция $y(t)$ имеет минимум $y_0 = y(t_2)$, см. рис. 17 *б*.

Переходим к построению эскиза заданной кривой на плоскости xOy. Рассмотрим те интервалы значений t, на которых определены обе функции $x(t)$ и $y(t)$. При изменении t от $-\infty$ до -2 функция $x(t)$ возрастает от $-\infty$ до $-\frac{7}{4}$, а функция $y(t)$ убывает от нуля до $-\infty$, следовательно, эта ветвь кривой расположена слева от прямой $x = -\frac{7}{4}$, идёт вправо вниз, ось Ox является её горизонтальной асимптотой, прямая $x = -\frac{7}{4}$ — вертикальной.

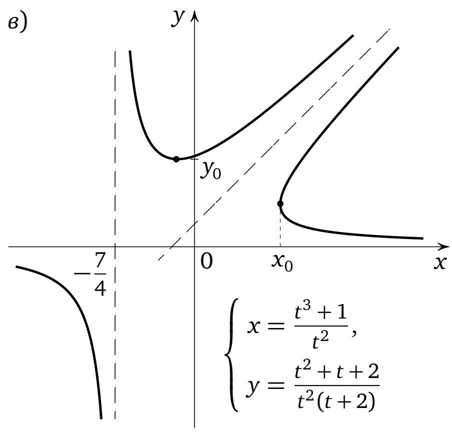
При изменении t от -2 до нуля функция $x(t)$ возрастает от $-\frac{7}{4}$ до $+\infty$, а функция $y(t)$ сначала убывает от $+\infty$ до y_0, затем возрастает до $+\infty$; следовательно, прямая $x = -\frac{7}{4}$ является вертикальной асимптотой этой ветви кривой, кривая идёт сначала вправо вниз, затем вправо вверх. Поскольку при $t \to 0-$ обе функции $x(t)$ и $y(t)$ уходят в бесконечность, выясним, имеет ли кривая наклонную асимптоту. Равенства

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to0-} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to0-} \frac{t^2(t^2+t+2)}{t^2(t+2)(t^3+1)} = \lim_{t\to0-} \frac{t^2+t+2}{(t+2)(t^3+1)} = 1;$$

$$\lim_{x\to+\infty} (y-x) = \lim_{t\to0-} (y(t)-x(t)) = \lim_{t\to0-} \frac{t^2-t^4-2t^3}{t^2(t+2)(t^3+1)} = \lim_{t\to0-} \frac{1-t^2-2t}{(t+2)(t^3+1)} = \frac{1}{2}$$

показывают, что прямая $y = x + \frac{1}{2}$ является наклонной асимптотой этой ветви.

При изменении t от нуля до $+\infty$ функция $y(t)$ убывает от $+\infty$ до нуля, а функция $x(t)$ сначала убывает от $+\infty$ до x_0, затем возрастает до $+\infty$; следовательно, эта ветвь кривой сначала идёт вниз и влево, затем вниз и вправо. Поведение кривой при $t \to 0+$ такое же, как и при $t \to 0-$, так как соответствующие пределы одни и те же, т. е. прямая $y = x + \frac{1}{2}$ является асимптотой



и для этой ветви. Поскольку $x(t) \to +\infty$ и $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, ось Ox является горизонтальной асимптотой этой ветви. □

§ 1.8. Полярная система координат и уравнения кривых в этой системе

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой *полюсом*, луча OP, выходящего из этой точки, называемого *полярной осью*, масштаба для измерения длины и направления отсчёта углов. Положительными называем углы, отсчитываемые от полярной оси против часовой стрелки, а отрицательными — по часовой стрелке.

Полярными координатами r и φ точки M, не совпадающей с полюсом, называются расстояние r от точки M до полюса O и угол φ от полярной оси до луча OM (см. рис. 18). Для полюса O полагаем, что $r=0$, а φ не определён. Полярный угол точки M, отличной от O, имеет бесконечно много значений, главным значением угла φ называется его значение, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

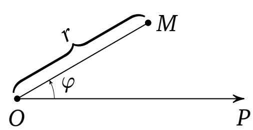


Рис. 18

Если полюс O принять за начало декартовой прямоугольной системы координат, направление полярной оси — за положительное направление оси Ox, а за ось Oy принять такую ось, что угол от положительного направления оси Ox до положительного направления оси Oy равен $\pi/2$ (такие системы назовём *совмещёнными*), то между декартовыми координатами x, y точки M и её полярными координатами r и φ имеют место соотношения:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Обратные соотношения таковы: $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$.

Всюду в этой главе считаем, что полярная и декартова системы координат совмещены.

Замечание. Если $x \neq 0$, $y \neq 0$, то угол φ можно найти из условия $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$, причём за главное значение φ взять такой угол из $[0; 2\pi)$, что знак $\sin\varphi$ равен знаку y и знак $\cos\varphi$ равен знаку x.

Пример 1.33. Пусть точка $M(x, y)$ имеет декартовы координаты $(-1, -1)$. Найдём полярные координаты этой точки.

Решение. $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $\varphi = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. полярные координаты точки M есть $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Пример 1.34. Найдём уравнение в декартовых координатах кривой, уравнение которой в полярной системе имеет вид $r = 2\sin\varphi$.

Решение. Из условия $r \geqslant 0$ следует эквивалентность данного уравнения уравнению $r^2 = 2r\sin\varphi$, т. е. $x^2 + y^2 = 2y$, или $x^2 + (y-1)^2 = 1$, что есть уравнение окружности радиусом 1 с центром в точке $(0, 1)$. □

Пример 1.35. Построим кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $r = \cos 3\varphi$.

Решение. Функция $r = \cos 3\varphi$ — периодическая с главным периодом $T = \dfrac{2\pi}{3}$, поэтому достаточно построить кривую для $0 \leqslant \varphi < \dfrac{2\pi}{3}$, а затем, используя периодичность, построить её для $\dfrac{2\pi}{3} \leqslant \varphi < \dfrac{4\pi}{3}$ и для $\dfrac{4\pi}{3} \leqslant \varphi < 2\pi$. Построим ту часть кривой, которая расположена в угле $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{2\pi}{3}$. Функция $r = \cos 3\varphi$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$ убывает от 1 до 0; $r < 0$ на интервале $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, поэтому нет точек этой кривой, расположенных внутри угла $\dfrac{\pi}{6} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$; r возрастает от 0 до 1 на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{2\pi}{3}\right]$. Для $\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ эскиз кривой представлен на рис. 19 *а*. Осталось построить кривую, используя при этом периодичность функции $\cos 3\varphi$, в других двух углах: $\dfrac{2\pi}{3} \leqslant \varphi < \dfrac{4\pi}{3}$ и $\dfrac{4\pi}{3} \leqslant \varphi < 2\pi$.

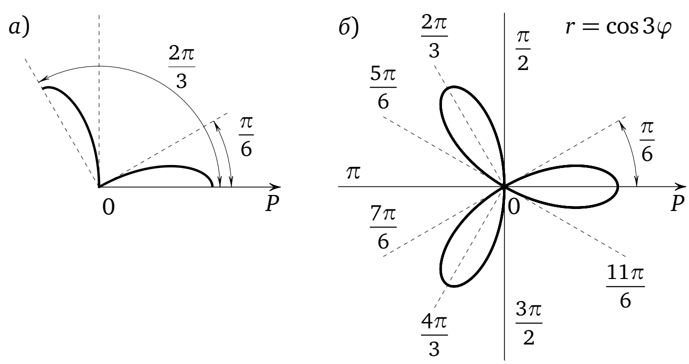
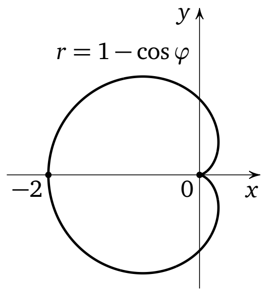


Рис. 19

Эскиз кривой приведён на рис. 19 *б*. □

Пример 1.36. Построим кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $r = 1 - \cos\varphi$.



Решение. Функция $r(\varphi) = 1 - \cos\varphi$ чётная и периодическая с главным периодом 2π, поэтому достаточно построить кривую для $\varphi \in [0; \pi]$, а затем продолжить её по симметрии на углы в интервале $(-\pi; 0)$. При изменении φ от нуля до π переменная $r(\varphi)$ монотонно изменяется от 0 до 2, т. е. точка с координатами $(\varphi, r(\varphi))$ поворачивается против часовой стрелки и, находясь изначально в полюсе, удаляется от него, достигая максимального от него расстояния 2 при $\varphi = \pi$. □

Замечание. Кривую $r = r(\varphi)$, заданную в полярной системе координат, можно задать параметрически в декартовой системе равенствами $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$, где роль параметра играет переменная φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

§ 1.9. Функции, заданные неявно

Пусть задано уравнение $F(x, y) = 0$. Если множество точек плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, состоит из конечного числа непрерывных кривых, каждая из которых есть график некоторой функции $y = y(x)$, то говорят, что это уравнение неявно определяет соответствующее семейство функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_k(x)$. Если точка (x_0, y_0) лежит только на одной из этих кривых, то условие $y(x_0) = y_0$ позволяет однозначно выбрать эту кривую из всего семейства, т. е. уравнение $F(x, y) = 0$ и условие $y(x_0) = y_0$ определяют (или задают) такую неявную непрерывную функцию в окрестности точки (x_0, y_0), что $F(x, y(x)) \equiv 0$, $y(x_0) = y_0$.

Простейшим уравнением вида $F(x, y) = 0$ является уравнение $x - f(y) = 0$, определяющее функцию, обратную к $f: y = f^{-1}(x)$. Ось Oy меняется местами с осью Ox при симметричном отражении плоскости xOy относительно биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, кривая $y = f(x)$ симметрична кривой $x = f(y)$, или $y = f^{-1}(x)$, относительно этой биссектрисы. При таком отражении непрерывная монотонная функция перейдёт в непрерывную монотонную функцию, т. е. обратная функция определена, непрерывна и монотонна. Если же непрерывная функция $x = f(y)$ не монотонна, то кривая, определяемая уравнением $x - f(y) = 0$, уже не будет графиком функции $y = y(x)$, так как нет однозначной зависимости функции от аргумента.

Если уравнение $F(x, y) = 0$ можно разрешить относительно одной из переменных, то построение множества точек (x, y), удовлетворяющих данному уравнению, сводится к построению графика явной функции. Иногда можно ввести параметр t так, что искомое множество точек будет задано параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$.

Пример 1.37. Построим эскиз кривой, заданной уравнением $x = y - \sin y$.

Решение. Имеем $x(\pi k) = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $x > 0$ при $y > 0$ и график функции $x(y)$ в системе yOx касается вертикали (т. е. прямой $x = 0$) в точке $y = 0$ (аналогично и в точках $y = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$).

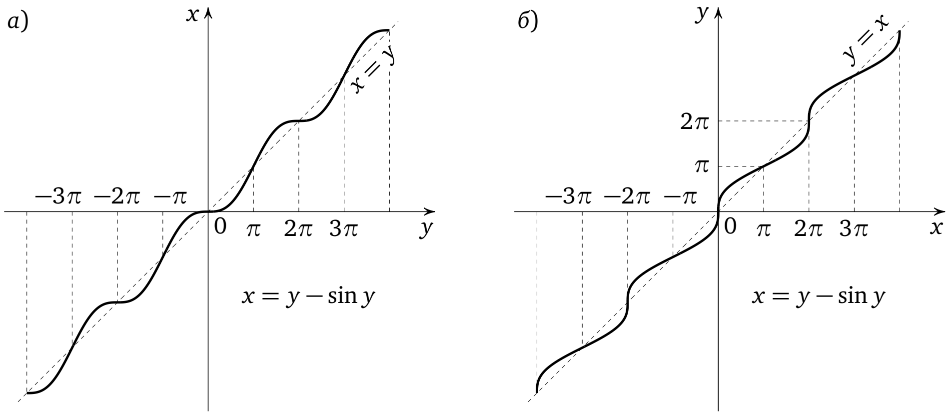


Рис. 20

Эскиз кривой в системе yOx представлен на рис. 20 *а*, а эскиз кривой в системе xOy представлен на рис. 20 *б*. □

Пример 1.38. Построим эскиз кривой, заданной уравнением $x = y\cos y$.

Решение. Функция $x(y)$ — нечётная; при $y \geqslant 0$ имеем

$$|x| \leqslant y, \quad x(\pi/2 + \pi k) = 0, \quad x(2\pi k) = 2\pi k, \quad x(\pi(2k+1)) = -\pi(2k+1).$$

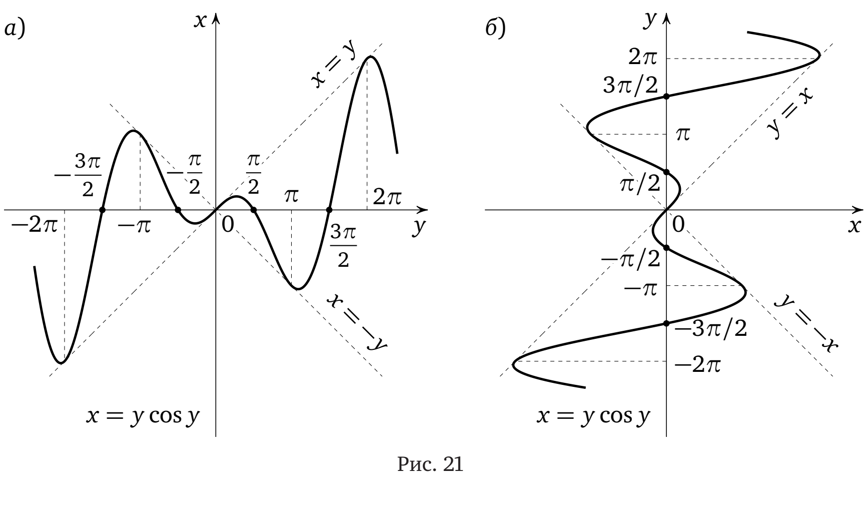
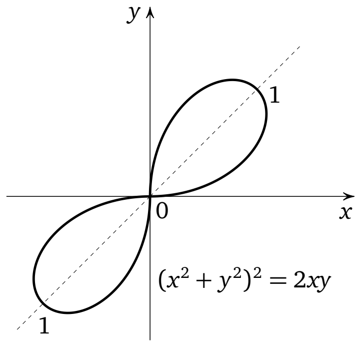


Рис. 21

Эскиз кривой $x(y)$ в системе yOx см. на рис. 21 *а*, а эскиз кривой $y(x)$, определяемой уравнением $x = y\cos y$, в системе xOy представлен на рис. 21 *б*. □

Пример 1.39. Построим эскиз кривой, заданной уравнением $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

Решение. Кривая расположена в I и III квадрантах, так как $xy \geqslant 0$, и симметрична относительно начала координат, так как точки $M_0 = (x_0, y_0)$ и $\overline{M}_0 = (-x_0, -y_0)$ одновременно принадлежат ей или нет. Поэтому достаточ-



но построить кривую в I квадранте, а затем продлить её по симметрии в III квадрант. Перейдём к полярной системе координат, тогда уравнение кривой примет вид $r^4 = 2r^2\cos\varphi\sin\varphi$. Поскольку $r \geqslant 0$, это уравнение равносильно уравнению $r^2 = \sin 2\varphi$. При изменении φ от нуля до $\frac{\pi}{4}$ точка с координатами $(\varphi, r(\varphi))$ поворачивается против часовой стрелки, а её расстояние от полюса увеличивается от 0 до 1; при изменении φ от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$ точка $(\varphi, r(\varphi))$ продолжает поворот против часовой стрелки, приближаясь к полюсу и достигая его при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Отметим, что равенство $r\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) = r\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$ означает симметрию кривой относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{4}$, т. е. луча $y = x$, $x > 0$. □

Пример 1.40. Построим эскиз кривой, заданной уравнением $x^3+y^3=3xy$.

Решение. Из уравнения видно, что точки $M_0(x_0, y_0)$ и $\widetilde{M}_0(y_0, x_0)$ одновременно принадлежат кривой или нет, т. е. кривая симметрична относительно биссектрисы I координатного угла — прямой $y = x$. Начало координат — точка $(0, 0)$ — лежит на данной кривой, а других точек вида $(0, y)$ на этой кривой нет. Введём параметр $t = \frac{y}{x}$, тогда данное уравнение примет вид $x^3(1+t^3) = 3tx^2$, откуда получим параметрическое представление данной кривой: $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = tx = \frac{3t^2}{1+t^3}$.

Функция $x(t)$ рациональная, отрицательна при $t \in (-1; 0)$, положительна при $t \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$, $x(0) = 0$, ось Ot является для неё горизонтальной асимптотой, прямая $t = -1$ — вертикальной (см. рис. 22 *а*). Функция $y(t)$ рациональная, отрицательна при $t \in (-\infty; -1)$, положительна при $t \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$, $y(0) = 0$, ось Ot является для неё горизонтальной асимптотой, прямая $t = -1$, — вертикальной (см. рис. 22 *б*).

Переходим к построению кривой на плоскости xOy. Пользуясь её симметрией, рассмотрим промежутки изменения t, на которых $x(t) > y(t)$, т. е. точка (x, y) лежит справа от прямой $y = x$. Это луч $(-\infty; -1)$ и интервал $(0; 1)$.

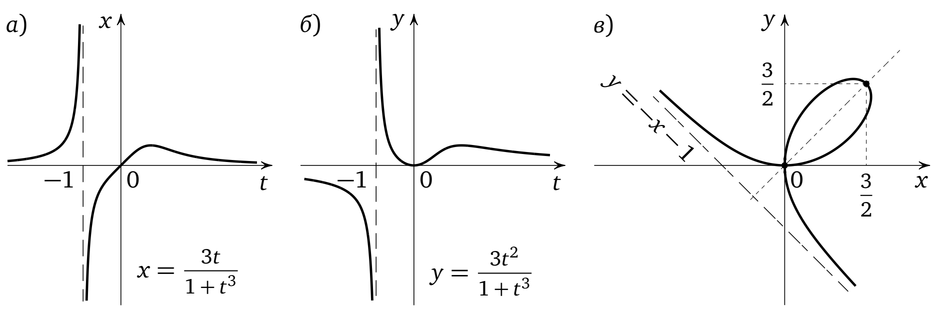


Рис. 22

При изменении t от $-\infty$ до -1 функция $x(t)$ изменяется от нуля до $+\infty$, а функция $y(t)$ от нуля до $-\infty$, следовательно, эта ветвь кривой идёт от точки $(0,0)$ вправо вниз. Равенства

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1-}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to-1-}t=-1;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y+x)=\lim_{t\to-1-}\frac{3t(t+1)}{t^3+1}=\lim_{t\to-1-}\frac{3t}{t^2-t+1}=-1$$

показывают, что прямая $y=-x-1$ является её наклонной асимптотой.

При изменении t от нуля до 1 обе функции $x(t)$ и $y(t)$ положительны и ограничены, причём отношение $\dfrac{y(t)}{x(t)}=t$ возрастает от нуля до 1, поэтому кривая в точке $(0,0)$ касается оси Ox, затем точка $(x(t),y(t))$ поворачивается против часовой стрелки относительно начала координат и при $t=1$ достигает прямой $y=x$ в точке $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

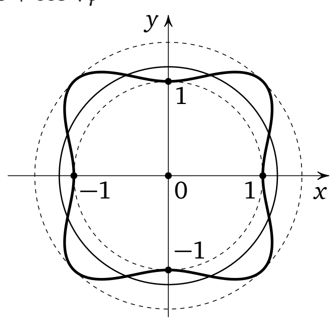
Остальная часть кривой строится симметрично относительно прямой $y=x$. Эскиз кривой приведён на рис. 22 *в*. □

Пример 1.41. Построим в системе xOy эскиз кривой, заданной уравнением $x^4+y^4=x^2+y^2$.

Решение. Перейдём к полярной системе координат: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда уравнение кривой принимает вид

$$r^2=\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi},\quad r=0,\quad \text{т. е. } r^2=\frac{4}{3+\cos4\varphi},\ r=0.$$

Построение такой кривой проводится так же, как и в примере 1.39. Кривая заключена между окружностями $r=1$ и $r=\sqrt{2}$ (эти значения достигаются при значениях аргумента, для которых $\cos4\varphi=1$ и $\cos4\varphi=-1$ соответственно). Кроме того, если $\cos4\varphi>0$, то при таких значениях φ кривая лежит внутри окружности $r=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, если $\cos4\varphi=0$, то пересекает эту окружность, а при $\cos4\varphi<0$ кривая лежит вне этой окружности. □



$x^4+y^4=x^2+y^2$

Задачи

В одной системе координат построить графики функций (1.1—1.11).

✓**1.1°.** $y=x$, $y=x^2$, $y=x^4$.

✓**1.2°.** $y=x$, $y=x^3$, $y=x^5$.

✓**1.3°.** $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=\dfrac{1}{x^3}$.

✓**1.4°.** $y=x$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$.

✓**1.5°.** $y=\sqrt{x^2}$, $y=\sqrt[3]{x^2}$, $y=\sqrt[4]{x^2}$.

✓**1.6°.** $y=x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$.

✓**1.7°.** $y=x$, $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$.

✓**1.8°.** $y=2^x$, $y=3^x$, $y=2^{2x}$, $y=x$.

✓**1.9°.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=3^{-x}$, $y=2^{-2x}$.

✓**1.10°.** $y=x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$.

✓**1.11°.** $y=\log_{1/2}x$, $y=\log_{1/3}x$.

Построить график функции вида $y = Af(x)$ (1.12—1.20).

1.12°. $y = -x^2$. **1.13°.** $y = -\dfrac{1}{x}$. **1.14°.** $y = 2{,}1\sqrt{x}$.

1.15°. $y = -\cos x$. **1.16°.** $y = \dfrac{1}{4}\operatorname{tg} x$. **1.17°.** $y = 0{,}2\operatorname{ctg} x$.

✓**1.18°.** $y = -\dfrac{1}{3}\cdot 5^x$. **1.19°.** $y = 3\log_2 x$. **1.20°.** $y = \dfrac{1}{2}\log_{1/3} x$.

Построить график функции вида $y = f(-x)$ (1.21—1.32).

1.21°. $y = \sqrt{-x}$. **1.22°.** $y = \sqrt[3]{-x}$. ✓**1.23.** $y = -3\sqrt[4]{-x}$.

1.24°. $y = \sin(-x)$. **1.25°.** $y = \cos(-x)$. **1.26°.** $y = \operatorname{tg}(-x)$.

1.27°. $y = \operatorname{ctg}(-x)$. **1.28°.** $y = 2^{-x}$. **1.29.** $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2x}$.

1.30. $y = (2{,}1)^{-x}$. **1.31.** $y = \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{-5x}$. **1.32°.** $y = \log_2(-x)$.

Построить график функции вида $y = f(kx)$ (1.33—1.47).

1.33°. $y = \sqrt{2x}$. **1.34.** $y = \sqrt[3]{-0{,}5x}$. **1.35.** $y = \sqrt[33]{4x}$.

1.36. $y = \sqrt[100]{-2x}$. **1.37°.** $y = \sin 2x$. **1.38°.** $y = \sin(-2x)$.

1.39°. $y = \cos\dfrac{x}{2}$. ✓**1.40°.** $y = \cos\pi x$. **1.41.** $y = \sin\dfrac{x}{\pi}$.

1.42°. $y = \operatorname{tg} 3x$. **1.43°.** $y = \operatorname{ctg}(-2x)$. **1.44°.** $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}$.

1.45°. $y = \log_3(-3x)$. **1.46°.** $y = \log_2 2x$. **1.47°.** $y = \log_{1/2}\dfrac{x}{3}$.

Построить график функции вида $y = f(x + a)$ (1.48—1.59).

1.48°. $y = (x-2)^2$. **1.49°.** $y = (x+4)^2$. **1.50°.** $y = (x+1)^3$.

1.51°. $y = \dfrac{1}{x-3}$. **1.52°.** $y = \sqrt{2+x}$. **1.53°.** $y = \sqrt{1-x}$.

1.54°. $y = \sqrt[3]{x+3}$. **1.55°.** $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$. **1.56°.** $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

1.57. $y = \operatorname{tg}(1-x)$. **1.58.** $y = 2{,}2^{1-x}$. ✓**1.59.** $y = \log_{1/3}(x+1)$.

Построить график функции вида $y = f(ax + b)$ (1.60—1.74).

1.60. $y = \dfrac{1}{1-2x}$. **1.61.** $y = \sqrt[3]{2-3x}$. **1.62.** $y = \sqrt{(1-3x)^3}$.

1.63. $y = \sqrt[3]{(2x-5)^2}$. **1.64.** $y = \sin x + \cos x$. ✓**1.65.** $y = \sin\dfrac{6\pi x - \pi}{3}$.

1.66. $y = \cos\dfrac{2\pi x + \pi}{4}$. ✓**1.67.** $y = \cos\dfrac{2\pi x - \pi}{5}$. ✓**1.68.** $y = \operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

1.69. $y = \operatorname{tg}\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. **1.70.** $y = \operatorname{tg}\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. **1.71.** $y = \operatorname{ctg}\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

1.72. $y = \operatorname{ctg}\dfrac{3x+\pi}{6}$. **1.73.** $y = (\pi - 3)^{2x-1}$. ✓**1.74.** $y = \log_3(2x+3)$.

Построить график функции вида $y = f(ax + b) + A$ (1.75—1.88).

1.75°. $y = x^2 + 2x - 5$. **1.76°.** $y = 2x - x^2 + 4$.

✓**1.77°.** $y = x^2 + 4x + 8$. **1.78.** $y = 2 - 3(x-1)^2$.

✓**1.79.** $y = 1 - 3x - 4x^2$. **1.80.** $y = 2 - \sqrt{-x}$.

1.81. $y = 2 - 3\sqrt[3]{1-2x}$. **1.82.** $y = 2 - 3\cos x$.

✓**1.83.** $y = \sin^2 x$. **1.84.** $y = \cos^2 x$.

1.85. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. **1.86.** $y = 3 - \pi^{2x-1}$.

1.87. $y = 2 + \log_2(1+x)$. **1.88.** $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\log_{1/2}(1+2x)$.

Построить графики функции вида $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (1.89—1.97).

✓**1.89.** $y=\dfrac{5x-1}{3x+2}$.

✓**1.90.** $y=\dfrac{9x-3}{15x-5}$.

1.91. $y=\dfrac{4+x}{2x+1}$.

1.92. $y=\dfrac{7x+2}{x}$.

1.93. $y=\dfrac{5x+20}{3x+12}$.

1.94. $y=\dfrac{2x-8}{x-2}$.

1.95. $y=-\dfrac{x+2}{x+5}$.

1.96. $y=-\dfrac{7x+6}{x+1}$.

1.97. $y=\dfrac{14x-8}{2x-1}$.

Построить график функции вида $y=f(|x|)$ или $y=|f(x)|$ (1.98—1.101).

1.98. $y=||x|-1|$.

1.99. $y=||2x-1|-2|$.

1.100. $y=x^2-3|x|+1$.

1.101. $y=\left|\dfrac{2x-1}{3x+2}\right|$.

Построить график функции (1.102—1.149).

1.102. $y=\sqrt{2}^{\log_2 x}$.

1.103. $y=\log_{1/2}(x-1)^2$.

1.104. $y=\dfrac{x^2-x}{x^2+x}$.

1.105. $y=x^{\log_x(x^2-1)}$.

1.106. $y=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x$.

1.107. $y=-\dfrac{1}{2}\sin x\cos x$.

1.108°. $y=\sin^2 x+\cos^2 x$.

1.109. $y=\sin^2 x-\cos^2 x$.

1.110. $y=\sin^4 x-\cos^4 x$.

1.111. $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$.

1.112. $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$.

1.113. $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

1.114. $y=\cos x+\sqrt{\cos^2 x}$.

1.115. $y=\sin x-\sqrt{\sin^2 x}$.

1.116. $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

1.117. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

1.118°. $y=|x|-x$.

1.119. $y=x^2-|x|$.

1.120. $y=|x|-(\sqrt{x})^2$.

1.121. $y=|x|-\sqrt{x^2}$.

1.122. $y=|x|-|x-1|$.

1.123. $y=|x|+|x+1|$.

1.124. $y=|x|-|x+1|-|x+2|$.

✓**1.125.** $y=|x^2-1|-x^2$.

1.126. $y=|x^2+x|-x+1$.

1.127. $y=|x^2+3x|+2x-8$.

1.128. $y=(|x|-1)(x+1)$.

1.129. $y=\dfrac{|1-3x|}{2x+1}$.

1.130. $y=\left|\dfrac{|x|-1}{x}\right|$.

1.131. $y=\dfrac{|2x+3|}{|x|-1}$.

1.132. $y=\dfrac{1}{|1-|x-2||}$.

1.133. $y=\dfrac{|2|x-1|-3|}{|x-1|+2}$.

1.134. $y=\dfrac{|x-3|+|x+1|}{|x+3|+|x-1|}$.

1.135. $y=\dfrac{||x-1|-2|}{||x|-1|-2}$.

1.136. $y=x^2+\dfrac{x^2}{|x|}+\dfrac{(1-x)^2}{|1-x|}$.

1.137. $y=\dfrac{(x+1)^3}{x+1}-\dfrac{|x^3|}{x}$.

1.138. $y=\dfrac{x^2+x}{|x|}+\dfrac{x^2-x}{|1-x|}+\dfrac{x^2-1}{|1+x|}$.

1.139. $y=2^{|\log_2 x|}$.

1.140. $y=\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}+\operatorname{ctg}|x|$.

1.141. $y=\dfrac{1+|\cos x|}{\sin|x|}$.

1.142. $y=\operatorname{sgn}\cos x$.

1.143. $y=x+\operatorname{sgn}\sin x$.

1.144. $y=\operatorname{sgn}\sin\pi x+\operatorname{sgn}\cos\pi x$.

1.145. $y=\operatorname{sgn}(\sin\pi x+\cos\pi x)$.

1.146. $y=\sqrt[3]{x^2\operatorname{sgn}\cos\pi x}$.

1.147. $y=[2\cos 2\pi x]$.

1.148. $y=\left\{\dfrac{1}{x}\right\}$.

1.149. $y=\{\sin\pi x\}$.

1.150. Доказать следующие утверждения:
а) если $\{x\}>\{y\}$, то $\{x-y\}=\{x\}-\{y\}$;
б) если $x\notin\mathbb{Z}$, то $\{-x\}=1-\{x\}$;
в) если $n\in\mathbb{N}$ и $n\{x\}<1$, то $\{nx\}=n\{x\}$.

Вычислить (1.151—1.164).

1.151. $\cos(\arcsin 1)$.
1.152. $\sin(\arccos 0{,}8)$.
✓**1.153.** $\sin\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$.
1.154. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$.
1.155. $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\frac{5}{13}\right)$.
1.156. $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.
1.157. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4}\right)$.
1.158. $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.
1.159. $\arcsin(\sin 11)$.
1.160. $\arccos(\cos 7)$.
1.161. $\arcsin(\cos 8)$.
✓**1.162.** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 25)$.
1.163. $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 4)$.
1.164. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 17)$.

Доказать равенство (1.165—1.176).

✓**1.165.** $\arcsin\frac{4}{5}=\arccos\frac{3}{5}=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}=\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}$.
1.166. $\arccos\left(-\frac{9}{41}\right)=\pi-\arcsin\frac{40}{41}$.
1.167. $\arcsin\left(-\frac{7}{25}\right)=-\operatorname{arctg}\frac{7}{24}$.
1.168. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{7}{23}=\frac{\pi}{4}$.
1.169. $\pi-\arcsin 0{,}9=2\operatorname{arctg}4$.
1.170. $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$.
1.171. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{x},\quad x\neq 0$.
1.172. $\cos(2\arccos x)=2x^2-1,\quad |x|\leqslant 1$.
✓**1.173.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\begin{cases}\operatorname{arcctg}x, & x>0,\\ \operatorname{arcctg}x-\pi, & x<0.\end{cases}$
1.174. $\sin(3\arcsin x)=3x-4x^3,\quad |x|\leqslant 1$.
1.175. $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2|\operatorname{arctg}x|,\quad x\in\mathbb{R}$.
1.176. $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\begin{cases}\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{4}, & x<1,\\ \operatorname{arctg}x-\frac{3\pi}{4}, & x>1.\end{cases}$

Построить график функции, содержащей обратные тригонометрические функции (1.177—1.200).

1.177. $y=\arcsin(2x+1)$.
1.178. $y=\arccos(3x-2)$.
1.179. $y=\operatorname{arctg}(2-3x)$.
1.180. $y=\operatorname{arcctg}(1-2x)$.
1.181. $y=\arcsin\frac{1-5x}{4}$.
✓**1.182.** $y=\arccos\frac{1+3x}{7}$.
✓**1.183.** $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.
1.184. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.
1.185. $y=\arccos\frac{1-|x|}{2}$.
1.186. $y=\arcsin\frac{2+3|x|}{4}$.
1.187. $y=\operatorname{arctg}\frac{1+|x|}{4}$.
1.188. $y=\operatorname{arcctg}\frac{2|x|-3}{5}$.
✓**1.189.** $y=\arcsin(\sin x)$.
1.190. $y=\arcsin(\cos x)$.
1.191. $y=\arccos(\cos x)$.
1.192. $y=\arccos(\sin x)$.
1.193. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$.
✓**1.194.** $y=\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}x)$.
1.195. $y=\sin(\arcsin 2x)$.
1.196. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(2x+1))$.

1.197. $y=\cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)$. **1.198.** $y=\cos\left(\arccos\frac{1}{x}\right)$.

1.199. $y=\arccos(\sin x^3)$. **1.200.** $y=\arcsin(\cos\sqrt{x})$.

Построить эскиз графика суммы или произведения функций (1.201—1.212).

1.201. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$. ✓**1.202.** $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}$.

✓**1.203.** $y=x+2^x$. **1.204.** $y=x+\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$.

✓**1.205.** $y=x+\sin x$. **1.206.** $y=x-\sin x$.

✓**1.207.** $y=x\sin x$. **1.208.** $y=x^2\sin x$.

1.209. $y=e^x\sin\pi x$. **1.210.** $y=e^{-x}\cos\pi x$.

✓**1.211.** $y=\frac{\cos\pi x}{1+x^2}$. **1.212.** $y=\frac{x^2\operatorname{sgn}\cos\pi x}{1+x^2}$.

Построить график функции, содержащей гиперболические и обратные гиперболические функции (1.213—1.218).

1.213. $y=\operatorname{sh}^2x-\operatorname{ch}^2x$. **1.214.** $y=-4\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}$.

1.215. $y=\operatorname{sh}^2 2x+\operatorname{ch}^2 2x$. **1.216.** $y=\operatorname{ch}^4x-\operatorname{sh}^4x$.

✓**1.217.** $y=\operatorname{arch}\sqrt{x^2+1}$. **1.218.** $y=\operatorname{arth}\frac{1}{x}$.

Построить эскиз графика рациональной функции (1.219—1.244).

1.219. $y=(x-2)(x^2-4)$. **1.220.** $y=(x+2)(x-1)^3$.

1.221. $y=(1-x^4)(x+3)(x-2)^2$. **1.222.** $y=(1-x)(1-x^2)^3(2+x)^5$.

1.223. $y=x^4-(1-x)^4$. **1.224.** $y=\frac{3}{(1-2x)^2}$.

✓**1.225.** $y=\frac{x^2}{1-x}$. **1.226.** $y=\frac{x^3}{1-x^2}$.

1.227. $y=\frac{x^2+1}{x^2+2}$. **1.228.** $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+3}$.

1.229. $y=\frac{x^2-4}{2x^2-1}$. ✓**1.230.** $y=\frac{(x-4)(x^2-9)}{x^2-5x+6}$.

1.231. $y=\frac{x^3-4x}{(x-1)^2(x+1)}$. **1.232.** $y=\frac{3x^2-2x-1}{(x^2-4)(x+2)}$.

1.233. $y=\frac{3x^2+4x+1}{(2x+1)(x-1)}$. **1.234.** $y=\frac{(x^2-3x-4)(x-3)}{(x+5)(x-3)}$.

1.235. $y=\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2-9}$. **1.236.** $y=\frac{x^3-x}{(x+2)^2(x-10)}$.

1.237. $y=\frac{(x-1)(x+2)^2}{(2x-1)^2}$. **1.238.** $y=\frac{(4x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(2x+1)}$.

✓**1.239.** $y=\frac{x^4-x^3-6x^2}{(x-2)^2(x+1)}$. **1.240.** $y=\frac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x-3)(x^2+1)}$.

1.241. $y=\frac{(x-4)^2(x+1)(x+3)}{(x^2-4)(x+2)^2}$. **1.242.** $y=\frac{x^4-9x^2}{(x-4)^2(x+1)^3}$.

1.243. $y=\frac{x^4+2x^3-3x^2}{(x^2-4)(x+1)^2}$. **1.244*.** $y=\frac{(x-2)(x^4+2x^3+3x^2)}{(4x^2-4x+1)(4x^2-1)}$.

Построить эскиз графика алгебраической функции (1.245—1.275).

1.245°. $y=\sqrt{(x-1)^2(x-2)}$. **1.246.** $y=\sqrt{x^2(x-1)^2(x-2)}$.

1.247. $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$. **1.248.** $y=\sqrt[3]{x^6(2+x)^4(1-x)}$.

✓**1.249.** $y=\sqrt[3]{(x+1)^7(x-2)^2(x-1)}$. **1.250.** $y=\sqrt[5]{(x+2)^2}(x-1)$.

1.251. $y=\sqrt[5]{2x^2(x-3)^3(x^2-2x)^4}$. **1.252.** $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2-4}$.

✓**1.253.** $y=\dfrac{x-2}{x-1}\sqrt{x}$. **1.254.** $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-x}}{x^2-x-6}$.

1.255. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+4)^7(x-2)^2(x+1)}}{\sqrt{(x+2)^2(x+5)}}$. **1.256.** $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)}}{\sqrt[5]{(x+1)^2(x-2)^3}\cdot\sqrt{x+10}}$.

1.257. $y=(x+1)^{1/2}(x-1)^{1/3}(x-2)^2(x-3)^{2/3}$.

✓**1.258.** $y=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}$. **1.259.** $y=\sqrt{x^2+9x}-x$.

1.260. $y=\sqrt[3]{x^2}+2x+1$. **1.261.** $y=x+\sqrt[5]{(x-1)^2}$.

1.262. $y=\sqrt[5]{(x-1)^4}-x$. **1.263.** $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2-x}}$.

1.264. $y=\sqrt[5]{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$. **1.265.** $y=\sqrt[4]{x^4}+\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2}}$.

1.266. $y=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{(x-1)^2}$. **1.267.** $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

1.268. $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$. **1.269.** $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}+6x-10$.

1.270. $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}$. **1.271.** $y=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$.

1.272. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x^2+1}}$. **1.273.** $y=\dfrac{\sqrt{x^2(x+1)^2(x-2)}}{x^2-7x+12}$.

1.274*. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}$. **1.275*.** $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{(x-4)^2}}{x-2}$.

Построить эскиз графика функции (1.276—1.290).

1.276. $y=(|x+1|-3)x^2$. **1.277.** $y=(|x|+1)(x-3)x^2$.

1.278. $y=|x^3-x^5+2|$. **1.279.** $y=|x^2-x^4|+4$.

1.280. $y=\dfrac{|x+2|(x-1)^2}{x^2+1}$. **1.281.** $y=\dfrac{(x^3-1)(x+4)|x|}{(x^4+2)(x-3)}$.

1.282. $y=\dfrac{(x^3-1)(x-2)}{(|x|-1)^2(x-4)}$. **1.283.** $y=\dfrac{1}{x^2-4|x|+3}$.

1.284. $y=\dfrac{x-2}{|x+3|}\cdot\sqrt[3]{x+2}$. **1.285.** $y=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{|x^2-4|}}$.

1.286. $y=\left|\sqrt[3]{x^2-x}\right|+1$. **1.287.** $y=\left|\sqrt[3]{x^2+x}-2\right|$.

1.288*. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}-\sqrt{|x^4-4|}}$. **1.289*.** $y=x\sqrt{|x^2-1|}-\sqrt{x^2+1}+1$.

1.290*. $y=(x-1)\sqrt{(x+1)^3(2-x)}\cdot(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{|x|}+1)$.

Построить график функции вида $y=\dfrac{1}{f(x)}$ (1.291—1.296).

✓**1.291.** $y=\dfrac{1}{\log_2(x-3)-1}$. **1.292.** $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$.

1.293. $y=\dfrac{1}{|2^x-1|}$. **1.294.** $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-2|x|}-1}$.

1.295. $y=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}||x|-1|}$. **1.296.** $y=\dfrac{1}{\arcsin\dfrac{1-|x|}{3}}$.

Построить эскиз графика композиции функций (1.297—1.322).

1.297. $y=e^{-x^2+x}$.

1.298. $y=\sin x^2$.

✓**1.299.** $y=\sin\dfrac{1}{x}$.

1.300. $y=\cos\dfrac{1}{x}$.

1.301. $y=\log_{1/\pi}\sin 2x$.

1.302. $y=\log_{1/7}\cos\dfrac{3\pi x-\pi}{5}$.

1.303. $y=\log_{1/2}|x^2-x|$.

1.304. $y=\log_{\sqrt{\pi}}\dfrac{|x|}{x+2}$.

1.305. $y=\log_3\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

1.306. $y=\log_5|1-2^{-x}|$.

1.307. $y=\cos^3\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

1.308. $y=\sin^4\left(5x-\dfrac{10\pi}{3}\right)$.

✓**1.309.** $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$.

1.310. $y=2^{\frac{x^2-1}{x^2-4}}$.

1.311. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\operatorname{tg}\frac{2x-\pi}{3}}-1$.

1.312. $y=2^{\sec\frac{2\pi x-3\pi}{8}}$.

1.313*. $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x-\cos^2 x}}$.

1.314. $y=3^{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

1.315. $y=2^{\log_4\sin x}$.

1.316. $y=2^{|\sin x|+|\cos x|}$.

1.317. $y=2^{\frac{|1-2x|}{3x+4}}$.

1.318. $y=\log_2\dfrac{|x+2|x}{2-x}$.

1.319. $y=(\sqrt{\sin 3x})^{22}$.

1.320. $y=(\sqrt{\cos x})^{18}$.

1.321. $y=\log_2\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)$.

1.322. $y=(\sin 7)^{\frac{1}{\cos(2|x|-1)}}$.

Построить эскиз графика композиции функций, содержащей обратные тригонометрические функции (1.323—1.358).

1.323. $y=\sin(\operatorname{arctg} x)$.

1.324. $y=\sin(\operatorname{arcctg} x)$.

1.325. $y=\operatorname{tg}(\arcsin x)$.

1.326. $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.

1.327. $y=\operatorname{tg}(\arccos x)$.

1.328. $y=\operatorname{ctg}(\arcsin x)$.

1.329. $y=\arcsin(\operatorname{tg} x)$.

1.330. $y=\arccos(\operatorname{ctg} x)$.

1.331. $y=\arcsin\dfrac{1}{x+2}$.

1.332. $y=\arccos\dfrac{2}{x-3}$.

1.333. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{x-3}$.

1.334. $y=\arcsin\dfrac{1+x}{1-x}$.

1.335. $y=\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

1.336. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$.

1.337. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2+1}{x}$.

1.338. $y=\arccos\dfrac{2x-4}{x^2-4x+5}$.

1.339. $y=\arcsin\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^3}$.

1.340. $y=\arccos\dfrac{x^3-4x}{(x-1)^2(x+1)}$.

1.341. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2-9}$.

✓**1.342.** $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^4-4x^3+2x^2}{(x-2)^2(x+1)^2}$.

1.343. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{(x^3-1)(x+4)|x|}{(x^3+1)(x-3)^5}$.

1.344. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^4-9x^2}{(x-4)^2(x+1)^3}$.

1.345. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x^3-x}{(x+2)^2(x-10)}$.

1.346. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x-3)^2(x^2+1)}$.

1.347. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x^3-8}{x^2-9}$.

1.348. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^5-1}{x^6-1}$.

1.349. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{|1-x|}{\sqrt{3}x+2}$.

1.350. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x+1}{|x|-2}$.

✓**1.351.** $y=\operatorname{arctg}(\lg x)$.

1.352. $y=\arccos\dfrac{1}{\lg x}$.

1.353. $y=\operatorname{arcctg}\Big(\lg\dfrac{x+1}{x-1}\Big)$.

1.354. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\cos x}$.

1.355*. $y=\operatorname{arctg}\Big(\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}\Big)$.

1.356. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$.

1.357*. $y=\arcsin\Big(x-\sqrt{x^2-\dfrac{1}{4}}\Big)$.

1.358. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$.

Построить эскиз графика функции (1.359—1.379).

1.359. $y=x\cos\dfrac{\pi}{x}$.

1.360. $y=x^2\cos\dfrac{2\pi}{x}$.

1.361. $y=(x^2-1)\cos\dfrac{\pi}{x}$.

1.362. $y=(x^2-1)\sin\dfrac{\pi}{x}$.

✓**1.363.** $y=\sqrt{1-x^2}\cos\dfrac{\pi}{x}$.

1.364. $y=e^{-x^2}\sin 2\pi x$.

1.365*. $y=\dfrac{x}{2^{\frac{x}{1-x}}-1}$.

1.366*. $y=\dfrac{x+2}{2^{\frac{x-1}{x+1}}-1}$.

1.367. $y=x\Big(2-\sin\dfrac{1}{x}\Big)$.

1.368. $y=x^2\Big(2+\sin^2\dfrac{1}{x}\Big)$.

1.369. $y=x\arcsin\dfrac{1}{x}$.

1.370*. $y=\dfrac{x}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x^2-1}}-1}$.

1.371*. $y=\dfrac{e^x(x^2-4x+3)}{x-5}$.

1.372*. $y=\dfrac{x^2e^{\frac{1}{x-1}}}{x^2-5x-4}$.

1.373*. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x|\sin x|}$.

1.374*. $y=e^{-100(1-x)^2}+e^{-100(1+x)^2}$.

1.375*. $y=2^{\frac{x}{x-1}}(\operatorname{sgn}(4-x^2)+1)$.

1.376*. $y=2^{\frac{x}{x-1}}(|x|-2-||x|-2|)$.

1.377*. $y=\big(\sqrt{9-x^2}-x-3\big)e^x\cdot x(x-1)$.

1.378*. $y=\arcsin\big(x\sqrt{x^2-1}-\sqrt{|x^4-2|}\big)$.

1.379*. $y=\sqrt[3]{x}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}+x}{2x-1}$.

Построить эскиз кривой, заданной параметрически (1.380—1.394).

1.380. $x(t)=\dfrac{t}{t^2-1},\ y(t)=\dfrac{t^2}{t-1}$.

1.381. $x(t)=\dfrac{4-t^2}{1+t^3},\ y(t)=\dfrac{t^2}{1+t^3}$.

✓**1.382.** $x(t)=\dfrac{t^3}{t^3+1},\ y(t)=\dfrac{t^2}{t^3+1}$.

1.383. $x(t)=t^2,\ y(t)=\dfrac{t^3+2t^2+t}{t+2}$.

1.384. $x(t)=\dfrac{t^2+1}{4(t-1)},\ y(t)=\dfrac{t}{t+1}$.

1.385. $x(t)=\dfrac{t}{1-t^2},\ y(t)=\dfrac{t(1-4t^2)}{1-t^2}$.

1.386. $x(t)=\dfrac{t^2}{t^2-1},\ y(t)=\dfrac{t^2+1}{t+2}$.

1.387*. $x(t)=\dfrac{t^2-1}{t(t+2)},\ y(t)=\dfrac{t^2}{(t+2)(t+1)}$.

✓**1.388.** $x(t)=\sin t,\ y(t)=\sin 2t$.

1.389. $x(t)=\sin 3t,\ y(t)=\cos t$.

1.390. $x(t)=\cos 4t,\ y(t)=\cos 3t$.

1.391. $x(t)=e^t\sin t,\ y(t)=e^t\cos t$.

1.392. $x(t)=(\ln t)\sin t,\ y(t)=\cos t$.

1.393. $x(t)=\operatorname{arctg} t,\ y(t)=t^3-t$.

1.394. $x(t)=\arcsin(\sin t),\ y(t)=\arccos(\cos t)$.

Построить эскиз кривой, заданной уравнением в полярной системе координат (1.395—1.409).

1.395°. $r=2$. **1.396°.** $r=\dfrac{1}{\cos\varphi}$. **1.397.** $r=\dfrac{2}{\sin\varphi}$.

1.398. $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. **1.399.** $r=\sin\varphi$. **1.400.** $r=\cos\varphi$.

1.401. $r=2\varphi$. ✓**1.402.** $r=e^{2\varphi}$. **1.403*.** $r=\dfrac{a}{\varphi}$.

1.404. $r=\cos 2\varphi$. **1.405.** $r=\cos 5\varphi$. ✓**1.406.** $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

1.407. $r=1+2\cos\varphi$. **1.408.** $r=\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$. **1.409.** $r=\dfrac{1}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$.

Преобразовать к полярным координатам уравнение линии (1.410—1.421).

1.410°. $x=3$. **1.411°.** $y=4$. **1.412.** $y=2x$.

1.413°. $x^2+y^2=5$. **1.414°.** $x^2+y^2=x$. **1.415°.** $x^2+y^2=4y$.

1.416. $x+y=2$. **1.417.** $(x^2+y^2)^2=xy$.

✓**1.418.** $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$. **1.419.** $x^4+y^4=x^2+y^2$.

1.420. $x^2+y^2=(x^2-y^2)^2$. **1.421.** $xy^2+yx^2=(x^2+y^2)^2$.

Преобразовать к декартовым координатам уравнение линии (1.422—1.430).

1.422°. $r\cos\varphi=3$. **1.423°.** $r\sin\varphi=2$. ✓**1.424.** $r^2\sin 2\varphi=2$.

1.425°. $r=\sqrt{2}$. **1.426°.** $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. **1.427.** $r=\dfrac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$.

1.428. $r=2\cos\varphi$. **1.429.** $r=1+\cos\varphi$. **1.430.** $r=\cos^2\varphi$.

Построить эскиз кривой, заданной уравнением (1.431—1.465).

1.431°. $|y|=x-1$. **1.432°.** $|x|+|y|=1$.

1.433. $||x|-|y||=1$. **1.434.** $[x]+[y]=1$.

1.435. $|x+y|=-x+|y|$. **1.436.** $||x|+||y|-3|-3|=1$.

1.437. $|y+|y||=||x|-x|$. **1.438.** $|y|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(|x|-x)$.

1.439. $x^2+y^2=x+2$. ✓**1.440.** $x^2+y^2=x+y$.

1.441. $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. **1.442.** $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

1.443. $x^3+y^3=1$. ✓**1.444.** $x^4+y^4=1$.

✓**1.445.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. **1.446.** $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

1.447. $y^2=x-x^3$. **1.448.** $x=y-y^3$.

1.449. $x^2=y-y^3$. **1.450*.** $x^2=y^4+y^6$.

1.451. $x^2-xy+y^2=1$. **1.452.** $x^2y^2+y=1$.

1.453. $y^2=x-2x^2+x^3$. **1.454.** $x^3+y^3=3x^2$.

1.455*. $y^3=x^2+2xy^2$. **1.456*.** $y^4=3x^2-2xy^2$.

1.457*. $x^5+y^3=x^2y$. **1.458*.** $x^5+y^4=x^2y$.

✓**1.459*.** $x^5+y^5=xy^2$. **1.460*.** $x^5+4x^2y=4y^2$.

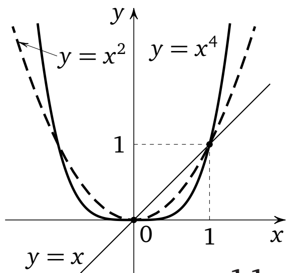
1.461*. $x^4-y^4=x^2-2y^2$. **1.462*.** $x^4+y^4=x^8+y^8$.

1.463*. $\max\{144-25x^2-9y^2-54y,\ \min\{y,\ 25-5y-x^2\}\}=0$.

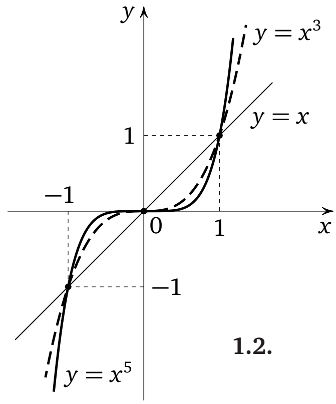
✓**1.464*.** $(x^2+y^2-25)(16x^2+y^2-4)(x^2+16y^2+96y+140)\times$
$\times(4x^2-16|x|+4y^2-16y+31)=0$.

1.465*. $\max\Big\{(2-|x|-2|2y-x+3|),$
$\min\Big\{x^2+y^2-4x,\ 3x^2-y^2+9-4x\sqrt{9-y^2},\ 12y^2-x^2+3x+4-8\sqrt{4+3x-x^2}\Big\}\Big\}\times$
$\times(16x^2-32x+16y^2-32y+31)=0$.

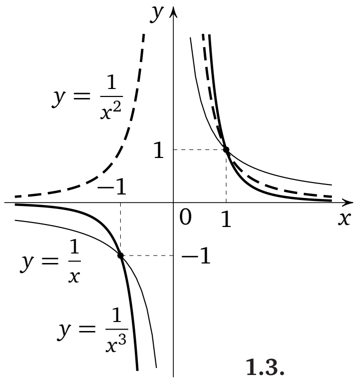
Ответы и указания



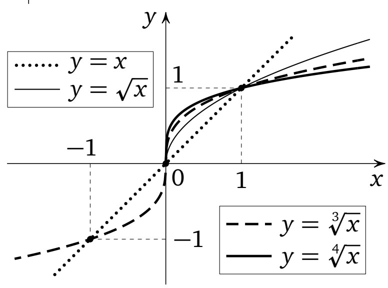
1.1.



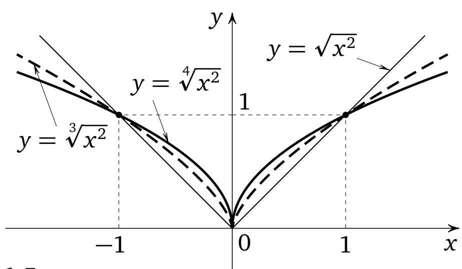
1.2.



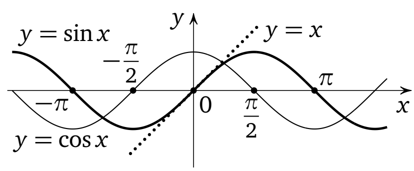
1.3.



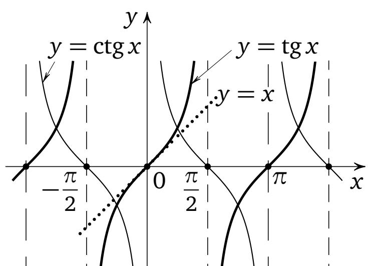
1.4.



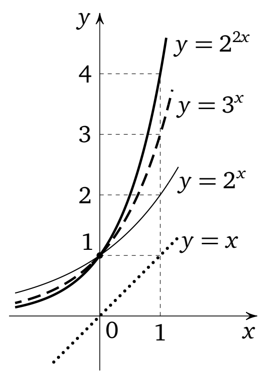
1.5.



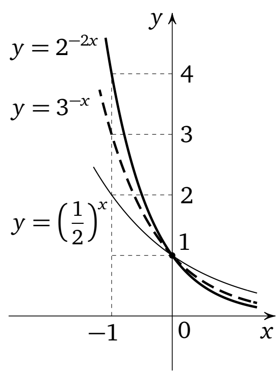
1.6.



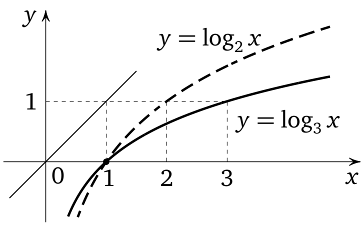
1.7.



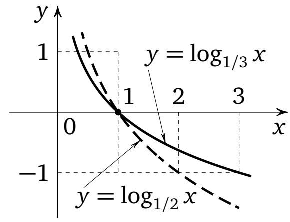
1.8.



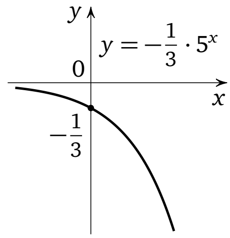
1.9.



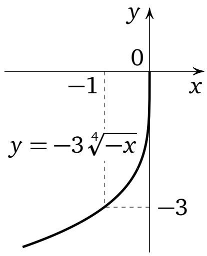
1.10.



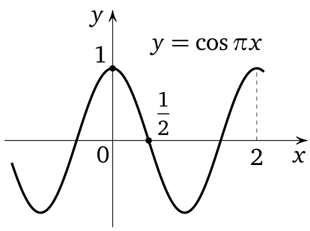
1.11.



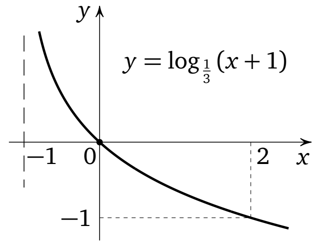
1.18.



1.23.

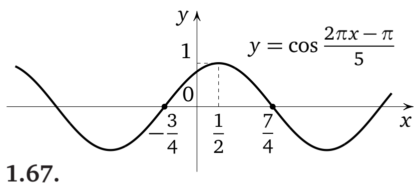


1.40.

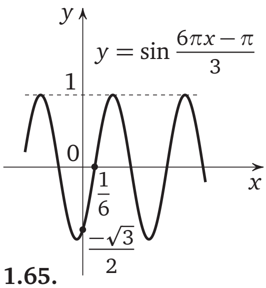


1.59.

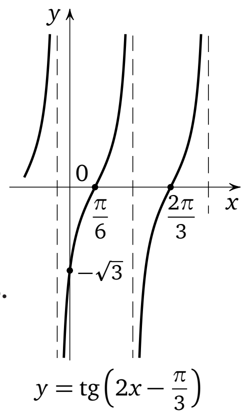
1.64. *Указание.* $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.



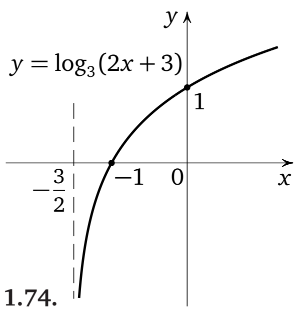
1.67.



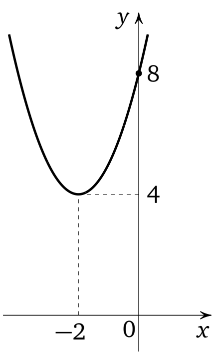
1.65.



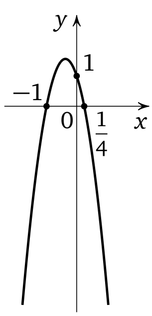
1.68.



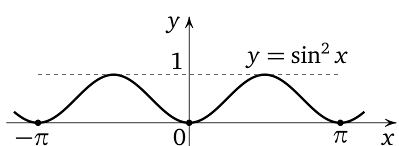
1.74.



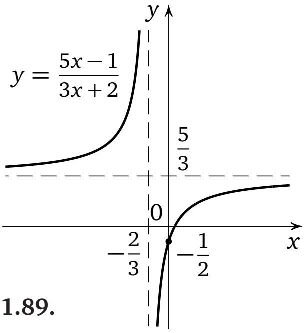
1.77.



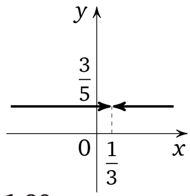
1.79.



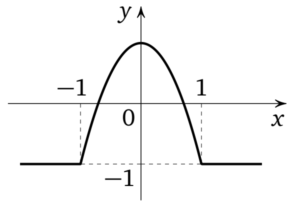
1.83. *Указание.* $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.



1.89.

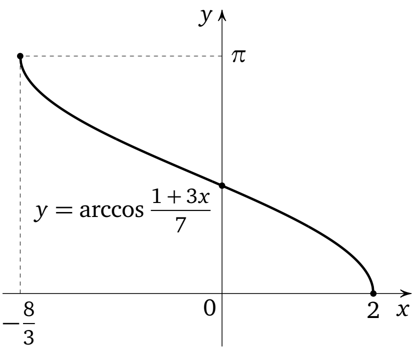


1.90.

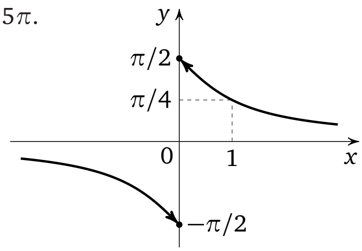


1.125.

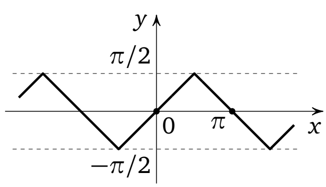
1.151. 0. **1.152.** 0,6. **1.153.** $\frac{\sqrt{15}}{8}$. **1.154.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **1.155.** $\frac{56}{65}$. **1.156.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **1.157.** $\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{2}}{12}$. **1.158.** $-\frac{4}{3}$. **1.159.** $11-4\pi$. **1.160.** $7-2\pi$. **1.161.** $\frac{5\pi}{2}-8$. **1.162.** $25-8\pi$. **1.163.** $\frac{3\pi}{2}-4$. **1.164.** $17-5\pi$.



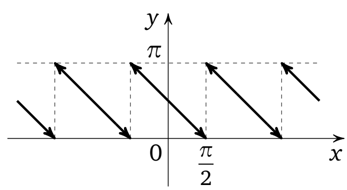
1.182.



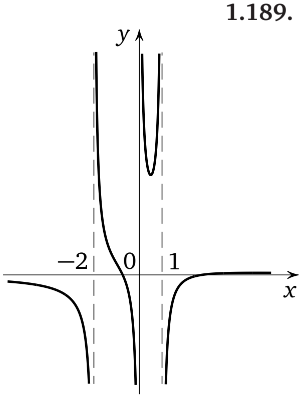
1.183. *Указание.* См. задачу 1.173.



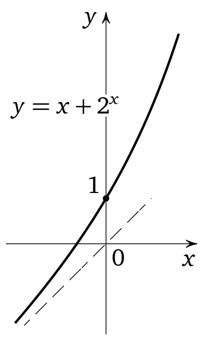
1.189.



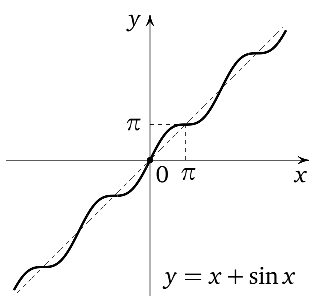
1.194.



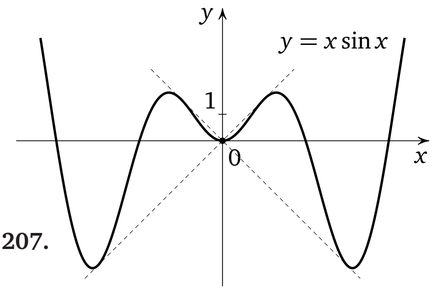
1.202.



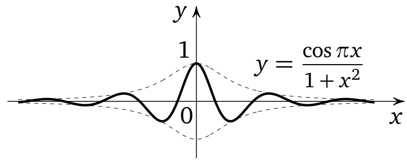
1.203.



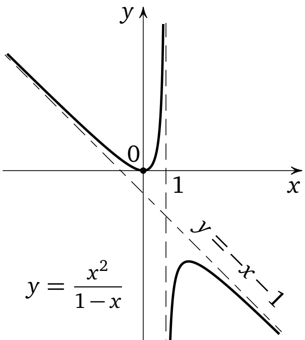
1.205.



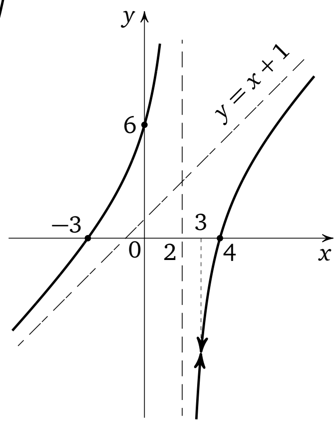
1.207.



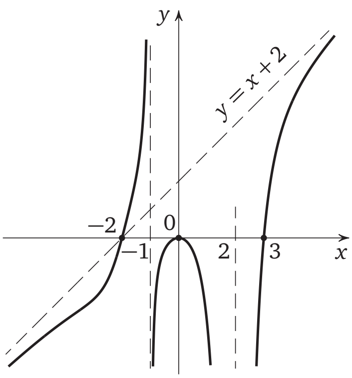
1.211.



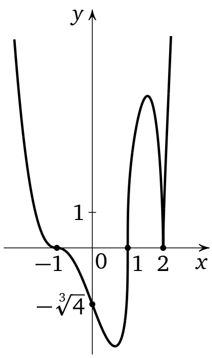
1.225.



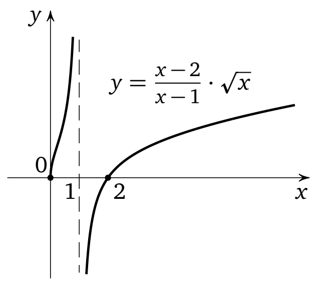
1.230.



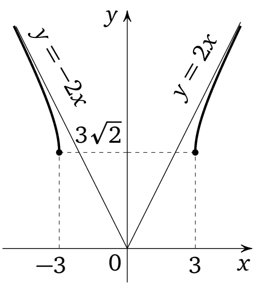
1.239.



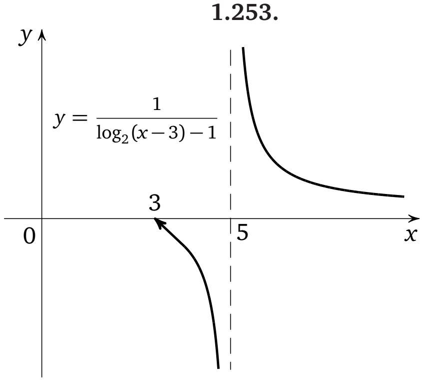
1.249.



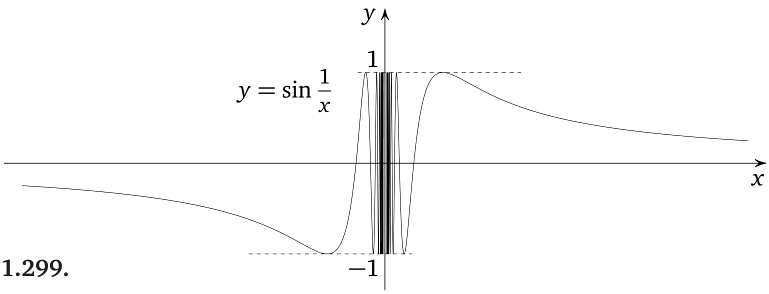
1.253.



1.258.

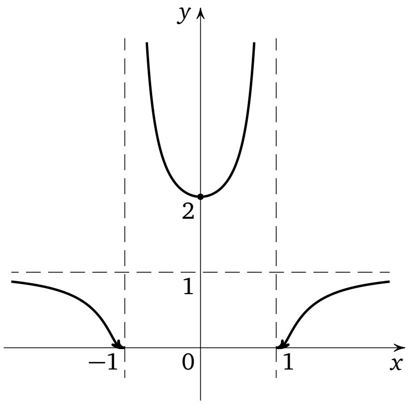


1.291.

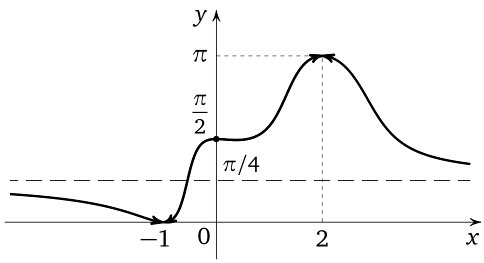


1.299.

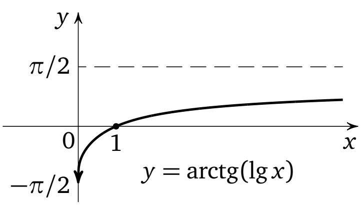
1.335. *Указание.* См. задачу 1.175.



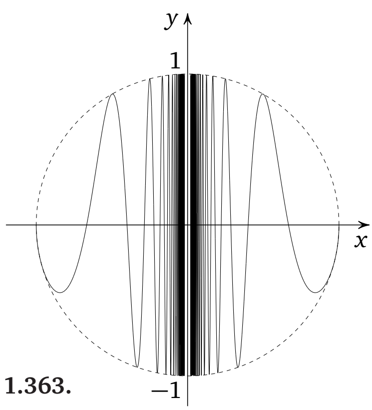
1.309.



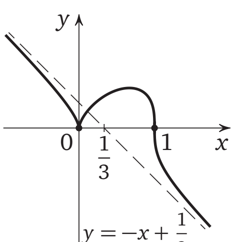
1.342.



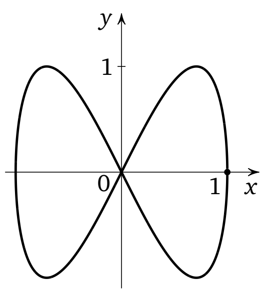
1.351.



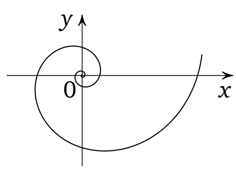
1.363.



1.382.

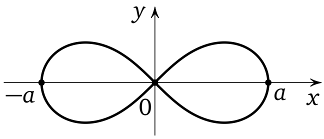


1.388.



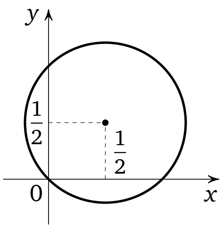
1.402.

1.403. *Указание.* Использовать равенство $\lim\limits_{\varphi \to 0} \dfrac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$ (см. с. 10).

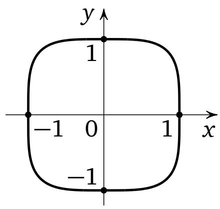


1.406.

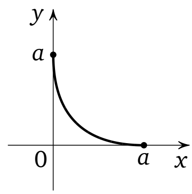
1.410. $r = \dfrac{3}{\cos\varphi}$. **1.411.** $r = \dfrac{4}{\sin\varphi}$. **1.412.** $\operatorname{tg}\varphi = 2$, $r = 0$. **1.413.** $r = \sqrt{5}$.
1.414. $r = \cos\varphi$. **1.415.** $r = \sin\varphi$. **1.416.** $r = \dfrac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}$. **1.417.** $r = \sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}$.
1.418. $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$. **1.419.** $r^2 = \dfrac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}$, $r = 0$. **1.420.** $r = \dfrac{1}{|\cos 2\varphi|}$, $r = 0$.
1.421. $r = \sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi + \cos\varphi)$. **1.422.** $x = 3$. **1.423.** $y = 2$. **1.423.** $xy = 1$.
1.425. $x^2 + y^2 = 2$. **1.426.** $x = y$, $x > 0$. **1.427.** $x + y = 1$.
1.428. $x^2 + y^2 = 2x$, или $(x-1)^2 + y^2 = 1$. **1.429.** $x^2 + y^2 = (x^2 + y^2 - x)^2$.
1.430. $(x^2 + y^2)^3 = x^4$.



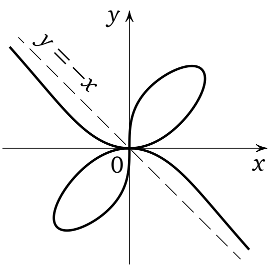
1.440.



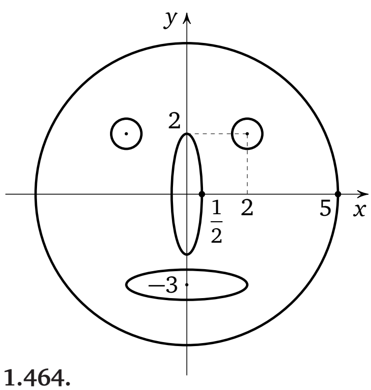
1.444.



1.445.



1.454.



1.464.

Глава 2

Множества и отображения

§ 2.1. Основные обозначения и операции над множествами

Понятие *множества*, или совокупности элементов, представляет собой первичное, неопределяемое понятие. Множество задаётся (определяется) или перечислением составляющих его элементов, или условием, позволяющим определить, принадлежит рассматриваемый объект данному множеству или нет. В первом случае применяется запись $A=\{a, b, c, \ldots\}$, во втором — $A=\{a\colon \text{условие принадлежности}\}$. Например, $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ есть запись набора чётных чисел от 2 до 10, $A=\{a\colon |a|<1\}$ — запись множества чисел, составляющих интервал $(-1; 1)$ и т. п.

Запись $a\in A$ означает, что a есть элемент множества A (входит в A, принадлежит A); $b\notin A$ означает, что b не является элементом A (не входит в A, не принадлежит A). Запись $A\subset B$ означает, что множество A есть *подмножество* множества B, т. е. любой элемент a множества A есть одновременно элемент множества B. В этом случае будем также говорить, что A включается в множество B (или содержится в нём). *Пустое множество*, не содержащее ни одного элемента, обозначается символом $\varnothing$.

Часто используется следующая логическая символика. Запись $\forall a$ значит «для любого a»; $\exists a$ значит «существует a» («найдётся a», «хотя бы для одного a»). Например, соотношение $A\subset B$ записывается так: $\forall a\in A$ имеем $a\in B$. Символы $\forall$ и $\exists$ называются *кванторами*.

Основные операции над множествами

1. *Объединением* двух множеств A и B называется множество C (обозначение: $C=A\cup B$), состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B: $C=A\cup B=\{c\colon c\in A \text{ или } c\in B\}$.

2. *Пересечением* двух множеств A и B называется множество C (обозначение: $C=A\cap B$), состоящее из тех и только тех элементов, которые одновременно принадлежат и множеству A, и множеству B: $C=A\cap B=\{c\colon c\in A \text{ и } c\in B\}$.

3. *Разностью* двух множеств A и B называется множество C (обозначение: $C=A\setminus B$), состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B: $C=A\setminus B=\{c\colon c\in A \text{ и } c\notin B\}$.

4. Множество $C=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ называется *симметрической разностью* множеств A и B и обозначается $A\,\Delta\, B$.

5. Если $A\subset X$, то разность $X\setminus A$ называется *дополнением* A до X. Когда из контекста ясно, каково множество X, то используется обозначение: $A^C=X\setminus A$.

6. *Декартовым произведением* двух множеств A и B называется множество $A\times B=\{(a, b)\colon a\in A \text{ и } b\in B\}$, образованное всеми упорядоченными парами (a, b), первый член которых есть элемент множества A, второй

член — элемент множества B. Например, единичный квадрат на плоскости $[0;1]\times[0;1]=[0;1]^2$ есть декартово произведение двух отрезков $[0;1]$. Аналогично вся плоскость $\mathbb{R}^2$ есть декартово произведение двух числовых прямых. Множество $[0;1]^2\times[0;h]$, $h>0$, представляет собой прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием и высотой h.

Для доказательства равенства двух множеств чаще всего используется утверждение: если $A\subset B$ и $B\subset A$, то $A=B$. Другими словами, равенство $A=B$ верно тогда и только тогда, когда любой элемент одного множества принадлежит другому, и наоборот.

Пример 2.1. Докажем, что $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Решение. 1. Если $x\in A\cap(B\cup C)$ то, с одной стороны, $x\in A$, а с другой стороны — x входит или в B, или в C; в первом случае $x\in A\cap B$, во втором $x\in A\cap C$. Итак, $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

2. Если $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, то, с одной стороны, x входит или в B, или в C, т. е. $x\in B\cup C$. С другой стороны, $x\in A$, следовательно, $x\in A\cap(B\cup C)$. Полученные соотношения показывают, что $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$. □

Пример 2.2. Докажем, что $A\,\Delta\,B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

Решение. 1. Если $x\in A\,\Delta\,B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, то или $x\in A$, но $x\notin B$, или $x\in B$, но $x\notin A$. В том и другом случае $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, следовательно, $A\,\Delta\,B\subset(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

2. Если $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, то x входит или в A, или в B, но не является общим элементом этих множеств, следовательно, x входит или в $A\setminus B$, или в $B\setminus A$, т. е. $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\,\Delta\,B$. Полученные соотношения показывают, что $A\,\Delta\,B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. □

Пример 2.3. Докажем, что $(A\setminus C)\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$.

Решение. 1. Если $x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$, то $x\notin C$, но $x\in A\cup B$, таким образом, $x\in(A\cup B)\setminus C$. Следовательно, $(A\setminus C)\cup(B\setminus C)\subset(A\cup B)\setminus C$.

2. Если $x\in(A\cup B)\setminus C$, то x не принадлежит C, но принадлежит или A, или B, т. е. или $x\in A\setminus C$, или $x\in B\setminus C$. Значит, $x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$, следовательно, $(A\cup B)\setminus C\subset(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$. Полученные соотношения доказывают требуемое равенство. □

Пример 2.4. Докажем, что $(A\setminus C)\cap(B\setminus D)\subset(A\cap B)\setminus(C\cap D)$.

Решение. Если $x\in(A\setminus C)\cap(B\setminus D)$, то x не принадлежит либо C, либо D, следовательно, $x\notin C\cap D$, но x принадлежит и A, и B, т. е. $x\in(A\cap B)\setminus(C\cap D)$. Итак, каждый элемент множества $(A\setminus C)\cap(B\setminus D)$ входит также и в множество $(A\cap B)\setminus(C\cap D)$. □

Отметим, что в этом примере обратное включение, вообще говоря, не выполнено (почему?).

Напомним, что уравнения или неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Например, уравнение $x^3-x=0$ равносильно уравнению $|2|x|-1|=1$, так как множество решений каждого из них есть $\{-1,0,1\}$, а неравенство $x^2\geqslant 0$ равносильно неравенству $\sin x<2$, так как они оба выполнены при всех действительных x. Если множество решений одного уравнения (неравенства) является подмножеством множества решений другого (т. е. любое решение первого является и решением второго), то говорят, что второе уравнение (неравенство) является *следствием* первого. Например, неравенство $x^2 \geqslant 1$ является следствием неравенства $x > 1$ (но не наоборот), так как $(1; +\infty) \subset (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. При этом чтобы утверждать, что одно неравенство является следствием другого, необязательно точно находить множества их решений. Например, неравенство $x^3 + 2x^2 + x > 1$ есть следствие неравенства $x^3 + x > 1$, так как если число x удовлетворяет второму неравенству, то оно удовлетворяет и первому: $x^3 + 2x^2 + x \geqslant x^3 + x > 1$.

§ 2.2. Отображения и функции

Пусть X и Y — некоторые множества. Если по какому-то закону каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, то говорят, что задано *отображение* f из множества X в множество Y, и пишут $f : X \to Y$. Для любого $x \in X$ соответствующий элемент y называется *образом элемента* x и обозначается $f(x)$. *Образом множества* $A \subset X$ при отображении $f : X \to Y$ называется множество всех образов $y \in Y$, соответствующих каждому $x \in A$, и обозначается $f(A)$, т. е. $f(A) = \{y = f(x) \in Y : x \in A\}$.

Для $y \in f(X)$ множество всех $x \in X$, для которых $f(x) = y$, называется (*полным*) *прообразом* y и обозначается $f^{-1}(y)$. Если $y_0 = f(x_0)$, то, очевидно, $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, но множество $f^{-1}(y_0)$ может содержать и отличные от x_0 элементы $x \in X$. Аналогично для данного множества $B \subset f(A)$ множество прообразов всех элементов $y \in B$ называется (*полным*) *прообразом* B и обозначается $f^{-1}(B)$, т. е. $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

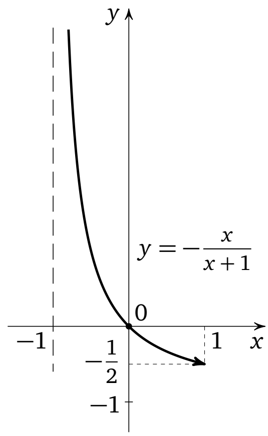
Отображение $f : X \to Y$ называется *инъекцией* (отображением X *в* Y), если различным элементам $x \in X$ соответствуют различные элементы $y \in Y$, т. е. $\forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$, имеем $f(x_1) \neq f(x_2)$; *сюръекцией* (отображением X *на* Y), если $f(X) = Y$, т. е. $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X : f(x) = y$; *биекцией*, или *взаимно однозначным соответствием*, если f одновременно инъективно и сюръективно. Если отображение $f : X \to Y$ является биекцией, то определено обратное отображение $f^{-1}(y)$, соотносящее каждому $y \in Y$ такое $x \in X$, что $f(x) = y$.

Для числовых множеств вместо термина «отображение» принят термин «функция». Запись $f : X \to Y$ или $y = f(x)$ означает, что задан некоторый закон, согласно которому каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие единственное число $y \in Y$. Множество X называется *областью* (или *множеством*) *определения* функции, числа $x \in X$ — *аргументами* функции f. Множество $f(X)$ (образ области определения) называется *областью* (или *множеством*) *значений* f, числа $y \in f(X)$ — *значениями* функции[1]. Если для каждого элемента $y \in f(X)$ его прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из единственной точки x, т. е. соответствие $x \mapsto y$ взаимно однозначно, то соответствие $y \mapsto x$ определяет функцию f^{-1}, обратную к f, $f^{-1} : f(X) \to X$.

---

[1] Для области определения и области значений функции f используются также обозначения $D(f)$ и $E(f)$ соответственно.

Пример 2.5. Пусть $X=(-1;1)$, $Y=(-1;+\infty)$ и $f\colon X\to Y$, $y=f(x)=-\dfrac{x}{x+1}$. Функция f есть инъекция и $f(X)=\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)\subset(-1;+\infty)=Y$ (см. рис.) □



Пример 2.6. Функция $y=f(x)=x^2$ есть сюръекция оси Ox на неотрицательную полуось $Oy^+=\{y\colon y\geqslant 0\}$. Если $0<c<d$, то $[c;d]\subset Oy^+$ и прообразом $[c;d]$ является множество

$$f^{-1}([c;d])=[-\sqrt{d};-\sqrt{c}]\cup[\sqrt{c};\sqrt{d}]. \qquad \square$$

Пример 2.7. Пусть A и B — множества из области определения инъективной функции $f\colon X\to Y$. Докажем, что $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

Решение. Если $y\in f(A\cap B)$, то $\exists x\in A\cap B\colon f(x)=y$. Поскольку $x\in A$, имеем $y\in f(A)$. Одновременно $x\in B$, поэтому $y\in f(B)$. Значит, $y\in f(A)\cap f(B)$.

Обратно: если $y\in f(A)\cap f(B)$, то $y\in f(A)$ и $y\in f(B)$, поэтому $\exists x_1\in A$: $f(x_1)=y$ и $\exists x_2\in B\colon f(x_2)=y$. Но поскольку f инъекция, т. е. различным аргументам соответствуют различные значения функции f, получаем, что $x_1=x_2=x\in A\cap B$. Значит, $y\in f(A\cap B)$. □

Отметим, что включение $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$ имеет место для любого отображения, но обратное включение для неинъективного отображения, вообще говоря, может быть и не выполнено (приведите пример!).

Если заданы функции $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to Z$, то можно определить функцию $h\colon X\to Z$, заданную по правилу $h(x)=g(f(x))$, $x\in X$. Она называется *композицией* функций f и g и обозначается $h=g\circ f$. Композиции элементарных функций уже встречались ранее при построении эскизов их графиков (см. § 1.6).

§ 2.3. Мощность множества

Определение. Множества A и B имеют одинаковую мощность (*равномощны*), если существует взаимно однозначное соответствие между ними (биекция $f\colon A\to B$). Обозначение: $A\sim B$.

Пример 2.8. С помощью явного задания биекции $f\colon A\to B$ легко проверяется, что $A\sim B$ для следующих множеств A и B:

а) $A=\mathbb{N}$, $B=\{2n\colon n\in\mathbb{N}\}$, $f(n)=2n$;

б) $A=[0;1)$, $B=(0;1]$, $f(x)=1-x$;

в) $A=[a;b]$, $B=[c;d]$, $f(x)=c+\dfrac{d-c}{b-a}(x-a)$;

г) $A=(0;1)$, $B=\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{ctg}\pi x$;

д) $A=[0;2\pi)$, $B=S^1=\{(x,y)\colon x^2+y^2=1\}$ (окружность), $f(t)=(\cos t,\sin t)$. □

Отношение $\sim$ обладает следующими свойствами:

1) *рефлексивность*: $A\sim A$ (биекция — тождественное отображение);

2) *симметричность*: если $A\sim B$, то $B\sim A$ (если f — биекция из A в B, то f^{-1} — биекция из B в A);

3) *транзитивность*: если $A\sim B$ и $B\sim C$, то $A\sim C$ (если f — биекция из A в B, g — биекция из B в C, то их композиция $g\circ f$ является биекцией из A в C).

Таким образом, все множества распадаются на классы эквивалентных (равномощных) множеств.

Множество называется *конечным*, если оно или пусто, или равномощно множеству $\{k \in \mathbb{N}\colon k \leqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$, при этом число n называется *количеством элементов* этого множества. Два конечных множества равномощны, тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое количество элементов.

Множество, равномощное $\mathbb{N}$, называется *счётным* множеством. Любое непустое подмножество счётного множества или конечно, или счётно. Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество. Образно говоря, счётное множество — «минимальное» из бесконечных множеств. Если A равномощно $B \subset \mathbb{N}$, то говорят, что множество A не более чем счётно. Взаимно однозначное соответствие элементов счётного множества A и множества $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ записывают в виде: $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и называют *нумерацией* A.

Пример 2.9. Докажем, что отрезок $[0; 1]$ равномощен интервалу $(0; 1)$.

Решение. Выделим счётное подмножество $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ отрезка $[0; 1]$ таким образом, что $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ (для оставшихся элементов множества X можно положить, например, $x_{n+2} = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$). Функция

$$f(x) = \begin{cases} x_{n+2}, & \text{если } x = x_n \text{ при некотором } n \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{если } x \notin X, \end{cases}$$

является искомой биекцией из $[0; 1]$ в $(0; 1)$. □

Бесконечное множество, не являющееся счётным, называется *несчётным*. Несчётным множеством является, например, отрезок $[0; 1]$ (см. задачу 2.41). Приведённые выше примеры показывают, что несчётные множества $[0; 1]$, $(0; 1)$ и $\mathbb{R}$ попарно равномощны между собой. Мощность каждого из них можно взять за определение мощности *континуума* (множества этой мощности называются *континуальными*).

Обозначим через Ω (омега) множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц: $\Omega = \{\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1\}$.

Пример 2.10. Докажем, что множество Ω несчётно.

Решение. Предположим противное, тогда все элементы множества Ω можно занумеровать натуральными числами: $\Omega = \{\omega_n = (\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \ldots)\}_{n=1}^{\infty}$. Рассмотрим последовательность $\omega_0 = (1 - \varepsilon_{11}, 1 - \varepsilon_{22}, \ldots, 1 - \varepsilon_{nn}, \ldots) \in \Omega$, представляющую собой «обращение» диагонали бесконечной матрицы $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$. Легко видеть, что последовательность ω_0 по построению не может входить в занумерованный список $\{\omega_n = (\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \ldots)\}_{n=1}^{\infty}$, т. е. $\omega_0 \notin \Omega$. Полученное противоречие показывает, что допущение о счётности множества Ω неверно. □

Можно показать (см. задачу 2.40), что множество Ω равномощно отрезку $[0; 1]$ и потому континуально.

Метод доказательства от противного широко применяется в математике. При его применении, основанном на логическом законе исключённого третьего, важно правильно сформулировать отрицание доказываемого утверждения, т. е. дать определение множества всех тех элементов, для которых данное утверждение не выполняется. Например, отрицанием утверждения $x^2 \leqslant 4$ является не утверждение $x > 2$, а утверждение $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Для доказательства равномощности множеств A и B помимо непосредственного нахождения взаимно однозначного соответствия используется следующее утверждение (*теорема Кантора — Бернштейна*): если A равномощно некоторому подмножеству множества B, а B равномощно некоторому подмножеству множества A, то A и B равномощны.

Пример 2.11. Докажем, что множества внутренних точек любого круга и любого квадрата на плоскости равномощны.

Решение. Рассмотрим на плоскости некоторый круг и некоторый квадрат. Пусть A и B — множества их внутренних точек соответственно. Для доказательства их равномощности достаточно убедиться в том, что в каждом из обоих множеств есть подмножество, равномощное другому множеству.

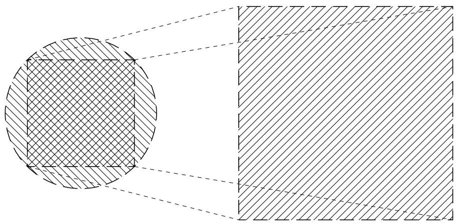


Рис. 23

Впишем квадрат в данный круг (см. рис. 23). Между множеством внутренних точек этого квадрата и множеством B существует биекция (преобразование подобия), переводящая один квадрат в другой. Аналогично рассмотрим круг, вписанный в исходный квадрат. Между множеством внутренних точек этого круга и множеством A также есть биекция. По теореме Кантора — Бернштейна отсюда следует, что множества A и B равномощны. $\square$

Пример 2.12. Докажем, что объединение счётного множества счётных множеств есть счётное множество.

Решение. Пусть $E_k = \{e_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ и $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Составим таблицу:

$$
\begin{array}{cccccc}
e_{1,1} \to & e_{1,2} & e_{1,3} \to & \ldots & e_{1,n} & \ldots \\
e_{2,1} & e_{2,2} & e_{2,3} & \ldots & e_{2,n} & \ldots \\
\downarrow & & & & & \\
e_{3,1} & e_{3,2} & e_{3,3} & \ldots & e_{3,n} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
e_{k,1} & e_{k,2} & e_{k,3} & \ldots & e_{k,n} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Обозначим через B множество всех символов $e_{k,n}$, записанных в этой таблице (символы различны даже тогда, когда соответствующие им элементы совпадают). Установим биекцию между B и $\mathbb{N}$, занумеровав элементы «по диагонали»: $b_1 = e_{1,1}$, $b_2 = e_{1,2}$, $b_3 = e_{2,1}$, $b_4 = e_{3,1}$, $b_5 = e_{2,2}$, $b_6 = e_{1,3}$, ..., последовательно нумеруются элементы с одинаковой суммой индексов. Поскольку множество элементов с одинаковой суммой индексов (на каждой диагонали) конечно, таким образом будет занумеровано всё множество B.

Множества E_k могут иметь общие элементы, поэтому множество A равномощно некоторому подмножеству счётного множества B. С другой стороны, $A \supset E_1$, причём E_1 счётно. По теореме Кантора — Бернштейна отсюда следует, что множество B счётно. □

Аналогично доказывается, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно.

Существуют множества, ещё «более мощные», чем множества мощности континуум, т. е. множества, содержащие подмножество мощности континуум и при этом не равномощные ему.

Пример 2.13. Докажем, что множество F всех функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не равномощно $\mathbb{R}$, т. е. не является множеством мощности континуум.

Решение. Предположим противное: существует взаимно однозначное соответствие $\varphi : \mathbb{R} \to F$, $\varphi(a) = f_a(x)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f_x(x) + 1$. Если $a \in \mathbb{R}$ — прообраз функции g при отображении φ, $g = f_a$, то $g(a) = f_a(a)$. Но в силу определения функции g её значение в точке a равно $g(a) = f_a(a) + 1$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Для данного множества A обозначим через 2^A множество его подмножеств. Справедливо утверждение (*теорема Кантора*) о том, что мощность множества 2^A больше мощности множества A (ср. с задачами 2.42 и 2.43). Теорема Кантора показывает, что для всякого множества A можно получить множество большей мощности, т. е. цепочку увеличения мощностей можно продолжать неограниченно.

§ 2.4. Метод математической индукции

Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел обладает следующими свойствами:

1) любое непустое подмножество $\mathbb{N}$ имеет минимальный элемент;

2) для каждого элемента $n \in \mathbb{N}$ определён следующий: $n + 1$;

3) каждый элемент $n \in \mathbb{N}$ может быть получен из 1 конечным числом переходов к следующему.

На этих свойствах основан *принцип математической индукции*. Пусть рассматривается некоторое утверждение $A(n)$ относительно натуральных чисел и выполнены два условия:

1) (*база индукции*) утверждение $A(1)$ истинно,

2) (*шаг индукции*) для каждого $n \in \mathbb{N}$ из истинности $A(n)$ следует истинность $A(n+1)$.

Тогда утверждение $A(n)$ истинно для всех $n \in \mathbb{N}$.

Принцип математической индукции применяется и для доказательства утверждений $A(n)$ при $n \geqslant n_0$, где n_0 — некоторое натуральное число. Для этого база индукции устанавливается для $n = n_0$ (т. е. проверяется, что $A(n_0)$ истинно), а шаг индукции проводится для всех $n \geqslant n_0$.

Отметим, что в ряде случаев удобно применять *метод полной математической индукции*, отличающийся тем, что на шаге индукции для доказательства истинности утверждения $A(n+1)$ используется справедливость не только утверждения $A(n)$, но и любого набора из утверждений $A(n_0)$, $A(n_0+1)$, …, $A(n)$.

Пример 2.14. Докажем равенство: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решение. 1. Проверим, что равенство верно для $n=1$. Действительно, в этом случае и левая, и правая часть принимает значение 1.

2. Предполагая справедливость данного равенства для n, получим, что при замене n на $n+1$ его левая часть равна $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=$ $=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, т. е. правой части доказываемого равенства при замене n на $n+1$. Следовательно, в силу принципа математической индукции рассматриваемое равенство справедливо для всех натуральных n. □

Пример 2.15. Докажем, что при $n\geqslant 5$ справедливо неравенство $n^2<2^n$.

Решение. 1. Утверждение верно для $n=5$, так как $5^2=25<32=2^5$.

2. Используя предположение справедливости неравенства для n и условие $n\geqslant 5$, получаем: $(n+1)^2=n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2<2^n\left(\dfrac{6}{5}\right)^2<2^{n+1}$. По принципу математической индукции утверждение доказано. □

Определение. *Биномиальными коэффициентами* C_n^k $(0\leqslant k\leqslant n)$ называют[1] коэффициенты многочлена $P_n(x)=(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots$ $\ldots+C_n^kx^k+\ldots+C_n^nx^n$.

Равенство из этого определения называется *формулой бинома Ньютона*, чем и объясняется название для коэффициентов в его правой части. Непосредственно из определения видно, что $C_n^0=1$ для всех $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Напомним известное обозначение: $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$, $n\in\mathbb{N}$ (читается: «эн-факториал»), $0!=1$.

Пример 2.16. Докажем равенство $C_n^k=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$, $1\leqslant k\leqslant n$.

Решение. 1. Прежде всего заметим, что при $k=n$ равенство принимает вид $C_n^n=1$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Для $n=1$ имеем: $P_1(x)=1+x=C_1^0+C_1^1x$. Итак, доказываемое равенство верно для $n=1$.

2. Рассмотрим $P_{n+1}(x)$. Равенство $P_{n+1}(x)=(1+x)P_n(x)$ показывает, что для $1\leqslant k\leqslant n$ коэффициент C_{n+1}^k при x^k в $P_{n+1}(x)$ равен $C_n^{k-1}+C_n^k$. При $k=1$ доказываемое равенство имеет вид $C_{n+1}^1=n+1$. Если $2\leqslant k\leqslant n$, то из предположения о справедливости исходного равенства для числа n имеем

$$C_{n+1}^k=C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{(k-1)!}+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{k!}=$$
$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{k!}(k+n-k+1)=\frac{(n+1)(n+1-1)(n+1-2)\ldots(n+1-k+1)}{k!},$$

т. е. его справедливость и для числа $n+1$. Следовательно, по принципу математической индукции равенство справедливо для всех $n\in\mathbb{N}$. □

[1] Используется также обозначение $\binom{n}{k}$.

Таким образом, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Доказанное равенство объясняет комбинаторный смысл биномиальных коэффициентов: C_n^k равно количеству различных способов выбрать из n-элементного множества k-элементное подмножество. В связи с этим биномиальный коэффициент C_n^k называют также *числом сочетаний из n элементов по k*.

Заметим, что при помощи равенства $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$, использованного в предыдущем примере, легко построить таблицу биномиальных коэффициентов, известную как *треугольник Паскаля*: очередное число в каждой строке получается суммированием двух чисел, стоящих над ним.

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Треугольник Паскаля

Пример 2.17 (неравенство Бернулли). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ и $x > -1$. Докажем, что $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, причём при $x \neq 0$ неравенство строгое.

Решение. Утверждение верно при $n = 2$, поскольку $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ при $x \neq 0$.

Пусть неравенство Бернулли справедливо при некотором $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, и $x \neq 0$. Тогда $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x$, то есть утверждение верно для $n+1$. Таким образом, утверждение доказано методом математической индукции. □

Замечание. Если $x > 0$, то неравенство Бернулли очевидным образом следует из формулы бинома Ньютона.

Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ введём обозначения:

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} && \text{(среднее арифметическое)},\\
G_n &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} && \text{(среднее геометрическое)},\\
H_n &= \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} && \text{(среднее гармоническое)}.
\end{aligned}
$$

Пример 2.18 (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим). Пусть $n > 1$ и $x_k > 0$ при $k = 1, \ldots, n$. Докажем, что $G_n \leqslant A_n$, причём равенство имеет место только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Решение. 1. Из неравенства $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geqslant 0$ следует, что $x_1 + x_2 \geqslant 2\sqrt{x_1 x_2}$, причём равенство имеет место только при $x_1 = x_2$. Таким образом, утверждение верно при $n = 2$.

2. Обозначим через x_{n+1} наибольшее из чисел x_k, $1 \leqslant k \leqslant n+1$. Тогда $A_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant x_{n+1}$, причём равенство имеет место только при условии равенства всех чисел x_k. Положим $\alpha = x_{n+1} - A_n$, тогда $\alpha \geqslant 0$ и

$$
A_{n+1} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1} = \frac{nA_n + x_{n+1}}{n+1} = A_n + \frac{\alpha}{n+1}.
$$

Отсюда с помощью неравенства Бернулли получаем:

$$(A_{n+1})^{n+1} = (A_n)^{n+1}\Big(1+\frac{\alpha}{(A_n)^{n+1}}\Big)^{n+1} \geqslant (A_n)^{n+1}\Big(1+\frac{\alpha}{A_n}\Big) = (A_n)^n x_{n+1}.$$

По предположению, $(A_n)^n \geqslant x_1x_2\ldots x_n$, следовательно, $\Big(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}}{n+1}\Big)^{n+1} \geqslant$ $\geqslant x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}$, т. е. $A_{n+1} \geqslant G_{n+1}$, причём на каждом шаге равенство имеет место только при условии равенства всех x_k, $1 \leqslant k \leqslant n+1$.

Итак, по принципу математической индукции утверждение доказано. □

Применяя доказанное в предыдущем примере неравенство к числам $\frac{1}{x_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, получаем, что среднее гармоническое H_n не превосходит среднего геометрического G_n.

Заметим, что для $n=2$ и $n=4$ имеем равенство $n^2=2^n$, а для $n=3$ — неравенство $9=3^2>8=2^3$, противоположное данному.

Пример 2.19. Докажем, что $1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Левая часть неравенства очевидна. Для $n>2$ запишем выражение $\Big(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\Big)^n$, используя биномиальные коэффициенты:

$$\Big(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\Big)^n = 1 + C_n^1\frac{2}{\sqrt{n}} + C_n^2\Big(\frac{2}{\sqrt{n}}\Big)^2 + C_n^3\Big(\frac{2}{\sqrt{n}}\Big)^3 + \ldots + C_n^n\Big(\frac{2}{\sqrt{n}}\Big)^n.$$

Поскольку все слагаемые в правой части положительны, отсюда получаем, что $\Big(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\Big)^n > C_n^2\frac{4}{n} = \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{4}{n} = 2n-2 > n$, следовательно, $1+\frac{2}{\sqrt{n}} > \sqrt[n]{n}$. Для $n=1$ и $n=2$ неравенство проверяется непосредственно. □

§ 2.5. Множества на числовой прямой

Множество действительных чисел (числовая прямая) обозначается $\mathbb{R}$.

Определение. Промежутками на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ называют отрезки $[a;b]$, полуинтервалы $(a;b]$ и $[a;b)$, интервалы $(a;b)$, лучи $[a;+\infty)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;b]$, $(-\infty;b)$ и всё множество $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$. Общее обозначение промежутка: $\langle a;b\rangle$, где и a, и b могут принимать несобственное значение. Точки a и b называются концевыми точками промежутка $\langle a;b\rangle$.

Определение. *Окрестностью* точки $a\in\mathbb{R}$ называется любой интервал $U(a)$, содержащий точку a. *Проколотой окрестностью* точки a называется окрестность, из которой исключена сама точка a, т. е. множество $\mathring{U}(a)=U(a)\setminus\{a\}$.

Введём характеристики точек по отношению к множеству A.

Точка x называется *внутренней* точкой A, если существует её окрестность $U(x)$, являющаяся подмножеством A $(\exists U(x): U(x)\subset A)$. Точка x называется *внешней* точкой для A, если существует её окрестность $U(x)$, не имеющая общих точек с A $(\exists U(x): U(x)\cap A=\varnothing)$. Точка x называется *граничной* точкой A, если любая её окрестность содержит и точку, принадлежащую A, и точку, не принадлежащую A, т. е. x не является ни внутренней, ни внешней точкой $(\forall U(x)$ имеем $U(x)\cap A\neq\varnothing$ и $U(x)\cap A^C\neq\varnothing)$.

Точка x называется *предельной* точкой A, если в любой её проколотой окрестности $\mathring{U}(x)$ содержится точка $a \in A$ ($\forall \mathring{U}(x)$ имеем $\mathring{U}(x) \cap A \neq \varnothing$); точка x называется *изолированной* точкой A, если существует её окрестность $U(x)$, не содержащая других точек, кроме x ($\exists U(x) \colon U(x) \cap A = \{x\}$). Множество предельных точек A обозначается A'; множество $A \cup A'$ называется *замыканием* A и обозначается $\overline{A}$; множество граничных точек A обозначается ∂A.

Определение. Множество, все точки которого являются внутренними, называется *открытым*; множество, содержащее все свои предельные точки, называется *замкнутым*.

Пример 2.20. Докажем, что множество A является замкнутым тогда и только тогда, когда его дополнение $B = A^C$ является открытым.

Решение. 1. Пусть A замкнуто, но $B = A^C$ не является открытым. Это значит, что существует такая точка $b \in B$, у которой любая её окрестность $U(b)$ не является подмножеством B, следовательно, содержит точку $a \in A$. Поскольку $b \notin A$, заключаем, что $a \neq b$. Следовательно, b есть предельная точка A и $b \in A$ в силу замкнутости A, но $b \in B = A^C$. Полученное противоречие доказывает, что B — открытое множество.

2. Пусть $B = A^C$ открыто, но A не является замкнутым множеством. Это значит, что существует точка b, являющаяся предельной точкой A, но не входящая в A, следовательно, $b \in B$. Поскольку B открыто, существует окрестность $U(b)$ точки b, являющаяся подмножеством B, и, следовательно, — $U(b) \cap A = \varnothing$, что противоречит определению b как предельной точки A. Полученное противоречие доказывает, что A — замкнутое множество. □

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если существует такой отрезок $[m; M]$, что $A \subset [m; M]$ (т. е. $\exists m, M \colon \forall a \in A$ имеем $m \leqslant a \leqslant M$). При этом числа m и M называются *нижней границей* и *верхней границей* множества A соответственно.

Если непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено, то среди его верхних границ существует наименьшая, её называют *точной верхней гранью* множества A и обозначают $\sup A$ (читается: «супремум A»). Аналогично, наибольшая из нижних границ множества A называется *точной нижней гранью* множества A и обозначается $\inf A$ («инфимум A»).

Равенство $M = \sup A$ эквивалентно выполнению двух условий:

1) $\forall a \in A$ имеем $a \leqslant M$; 2) $\forall \delta > 0\ \exists a_\delta \in A \cap (M - \delta; M]$.

Точно так же равенство $m = \inf A$ эквивалентно выполнению условий:

1) $\forall a \in A$ имеем $a \geqslant m$; 2) $\forall \delta > 0\ \exists a_\delta \in A \cap [m; m + \delta)$.

Если $A \subset \mathbb{R}$ и $B = \{b \colon -b \in A\}$, то непосредственно из определения следует, что $\inf A = -\sup B$ и $\sup A = -\inf B$.

Пусть $A \neq \varnothing$. Если множество верхних границ множества A пусто, т. е. множество A не является ограниченным сверху, то полагают $\sup A = +\infty$; если пусто множество нижних границ (т. е. множество A не является ограниченным снизу), то полагают $\inf A = -\infty$.

Лемма о вложенных отрезках. *Любая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку.*

Лемма о конечном покрытии. *В любой системе интервалов, покрывающих отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.*

Отметим, что изменение типов промежутков в этих утверждениях, вообще говоря, не допускается (см. задачи 2.148 и 2.154).

Пример 2.21. Пусть $[a; b] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — замкнутые множества. Докажем, что существуют отрезок $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$ и число n_0 такие, что $[\alpha; \beta] \subset F_{n_0}$.

Решение. Построим доказательство от противного, т. е. предположим, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall [\alpha; \beta] \subset [a; b]$ найдётся точка $c \in [\alpha; \beta] \cap F_n^C$. Возьмём произвольный отрезок $[a_1; b_1] \subset (a; b)$ и найдём точку $c_1 \in [a_1; b_1] \cap F_1^C$. Множество F_1^C открыто как дополнение к замкнутому (см. предыдущий пример), следовательно, существует окрестность точки c_1, полностью лежащая в F_1^C, т. е. $U(c_1) \subset F_1^C$. Пересечение $(a_1; b_1) \cap U(c_1)$ является интервалом $(\alpha; \beta) \subset (a_1; b_1) \cap F_1^C$. Возьмём в этом интервале произвольный отрезок $[a_2; b_2]$, тогда $[a_2; b_2] \subset [a_1; b_1]$ и $[a_2; b_2] \cap F_1 = \varnothing$. Последовательно применяя то же рассуждение, получим совокупность таких отрезков $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, что $\forall n \in \mathbb{N}$ имеем $[a; b] \supset [a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}]$ и $[a_{n+1}; b_{n+1}] \cap F_n = \varnothing$. Точка $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$ не принадлежит $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, что противоречит условию $[a; b] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. □

Пример 2.22. Построим множество, известное как *множество Кантора*. Разделим отрезок $K_0 = [0; 1]$ на три равные части и исключим средний интервал $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ (см. рис. 24). Оставшееся множество обозначим через K_1, $K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = K_1^1 \cup K_1^2$. На втором шаге исключим средние интервалы $\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right)$ из отрезков K_1^1 и K_1^2, оставшуюся часть обозначим

$$K_2 = \left[0; \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}; 1\right] = K_2^1 \cup K_2^2 \cup K_2^3 \cup K_2^4.$$

Продолжая этот процесс, на n-м шаге удалим средние трети из оставшихся 2^{n-1} отрезков и получим множество $K_n = \bigcup\limits_{j=1}^{2^n} K_n^j$, состоящее из объединения 2^n

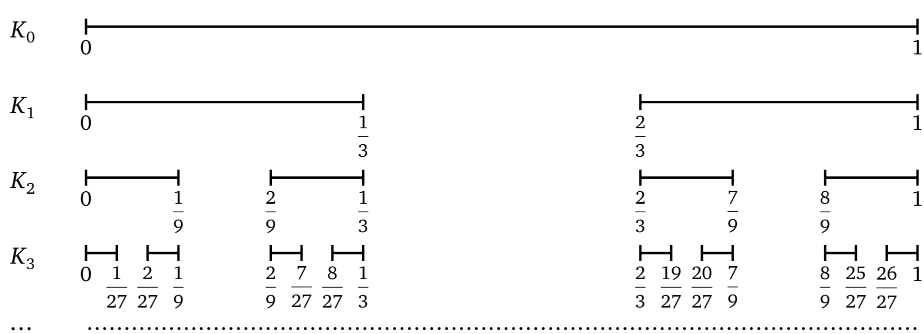


Рис. 24

непересекающихся отрезков длины 3^{-n}. В итоге получим бесконечную вложенную систему замкнутых множеств $K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$ *Множество Кантора* K определим как $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_n$.

Непосредственно из построения видно, что $K = [0; 1] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_k; b_k)$, где $(a_k; b_k)$, $k \in \mathbb{N}$, — последовательность всех исключённых интервалов (эти интервалы также называют *смежными*). Концы этих интервалов a_k и b_k принадлежат K и называются точками *первого рода* множества Кантора, остальные его точки называются точками *второго рода*. Суммарная длина всех исключённых интервалов равна

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \ldots = \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots + \Big(\frac{2}{3}\Big)^n + \ldots\Big) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1,$$

т. е. длине всего отрезка $[0; 1]$. □

Можно показать, что множество Кантора замкнуто, не содержит изолированных точек и континуально (см. задачи 2.157, 2.159 и 2.161).

Задачи

✓**2.1.** Доказать, что каждое из условий $A \cap B = A$ и $A \cup B = B$ необходимо и достаточно для того, чтобы $A \subset B$.

2.2. Доказать, что если $A \setminus B = C$, то $A \subset (B \cup C)$.

2.3. Привести пример таких множеств A, B, C, D, что

а) $A \neq B \cup (A \setminus B)$, б) $A = B \cup C$, но $A \setminus B \neq C$.

в) $D = A \cup (B \setminus C)$, но $D \neq (A \cup B) \setminus C$.

2.4. Доказать, что если $A = B \cup C$, то $A \setminus B \subset C$.

2.5. Доказать, что $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

✓**2.6.** Доказать, что если $D = A \cup (B \setminus C)$, то $(A \cup B) \setminus C \subset D$.

✓**2.7.** Доказать, что $(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$.

✓**2.8.** Привести пример таких множеств A_1, A_2, B_1, B_2, что

$$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \neq (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2).$$

✓**2.9.** Пусть $A \subset X$ и $B \subset X$. Доказать, что

а) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$; б) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

2.10. Пусть $A \subset X$ и $B \subset X$. Доказать, что

а) $(A \,\Delta\, B)^C = (A \cup B)^C \cup (A \cap B)$; б) $(A \cup B^C) \cap (A^C \cup B) = (A \cap B) \cup (A^C \cap B^C)$.

✓**2.11°.** Привести пример двух множеств A и B, для которых $A \times B \neq B \times A$.

2.12. Доказать, что $A \times B = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $A = \varnothing$ или $B = \varnothing$.

2.13. Пусть $A_1 \times B_1 \neq \varnothing$. Доказать, что $A_2 \times B_2 \subset A_1 \times B_1$ тогда и только тогда, когда $A_2 \subset A_1$ и $B_2 \subset B_1$.

2.14. Доказать, что $(A_1 \times B) \cup (A_2 \times B) = (A_1 \cup A_2) \times B$.

2.15. Доказать, что $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

✓**2.16.** Пусть $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Какова геометрическая интерпретация множества $\mathbb{R} \times S^1$?

✓**2.17.** Пусть $y(x)=(x^2-4x)\operatorname{sgn} x$. Изобразить график этой функции и найти

1) образ множества: а) $[2; 5]$, б) $(1; 2)$, в) $[1; 4]$, г) $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$, д) $(0; 1)\cup(3; 5)$, е) $[0; 1]\cup[4; 5]$;

2) прообраз множества: а) $[-4; 0]$, б) $[-4; 5]$, в) $(-3; 5)$, г) $(0; 5)$.

✓**2.18.** Пусть $X=[0; 1]$, $Y=[0; 1]$. Какие из следующих функций $y=f(x)$ задают отображение X на Y (сюръекцию); какие — X в Y (инъекцию); какие задают биекцию, если

а) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$; б) $f(x)=\sin\pi x$; в) $f(x)=4(x-x^2)$;

г) $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$; д) $f(x)=x^3$; е) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$?

2.19. Пусть A — любое множество из области определения функции $f(x)$. Как соотносятся множества A и $f^{-1}(f(A))$?

2.20. Пусть A — любое множество из области значений функции $f(x)$. Доказать, что $A=f(f^{-1}(A))$.

2.21. Пусть A — любое множество из области определения строго монотонной функции $f(x)$. Как соотносятся множества A и $f^{-1}(f(A))$?

✓**2.22.** Пусть A и B — множества из области определения функции $f(x)$. Доказать, что $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

2.23. Пусть A — область определения функции $f(x)$ и $B\subset A$. Как соотносятся множества $f(A\setminus B)$ и $f(A)\setminus f(B)$?

2.24. Пусть B — область значений $f(x)$ и $A\subset B$. Доказать, что $f^{-1}(B\setminus A)=$ $=f^{-1}(B)\setminus f^{-1}(A)$.

✓**2.25.** Доказать, что для любых множеств A и B из области значений функции $f(x)$ выполнено равенство

а) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$; б) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

✓**2.26.** Функция f отображает отрезок $[a; b]$ в отрезок $[a; b]$. Доказать, что если $f(f(x))\equiv x$, то график функции симметричен относительно прямой $y=x$.

2.27. Функция f определена на всей числовой прямой и её график симметричен относительно точки $A=(a, b)$ и прямой $x=c$ $(c\neq a)$. Доказать, что функция f периодическая.

2.28. Сформулировать отрицание утверждения: функция f

а) чётна на $(-l; l)$; б) ограничена на $[a; b]$; в) возрастает на $[a; b]$.

✓**2.29.** Функция f определена на симметричном промежутке $(-l; l)$. Доказать, что её можно представить в виде суммы чётной и нечётной функций.

2.30. Привести пример функции, определённой на $[0; 1]$, но неограниченной на любом $[\alpha; \beta]\subset[0; 1]$.

✓**2.31°.** Является ли произведение двух монотонных на $\mathbb{R}$ функций монотонной на $\mathbb{R}$ функцией?

2.32. Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется *возрастающей в точке*, если существует такое $\delta>0$, что $f(x)\leqslant f(x_0)$ для любого $x\in(x_0-\delta; x_0)$ и $f(x)\geqslant f(x_0)$ для любого $x\in(x_0; x_0+\delta)$.

а) Привести пример функции, заданной на $[-1; 1]$, возрастающей в точке $x_0=0$ и не являющейся монотонной на отрезке $[-\delta; \delta]$ при всех $\delta\in(0; 1]$.

б) Доказать, что функция, возрастающая в каждой точке отрезка $[a; b]$, возрастает на этом отрезке.

2.33. Пусть функция f определена на $(a;b)$. Следует ли из равенства $\inf\limits_{x\in(a;b)} f(x)=\sup\limits_{x\in(a;b)} f(x)$, что функция f постоянна на $(a;b)$?

√**2.34.** Доказать, что множество $\mathbb{Z}$ счётно, указав искомую биекцию явно.

√**2.35.** Доказать, что множество квадратов на плоскости с рациональными координатами вершин счётно.

2.36. Доказать, что множество всех многочленов от одной переменной с рациональными коэффициентами счётно.

2.37. Доказать, что множество алгебраических чисел (корней многочленов с целыми коэффициентами) счётно.

2.38. Построить взаимно однозначное отображение $[0;1)$ на $(0;1)$.

2.39. Построить взаимно однозначное отображение $[0;+\infty)$ на $(a;b)$.

√**2.40.** Доказать, что $[0;1]\sim\Omega$ (см. с. 58).

2.41. Доказать, что отрезок $[0;1]$ — несчётное множество.

√**2.42.** Пусть множество A состоит из n элементов. Доказать, что множество 2^A состоит из 2^n элементов.

√**2.43.** Доказать, что $2^{\mathbb{N}}\sim\Omega$.

2.44. Доказать, что множества Ω и Ω^2 равномощны.

2.45. Пусть $A_1\sim A_2$, $B_1\sim B_2$. Доказать, что $A_1\times B_1\sim A_2\times B_2$.

2.46. Доказать, что $[0;1]\sim[0;1]^2$ и $\mathbb{R}\sim\mathbb{R}^2$.

√**2.47.** Доказать, что множество непересекающихся интервалов на прямой не более чем счётно.

2.48. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества A больше единицы, то множество A не более чем счётно.

2.49. Доказать, что для любого счётного множества $A=\{x_n\}$, $A\subset\mathbb{R}$, существует такое число a, что множество $\{x_n+a\}\cap A$ пусто.

2.50. Представить множество натуральных чисел как счётное объединение непересекающихся счётных множеств.

2.51. Доказать, что всякое несчётное множество на числовой прямой содержит несчётное ограниченное подмножество.

2.52°. Привести пример счётного множества на числовой прямой, каждое ограниченное подмножество которого конечно.

Доказать равенства при $n\in\mathbb{N}$ (2.53—2.72).

√**2.53°.** $a_1+a_2+\ldots+a_n=na+\dfrac{n(n-1)}{2}d$, где $a_n=a+(n-1)d$, $n\in\mathbb{N}$ (арифметическая прогрессия).

√**2.54°.** $1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$, $q\neq1$.

√**2.55°.** $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

2.56. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

2.57. $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

2.58. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

2.59. $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+\ldots+n(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$.

2.60. $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.

✓**2.61.** $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

✓**2.62.** $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.

2.63. $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

2.64. $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{2n+1}{2n(n+1)}$.

✓**2.65.** $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$.

2.66. $\cos x\cos 2x\cos 4x\ldots\cos 2^{n-1}x=\frac{\sin(2^n x)}{2^n\sin x}$, $x\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

✓**2.67.** $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, $x\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

2.68. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, $x\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

2.69*. $\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\ldots+n\sin nx=\dfrac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$, $x\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

2.70*. $\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\ldots+n\cos nx=\dfrac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$, $x\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

2.71. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x$, $x\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

2.72. $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{arctg}(n+1)$.

Доказать равенства, содержащие биномиальные коэффициенты (2.73—2.86).

2.73°. $C_n^k=C_n^{n-k}$, $0\leqslant k\leqslant n$. **2.74°.** $C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$, $1\leqslant k\leqslant n$.

✓**2.75°.** $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$.

2.76°. $C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+2^nC_n^n=3^n$.

✓**2.77°.** $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^nC_n^n=0$.

2.78. $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots+C_n^{2[n/2]}=2^{n-1}$.

2.79. $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots+C_n^{2[n/2]-1}=2^{n-1}$.

2.80. $C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+nC_n^n=n2^{n-1}$.

2.81. $C_n^0-2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(-1)^{n-1}nC_n^n=0$.

2.82. $C_{n-1}^0+C_n^1+C_{n+1}^2+\ldots+C_{n+k-1}^k=C_{n+k}^k$.

✓**2.83.** $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

2.84. $C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+C_n^2C_m^{k-2}+\ldots+C_n^kC_m^0=C_{n+m}^k$.

2.85. $(C_n^0)^2-(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(-1)^n(C_n^n)^2=\begin{cases}0, & \text{если } n \text{ нечётно,}\\ (-1)^nC_n^{n/2}, & \text{если } n \text{ чётно.}\end{cases}$

2.86. $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

2.87. Пусть $k, n\in\mathbb{N}$ и $S_k(n)=1^k+2^k+\ldots+n^k$.

а) Доказать, что $S_k(n)$ есть многочлен степени $k+1$ от n, причём $S_k(n)=a_{k+1}n^{k+1}+a_kn^k+\ldots+a_1n+a_0$, где $a_{k+1}=\frac{1}{k+1}$ и $a_k=\frac{1}{2}$.

б)* Доказать, что $S_k(n-1)=\dfrac{1}{k+1}\sum\limits_{j=0}^{k}C_{k+1}^{j}B_j n^{k+1-j}$, где коэффициенты B_j (*числа Бернулли*) последовательно определяются из неявного рекуррентного соотношения $\sum\limits_{j=0}^{k}C_{k+1}^{j}B_j=0$ с начальным условием $B_0=1$ ($B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_3=0$, $B_4=-\frac{1}{30}$, …).

В разложении данного выражения найти коэффициент при x^n (2.88—2.93).

2.88°. $(x-2)^{100}$, $n=97$.

✓**2.89.** $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$, $n=8$.

2.90. $\left(2x-\dfrac{1}{3x}\right)^{10}$, $n=4$.

✓**2.91.** $(1-x+x^2)^3$, $n=3$.

2.92. $(1+x^2-x^3)^9$, $n=8$.

2.93. $(1+x+x^2+x^3)^5$, $n=10$.

Доказать неравенство при $n\in\mathbb{N}$ (2.94—2.114).

2.94. $5^n\geqslant 2n^2+3$.

✓**2.95.** $C_{2n}^{n}\geqslant\dfrac{4^n}{n+1}$.

2.96. $\dfrac{1}{\sqrt{4n}}\leqslant\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

2.97. $2\leqslant\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$.

✓**2.98.** $\left(\dfrac{n}{3}\right)^n\leqslant n!\leqslant\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

2.99. $\left(\dfrac{n}{k}\right)^k\leqslant C_n^k\leqslant\left(\dfrac{3n}{k}\right)^k$, $1\leqslant k\leqslant n$.

2.100. $2!\cdot 4!\cdot 6!\ldots(2n)!\geqslant\big((n+1)!\big)^n$.

✓**2.101.** $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}$.

2.102. $1<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\ldots+\dfrac{1}{3n+1}<2$.

✓**2.103.** $\sqrt{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, если $n\geqslant 2$.

2.104. $\dfrac{n^{p+1}}{p+1}<1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p<\dfrac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$, если $n\geqslant 2$, $p\in\mathbb{N}$.

2.105. $(x+y)^n>2^{n-1}(x^n+y^n)$, если $x+y>0$, $x\neq y$, $n\geqslant 2$.

2.106. $x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\ldots+\dfrac{1}{x^{n-4}}+\dfrac{1}{x^{n-2}}+\dfrac{1}{x^n}\geqslant n+1$, если $x>0$.

2.107. $\left|\sin\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x_k$, если $0\leqslant x_k\leqslant\pi$, $1\leqslant k\leqslant n$.

✓**2.108.** $|x_1+x_2+\ldots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$, если $x_k\in\mathbb{R}$, $1\leqslant k\leqslant n$.

2.109. $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_3}+\ldots+\dfrac{x_{n-1}}{x_n}+\dfrac{x_n}{x_1}\geqslant n$, если $x_k>0$, $1\leqslant k\leqslant n$.

✓**2.110.** *Неравенство Коши — Буняковского*:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k y_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}y_k^2,\quad\text{если } x_k,\,y_k\in\mathbb{R},\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

2.111. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x_k}{y_k}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k y_k\geqslant\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)^2$, если $x_k,\,y_k>0$, $1\leqslant k\leqslant n$.

✓**2.112.** *Неравенство треугольника*:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}y_k^2},\quad\text{если } x_k,\,y_k\in\mathbb{R},\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

✓2.113. $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$, если $x_k \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

2.114. $x_1^2+\ldots+x_n^2 \geqslant \frac{1}{n}$, если $x_1+\ldots+x_n=1$.

2.115. Доказать, что утверждение $A(n)$ верно при всех $n \in \mathbb{N}$, если:

1) утверждение $A(n)$ верно для всех n из некоторого бесконечного подмножества $M \subset \mathbb{N}$;

2) для любого $n>1$ справедливость $A(n)$ влечёт справедливость $A(n-1)$.

Пользуясь этим, доказать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (см. пример 2.18).

✓2.116. Привести примеры множества $E \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию:
а) $E=E'$; б) $E' \subset E$ и $E \setminus E' \neq \varnothing$; в) $E \subset E'$ и $E' \setminus E \neq \varnothing$;
г) $E' \setminus E \neq \varnothing$ и $E \setminus E' \neq \varnothing$; д) $E \cap E' = \varnothing$; е) $\sup E \in E$;
ж) $\sup E \notin E$; з) $\sup E \in E \setminus E'$.

2.117. Привести пример множества, имеющего:
а) ровно одну предельную точку; б) ровно шесть предельных точек.

2.118. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $\inf |x-y| = a > 0$, где инфимум берётся по различным $x, y \in E$. Доказать, что множество E не имеет предельных точек.

✓2.119. Может ли множество, состоящее только из изолированных точек, иметь предельные точки?

2.120. Доказать, что для замкнутости множества необходимо и достаточно, чтобы оно содержало все свои *точки прикосновения*, т. е. точки, любые окрестности которых имеют непустые пересечения с множеством.

2.121. Доказать, что если множество включается в множество всех своих предельных точек, то оно не содержит изолированных точек.

2.122. Является ли множество $[0; 1] \cap \mathbb{Q}$ замкнутым?

✓2.123. Найти множество предельных точек множества рациональных чисел.

2.124. Найти множество предельных точек множества иррациональных чисел, больших чем два.

✓2.125°. Привести пример множества на числовой прямой, не являющегося ни открытым, ни замкнутым.

2.126. Найти все множества на числовой прямой, являющиеся и открытыми, и замкнутыми одновременно.

2.127°. Доказать, что изолированная точка множества является граничной.

✓2.128. Доказать, что если предельная точка не принадлежит множеству, то она является граничной.

2.129. Доказать, что а) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$; б) $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$.

2.130. Привести пример такого множества A, что A'' непусто, а A''' пусто, где $A''=(A')'$ и $A'''=(A'')'$.

2.131. Пусть f отображает отрезок $[0; 1]$ на множество $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$. Доказать, что по крайней мере для одного из чисел c_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ множество $f^{-1}(c_i)$ имеет предельную точку. Построить пример такого отображения f, чтобы

а) только одно из таких множеств имело предельную точку;

б) ровно три таких множества имели предельную точку.

2.132. Пусть $E=\bigcup\limits_{n=1}^{N} E_n$. Доказать, что $E'=\bigcup\limits_{n=1}^{N} E_n'$.

2.133. Привести пример последовательности таких множеств E_n, что для любого n имеем $E_n'=\varnothing$, а $E'\neq\varnothing$, где $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

2.134. Доказать, что объединение любого семейства открытых множеств является открытым множеством.

2.135. Доказать, что пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством.

2.136°. Привести пример такой последовательности открытых множеств G_n, что множество $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ не открытое; в частности, множество A — отрезок.

2.137. Доказать, что пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

2.138. Доказать, что объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

✓**2.139°.** Привести пример такой последовательности замкнутых множеств F_n, что множество $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ не замкнуто.

2.140. Найти замыкание множества $\{2^{p/q} : p, q\in\mathbb{N}\}$.

2.141. Доказать, что множество граничных точек любого множества замкнуто.

2.142. Известно, что множество предельных точек множества A счётно. Доказать, что множество A счётно.

2.143. Пусть при всех $n\in\mathbb{N}$ множество $E_n\subset\mathbb{R}$ содержит только изолированные точки. Доказать, что множество $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ не более чем счётно.

2.144. Привести пример счётного множества на числовой прямой, имеющего ровно три предельные точки.

2.145. Доказать, что все точки счётного подмножества $\mathbb{R}$ граничные.

✓**2.146°.** Привести пример последовательности вложенных интервалов, имеющих ровно одну общую точку.

✓**2.147°.** Привести пример последовательности вложенных интервалов, содержащих в пересечении отрезок.

✓**2.148.** Привести пример такой последовательности вложенных интервалов $(a_n; b_n)$, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(a_n; b_n)=\varnothing$. При каком дополнительном условии можно утверждать, что последовательность вложенных интервалов имеет непустое пересечение?

2.149°. Привести пример такой последовательности вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, что множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n]$ содержит не менее двух точек.

2.150. Доказать, что для последовательности вложенных отрезков $[a_n; b_n]$ множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n]$ есть или точка, или отрезок.

2.151. Множество $E=\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=0}^{\infty}\cup\{0\}$ покрыто системой интервалов $(-\varepsilon;\varepsilon)$ и $\left(\frac{1-\varepsilon}{2^n};\frac{1+\varepsilon}{2^n}\right)$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, при фиксированном $\varepsilon\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Выделить конечную подсистему, покрывающую E.

2.152. Множество $E=\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ покрыто системой интервалов $(-\varepsilon;\varepsilon)$ и $\left(\frac{1-\varepsilon}{2^n};\frac{1+\varepsilon}{2^n}\right)$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, при фиксированном $\varepsilon\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Можно ли выбрать конечное подпокрытие из этой системы интервалов?

2.153. Множество $\mathbb{N}$ покрыто системой интервалов $(n-\varepsilon;n+\varepsilon)$, $n\in\mathbb{N}$, при фиксированном $\varepsilon\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Можно ли выбрать конечное подпокрытие из этой системы интервалов?

✓**2.154.** Привести пример покрытия, не допускающего выделения конечного покрытия:

а) отрезка системой отрезков;

б) интервала системой интервалов;

в) интервала системой отрезков;

г) числовой прямой системой интервалов.

2.155. Доказать, что если из всякого покрытия множества системой интервалов можно выбрать конечное подпокрытие, то множество ограничено (т. е. содержится в некотором отрезке числовой прямой).

✓**2.156.** Пусть $(\alpha_k;\beta_k)$, $1\leqslant k\leqslant n$, — конечное покрытие отрезка $[a;b]$, $[a;b]\subset\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k;\beta_k)$. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)\geqslant b-a$.

✓**2.157.** Доказать, что множество Кантора замкнуто.

2.158. Доказать, что точки первого рода плотны в множестве Кантора, т. е. в любой окрестности каждой точки $x\in K$ найдётся точка первого рода.

2.159. Доказать, что множество Кантора не содержит изолированных точек.

✓**2.160.** Пусть $x\in[0;1]$. Доказать, что $x\in K$ тогда и только тогда, когда в троичной записи числа x ни разу не встречается цифра 1, т. е. $x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{3^n}$, где $\varepsilon_n=0$ или $\varepsilon_n=2$.

✓**2.161.** Доказать, что множество Кантора континуально.

2.162. Доказать, что $\frac{1}{4}$ является точкой второго рода множества Кантора.

2.163. Доказать, что:

а) $\{x+y: x\in K,\ y\in K\}=[0;2]$; б) $\{x-y: x\in K,\ y\in K\}=[-1;1]$.

Ответы и указания

2.3. а) Например, $A=(0;3)$; $B=(1;5)$. б) Например, $A=[0;10]$; $B[0;7]$; $C=[5;10]$. в) Например, $A=[0;1]$; $B=[1/2;2]$; $C=[2/3;3/4]$; $D=[0;2]$.

2.5. Пусть $x\in A\setminus(B\cup C)=D$. Это значит, что $x\in A$, но $x\notin B\cup C$, т. е. 1) $x\in A$, но 2) $x\notin B$ и 3) $x\notin C$. Из 1) и 2) следует, что $x\in A\setminus B$, а отсюда и из 3) следует, что $x\in(A\setminus B)\setminus C$. Итак, $A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\setminus C$. С другой стороны, пусть $x\in(A\setminus B)\setminus C$, тогда $x\in A\setminus B$, но $x\notin C$, т. е. 1) $x\in A$, но 2) $x\notin B$ и 3) $x\notin C$. Из 2) и 3) следует, что $x\notin B\cup C$, отсюда и из 1) следует, что $x\in A\setminus(B\cup C)$, т. е. $(A\setminus B)\setminus C\subset A\setminus(B\cup C)$. Тем самым доказано равенство множеств $(A\setminus B)\setminus C$ и $A\setminus(B\cup C)$.

2.8. Например, $A_1=[0;2]$, $A_2=[2;4]$, $B_1=[1;3]$, $B_2=[5/2;5]$.
2.11. Например, $A=[0;1]$, $B=[0;2]$. **2.16.** Цилиндрическая поверхность.
2.17. 1) а) $[-4;5]$, б) $(-4;-3)$, в) $[-4;0]$, г) $[-4;0]$, д) $(-3;5)$, е) $[-3;5]$;
2) а) $[2-2\sqrt{2};4]$, б) $[2-2\sqrt{2};5]$, в) $(2-\sqrt{7};1)\cup(3;5)$, г) $(4;5)$.
2.18. а) X в Y; б) X на Y; в) X на Y; г) биекция; д) биекция; е) X в Y.
2.19. $A\subset f^{-1}(f(A))$. **2.21.** $A=f^{-1}(f(A))$. **2.23.** $f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$.
2.26. *Указание.* Вместе с точкой (x_0,y_0) графику функции принадлежит и (y_0,x_0).
2.27. *Указание.* Пусть точка $M(x_0,y_0)$ лежит на графике функции. Рассмотрите результат последовательных симметрических отображений точки M относительно точки A, прямой $x=c$, снова точки A и снова прямой $x=c$.
2.28. а) $\exists x\in(-l;l): f(x)\neq f(-x)$; б) $\forall C>0\,\exists x\in[a;b]: |f(x)|>C$;
в) $\exists x_1,y_1,x_2,y_2\in[a;b], x_1<y_1, x_2<y_2: f(x_1)<f(y_1)$ и $f(x_2)>f(y_2)$.
2.29. *Указание.* Рассмотреть $\varphi(x)=(f(x)+f(-x))/2$ и $\psi(x)=(f(x)-f(-x))/2$.
2.30. Например, $f(x)=\begin{cases} n, & \text{если } x=m/n,\ m \text{ и } n \text{ взаимно простые;}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.}\end{cases}$
2.31. Нет, например, $x\cdot x=x^2$.
2.32. а) Например, $f(x)=\begin{cases} 2x^3+x^3\sin\dfrac{1}{x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$ **2.33.** Да, следует.
2.34. Например, $n\mapsto(-1)^n\left[\dfrac{n+1}{2}\right]+\dfrac{(-1)^{n+1}+1}{2}$.
2.35. *Указание.* Каждый такой квадрат однозначно определяется тремя рациональными числами: координатами левого нижнего угла и длиной стороны.
2.36. Использовать утверждение примера 2.12.
2.37. Воспользоваться предыдущей задачей. **2.38.** Применить метод примера 2.9.
2.39. Например, пусть $\varphi_1(x)$ взаимно однозначно отображает $[0;1]$ на $\left(a;\dfrac{a+b}{2}\right]$ (ср. с предыдущей задачей), а $\varphi_2(x)=\operatorname{arctg}(x-1)\cdot\dfrac{b-a}{\pi}+\dfrac{a+b}{2}$. Искомое отображение есть $\varphi_1(x)$ на $[0;1]$ и $\varphi_2(x)$ на $(1;+\infty)$.
2.40. *Указание.* Записать число x в двоичной системе счисления; числа, допускающие различные записи, образуют счётное множество.
2.41. *Указание.* Воспользоваться задачей 2.40 и примером 2.10.
2.43. *Указание.* Рассмотреть функцию $f: 2^{\mathbb{N}}\to\Omega$, $f(M)=\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n=\begin{cases}1, & \text{если } n\in M,\\ 0, & \text{если } n\notin M.\end{cases}$
2.44. *Указание.* Рассмотреть функцию $f:\Omega\to\Omega^2$, $f(\{\varepsilon_n\})=(\{\varepsilon_{2n-1}\},\{\varepsilon_{2n}\})$.
2.46. *Указание.* Воспользоваться задачами 2.44 и 2.45.
2.47. *Указание.* Показать, что это множество эквивалентно некоторому подмножеству $\mathbb{Q}$.
2.48. *Указание.* Использовать утверждение задачи 2.47.
2.49. *Указание.* Поскольку A счётно, множество B значений $|x_n-x_m|$, где $x_n, x_m\in A$, не более чем счётно (почему?); следовательно, найдётся число a, не входящее в B, т. е. $x_n+a\neq x_m$ ни для каких $x_n, x_m\in A$.
2.50. Например, $\mathbb{N}=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)2^k\Big)$.
2.51. *Указание.* Если $A_n=A\cap[-n;n]$, $n\in\mathbb{N}$, то $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. **2.52.** Например, $\mathbb{N}$.
2.83. *Указание.* В разложениях $(1+x)^{2n}$ и $(1+x)^n\cdot(1+x)^n$ сравнить коэффициенты при x^n.
2.84. *Указание.* В разложениях $(1+x)^{n+m}$ и $(1+x)^n\cdot(1+x)^m$ сравнить коэффициенты при x^k.

2.85. *Указание.* В разложениях $(x^2-1)^{2n}$ и $(x-1)^n\cdot(x+1)^n$ сравнить коэффициенты при x^n.

2.88. $C_{100}^3(-2)^3=-1\,293\,600$. **2.89.** 66. **2.90.** $-\frac{5120}{9}$. **2.91.** -7.

2.92. $3C_9^3+C_9^4=378$. **2.93.** 101.

2.97. *Указание.* Применить бином Ньютона и воспользоваться оценками

$$C_n^k\frac{1}{n^k}\leqslant\frac{1}{k!}\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}\quad\text{при } k\geqslant 1.$$

2.98. *Указание.* Применить метод математической индукции и неравенства из предыдущей задачи.

2.99. *Указание.* Для доказательства левого неравенства воспользоваться равенством из задачи 2.74, а для правого — оценкой $C_n^k\leqslant\frac{n^k}{k!}$ и задачей 2.97.

2.104. *Указание*. Применить неравенство Бернулли.

2.109. *Указание*. Применить неравенство $G_n\leqslant A_n$.

2.110. *Указание.* Рассмотреть дискриминант квадратного трёхчлена $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k\lambda-y_k)^2$ от переменной λ.

2.112. *Указание.* Возвести неравенство в квадрат и воспользоваться неравенством Коши — Буняковского.

2.113. *Указание.* Положить в неравенстве Коши — Буняковского $y_1=y_2=\ldots=y_n=1$.

2.115. *Указание*. Индукцией по k докажите требуемое неравенство для всех n из множества $M=\{n\colon n=2^k,\ k\in\mathbb{N}\}$; при переходе от n к $n-1$ положите одно из чисел равным среднему арифметическому остальных.

2.116. Например, а) $E=[0;1]$; б) $E=[0;1]\cup\{-1\}\cup\{2\}$; в) $E=(0;1)$; г) $E=(0;1)\cup\{2\}\cup\{3\}\cup[4;5]$; д) $E=\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n\in\mathbb{N}$, или $E=\{1\}\cup\{2\}$; е) $E=(-1;1)\cup\{2\}$, или $E=(-1;1]$; ж) $E=[0;2)$; з) $E=[0;2]\cup\{4\}\cup\{5\}$.

2.117. Например, а) $E=\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$, $n\in\mathbb{N}$; б) $E=\bigcup\limits_{k=1}^{b}E_k$, где $E_i=\left\{2k+\frac{1}{n}\right\}$, $n\in\mathbb{N}$, $1\leqslant k\leqslant 6$.

2.118. *Указание.* Доказать от противного.

2.119. Да, например, множество $E=\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n\in\mathbb{N}$.

2.122. Нет, так как множество его предельных точек совпадает с отрезком $[0;1]$.

2.123. $\mathbb{R}$. **2.124.** $[2;+\infty)$. **2.125.** Например, $\mathbb{Q}$ или $E=(0;10]$. **2.126.** $\mathbb{R}$, $\varnothing$.

2.130. Например, $A=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{4(n+1)^2}\cdot\frac{1}{k}\right\}$, $n,k\in\mathbb{N}$. *Указание.* Показать, что $A'=\left\{\frac{1}{n}\right\}\cup\{0\}$, $A''=\{0\}$, $A'''=\varnothing$.

2.131. Например, а) $f(0)=c_1$, $f\left(\frac{1}{4}\right)=c_2$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=c_3$, $f\left(\frac{3}{4}\right)=c_4$, $f(1)=c_5$, $f(x)=c_6$ для $x\in[0;1]\setminus\left\{0;\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4};1\right\}$;

б) $f(0)=c_1$; $f(x)=c_2$ для $x\in\left(0;\frac{1}{3}\right)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)=c_3$, $f(x)=c_4$ для $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$; $f\left(\frac{2}{3}\right)=c_5$; $f(x)=c_6$ для $x\in\left(\frac{2}{3};1\right)$.

2.133. Например, E_n состоит из одной точки $\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$.

2.136. Например, $G_n=\left(-\frac{n+1}{n};\frac{n+1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, $A=[-1;1]$.

2.139. Например, $F_n=\left[-\frac{n}{n+1};\frac{n}{n+1}\right]$, $n\in\mathbb{N}$, $A=(-1;1)$.

2.140. $[1;+\infty)$. *Указание.* Показать, что $\forall(\alpha;\beta)$, $1\leqslant\alpha<\beta$, $\exists x_0=2^{p/q}\in(\alpha;\beta)$.

2.142. *Указание.* Рассмотреть множество $A\setminus A'$; предположив, что A несчётно, прийти к противоречию.

2.143. *Указание.* Применить утверждение задачи 2.47 к каждому из E_n.

2.144. Например, $E=E_1\cup E_2\cup E_3$, где $E_i=\left\{2i+\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$, $n\in\mathbb{N}$, $i=1, 2, 3$.

2.146. Например, $\left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$. **2.147.** Например, $\left(-\frac{1}{n}; 1+\frac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$.

2.148. Например, $\left(1; \frac{n+1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$. Последовательность вложенных интервалов имеет непустое пересечение, если замыкание последующего интервала полностью входит в предыдущий интервал.

2.149. Например, $\left[-\frac{1}{n}; 1+\frac{1}{n}\right]$, $n\in\mathbb{N}$.

2.151. Система состоит из интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ и интервалов $\left(\frac{1-\varepsilon}{2^n}; \frac{1+\varepsilon}{2^n}\right)$ с номерами n, удовлетворяющими условию $2^{n+1}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$.

2.152. Да, хотя множество E незамкнуто. Ср. с предыдущей задачей. **2.153.** Нет.

2.154. а) Например, отрезок $[0; 1]$ и совокупность отрезка $[-1; 0]$ и системы отрезков $\left[\frac{1}{2^k}; \frac{1}{2^{k-1}}\right]$, $k\in\mathbb{N}$. *Указание.* Показать, что если $A_m=[-1; 0]\cup\left(\bigcup_{n=1}^{m}\left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right]\right)$, то для любого m имеем $[0; 1]\setminus A_m\neq\varnothing$.

б) Например, интервал $(0; 1)$ и система интервалов $\left(\frac{1}{n}; 1\right)$, $n\in\mathbb{N}$. Ср. с пунктом а).

в) Например, интервал $(0; 1)$ и система отрезков $\left[\frac{1}{n}; 2\right]$, $n\in\mathbb{N}$.

г) Например, система интервалов $(-n; n)$, $n\in\mathbb{N}$.

2.156. *Указание.* Применить индукцию по числу интервалов покрытия.

2.158. *Указание.* Показать, что если $x\in K$, то найдётся такая последовательность вложенных отрезков $K_n^{j_n}$ длины 3^{-n}, что $x\in K_n^{j_n}$ при всех $n\in\mathbb{N}$.

2.159. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.

2.161. *Указание.* С помощью предыдущей задачи показать, что множество Кантора равномощно множеству последовательностей из нулей и единиц.

2.162. *Указание.* Найти троичную запись числа $\frac{1}{4}$ и применить задачу 2.160.

2.163. *Указание*. Применить задачу 2.160.

Глава 3

Числовые последовательности

§ 3.1. Последовательности и способы их задания

Определение. *Числовой последовательностью* или *последовательностью* называется функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Числа $a_n = f(n)$ называются членами последовательности, сама последовательность обозначается символом $\{a_n\}$, или, более развёрнуто: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ или $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Например, для функции, заданной формулой $f(n) = n^{(-1)^{n+1}}$, получаем последовательность $\left\{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots, 2n-1, \frac{1}{2n}, \ldots\right\}$. Такое задание последовательности называют *явным*. Наряду с этим способом используется способ *рекуррентного* задания последовательности, т. е. определения a_n как функции от предыдущих членов: $a_n = f_n(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Таким способом определяются, например, арифметическая прогрессия, $a_1 = a$, $a_n = a_{n-1} + d$, и геометрическая прогрессия, $b_1 = a$, $b_n = qb_{n-1}$. Формулы общего члена для этих прогрессий $a_n = a + (n-1)d$ и $b_n = aq^{n-1}$ представляют переход от рекуррентного к явному заданию этих последовательностей.

Следует различать последовательность, т. е. функцию на множестве натуральных чисел, и множество значений этой последовательности. Множество элементов последовательности всегда бесконечно (счётно), так как разным элементам соответствуют различные номера n. При этом множество значений последовательности — совокупность всех чисел, являющихся значениями элементов этой последовательности, — может быть и конечным. Например, последовательность $\{(-1)^{n+1}\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$, как и всякая последовательность, состоит из бесконечного множества элементов, при этом множество её значений состоит из двух чисел: -1 и 1.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M, что при всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $a_n \leqslant M$ ($\exists M\colon \forall n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n \leqslant M$). Аналогично последовательность $\{a_n\}$ *ограничена снизу*, если $\exists m\colon \forall n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n \geqslant m$. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т. е. $\exists m, M\colon \forall n \in \mathbb{N}$ имеем $m \leqslant a_n \leqslant M$, или $\exists M\colon \forall n \in \mathbb{N}$ имеем $|a_n| \leqslant M$.

Например, арифметическая прогрессия является неограниченной последовательностью, если её разность $d \neq 0$; геометрическая прогрессия со знаменателем q неограниченная, если $|q| > 1$, и ограниченная, если $|q| \leqslant 1$.

Определение. Пусть даны возрастающая последовательность натуральных чисел: $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ и последовательность $\{a_n\}$. Последовательность $\{b_k\}$, где $b_k = a_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$ и обозначается $\{a_{n_k}\}$.

Например, последовательность $\{b_k\}=\{1, 3, 5, \ldots, 2k-1, \ldots\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}=\{1, -2, 3, -4, \ldots, (-1)^{n+1}n, \ldots\}$, а именно: $b_k=a_{2k-1}$. Последовательности

$$\{c_k\}=\{3, 1, 7, 5, \ldots, c_k, \ldots\}, \qquad c_k=4\left[\frac{k+1}{2}\right]-2+(-1)^{k-1}, \quad k\in\mathbb{N},$$

$$\{d_k\}=\{-2, -2, -4, -4, \ldots, d_k, \ldots\}, \quad d_k=-2\left[\frac{k+1}{2}\right], \quad k\in\mathbb{N},$$

не являются подпоследовательностями последовательности $\{a_n\}$; первая — потому, что нарушен порядок следования членов, вторая — потому, что содержит по два члена с одинаковым значением, а последовательность $\{a_n\}$ содержит только один такой член.

§ 3.2. Предел последовательности

Определение. Число a называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$ и обозначается $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ (или $a_n\to a$ при $n\to\infty$), если для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать такой номер $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, что для всех последующих номеров n (т. е. $n>N$) выполняется неравенство $|a_n-a|<\varepsilon$.

Формальная запись: $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n \iff \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\colon \forall n>N$ имеем $|a_n-a|<\varepsilon$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, при этом говорят, что последовательность сходится к числу a. Если последовательность не имеет предела, то она называется *расходящейся*.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства предела последовательности.

1. Если предел существует, то он единственный, т. е. последовательность может не иметь предела, может иметь предел, но не может иметь двух различных пределов.

2. Существование и величина предела последовательности не зависят от значений любого конечного числа её членов, т. е. изменение последовательности в конечном числе номеров не влияет на её сходимость и величину предела в случае сходимости.

3. Если нумерацию членов последовательности $\{a_n\}$ сдвинуть на некоторое целое число m, т. е. перейти к последовательности $\{a_{n+m}\}$ с добавлением m членов при $m>0$ и отбрасыванием $-m$ членов при $m<0$, то полученная «сдвинутая» последовательность сходится или расходится одновременно с исходной последовательностью, причём в случае сходимости величина предела не меняется.

4. Если последовательность сходится, то она ограничена.

5. Если последовательность сходится к числу a, то любая её подпоследовательность также сходится к числу a.

Приведём важное необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

Теорема (критерий Коши сходимости последовательности)**.** *Последовательность $\{a_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n, m>N$ имеем $|a_n-a_m|<\varepsilon$.*

Последовательность, для которой выполнено условие из критерия Коши, называется *фундаментальной* последовательностью. Другими словами, критерий Коши утверждает, что последовательность является сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Обратите внимание на существенное различие в определении сходящейся последовательности и условии фундаментальности последовательности. В первом случае рассматривается отношение данной последовательности к заданному числу a и решается вопрос, является ли это число пределом данной последовательности или нет. Во втором случае рассматривается собственное, зависящее только от её членов, свойство последовательности, показывающее, что существование предела у последовательности есть её внутренняя характеристика, не зависящая от того, можем ли мы заранее указать числовое значение этого предела или нет. Таким образом, получаем две постановки задачи: для данной последовательности вычислить величину предела, существование которого следует из метода вычисления, или определить, существует этот предел или нет, т. е. является ли данная последовательность сходящейся.

Пример 3.1. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+6}{n^2-10n+26}=1$.

Решение. Предполагаемое значение предела нам дано, поэтому остаётся проверить, что это значение удовлетворяет определению. Если $n>5$, то из равенства $\left|1-\dfrac{n^2+6}{n^2-10n+26}\right|=\left|\dfrac{20-10n}{(n-5)^2+1}\right|=\dfrac{10n-20}{(n-5)^2+1}$ получаем оценку: $\left|1-\dfrac{n^2+6}{n^2-10n+26}\right|<\dfrac{10(n-2)}{(n-5)^2}\leqslant\dfrac{40}{n-5}$. Зададим число $\varepsilon>0$ и найдём натуральное число N, удовлетворяющее условию $N>\dfrac{40}{\varepsilon}+5$; тогда из полученной оценки $\forall n>N$ следует справедливость неравенства $\left|1-\dfrac{n^2+6}{n^2-10n+26}\right|<\varepsilon$. Итак, число 1 удовлетворяет определению предела для данной последовательности.

Заметим, что мы не решаем неравенство $\left|1-\dfrac{n^2+6}{n^2-10n+26}\right|<\varepsilon$, а только находим достаточное для его справедливости условие вида $n>N$. □

Пример 3.2. Пусть $0<q<1$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

Решение. С помощью неравенства Бернулли (см. пример 2.17) получаем:

$$\frac{1}{q^n}=\left(1+\frac{1}{q}-1\right)^n\geqslant 1+n\frac{1-q}{q},$$

откуда вытекает оценка $q^n\leqslant\dfrac{q}{q+(1-q)n}$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. Полученная оценка означает, что неравенство $q^n<\varepsilon$ будет выполнено, если $\dfrac{q}{q+(1-q)n}<\varepsilon$, т. е. $n>\dfrac{q(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1-q)}$. Поэтому натуральное число N выберем бóльшим, чем $\dfrac{q(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1-q)}$. Тогда $q^n<\varepsilon$ при всех $n>N$, что и требовалось доказать. □

Пример 3.3. Докажем, что из сходимости последовательности $\{a_n\}$ к числу a следует сходимость к этому же числу последовательности $\{b_n\}$ средних арифметических: $b_n=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Решение. Предполагаемое значение предела дано, значит, надо проверить, что это число удовлетворяет определению. Для любой пары $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, справедливо равенство

$$b_n - a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m - ma}{n} + \frac{(a_{m+1} - a) + (a_{m+2} - a) + \ldots + (a_n - a)}{n - m} \cdot \frac{n-m}{n}.$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Поскольку $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, начиная с некоторого номера отклонение a_n от a, равное $|a_n - a|$, будет меньше, чем $\dfrac{\varepsilon}{2}$, т. е. $\exists M : \forall n > M$ имеем $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Фиксируем число $m = M$ и пусть $b = |a_1 + a_2 + \ldots + a_m - ma|$. Из приведённых соотношений для $n > m$ получаем оценку $|b_n - a| < \dfrac{b}{n} + \dfrac{\varepsilon(n-m)}{2n} < \dfrac{b}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Итак, если взять целое число N, удовлетворяющее условиям $N > M$ и $N > \dfrac{2b}{\varepsilon}$, то при $n > N$ получаем $|b_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. □

Пример 3.4. Покажем, что последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \ldots$ $\ldots + \dfrac{1}{n^2}$, сходящаяся, т. е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Решение. Проверим, что данная последовательность фундаментальна. Из неравенства $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, $n > 1$, получаем, что для $m > n \geqslant 1$

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} <$$
$$< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.$$

Следовательно, если для заданного $\varepsilon > 0$ взять целое число $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то для любой упорядоченной пары номеров n, m, $n < m$, неравенство $N < n < m$ влечёт неравенство $|a_m - a_n| < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Итак, последовательность фундаментальна, поэтому она сходится в силу критерия Коши. □

Отметим, что в этом примере только устанавливается факт существования предела рассматриваемой последовательности, но не находится его значение. Различные методы нахождения этого значения будут рассмотрены в последующих главах (см., например, задачу Т7.97).

Пример 3.5. Докажем, что последовательность $\{h_n\}$, где $h_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots$ $\ldots + \dfrac{1}{n}$, расходящаяся, т. е. не имеет предела.

Решение. Проверим, что эта последовательность не фундаментальная, т. е. $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n, m > N$ такие, что $|h_m - h_n| \geqslant \varepsilon$. Действительно, если для любого натурального N положить $n = N + 1 > N$, $m = 2N + 2 > N$, то

$$|h_m - h_n| = h_{2N+2} - h_{N+1} = \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \ldots + \frac{1}{2N+2} > \frac{N+1}{2N+2} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Итак, последовательность $\{h_n\}$ не является фундаментальной, поэтому в силу критерия Коши расходится. □

Пример 3.6. Покажем, что последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = \sin n$, не имеет предела.

Решение. Для любого натурального N найдём такое $k \in \mathbb{N}$, что $n_k = [2\pi k] > N + 1$, и положим $n = n_k - 1$, $m = n_k + 1$. Тогда

$$\sin m - \sin n = \sin(n_k + 1) - \sin(n_k - 1) = 2\sin 1 \cdot \cos n_k > 2\sin 1 \cos 1 = \sin 2,$$

так как $2\pi k < n_k < 2\pi k + 1$. Итак, если $\varepsilon = \sin 2 > 0$, то для каждого $N \in \mathbb{N}$ найдутся такие n и m, что $n, m > N$ и $|\sin m - \sin n| \geqslant \varepsilon$. Значит, последовательность $\{a_n\}$ не фундаментальна, т. е. в силу критерия Коши расходится. □

Основные утверждения, используемые для вычисления пределов

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда:

а) при всех λ, $\mu \in \mathbb{R}$ последовательность $\{c_n\}$, $c_n = \lambda a_n + \mu b_n$, сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lambda a + \mu b$;

б) последовательность $\{c_n\}$, $c_n = a_n b_n$, сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = ab$;

в) если $b_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $b \neq 0$, то последовательность $\{c_n\}$, $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{a}{b}$;

г) если при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ и $a = b$, то последовательность $\{c_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ (*принцип двустороннего ограничения*).

Пример 3.7. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $a_1 = a + b$, $a_{n+1} = a + b - \dfrac{ab}{a_n}$ при $n \in \mathbb{N}$. Найдём формулу общего члена последовательности $\{a_n\}$ и вычислим её предел.

Решение. Пусть сначала $a = b$. Легко видеть, что в этом случае $a_1 = 2a$, $a_2 = \dfrac{3}{2}a$, $a_3 = \dfrac{4}{3}a$. Вид первых трёх членов последовательности позволяет предположить, что $a_n = \dfrac{n+1}{n}a$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажем это методом математической индукции. База индукции уже установлена. Для осуществления индуктивного шага заметим, что если при некотором $n \in \mathbb{N}$ верно равенство $a_n = \dfrac{n+1}{n}a$, то из определения последовательности $\{a_n\}$ получаем

$$a_{n+1} = 2a - \frac{a^2}{a_n} = 2a - \frac{na}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a,$$

что и требовалось доказать. Очевидно, что в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Теперь рассмотрим случай $a \neq b$. По условию $a_1 = a + b = \dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$. Предположим, что $a_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$a_{n+1} = a + b - \frac{ab}{a_n} = a + b - \frac{ab(a^n - b^n)}{a^{n+1} - b^{n+1}} =$$
$$= \frac{(a+b)(a^{n+1} - b^{n+1})}{a^{n+1} - b^{n+1}} + \frac{ab^{n+1} - a^{n+1}b}{a^{n+1} - b^{n+1}} = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a^{n+1} - b^{n+1}}.$$

Следовательно, по принципу математической индукции $a_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если $a > b$, то $a_n = \dfrac{a - b(b/a)^n}{1 - (b/a)^n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Аналогично $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ при $a < b$. Окончательно получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \max\{a, b\}$. □

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа C можно указать такой номер N, что для всех членов этой последовательности с номерами, бóльшими N, справедливо неравенство $|a_n| > C$ ($\forall C > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n > N$ имеем $|a_n| > C$).

Заменяя в этом определении неравенство $|a_n| > C$ на неравенство $a_n > C$ ($a_n < -C$), получаем определение положительной бесконечно большой (отрицательной бесконечно большой) последовательности.

Символически утверждение о том, что последовательность является бесконечно большой (положительной бесконечно большой, отрицательной бесконечно большой), записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right).$$

Основные утверждения для бесконечно больших последовательностей:

д) если при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$;

е) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$;

ж) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$;

з) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n > N$ имеем $|a_n| < \varepsilon$.

Дополним список утверждений, используемых для вычисления пределов, следующими свойствами бесконечно малых последовательностей:

и) если при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$;

к) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и последовательность $\{b_n\}$ ограничена, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Пример 3.8. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Решение. Используем утверждение примера 2.19 (см. с. 63): для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ (проверьте!), применяя утверждение д), получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1$. Таким образом, в силу принципа двустороннего ограничения $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. □

Пример 3.9. Обозначим через d_n длину стороны правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом 1, и через P_n — периметр этого n-угольника. Тогда $d_n = 2\sin\dfrac{\pi}{n}$, $P_n = nd_n = 2n\sin\dfrac{\pi}{n}$, и по определению длины окружности $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\sin\dfrac{\pi}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} P_n = 2\pi$. □

Методы вычисления пределов, основанные на приведённых выше утверждениях а)—к), подробно разбираются в главе 4 как методы вычисления пределов функций и применяются к последовательностям как к функциям, определённым на множестве $\mathbb{N}$: $a_n = f(n)$. В этой главе мы остановимся в основном на методах, специфичных для последовательностей, а также на задачах или прямо ставящих вопрос о существовании и свойствах предела рассматриваемой последовательности, или включающих этот вопрос в качестве существенного момента решения.

В ряде случаев при нахождении пределов последовательностей полезны следующие теоремы.

Теорема (Тёплиц). *Пусть даны числа c_{nk}, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, образующие бесконечную нижнетреугольную матрицу*

$$\begin{array}{lllll} c_{11} & & & & \\ c_{21} & c_{22} & & & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

и удовлетворяющие условиям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} c_{nk} = 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$ (*столбцы матрицы являются бесконечно малыми последовательностями*);

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} = 1$ (*сумма элементов в строке стремится к* 1 *при* $n \to \infty$);

3) $\exists C > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$ *имеем* $\sum\limits_{k=1}^{n} |c_{nk}| \leqslant C$.

Тогда для любой сходящейся последовательности $\{a_n\}$ *последовательность* $\{b_n\}$, *где* $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} a_k$, *также сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Тогда для всех $m \in \mathbb{N}$ и $n > m$ получаем

$$|b_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_{nk} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |c_{nk}||a_k| + \sum_{k=m+1}^{n} |c_{nk}||a_k|.$$

Поскольку последовательность $\{a_n\}$ бесконечно малая, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N_1$ верно неравенство $|a_n| < \frac{\varepsilon}{C}$. Кроме того, последовательность $\{a_n\}$ ограничена, т. е. существует такое число $D > 0$, что $|a_n| < D$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда и из условия 1) следует, что существует такое число $N_2 \in \mathbb{N}$, что для всех $k = 1, \dots, N_1$ и $n > N_2$ выполняется неравенство $|c_{nk}| < \frac{\varepsilon}{N_1 D}$. Полагая $m = N_1$, получим, что при $n > \max\{N_1, N_2\}$

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{N_1 D} \sum_{k=1}^{N_1} |a_k| + \frac{\varepsilon}{C} \sum_{k=N_1+1}^{n} |c_{nk}| < \frac{\varepsilon}{N_1 D} \cdot N_1 D + \frac{\varepsilon}{C} \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| \leqslant 2\varepsilon,$$

откуда вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$. Используя условие 2), получаем

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}(a + a_k - a) = a + \sum_{k=1}^{n} c_{nk}(a_k - a) = a + \beta_n, \quad \beta_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}(a_k - a).$$

По доказанному выше последовательность $\{\beta_n\}$ бесконечно малая, и значит, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. □

Замечание 1. Если все $c_{nk} \geqslant 0$, то условие 3) в теореме Тёплица может быть опущено, так как в этом случае оно следует из условия 2).

Замечание 2. Если в теореме Тёплица положить $c_{nk} = \frac{1}{n}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, то снова получим результат примера 3.3.

Теорема (Штольц). *Пусть $y_{n+1} > y_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Тогда если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.*

Доказательство. Пусть $x_0 = y_0 = 0$, $b_n = y_n - y_{n-1}$ и $a_n = x_n - x_{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$. По условию теоремы $b_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, поэтому для $c_{nk} = \frac{b_k}{b_1 + \ldots + b_n}$ выполняются все условия теоремы Тёплица. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_{nk} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = l.$$

Последнее равенство и доказывает теорему, так как $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = x_n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = y_n$. □

Пример 3.10. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Решение. Воспользуемся теоремой Штольца, полагая $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ и $y_n = \sqrt{n}$. Поскольку $\sqrt{n+1} > \sqrt{n} > 0$, $\sqrt{n} \to +\infty$ и при этом

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = 2,$$

искомый предел также существует и равен 2. □

Пример 3.11. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Найдём $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2} + \ldots + \frac{a_1}{2^{n-1}}\right)$.

Решение. Пусть $c_{nk} = 2^{k-n-1}$ при $k = 1, \ldots, n$. Тогда $c_{nk} > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_{nk} = 0$. Кроме того, $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} = \sum\limits_{j=1}^{n} 2^{-j} \to 1$ при $n \to \infty$. Таким образом, выполнены все условия теоремы Тёплица, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{n+1-k}} = a$. Следовательно, искомый предел равен $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{n-k}} = 2a$. □

Пример 3.12. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{x_{n-1}}{2}\right) = 0$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Решение. Обозначим $y_n = x_n - \frac{x_{n-1}}{2}$, тогда по условию $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Имеем

$$x_n = y_n + \frac{1}{2}x_{n-1} = y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{4}x_{n-2} = y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{4}y_{n-2} + \frac{1}{8}x_{n-3} = \ldots$$
$$\ldots = y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} + \ldots + \frac{y_2}{2^{n-2}} + \frac{x_1}{2^{n-1}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{y_k}{2^{n-k}} + \frac{x_1}{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{2^{n-k}} + \frac{x_1 - y_1}{2^{n-1}}.$$

Согласно предыдущему примеру, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{y_k}{2^{n-k}} = 2\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 - y_1}{2^{n-1}} = 0$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ также равен 0. □

§ 3.3. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *монотонной* начиная с номера n_0, если разность $\Delta_n = a_{n+1} - a_n$ сохраняет знак при всех $n \geqslant n_0$. А именно, последовательность *неубывающая*, если $\Delta_n \geqslant 0$; *возрастает*, если $\Delta_n > 0$; *невозрастающая*, если $\Delta_n \leqslant 0$; *убывает*, если $\Delta_n < 0$.

Например, арифметическая прогрессия возрастает, если её разность $d > 0$, и убывает, если $d < 0$; геометрическая прогрессия с положительным первым членом возрастает, если её знаменатель $q > 1$, и убывает, если $0 < q < 1$ (или наоборот, если первый член отрицателен). Если $q < 0$, то геометрическая прогрессия не является монотонной.

Определение. *Точной верхней* (*нижней*) *гранью* последовательности $\{a_n\}$ называется точная верхняя (нижняя) грань множества её значений, она обозначается $\sup a_n$ $(\inf a_n)$.

Одним из основных инструментов исследования сходимости монотонных последовательностей является следующая теорема.

Теорема (Вейерштрасс). *Если последовательность $\{a_n\}$ неубывающая и ограничена сверху, то она имеет предел и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$. Если последовательность $\{a_n\}$ невозрастающая и ограничена снизу, то она имеет предел и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$.*

Нам потребуется также следующие утверждения о переходе к пределу в неравенствах.

Теорема. *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится и при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n \leqslant a$ $(a_n \geqslant a)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant a$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant a)$.*

Пример 3.13. Пусть $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} - 2\sqrt{n}$, $n \geqslant 2$, $a_1 = -2$ и $b_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$. Покажем, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют общий предел a, удовлетворяющий неравенству $-2 < a < -1$.

Решение. Неравенства

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}+2\sqrt{n}-2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} > 0,$$

$$b_n-b_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n}+2\sqrt{n+1} = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} > 0$$

показывают, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает, а $\{b_n\}$ убывает. Отсюда следует, что для любого $n\in\mathbb{N}$ выполнено соотношение

$$-2 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < b_n < b_{n-1} < \ldots < b_2 < b_1 = -1.$$

В силу теоремы Вейерштрасса обе последовательности имеют предел, а так как $b_n-a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ при $n\to\infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$ и $-2<a<-1$.

Отметим также, что из доказанного следуют неравенства

$$0 < a-a_n < b_n-a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad 0 < b_n-a < b_n-a_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

оценивающие скорость сходимости последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ к их общему пределу. □

Пример 3.14 (число e). Пусть $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Докажем, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает, последовательность $\{b_n\}$ убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Решение. Используя неравенство между средним арифметическим A_n и средним геометрическим G_n (см. пример 2.18), получаем

$$\sqrt[n+1]{a_n} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1} = G_{n+1} <$$

$$< A_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right) = 1+\frac{1}{n+1} = \sqrt[n+1]{a_{n+1}},$$

следовательно, $a_n<a_{n+1}$. Аналогично применение неравенства между средним гармоническим и средним геометрическим показывает, что последовательность $\{b_n\}$ убывает:

$$\sqrt[n+1]{b_{n-1}} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot 1} = G_{n+1} >$$

$$> H_{n+1} = \frac{n+1}{n\dfrac{n-1}{n}+1} = 1+\frac{1}{n} = \sqrt[n+1]{b_n}.$$

Таким образом, для любого $n\in\mathbb{N}$ получаем цепочку неравенств

$$2 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} < \ldots < b_2 < b_1 = 4.$$

По теореме Вейерштрасса обе последовательности имеют предел, который является для них общим в силу равенства $b_n=a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Величина этого предела называется числом e и играет важную роль в математике. Из сказанного выше следует, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ при всех $n\in\mathbb{N}$. □

Из рассмотренного примера следует, что $2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Можно доказать более сильное неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ (см. задачу 2.97). На самом деле, число e равно 2,718281828459…

Логарифмы по основанию e называются *натуральными* и обозначаются $\ln x = \log_e x$.

Аналогичным образом определяется *постоянная Эйлера* — общий предел последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$:

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\ln n \ \ (n \geqslant 2), \quad b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n,$$

первая из которых возрастает, а вторая убывает (см. задачу 3.81). Постоянная Эйлера обозначается буквой γ и равна 0,57721566… Поскольку $0 < b_n - \gamma < b_n - a_n = \frac{1}{n}$, для последовательности $\{h_n\}$ из примера 3.5 получаем:

$$h_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n, \quad \text{где } 0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}.$$

Отсюда, в частности, следует расходимость последовательности $\{h_n\}$ (ср. с примером 3.5).

Если сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно, т. е. условием вида $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$, то иногда значение $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ можно определить, переходя к пределу в этом равенстве. Покажем на примерах, как применяется этот метод.

Пример 3.15. Докажем сходимость и найдём предел последовательности $\{a_n\}$, если $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ (n корней).

Решение. Последовательность $\{a_n\}$ можно задать рекуррентно: $a_1 = \sqrt{2}$; $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Первый шаг в решении таких задач — доказательство сходимости рассматриваемой последовательности. Покажем, что данная последовательность удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса. Поскольку $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$ и $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + a_n - 2 - a_{n-1} > 0$, если $a_n > a_{n-1}$, по индукции получаем, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает. Заменив в a_n в последнем радикале число 2 на 4, получим $a_n < 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность ограничена сверху числом 2. Значит, в силу теоремы Вейерштрасса данная последовательность сходится. Обозначим её предел через a. Равенство $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ при условии $a_{n+1} > 0$ равносильно равенству $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$. Переходя в нём к пределу, получаем: $a^2 = 2 + a$, откуда, учитывая, что $a > 0$, находим $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. □

Замечание. Для последовательности $\{a_n\}$ из рассмотренного примера можно указать формулу общего члена: $a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (проверьте!). Используя её, можно оценить скорость сходимости последовательности $\{a_n\}$ к пределу:

$$0 < 2 - a_n = 4\sin^2\frac{\pi}{2^{n+2}} < 4\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4^{n+1}}.$$

Пример 3.16. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, $a_n = (-1)^{n+1}$. Поскольку $|a_m - a_n| = 2$ для любых чисел m и n разной чётности, эта последовательность не является фундаментальной, следовательно, не имеет предела.

Зададим эту последовательность рекуррентно: $a_1 = 1$; $a_n = -a_{n-1}$, $n > 1$. Если в равенстве $a_n = -a_{n-1}$ формально перейти к пределу, то получим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, хотя последовательность $\{a_n\}$ предела не имеет. □

Этот пример показывает, что возможность перехода к пределу в рекуррентном соотношении должна быть обоснована до вычисления значения этого предела, т. е. доказательство существования предела является необходимой частью решения.

Пример 3.17. Докажем, что последовательность $\{a_n\}$ сходится, и найдём её предел, если $a_1 = 0$ и $a_{n+1} = \dfrac{1}{4(1-a_n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Покажем сначала методом математической индукции, что $a_n < \dfrac{1}{2}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. База индукции выполнена, так как по условию $a_1 = 0 < \dfrac{1}{2}$. Если $a_n < \dfrac{1}{2}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, то $1 - a_n > \dfrac{1}{2}$, следовательно, $4(1-a_n) > 2$ и $a_{n+1} < \dfrac{1}{2}$. Таким образом, шаг индукции обоснован.

Также по индукции докажем, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает. В самом деле, $a_2 = \dfrac{1}{4} > a_1$. Предположив, что $a_n > a_{n-1}$ при некотором $n \geqslant 2$, получим:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4(1-a_n)} - \frac{1}{4(1-a_{n-1})} = \frac{a_n - a_{n-1}}{4(1-a_n)(1-a_{n-1})} > 0.$$

Итак, последовательность $\{a_n\}$ возрастает и ограничена сверху, и поэтому по теореме Вейерштрасса имеет предел a, который удовлетворяет уравнению $a = \dfrac{1}{4(1-a)}$. Следовательно, $a = \dfrac{1}{2}$. □

Пример 3.18. Пусть $a_1 = 9$, $a_2 = 6$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$ при $n \geqslant 2$. Докажем, что последовательность $\{a_n\}$ сходится, и найдём её предел.

Решение. Докажем по индукции, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена снизу числом 4. По условию $a_1 > 4$ и $a_2 > 4$, а если $a_n > 4$ и $a_{n-1} > 4$, то и $a_{n+1} > \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$. Следовательно, $a_n > 4$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Теперь докажем также по индукции, что последовательность $\{a_n\}$ убывает. Имеем $a_2 < a_1$ и $a_3 = 3 + \sqrt{6} < 6 = a_2$. Предположим, что $a_n < a_{n-1} < a_{n-2}$ при некотором $n > 2$. Тогда $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$, поскольку

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_{n-2}} = \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-2}} < 0.$$

Таким образом, $a_{n+1} < a_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Итак, по теореме Вейерштрасса последовательность $\{a_n\}$ сходится к некоторому числу a. Переходя к пределу в равенстве $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$, получаем уравнение $a = 2\sqrt{a}$, откуда $a = 4$. □

Пример 3.19. Докажем сходимость и найдём предел последовательности $\{a_n\}$, если $a_1 = a > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(a_n + \dfrac{a}{a_n}\Big)$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Докажем сначала ограниченность данной последовательности. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (см. пример 2.18) получаем, что при $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} \geqslant \sqrt{a_n \cdot \frac{a}{a_n}} = \sqrt{a} > 0.$$

Используя это неравенство, для $n \geqslant 2$ получаем

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{a_n} - a_n\Big) \leqslant \frac{1}{2}\big(\sqrt{a} - \sqrt{a}\,\big) = 0.$$

Итак, последовательность $\{a_n\}$ невозрастающая (начиная с a_2) и ограничена снизу, следовательно, по теореме Вейерштрасса существует предел $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Переходя в равенстве $a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{a}{a_n}\Big)$ к пределу при $n \to \infty$, получаем $l = \frac{1}{2}\Big(l + \frac{a}{l}\Big)$, откуда с учётом условия $l \geqslant 0$ следует, что $l = \sqrt{a}$. □

Заметим, что в рассмотренном примере последовательность $\{a_n\}$ чрезвычайно быстро сходится к своему пределу, равному $\sqrt{a}$. Например, если $a = 2$, то

$$0 < a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{a_n} + a_n - 2\sqrt{2}\Big) = \frac{\big(a_n - \sqrt{2}\,\big)^2}{2a_n} \leqslant \big(a_n - \sqrt{2}\,\big)^2 \quad \text{при всех } n \in \mathbb{N},$$

откуда следует оценка $0 < a_n - \sqrt{2} \leqslant \big(a_2 - \sqrt{2}\,\big)^{2^{n-2}} < \frac{1}{10^{2^{n-2}}}$, так как $a_2 - \sqrt{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} < \frac{1}{10}$. Этот факт позволяет использовать данную последовательность для приближённого вычисления квадратного корня с очень хорошей точностью, выбирая в качестве приближённого значения член последовательности a_n с достаточно небольшим номером n (так, в случае $a = 2$ уже десятый член последовательности даёт более 250 верных знаков после запятой числа $\sqrt{2}$).

§ 3.4. Подпоследовательности и частичные пределы

Определение. Число l называется *частичным пределом* последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к числу l.

Теорема Больцано — Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Определение. Символ $+\infty$ ($-\infty$) называется *бесконечным частичным пределом* последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если существует такая подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$ ($\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$).

Любая последовательность имеет по крайней мере один частичный предел — число или символ. Между символами $+\infty$, $-\infty$ и действительными числами принимается соотношение порядка: $\forall r \in \mathbb{R}$ имеем $-\infty < r < +\infty$. Тогда можно показать, что множество частичных пределов не пусто, замкнуто и содержит максимальный и минимальный элемент (может быть, несобственный, т. е. символ $+\infty$ или $-\infty$).

Определение. Максимальный частичный предел последовательности $\{a_n\}$ называется её *верхним пределом* и обозначается $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Минимальный частичный предел последовательности называется её *нижним пределом* и обозначается $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a тогда и только тогда, когда $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

Равенство $\bar{a} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, $\bar{a} \in \mathbb{R}$, эквивалентно условиям:

а) $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n > N$ имеем $a_n < \bar{a} + \varepsilon$;

б) $\forall \varepsilon > 0\, \forall M \in \mathbb{N}\, \exists m > M\colon a_m > \bar{a} - \varepsilon$.

Аналогично равенство $\underline{a} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, $\underline{a} \in \mathbb{R}$, эквивалентно условиям:

а) $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n > N$ имеем $a_n > \underline{a} - \varepsilon$;

б) $\forall \varepsilon > 0\, \forall M \in \mathbb{N}\, \exists m > M\colon a_m < \underline{a} + \varepsilon$.

Непосредственно из определения следует, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (-a_n) = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

Пример 3.20. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, $a_n = n^{(-1)^{n+1}}$. Так как $a_n > 0$, любой частичный предел этой последовательности неотрицателен. Поскольку $a_{2n-1} = 2n - 1$ и $a_{2n} = \dfrac{1}{2n}$, получаем $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = +\infty$. □

Пример 3.21. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$,

$$a_n = \Big(2 + \cos\frac{\pi n}{3}\Big)\Big(1 + \frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{6}\Big).$$

Поскольку $a_n \leqslant 3\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)$ при всех n, получаем, с одной стороны, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \leqslant 3$, а с другой стороны, $a_{12k} = 3\Big(1 + \dfrac{1}{12k}\Big)$, $k \in \mathbb{N}$, следовательно $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 3$. Точно так же из соотношений $a_n \geqslant 1 - \dfrac{1}{n}$ и $a_{6k+3} = 1$, $k \in \mathbb{N}$, следует, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 1$. □

Пример 3.22. Докажем, что для ограниченных последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ справедливы неравенства $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$.

Решение. Обозначим $\underline{a} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, $\bar{a} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$.

1. Поскольку $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N$ имеем $a_n < \bar{a} + \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $b_n < b + \dfrac{\varepsilon}{2}$, то $\forall n > N$ получаем $a_n + b_n < \bar{a} + b + \varepsilon$, следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leqslant \bar{a} + b$.

2. Выделим подпоследовательность $\{b_{n_k}\}$, сходящуюся к b. Из ограниченной подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_{k_p}}\}$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \geqslant \lim_{p\to\infty} (a_{n_{k_p}} + b_{n_{k_p}}) = \lim_{p\to\infty} a_{n_{k_p}} + \lim_{p\to\infty} b_{n_{k_p}} \geqslant \underline{a} + b. \qquad \square$$

Ни один из знаков неравенства в рассмотренном примере, вообще говоря, нельзя заменить на знак равенства. Например, для последовательностей $\{a_n\}$, $a_n = (-1)^n$, и $\{b_n\}$, $b_n = (-1)^{n+1}$, имеем $a_n + b_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}$, поэтому

$$0 = 1 + (-1) = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n < \overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + a_n) = 2,$$

$$0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) < \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = 2.$$

Пример 3.23. Найдём нижний и верхний пределы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $a_n = \{\alpha n\} = \alpha n - [\alpha n]$, $\alpha \neq 0$ — фиксированное число.

Решение. Если число α рационально, то оно представимо в виде несократимой дроби $\alpha = \dfrac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, и тогда $a_n = \Big\{\dfrac{pn}{q}\Big\}$. Поскольку числа

$p, 2p, \ldots, qp$ дают различные остатки при делении на q (проверьте!), значения a_n при $n=1, 2, \ldots, q$ равны в некотором порядке $0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}$, а далее периодически повторяются с периодом q. Следовательно, каждое из этих чисел является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$, и других частичных пределов нет. В этом случае получаем $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n=0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{q-1}{q}$.

Пусть теперь число α иррационально. Докажем, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Поскольку $\{\alpha n\}>0$ при всех n, достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое натуральное число m, что $\{\alpha m\}<\varepsilon$. Пусть натуральное число N таково, что $N>\frac{1}{\varepsilon}$. Каждое из N чисел $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{N\alpha\}$ принадлежит $[0; 1)$, поэтому среди них найдутся два числа на расстоянии, меньшем $\frac{1}{N}$:

$$0<\{k\alpha\}-\{l\alpha\}<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

Если $k>l$, то $\{k\alpha\}-\{l\alpha\}=\{(k-l)\alpha\}$ (см. задачу 1.150), и в качестве m можно взять число $k-l$. Если же $k<l$, то положим $m'=l-k>0$, тогда $\{-m'\alpha\}<\varepsilon$, т. е. $-m'\alpha=z+\delta$, где $z\in\mathbb{Z}$, $0<\delta<\varepsilon$. Выберем натуральное число p так, что $p\delta<1$, но $(p+1)\delta>1$. Тогда $\{pm'\alpha\}=\{-pz-p\delta\}=\{-p\delta\}=1-p\delta<\delta<\varepsilon$, и в качестве m можно взять число pm'.

Наконец, докажем, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n=1$. Пусть $\varepsilon>0$ произвольно. Ранее мы доказали, что существует такое число $m\in\mathbb{N}$, что $\{\alpha m\}<\varepsilon$. Выберем натуральное число s так, что $s\{\alpha m\}<1<(s+1)\{\alpha m\}$, т. е. $0<1-s\{\alpha m\}<\{\alpha m\}<\varepsilon$. Поскольку $s\{\alpha m\}<1$, верно равенство $s\{\alpha m\}=\{\alpha sm\}$, поэтому при $n=sm$ имеем $\{\alpha n\}>1-\varepsilon$. Отсюда следует требуемое. □

Аналогичным образом можно также доказать, что любое число из отрезка $[0; 1]$ является частичным пределом данной последовательности.

Задачи

√ 3.1°. Какое свойство последовательности определяет следующее высказывание: $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists a>0\colon |a_n|\leqslant a$?

√ 3.2. Выяснить, является ли $\{b_k\}$ подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$ или нет и почему, если:

I. $\{a_n\}=\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$,

а) $\{b_k\}=\{2, 1, 4, 3, \ldots, k+(-1)^{k+1}, \ldots\}$; б) $\{b_k\}=\{3, 5, 9, \ldots, 1+2^k, \ldots\}$;

в) $\{b_k\}=\{1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots\}$, или $b_k=\left[\frac{k+1}{2}\right]$.

II. $\{a_n\}=\{1, 2, -1, -2, 1, 3, -1, \ldots\}$, $a_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\left(2+\left[\frac{n-1}{4}\right]\right)^{\frac{1+(-1)^n}{2}}$.

а) $\{b_k\}=\{(-1)^{k+1}\}$; б) $\{b_k\}=\{2(-1)^{k+1}\}$; в) $\{b_k\}=\{k(-1)^{k+1}\}$.

3.3. Доказать, что если некоторая подпоследовательность монотонной последовательности ограничена, то и сама последовательность ограничена.

√ 3.4. Привести пример неограниченной последовательности, у которой есть ограниченная подпоследовательность.

3.5. Привести пример последовательности, у которой нет ограниченной подпоследовательности.

✓**3.6.** Доказать, что у любой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

✓**3.7.** Какие из последовательностей $\{a_n\}$ являются ограниченными, неограниченными, бесконечно большими, если: а) $a_n = (-1)^n n$; б) $a_n = n\sin\frac{\pi n}{6}$; в) $a_n = n\sin\frac{\pi}{n}$; г) $a_n = \frac{n\sin n}{n+2}$; д) $a_n = \frac{n^2}{n+\cos n}$?

✓**3.8.** Для заданного числа $\varepsilon > 0$ определить какое-то значение $N \in \mathbb{N}$, чтобы из неравенства $n > N$ следовало неравенство $|a_n| < \varepsilon$, если: а) $a_n = q^n$, $|q| < 1$; б) $a_n = \frac{n}{n^2 - 6n + 13}$; в) $a_n = \frac{\cos n}{\lg(n+1)}$.

✓**3.9.** Для заданного числа $C > 0$ определить какое-то значение $N \in \mathbb{N}$, чтобы из неравенства $n > N$ следовало неравенство $a_n > C$, если: а) $a_n = \lg^2 n$; б) $a_n = \sqrt{n^4 - 4n^2 + 5}$; в) $a_n = \frac{n^2}{n+\sin n}$.

3.10. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

3.11°. Привести пример такой расходящейся последовательности $\{a_n\}$, что последовательность $\{|a_n|\}$ сходится.

3.12. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится, а последовательность $\{b_n\}$ расходится. Сходятся ли последовательности $\{a_n + b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$?

3.13. Привести примеры двух таких последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, что последовательность $\{a_n\}$ расходится, а последовательности $\{b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$ сходятся. При каком условии на $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ последовательность $\{a_n b_n\}$ может сходиться, если последовательность $\{a_n\}$ расходится?

3.14°. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится. Является ли сходящейся последовательность $\{a_{n+1} - a_n\}$?

✓**3.15.** Построить пример сходящейся последовательности $\{a_n\}$, для которой последовательность $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ расходится. При каком условии на $\{a_n\}$ последовательность $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ обязательно сходится?

3.16. Привести пример такой последовательности $\{a_n\}$, что $a_n \to +\infty$ и

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 10$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = +\infty$;

в) последовательность $\{a_{n+1} - a_n\}$ не имеет предела и не является бесконечно большой;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$;

ж) последовательность $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ не имеет предела.

3.17. Привести пример сходящейся последовательности $\{a_n\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1} - a_n) = \infty$.

Найти предел последовательности (3.18—3.35).

✓**3.18.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$.

✓**3.19.** $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n$ $(|q| < 1)$.

3.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}$ $(a > 1)$.

3.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}$ $(a > 1)$.

✓**3.22.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$.

✓**3.23.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

✓**3.24.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cos n!}{2^n+1}$.

3.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$.

3.26. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n})$.

3.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}$.

✓**3.28.** $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\ldots+q^n)$ $(|q|<1)$.

✓**3.29.** $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\Big)$.

3.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\Big)$.

3.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\Big|\dfrac{1^2}{n^2}-\dfrac{2^2}{n^2}+\ldots+(-1)^n\dfrac{(n-1)^2}{n^2}\Big|$.

✓**3.32.** $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 11}+\ldots+\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}\Big)$.

3.33. $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\Big)$.

3.34. $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)(n+1)}\Big)$.

3.35. $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}-\dfrac{n}{4}\Big)$.

Для следующих последовательностей, заданных рекуррентно, найти формулу общего члена и вычислить предел, если он существует (3.36—3.51).

✓**3.36.** $a_1=0,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n+3}{4}$.

3.37. $a_1=1,\ a_2=\dfrac{3}{2},\ a_{n+2}=a_n+\dfrac{3}{2^{n+1}}$.

3.38. $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=(n+1)(a_{n+1}+a_n)$.

✓**3.39.** $a_1=a,\ a_{n+1}=qa_n+d$ (*арифметико-геометрическая прогрессия*).

3.40. $a_1=\dfrac{ab}{a+b},\ a_{n+1}=\dfrac{ab}{a+b-a_n}$ $(a>0,\ b>0)$.

✓**3.41.** $a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2$.

3.42. $a_1=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a_{n+1}=\dfrac{a\cdot a_n}{\sqrt{a^2+a_n^2}}$ $(a>0,\ b>0)$.

3.43. $a_1=1,\ a_2=\dfrac{3}{2},\ (n+2)a_{n+2}-a_{n+1}-(n+1)a_n=\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

3.44. $a_1=\dfrac{2}{3},\ a_2=\dfrac{1}{3},\ (n+1)!(a_n-a_{n-2})+n^2+n-1=0$ при $n\geqslant 3$.

3.45. $a_1=1,\ a_2=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=-\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{n-1}{n}a_{n-1}$ при $n\geqslant 2$.

3.46*. $a_1=1,\ a_{n+1}=1-\dfrac{n}{n+1}a_n$.

3.47. $a_1=a,\ a_{n+1}=\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^2a_n+\dfrac{1}{n}$.

✓**3.48.** $a_1=1,\ a_{n+1}=\Big(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\Big)a_n$.

3.49*. $a_1=1,\ a_2=2,\ 2^{n+1}(a_{n+2}-a_n)=3n+4$.

3.50. $a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{2n-1}{n}a_n-\dfrac{n-1}{n}a_{n-1}$.

3.51. $a_1=a,\ a_2=b,\ a_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$ при $n\geqslant 3$.

3.52. Пусть $a_1=a$, $b_1=b$, где $a,b\in(0;1)$, и $a_{n+1}=a(1-a_n-b_n)+a_n$, $b_{n+1}=b(1-a_n-b_n)+b_n$ при $n\in\mathbb{N}$. Найти формулы общего члена последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ и вычислить их пределы.

✓**3.53.** Пусть $f_0=0$, $f_1=1$, $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ при $n\in\mathbb{N}$ (*числа Фибоначчи*), φ и $\widehat{\varphi}$ — соответственно положительный и отрицательный корни уравнения $x^2=x+1$. Доказать, что: а) $\varphi^{n-2}\leqslant f_n\leqslant\varphi^{n-1}$; б) $f_{n+1}f_{n-1}-f_n^2=(-1)^n$; в) $f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n-\widehat{\varphi}^n)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_{n+1}}{f_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_n}=\varphi$.

3.54. Пусть $|b|<1$, $a_n \to a \in \mathbb{R}$ и $x_{n+1}=a_n+bx_n$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, и найти её предел.

3.55. Пусть $a>0$, $a_1>0$ и $a_{n+1}=a_n(2-a\cdot a_n)$ при $n\in\mathbb{N}$. Исследовать на сходимость последовательность $\{a_n\}$, и в случае сходимости найти её предел.

Пользуясь критерием Коши, исследовать сходимость последовательности $\{a_n\}$ (3.56—3.63).

3.56. $a_n=a_0+a_1q+a_2q^2+\ldots+a_nq^n$, где $|a_n|\leqslant M$ при $n\in\mathbb{N}$, $|q|<1$.

3.57. $a_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 4}{2^2}+\ldots+\dfrac{\sin n^2}{2^n}$. **3.58.** $a_n=\dfrac{\cos 2}{1^2}+\dfrac{\cos 4}{2^2}+\ldots+\dfrac{\cos 2^n}{n^2}$.

✓**3.59.** $a_n=1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

✓**3.60.** $a_n=\dfrac{\sin(\ln 1)}{1}+\dfrac{\sin(\ln 2)}{2}+\ldots+\dfrac{\sin(\ln n)}{n}$.

3.61*. $a_n=\cos 1+\dfrac{\cos\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

3.62*. $a_n=\dfrac{1}{2\ln 2}+\dfrac{1}{3\ln 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\ln n}$, $n\geqslant 2$.

3.63*. $a_n=\dfrac{1}{2\ln^2 2}+\dfrac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\ln^2 n}$, $n\geqslant 2$.

3.64. Пусть $\lambda\in(0;1)$ и $|a_{n+1}-a_n|\leqslant\lambda|a_n-a_{n-1}|$ при всех $n\geqslant n_0$. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится.

3.65. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится, и найти её предел, если $a_1=1$ и: а) $a_{n+1}=\dfrac{2+a_n}{1+a_n}$; б) $a_{n+1}=2+\dfrac{1}{a_n}$.

3.66. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность *с ограниченным изменением*, т. е. существует такое число C, что для любого $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k|\leqslant C.$$

Доказать, что такая последовательность сходится. Привести пример сходящейся последовательности с неограниченным изменением.

3.67. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится, если некоторая её подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ сходится и $\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{n_k<s\leqslant n_{k+1}}|a_s-a_{n_k}|=0$.

3.68. Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$;

2) некоторая её подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ сходится;

3) существует такое число M, что для любого $k\in\mathbb{N}$ имеем $|n_{k+1}-n_k|<M$.

Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится.

3.69. Пусть $f_n\colon[0;1]\to\mathbb{R}$ — последовательность функций, $m,n\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$. Обозначим $B_{\varepsilon,m,n}=\{x\in[0;1]\colon|f_n(x)-f_{n+m}(x)|\leqslant\varepsilon\}$, $A_{\varepsilon,n}=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}B_{\varepsilon,m,n}$. Доказать, что для сходимости последовательности $\{f_n(x_0)\}$, где $x_0\in[0;1]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ выполнялось условие $x_0\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_{\varepsilon,n}$.

3.70. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=+\infty$.

✓**3.71.** Доказать, что если $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$.

✓**3.72.** Доказать, что если $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

3.73. Найти пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_{nk}^n}$, $k \geqslant 2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^k}{n^{kn}}}$.

3.74. Пусть последовательность $\{x_n\}$ положительна и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in (0; +\infty)$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} H_n$, где H_n — среднее гармоническое чисел $x_1, \ldots, x_n$ (см. с. 62).

✓**3.75.** Доказать неравенство $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

✓**3.76.** Доказать неравенства:

а) $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $\dfrac{1}{4n} < e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \dfrac{4}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

✓**3.77.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

✓**3.78.** Доказать, что: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right) = e$;

б) $e = 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{\alpha_n}{n \cdot n!}$, где $0 < \alpha_n < 1$;

в) число e иррационально; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2\pi e n!) = 0$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2\pi e n!) = 2\pi$.

3.79. Пусть $a_1 = 1$, $a_n = n(a_{n-1}+1)$ при $n \geqslant 2$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right) = e.$$

3.80. Доказать, что: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+1)!} = 3 - e$;

б) $3 - e = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+1)!} + \dfrac{\alpha_n}{(n+1)(n+1)!}$, где $0 < \alpha_n < 1$.

✓**3.81.** Доказать, что последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$: $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots$ $\ldots + \dfrac{1}{n-1} - \ln n$, $n \geqslant 2$, и $b_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$, монотонны и сходятся к общему пределу $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \gamma$ (*постоянная Эйлера*).

✓**3.82.** Вычислить: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right)$.

✓**3.83.** Пусть $a_1 = a > 0$, $b_1 = b > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Доказать, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ монотонны и сходятся к общему пределу $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (*арифметико-геометрическое среднее* a и b).

3.84. Пусть $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a > b > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$. Доказать, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, и найти этот предел.

3.85. Пусть $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a > b > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Доказать, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ монотонны и сходятся к общему пределу.

3.86. Пусть $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_n}{2}$. Доказать, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу.

Доказать, что данная последовательность $\{a_n\}$ сходится, и найти её предел (3.87—3.110).

✓**3.87.** $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$.

3.88. $a_1=\sqrt[k]{7}$, $a_{n+1}=\sqrt[k]{7a_n}$, $k\geqslant 2$.

✓**3.89.** $a_1=1$, $a_{n+1}=1-\dfrac{1}{4a_n}$.

✓**3.90.** $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_{n+1}=\dfrac{4}{3}a_n-a_n^2$.

3.91. $a_1=\dfrac{3}{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{3a_n-2}$.

3.92. $a_1=0$, $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$.

✓**3.93.** $a_1=0$, $a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}$, $a\geqslant 0$.

✓**3.94.** $a_1=a>0$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\Big(2a_n+\dfrac{a}{a_n^2}\Big)$.

3.95. $a_1=a>0$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{p}\Big((p-1)a_n+\dfrac{a}{a_n^{p-1}}\Big)$, $p\in\mathbb{N}$.

3.96. $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{4a_n+2}{a_n+3}$.

3.97. $a_1=a>0$, $a_{n+1}=6\dfrac{a_n+1}{a_n+7}$.

3.98. $a_1=\dfrac{a}{2}$, $a_{n+1}=\dfrac{a+a_n^2}{2}$, $0<a\leqslant 1$.

3.99. $a_1=0$, $a_2=\dfrac{1}{2}$, $a_{n+2}=\dfrac{1}{3}(1+a_{n+1}+a_n^3)$.

3.100. $a_1=a>0$, $a_{n+1}=a_n\dfrac{a_n^2+3a}{3a_n^2+a}$.

3.101. $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n^2+(1-2b)a_n+b^2$, $b-1\leqslant a\leqslant b$.

3.102. $a_1=c$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+ab}{a+b}$, $0<c<b$, $0<a<b$.

3.103. $a_1=\dfrac{b}{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{ab^2+a_n^2}{a+1}}$, $a>0$, $b>0$.

3.104. $a_1=2$, $a_{n+1}=2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{a_n}}$.

✓**3.105*.** $a_1=3$, $a_{n+1}=3+\dfrac{1}{a_n}$.

3.106*. $a_1=a>0$, $a_{n+1}=\dfrac{a}{2+a_n}$.

3.107. $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}$.

✓**3.108.** $a_n=a$, $a_{n+1}=\sin a_n$.

3.109. $a_n=a$, $a_{n+1}=\operatorname{arctg} a_n$.

3.110. $a_1=a$, $a_{n+1}=|a_n-2^{1-n}|$.

3.111. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $0<a_n<1$ и $a_n(1-a_{n+1})\geqslant\dfrac{1}{4}$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что эта последовательность сходится, и найти её предел.

3.112. Пусть $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{a_n}}$. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к положительному корню уравнения $x^4-x-2=0$.

3.113*. Пусть $p\in\mathbb{N}$, $p>1$ и $a_n=\sqrt[p]{1+\sqrt[p]{1+\ldots+\sqrt[p]{1}}}$ (n корней). Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к положительному корню уравнения $x^p-x-1=0$.

3.114. Пусть $a_0=0$, $a_1=1$, $a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}\geqslant 0$ при $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что $a_n\to+\infty$ при $n\to\infty$.

3.115. Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена и $a_{n+1}\geqslant a_n-\dfrac{c}{2^n}$, $c>0$. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится.

3.116. Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена, последовательность $\{b_n\}$ сходится и $a_{n+2}-\dfrac{3}{2}a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n\geqslant b_{n+2}-\dfrac{3}{2}b_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_n$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится.

3.117*. Обязательно ли последовательность $\{a_n\}$ сходится, если она ограничена и $\forall n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство: а) $a_{n+1}\geqslant a_n-\dfrac{1}{n^2}$; б) $a_{n+1}\geqslant a_n-\dfrac{1}{n}$?

3.118. Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена и $a_{n+2} \leqslant \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится.

3.119. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с первым членом $a_1 = a > 0$ и разностью $d > 0$. Найти:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right)$.

3.120. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, где a_n и b_n — целые числа, определяемые из равенства $(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$.

√**3.121.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$, где $\{a_n\}$ — последовательность положительных корней уравнения $\operatorname{tg} x = x$, занумерованных в порядке возрастания.

Пользуясь теоремой Штольца, найти пределы (3.122—3.136), $k \in \mathbb{N}$.

√**3.122.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$.

3.123. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}\right)$.

√**3.124.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$.

3.125. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

3.126. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n})$.

3.127. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}(1+2\sqrt{2}+\ldots+n\sqrt{n})$.

3.128. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot a+2\cdot a^2+\ldots+n\cdot a^n}{n\cdot a^{n+1}}$, $a > 1$.

√**3.129.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^{n+1}}\left(a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^n}{n}\right)$, $a > 1$.

3.130. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}}\left(k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \ldots + \frac{(k+n)!}{n!}\right)$.

3.131. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(k+1)}{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+3)(2k+1)}$.

3.132. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

3.133. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n}\right)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

3.134. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\sqrt{k}\right|$.

3.135. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$, если $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_1+a_2+\ldots+a_n}$.

3.136*. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{\ln n}$, если $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$.

3.137. Пусть выполняются условия 1—3 теоремы Тёплица (см. с. 83), $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk}a_k$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Обязательно ли $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$?

3.138. Доказать теорему Тёплица для случая $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ в предположении, что $c_{nk} > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Пользуясь теоремой Тёплица, найти пределы (3.139—3.142).

✓**3.139.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 1\cdot a_n}{n^2}$.

3.140. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{1\cdot 2} + \dfrac{a_{n-1}}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{a_1}{n(n+1)}\right)$.

3.141. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{1} - \dfrac{a_{n-1}}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{a_1}{2^{n-1}}\right)$.

3.142. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b^{n-k}$, $|b|<1$.

✓**3.143.** Последовательности $\{x_n\}$, $\{a_n\}$ и $\{y_n\}$ таковы, что $x_n = a_n + a_{n-1}$, $y_n = 2a_n + a_{n-1}$. Доказать, что: а) из сходимости последовательности $\{x_n\}$ не следует сходимость последовательности $\{a_n\}$; б) если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{y}{3}$.

3.144. Пусть $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}\sqrt{a_n} = b > 0$. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится. Показать на примере, что при $b = 0$ последовательность $\{a_n\}$ может расходиться.

3.145. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $x_0 = y_0 = 1$, $a_n = 2x_n + y_n$, $b_n = x_{n-1} + 2y_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Найти пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

3.146. Пусть $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n + c_n)$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + c_n)$, $c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$ при $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что все три последовательности сходятся, и найти их пределы.

3.147. Пусть $a, b, c > 0$, $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$, $a_{n+1} = \sqrt{b_n c_n}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n c_n}$, $c_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ при $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \sqrt[3]{abc}$.

3.148*. Пусть $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{C_n^k}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

3.149. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n} = ab.$$

3.150. Пусть $b_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = +\infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = a.$$

3.151. Пусть $\{a_n\}$ — положительная последовательность. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}\right).$$

3.152. Пусть $a_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$.

3.153. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$, если

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^4 = 0$.

3.154. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a$, $b_n = n(a_{n+1} - a_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

В задачах 3.155—3.158 $\{a_n\}$ — некоторая последовательность и A — множество значений этой последовательности.

3.155. Показать, что любая предельная точка множества A является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$.

3.156. Привести пример такой последовательности $\{a_n\}$, что точка $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ не является предельной точкой множества A.

3.157. Привести пример такой последовательности $\{a_n\}$, что ни один из её частичных пределов не принадлежит A.

3.158. Показать, что если b есть частичный предел последовательности $\{a_n\}$, то b принадлежит $\overline{A}$.

√**3.159.** Доказать, что всякая неограниченная последовательность содержит бесконечно большую подпоследовательность.

√**3.160.** Доказать, что последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и множество частичных пределов состоит ровно из одной точки.

√**3.161.** Доказать, что число l является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки l на числовой прямой содержится бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$.

√**3.162.** Верно ли, что ограниченная сверху последовательность имеет конечный верхний предел, а ограниченная снизу — конечный нижний предел?

√**3.163.** Дана последовательность $\{a_n\}$. Построить последовательность $\{b_n\}$, для которой каждое из чисел a_n, $n \in \mathbb{N}$, является её частичным пределом. Может ли последовательность $\{b_n\}$ иметь частичные пределы, отличные от a_n?

√**3.164.** Доказать, что последовательность $\{a_n\}$, не имеющая конечных числовых частичных пределов, является бесконечно большой.

3.165. Доказать, что если у последовательности $\{a_n\}$ есть две подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ и $\{a_{m_k}\}$, причём объединение значений индексов n_k и m_k есть всё множество $\mathbb{N}$ и $a_{n_k} \to a$, $a_{m_k} \to a$ при $k \to \infty$, то и $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

√**3.166.** Пусть подпоследовательности $\{a_k^1\}, \ldots, \{a_k^s\}$, $s \in \mathbb{N}$, последовательности $\{a_n\}$ содержат все её члены и сходятся к различным числам $l_1, \ldots, l_s$ соответственно. Доказать, что множество частичных пределов последовательности $\{a_n\}$ есть $\{l_1, \ldots, l_s\}$.

√**3.167.** Доказать, что для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы сходилась любая её подпоследовательность.

√**3.168.** Доказать, что для сходимости монотонной последовательности достаточно сходимости некоторой её подпоследовательности.

3.169. Дана последовательность $\{a_n\}$, у которой все подпоследовательности $\{a_{2^k}\}, \{a_{3\cdot 2^k}\}, \{a_{5\cdot 2^k}\}, \{a_{7\cdot 2^k}\}, \ldots, k \in \mathbb{N}$, сходятся к одному и тому же числу b. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{a_n\}$?

√**3.170.** Доказать, что для любой последовательности $\{a_n\}$

$$\inf a_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \sup a_n.$$

3.171. Привести примеры последовательностей, для которых:
а) $\inf a_n < \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$; б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \sup a_n$; в) $\inf a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

3.172. Доказать, что сходящаяся последовательность достигает либо своей точной нижней грани, либо своей точной верхней грани, либо той и другой. Построить примеры последовательностей каждого из этих типов.

✓**3.173.** Доказать, что: а) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geqslant n} a_k$; б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geqslant n} a_k$.

3.174. Доказать, что если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n < \sup a_n$, то существует такое n_0, что $a_{n_0} = \sup a_n$.

✓**3.175.** Доказать, что для ограниченных последовательностей справедливы неравенства:

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$ $(a_n \geqslant 0,\ b_n \geqslant 0)$;

в) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$ $(a_n \geqslant 0,\ b_n \geqslant 0)$.

✓**3.176.** Привести примеры последовательностей, для которых в соотношениях предыдущей задачи имеют место строгие неравенства.

3.177. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ сходится, то для любой последовательности $\{b_n\}$ имеем

а) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$; б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0)$.

3.178. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ такова, что для любой последовательности $\{b_n\}$

или а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$,

или б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$ $(a_n > 0)$,

то последовательность $\{a_n\}$ сходится.

3.179. Пусть дана последовательность $\{a_n\}$, $a_n > 0$, и $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > q > 0$. Доказать, что существуют такие числа C и N, что $a_n > Cq^n$ для любого $n > N$.

3.180. Пусть дана последовательность $\{a_n\}$, $a_n > 0$, для которой $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{q^n} = 0$.

3.181*. Доказать, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geqslant e$ для любой положительной последовательности $\{a_n\}$.

Найти нижний и верхний пределы последовательности $\{a_n\}$ (3.182—3.187).

3.182°. $a_n = ((-1)^n + 1) \cdot 2^n$.

3.183. $a_n = n \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

✓**3.184°.** $a_n = \dfrac{n+1}{n+1+n\cdot(-1)^n}$.

✓**3.185.** $a_n = \left(1 + \sin\dfrac{\pi n}{4}\right)\left(1 - \sin\dfrac{\pi n}{6}\right)$.

3.186. $a_n = \sin \pi\alpha n$, где: а) $\alpha \in \mathbb{Q}$; б) $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

3.187. $a_n = \{n^\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$.

3.188. Пусть $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_{2n+1} = \dfrac{a_{2n}}{2}$, $a_{2n} = \dfrac{1 + a_{2n-1}}{2}$ при $n \in \mathbb{N}$. Найти все частичные пределы последовательности $\{a_n\}$.

✓**3.189.** Для каждого из следующих множеств либо привести пример последовательности, для которой оно является множеством её конечных частичных пределов, либо доказать, что такой последовательности не существует:

а) $\varnothing$; б) $\{1\}$; в) $\{\pi\}\cup\{e\}$; г) $\mathbb{N}$; д) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; е) $\mathbb{Z}$; ж) $\mathbb{Q}$; з) $[0;1]$;

и) $[0;1)$; к) $(0;1)$; л) $[0;1]\cap\mathbb{Q}$; м) $[0;1]\cup\{2\}$; н) $[0;2]\setminus\{1\}$; о) $[0;+\infty)$; п) $\mathbb{R}$; р) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

✓**3.190.** Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена, $l=\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$, $L=\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$. Доказать, что множество частичных пределов последовательности $\{a_n\}$ есть отрезок $[l;L]$.

✓**3.191.** Доказать, что множество частичных пределов последовательности $\{a_n\}$ есть отрезок $[-1;1]$, если:

а) $a_n=\sin\sqrt{n}$; б) $a_n=\cos\left(\pi\sqrt[3]{n}\right)$; в) $a_n=\cos n^{\frac{2}{3}}$; г) $a_n=\sin(\pi\ln n)$.

3.192*. Доказать, что множество частичных пределов последовательности $\{a_n\}$, $a_n=\{\sqrt{n}\}$, есть отрезок $[0;1]$.

✓**3.193.** Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ не имеет предела, если:

а) $a_n=\cos n$; б) $a_n=\operatorname{tg} n$; в) $a_n=\operatorname{ctg} n$; г)* $a_n=\sin n^2$; д)* $a_n=\sin 4^n$.

3.194*. Доказать, что множеством частичных пределов последовательности $\{a_n\}$ является отрезок $[-1;1]$, если а) $a_n=\sin n$; б) $a_n=\cos n$.

3.195*. Доказать, что множеством частичных пределов последовательности $\{a_n\}$, где $a_n=\operatorname{tg} n$, является вся числовая прямая.

Ответы и указания

3.1. Это свойство выполнено для любой последовательности.

3.2. I. а) Не является (нарушен порядок следования); б) является; в) не является (есть повторения). II. а) Является; б) не является (есть повторения); в) является.

3.4. Например, $a_n=n^{(-1)^n}$. **3.5.** Например, $a_n=n^2$.

3.7. Ограниченные: в), г); неограниченные: а), б), д); бесконечно большие: а), д).

3.8. Например, а) $N=\max\{1,[\log_{|q|}\varepsilon]\}$; б) $N=[1/\varepsilon]+6$; в) $N=10^{[1/\varepsilon]}+8$.

3.9. Например, а) $N=[10^{\sqrt{C}}]$; б) $N=[\sqrt{C}]+2$; в) $N=[C]+1$.

3.11. Например, $a_n=(-1)^n$.

3.12. Последовательность $\{a_n+b_n\}$ расходится, последовательность $\{a_nb_n\}$ тоже расходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$. Если же $a_n\to 0$, то последовательность может как сходиться, так и расходиться (см. ответ к задаче 3.13).

3.13. Например, $a_n=(-1)^n$, $b_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Такая ситуация возможна, только если $b_n\to 0$. Сравните с ответом к задаче 3.12.

3.14. Да; $a_{n+1}-a_n\to 0$ при $n\to\infty$.

3.15. Например, $a_n=\dfrac{1}{n!}$ или $a_n=(-1)^{n(n-1)/2}\dfrac{1}{n}$; обязательно сходится при $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$.

3.16. Например, а) $a_n=10n+\dfrac{1}{n}$; б) $a_n=n^2$; в) $a_n=n+(-1)^n$;

г) такой последовательности не существует, так как условия $a_n\to+\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0$ противоречат друг другу (последнее означает, что начиная с некоторого номера последовательность $\{|a_n|\}$ убывает);

д) $a_n=3^n+\sin n$; е) $a_n=n!$; ж) $a_n=n(2+(-1)^n)$.

3.17. Например, $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. **3.18—3.21.** 0. **3.22.** 1.

3.23. 0. *Указание.* См. задачу 2.97. **3.24.** 0. **3.25.** 0. *Указание.* См. задачу 2.96.

3.26. 0. **3.27.** $\dfrac{1}{2}$. **3.28.** $\dfrac{1}{1-q}$. **3.29.** $\dfrac{1}{2}$. **3.30.** $\dfrac{1}{6}$. *Указание.* См. пример 2.10.

3.31. $\dfrac{1}{2}$. *Указание.* См. задачу 2.60. **3.32.** $\dfrac{1}{12}$. **3.33.** $\dfrac{1}{4}$.

3.34. $\frac{3}{4}$. *Указание.* См. задачу 2.64. **3.35.** $\frac{1}{8}$. *Указание.* См. задачу 2.63.

3.36. $a_n = 1 - 4^{1-n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. **3.37.** $a_n = 2 - 2^{1-n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. **3.38.** $a_n = n!$.

3.39. $a_n = q^{n-1}a + \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}d$ $(n \geqslant 2)$ при $q \neq 1$; $a_n = a_1 + (n-1)d$ при $q = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{d}{1-q}$ при $|q| < 1$.

3.40. $a_n = ab\dfrac{a^n - b^n}{a^{n+1} - b^{n+1}}$ при $a \neq b$; $a_n = \dfrac{n}{n+1}a$ при $a = b$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \min\{a, b\}$.

3.41. $a_n = (n-1)^2$. **3.42.** $a_n = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + nb^2}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. **3.43.** $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

3.44. $a_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{6}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{6}$. **3.45.** $a_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3.46. $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{3n+3}2^{(-1)^{n+1}}$, $n > 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$. **3.47.** $a_n = \dfrac{n}{2n-2}$, $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

3.48. $a_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n+1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$. **3.49.** $a_n = 4 - \dfrac{2n+4}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

3.50. $a_n = h_n$, где $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

3.51. $a_n = \dfrac{a+2b}{3} + \dfrac{b-a}{3} \cdot \dfrac{(-1)^n}{2^{n-2}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{a+2b}{3}$. *Указание*. Рассмотреть $\{x_n\}$, $x_n = a_{n+1} - a_n$.

3.52. $a_n = \dfrac{a}{a+b}(1-(1-a-b)^n) \to \dfrac{a}{a+b}$, $b_n = \dfrac{b}{a+b}(1-(1-a-b)^n) \to \dfrac{b}{a+b}$. **3.54.** $\dfrac{a}{1-b}$.

3.55. Сходится к 0 при $a_1 = \dfrac{2}{a}$, сходится к $\dfrac{1}{a}$, если $0 < a_1 < \dfrac{2}{a}$, расходится в остальных случаях. *Указание*. Для $b_n = aa_n - 1$ показать, что $b_{n+1} = -b_n^2$.

3.56—3.58. Сходится.

3.59. Сходится. *Указание*. Воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})} = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

3.60. Расходится. *Указание.* Оценить снизу разность $a_n - a_m$ при $n = [e^{5\pi/6+2\pi k}]$ и $m = [e^{\pi/6+2\pi k}]$, $k \in \mathbb{N}$.

3.61, 3.62. Расходится. **3.63.** Сходится. **3.64.** *Указание.* Применить критерий Коши.

3.65. а) $\sqrt{2}$; б) $1 + \sqrt{2}$. *Указание*. Показать, что $|a_{n+1} - a_n| < \dfrac{1}{4}|a_n - a_{n-1}|$, и воспользоваться результатом предыдущей задачи.

3.66. Например, $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2n}$. *Указание.* Применить критерий Коши.

3.67. *Указание*. Применить критерий Коши.

3.68. *Указание.* Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

3.71. *Указание.* Использовать неравенство $H_n \leqslant G_n \leqslant A_n$ (см. пример 2.6).

3.72. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **3.73.** а) $\dfrac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$; б) e^{-k}.

3.74. $\dfrac{1}{a}$. **3.75.** *Указание.* Применить метод математической индукции.

3.76. *Указание.* а) Использовать результат примера 3.14; б) использовать неравенство $\Big(1 + \dfrac{1}{2n}\Big)^{2n} < e < \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{n+1}$ (см. пример 3.14) и применить неравенство Бернулли для оценки разности $\Big(1 + \dfrac{1}{2n}\Big)^{2n} - \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{n}$.

3.77. *Указание*. Воспользоваться утверждением задачи 3.72.

3.78. а) *Указание*. Пользуясь биномом Ньютона, доказать неравенства

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{3!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big) + \ldots + \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$, и перейти к пределу при $n \to \infty$ при фиксированном k.

б) *Указание*. Доказать, что $e-\left(2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\right)$, и применить формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
в) *Указание*. Предположив противное, т. е. что $e=\frac{m}{n}$ при $m,n\in\mathbb{N}$, применить равенство из предыдущего пункта и получить противоречие.
г), д) *Указание*. Применить равенство из пункта б).
3.79. *Указание*. Воспользоваться п. а) предыдущей задачи.
3.80. *Указание*. Использовать равенство $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ и задачу 3.78 а).
3.82. а) $\ln 2$; б) $\ln 2$. **3.84.** $\sqrt{ab}$.
3.86. *Указание*. Доказать, что $a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-b_n)$ и последовательность $\{a_n\}$ сходится.
3.87. 2. **3.88.** $\sqrt[k-1]{7}$. **3.89.** $\frac{1}{2}$. **3.90.** $\frac{1}{3}$. **3.91.** 2. **3.92.** 3. **3.93.** $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$.
3.94. $\sqrt[3]{a}$. **3.95.** $\sqrt[p]{a}$. **3.96.** 2. **3.97.** 2. **3.98.** $1-\sqrt{1-a}$. **3.99.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
3.100. $\sqrt{a}$. *Указание*. Доказать по индукции, что при $0<a<1$ последовательность возрастает, причём $a_n<\sqrt{a}$, а при $a>1$ — убывает, причём $a_n>\sqrt{a}$.
3.101. b. **3.102.** a. **3.103.** b.
3.104. $1+\frac{\sqrt{15}}{3}$. *Указание*. Доказать, что $\{a_n\}$ возрастает и $0<a_n<\frac{7}{3}$.
3.105. $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. *Указание*. Доказать, что подпоследовательности $\{a_{2n}\}$ и $\{a_{2n+1}\}$ монотонны и сходятся к общему пределу.
3.106. $\sqrt{1+a}-1$. *Указание*. См. указание к предыдущей задаче.
3.107. 4. **3.108.** 0. **3.109.** 0.
3.110. $-a$ при $a\leqslant 0$, 0 при $0<a<2$, $a-2$ при $a\geqslant 2$. *Указание*. Показать, что $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2^{n-1}}$ при $a\leqslant 0$ или $a\geqslant 2$, $0\leqslant a_{n+1}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$ при $0<a<2$.
3.111. $\frac{1}{2}$. *Указание*. Показать, что $\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{a_n(1-a_{n+1})}\leqslant\frac{1}{2}(1-a_{n+1}+a_n)$.
3.115. *Указание*. Доказать, что последовательность $\{b_n\}$, $b_n=a_n-\frac{c}{2^{n-1}}$, монотонна и ограничена.
3.116. *Указание*. Для $c_n=a_n-b_n$ показать, что $c_{n+2}-c_{n+1}\geqslant\frac{c_{n+1}-c_n}{2}\geqslant\ldots\geqslant\frac{c_2-c_1}{2^n}$, и воспользоваться результатом предыдущей задачи.
3.117. а) Да. *Указание*. Рассмотреть последовательность $b_n=a_n-\frac{1}{n-1}$, $n\geqslant 2$. б) Нет.
3.118. *Указание*. Доказать, что последовательность $\{b_n\}$, $b_n=a_{n+1}+\frac{2}{3}a_n$, имеет конечный предел b, тогда $\{a_n\}$ сходится к $\frac{3}{5}b$.
3.119. а) $\frac{d}{a}$; б) $\frac{1}{\sqrt{d}}$. **3.120.** $\sqrt{3}$. *Указание*. Показать, что $(1-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$.
3.121. π. **3.122.** $\frac{1}{k+1}$. **3.123.** $\frac{1}{2}$. **3.124.** $2\sqrt{2}-2$. **3.125.** $\frac{3}{2}$. **3.126.** $\frac{2}{3}$. **3.127.** $\frac{2}{5}$.
3.128. $\frac{1}{a-1}$. **3.129.** $\frac{1}{a-1}$. **3.130.** $\frac{1}{k+1}$. **3.131.** $\frac{1}{2}$. **3.132.** $2a$. **3.133.** a.
3.134. $\frac{1}{2}$. *Указание*. Рассмотреть подпоследовательности с чётными и нечётными номерами.
3.135. $\frac{1}{2}$. **3.136.** 2.
3.137. Нет, например, при $c_{nn}=-1$, $c_{n+1,n}=2$, $c_{ij}=0$ при остальных i, j, и $a_n=2^n$ последовательность $b_n\equiv 0$.
3.139. $\frac{a}{2}$. **3.140.** a. **3.141.** $\frac{2a}{3}$. **3.142.** $\frac{a}{1-b}$.

3.143. *Указание.* $a_n = \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{4}y_{n-1} + \frac{1}{4}a_{n-2} = \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{4}y_{n-1} + \frac{1}{8}y_{n-2} - \frac{1}{8}a_{n-3} = \ldots$

3.144. *Указание.* Положить $x_n = \ln a_n$ и воспользоваться предыдущей задачей.

3.145. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2a-b}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{2b-a}{3}$. *Указание.* Доказать, что $4x_n - x_{n-1} \to 2a - b$ и воспользоваться задачей 3.143.

3.146. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{a+b+c}{3}$. *Указание.* Если $x_n = a_n + b_n$, то $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$, откуда $x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} = \ldots = x_2 + \frac{1}{2}x_1 = a + b + c$, следовательно, $x_n \to \frac{2}{3}(a+b+c)$.

3.147. *Указание.* Прологарифмировать последовательности и применить результат предыдущей задачи.

3.148. *Указание.* Доказать, что $a_n = \frac{n+1}{2n}a_{n-1} + 1$; тогда для $b_n = a_n - 2$ получаем $b_n - \frac{b_{n-1}}{2} \to 0$ и можно применить утверждение примера 3.12.

3.149. *Указание.* Положить $c_{nk} = \frac{b_{n-k+1}}{nb}$ при $b \neq 0$, $c_{nk} = \frac{1 + b_{n-k+1}}{n}$ при $b = 0$, и применить теорему Тёплица.

3.151. $+\infty$. *Указание.* Использовать задачу 2.109.

3.153. *Указание.* Применить неравенство Коши — Буняковского (см. задачу 2.110).

3.154. $a + b$. *Указание.* Рассмотреть последовательность $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

3.156. Например, $a_n = (1 + (-1)^n) \cdot \frac{1-n}{n}$. *Указание.* $A = \left\{-2 + \frac{1}{n}\right\} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.157. Например, $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$. *Указание.* Частичными пределами последовательности $\{a_n\}$ являются точки 1 и -1.

3.162. Нет.

3.163. Частичными пределами последовательности $\{b_n\}$ будут, например, все частичные пределы последовательности $\{a_n\}$ (ср. с утверждением задачи 3.158).

3.169. Такая последовательность или сходится к числу b, или расходится. *Указание.* Рассмотреть последовательность $\{a_k\}$, где $a_k = 1$, если $k = (2p+1) \cdot 2^q$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$; $a_k = 0$, если $k = 3^n$, $n \in \mathbb{N}$, и $a_k = 2$, если k не входит ни в одно из вышеуказанных множеств.

3.171. Например, а) $a_n = -1 - \frac{1}{n}$, или $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$, или $a_1 = -4$, $a_n = \frac{1}{n}$, $n > 1$; б) $a_n = 2 \cdot (-1)^n - \frac{1}{n}$; в) $a_n = -n$, или $a_n = -10 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.175. *Указание.* См. пример 3.22.

3.176. Например, для неравенств п. а)

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 3k, \\ -1, & n = 3k-1, \\ 0, & n = 3k-2, \ k \in \mathbb{N}; \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} -2, & n = 3k, \\ 0, & n = 3k-1, \\ 1, & n = 3k-2, \ k \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

для неравенств п. б) и в)

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 3k, \\ 2, & n = 3k-1, \\ \frac{1}{3}, & n = 3k-2, \ k \in \mathbb{N}; \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 3, & n = 3k, \\ \frac{1}{2}, & n = 3k-1, \\ 4, & n = 3k-2, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

3.178. *Указание.* Если последовательность $\{a_n\}$ расходится, то для последовательности $b_n = -a_n$, $n \in \mathbb{N}$, не выполнено условие а), а для последовательности $b_n = \frac{1}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, не выполнено условие б).

3.179. *Указание.* Воспользоваться равенством $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

3.180. См. указание к предыдущей задаче.

3.181. *Указание.* Можно доказать от противного: если $\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} < 1 + \frac{1}{n}$ при всех $n \geqslant n_0$, то $\frac{a_1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1}$. Суммируя обе части этого неравенства от n_0 до $N-1$, вывести отсюда, что $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{a_N}{N} = -\infty$, что противоречит условию $a_n > 0$.

3.182. 0; $+\infty$. **3.183.** -1; 1. **3.184.** $\frac{1}{2}$; $+\infty$. **3.185.** 0; 4.

3.186. а) -1; 1, если q чётно; $-\sin\frac{\pi(q-1)}{2q}$; $\sin\frac{\pi(q-1)}{2q}$, если q нечётно, где $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, НОД$(p, q) = 1$; б) -1; 1.

3.187. 0; 1.

3.188. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. *Указание.* $\left|a_{2n+1} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{2}\left|a_{2n} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{4}\left|a_{2n-1} - \frac{1}{3}\right|$.

3.189. а) $a_n = n$; б) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$; в) $a_n = \frac{\pi + e}{2} + \frac{\pi - e}{2}(-1)^n$;
г) $\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$;
е) $\{0, -1, 0, 1, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$;
з) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$; м) $\left\{\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 2, \ldots\right\}$;
о) $a_n = f(n)$, где $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0; +\infty)$ — биекция; п) $a_n = f(n)$, где $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ — биекция;
д), ж), и), к), л), н), р) не существует, так как множество не замкнуто.

3.191. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.

3.193. *Указание.* а) См. пример 3.6.

3.194. *Указание.* Использовать пример 3.23.

Глава 4

Предел и непрерывность функций

§ 4.1. Предел функции

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Напомним, что через $U(a)$ обозначается окрестность точки a (т. е. любой интервал, содержащий точку a), а через $\mathring{U}(a)$ — её проколотая окрестность, $\mathring{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Определение. Число l называется *пределом* функции f в точке a (обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$), если для любого положительного числа ε существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a)$, что для любого x, принадлежащего ей, выполнено неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$. С использованием кванторов это определение записывается так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathring{U}(a) \colon \ \forall x \in \mathring{U}(a) \ \text{ имеем } \ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, то говорят также, что функция $f(x)$ *стремится* к l при $x \to a$ (запись: $f(x) \to l$, $x \to a$).

Проколотую окрестность в определении предела можно заменить на симметричную проколотую δ-окрестность с центром в точке a, т. е. множество вида

$$\mathring{U}_\delta(a) = \{x \colon 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta; a + \delta) \setminus \{a\}$$

(число $\delta > 0$ называется её радиусом). Тогда определение предела запишется следующим образом:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \colon \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \ \text{ имеем } \ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Внимание! В определении $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ нет никаких условий на значение $f(a)$; более того, нет даже требования, чтобы функция $f(x)$ была определена в точке a. Поэтому ни неопределённость в точке a, ни значение $f(a)$ не влияют на существование и величину $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пример 4.1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 5, \\ 0, & x = 5. \end{cases}$$

Поскольку разность $f(x) - 1$ равна нулю для всех значений x, кроме $x = 5$ (т. е. в любой проколотой окрестности $\mathring{U}(5)$), из определения предела следует, что $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 1$. □

Вообще, если функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают в некоторой проколотой окрестности точки a, то либо обе они не имеют предела при $x \to a$, либо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Пример 4.2. Покажем, что $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x=1$.

Решение. Оценим разность $|1-\sin x|$. Поскольку для любого x имеем

$$1-\sin x=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right),\quad \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\leqslant 1 \quad \text{и} \quad \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|\leqslant\left|\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right|,$$

получаем $|1-\sin x|\leqslant\left|\frac{\pi}{2}-x\right|$. Следовательно, если $\delta=\varepsilon>0$, то из неравенства $0<\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta$ следует неравенство $|1-\sin x|<\varepsilon$. Таким образом, $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\varepsilon:\ \forall x,\ 0<\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta$, имеем $|1-\sin x|<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x=1$. □

Обратите внимание: мы не решаем неравенство $|1-\sin x|<\varepsilon$, т. е. не находим множество всех тех и только тех значений x, для которых оно верно. Нас интересует только наличие такой окрестности точки $a=\pi/2$, в которой это неравенство выполняется. Выполняется оно вне этой окрестности или нет, нас не интересует. В такой ситуации бывает удобно заранее выделить некоторую окрестность точки a, в которой и проводить дальнейшие оценки. При этом необходимо следить за тем, чтобы окрестность, найденная в результате этих оценок, не оказалась больше, чем выделенная заранее.

Пример 4.3. Покажем, что $\lim\limits_{x\to-3}x^2=9$.

Решение. Необходимо оценить $|x^2-9|=|x-3|\cdot|x+3|$. Поскольку на всей числовой прямой множитель $|x-3|$ не ограничен, оценку произведения сделать проще, если выделить некоторую, например, 1-окрестность точки $a=-3$, а именно интервал $(-4;-2)$. Для всех $x\in(-4;-2)$ имеем $|x-3|<7$, следовательно, $|x^2-9|<7|x+3|$. Так как δ-окрестность точки $a=-3$, равная $(-3-\delta;-3+\delta)$, не должна выходить за пределы интервала $(-4;-2)$, получаем $\delta=\min\{1,\varepsilon/7\}$, и тогда из неравенства $0<|x+3|<\delta$ следует неравенство $|x^2-9|<\varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to-3}x^2=9$. □

Если пополнить числовую прямую несобственной точкой ∞, а под проколотой окрестностью этой точки понимать множество $\mathring{U}_C(\infty)=\{x:|x|>C\}=(-\infty;C)\cup(C;+\infty)$, где $C>0$, то так же, как и выше, можно определить предел функции $f(x)$ при $x\to\infty$, а именно

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=l \iff \forall\varepsilon>0\ \exists C>0:\ \ \forall x\in\mathring{U}_C(\infty) \quad \text{имеем} \quad |f(x)-l|<\varepsilon.$$

Поэтому далее будем считать, что a — некоторая точка расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, т. е. число или символ ∞, если специально не оговорено противное.

Приведённое выше определение предела функции при $x\to a$ называют определением предела по Коши. Можно определить предел функции и иначе, с использованием понятия предела последовательности (определение предела функции по Гейне): число l называется пределом функции f в точке a, если для любой такой последовательности $\{x_n\}$, что $x_n\to a$ при $n\to\infty$ и $x_n\neq a$ для всех $n\in\mathbb{N}$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны, т. е. если существует один из них, то существует и другой, и они равны. В качестве основного мы используем определение предела по Коши.

Пусть a — собственная точка числовой прямой. Если в определении предела функции $f(x)$ при $x \to a$ заменить проколотую окрестность на правую или левую полуокрестность точки a, т. е. интервал вида $(a; a+\delta)$ или $(a-\delta; a)$, $\delta > 0$ то получим определение односторонних пределов в точке a, обозначение $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ соответственно; в терминах неравенств это значит, что рассматриваются значения x, удовлетворяющие двойному неравенству $0 < x - a < \delta$ $(0 < a - x < \delta)$.

Аналогично если $a = \infty$, а под односторонними окрестностями этой точки понимать лучи $(-\infty; -C)$ и $(C; +\infty)$, где $C > 0$, то получим определение односторонних пределов $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. В этом случае для удобства будем говорить, что речь идёт о пределе функции $f(x)$ в несобственной точке $-\infty$ или $+\infty$.

Непосредственно из определения следует, что предел функции в точке $a \in \overline{\mathbb{R}}$ существует и равен l тогда и только тогда, когда в этой точке оба односторонних предела существуют и равны l.

Пример 4.4. Покажем, что $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x \sin\ln x}{x^2 - 100x + 3000} = 0$.

Решение. Так же как в предыдущем примере, выделим удобную для дальнейших оценок окрестность точки $+\infty$ (луч $x > C$): а именно, луч $x > 200$. Для $x > 200$ имеем $x^2 - 100x + 3000 > x(x - 100) > \dfrac{x^2}{2}$, следовательно,

$$\left|\frac{x \sin\ln x}{x^2 - 100x + 3000}\right| < \frac{x}{x^2/2} = \frac{2}{x}.$$

Таким образом, если $C = \max\{200, 2/\varepsilon\}$, то из неравенства $x > C$ получаем

$$\left|\frac{x \sin\ln x}{x^2 - 100x + 3000}\right| < \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x \sin\ln x}{x^2 - 100x + 3000} = 0. \qquad \square$$

Пример 4.5. Покажем, что у функции $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ нет предела при $x \to 0$.

Решение. Запишем с помощью кванторов утверждение «число l не является пределом функции $f(x)$ при $x \to 0$»:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \ \exists x \in \mathring{U}_\delta(0):\ |f(x) - l| \geqslant \varepsilon.$$

Если $l = 0$, то возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ и $x_k = \dfrac{1}{2\pi k + \pi/2}$, тогда $\forall \delta > 0\ \exists k \in \mathbb{N}$: $0 < x_k < \delta$ и $|f(x_k) - 0| = |f(x_k)| = 1 > \varepsilon$, таким образом, нуль не есть предел $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$. Если же $l \neq 0$, то возьмём $\varepsilon = \dfrac{|l|}{2}$ и $x_k = \dfrac{1}{2\pi k}$. Тогда $\forall \delta > 0\ \exists k \in \mathbb{N}$: $0 < x_k < \delta$ и $|f(x_k) - l| = |l| > \varepsilon$, поэтому и любое отличное от нуля число не является пределом функции $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$. С использованием определения предела по Гейне доказательство ещё проще: достаточно найти такую последовательность $\{x_n\}$, что $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, $x_n \neq 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{x_n}$ не существует. В качестве такой последовательности можно взять, например, $x_n = \dfrac{1}{\pi/2 + \pi n}$, тогда последовательность $\left\{\sin\dfrac{1}{x_n}\right\}$ расходится, так как $\sin\dfrac{1}{x_n} = (-1)^n$. $\square$

Сформулируем необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке, аналогичное соответствующему утверждению для последовательностей.

Теорема (критерий Коши существования предела функции в точке). *Функция* $f(x)$ *имеет предел в точке* a *тогда и только тогда, когда* $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0\colon \forall x_1,\ x_2\in\mathring{U}_\delta(a)$ *имеем* $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Доказать, что функция $f(x)=\sin(1/x)$ из примера 4.5 не имеет предела при $x\to 0$, можно также и с использованием критерия Коши. Для этого нужно проверить, что выполняется следующее утверждение: $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x_1, x_2$, $0<|x_1|<\delta$, $0<|x_2|<\delta$, для которых $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon$. Для произвольного $\delta>0$ выберем $n\in\mathbb{N}$ так, что $1\big/\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)<\delta$, и положим

$$x_1=\frac{1}{(\pi/2)+2\pi n},\quad x_2=\frac{1}{(3\pi/2)+2\pi n}.$$

Тогда $0<|x_1|<\delta$, $0<|x_2|<\delta$ и при этом $f(x_1)=1$, $f(x_2)=-1$. Следовательно, $|f(x_1)-f(x_2)|=2$, и доказываемое утверждение выполнено для $\varepsilon=2$.

Из приведённых примеров видно, что, пользуясь определением предела, мы проверяем, является ли данное число пределом данной функции или нет, но не имеем конструктивного метода вычисления предела данной функции.

Непосредственно из определения предела можно получить утверждения: если $y(x)$ есть постоянная величина, т. е. $y(x)\equiv C$, то $\lim\limits_{x\to a} y(x)=C$; если $y(x)\equiv x$ и a — собственная точка числовой прямой, то $\lim\limits_{x\to a} y(x)=\lim\limits_{x\to a} x=a$. Несмотря на тривиальность этих равенств, они являются основой для вычисления пределов.

Основные утверждения, используемые для вычисления пределов

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

а) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x))=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)+\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x))=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

в) если $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$;

г) если в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$ имеем

$$f_1(x)\leqslant g(x)\leqslant f_2(x)\quad\text{и}\quad \lim_{x\to a} f_1(x)=\lim_{x\to a} f_2(x)=l,\quad\text{то}\quad \lim_{x\to a} g(x)=l$$

(*принцип двустороннего ограничения*).

Пример 4.6. Найдём $\lim\limits_{x\to a}(c_0x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_{n-1}x+c_n)$, где a — собственная точка числовой прямой.

Решение. Пользуясь утверждениями о пределе суммы и произведения, получаем: $\lim\limits_{x\to a}(c_0x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_{n-1}x+c_n)=c_0a^n+c_1a^{n-1}+\ldots+c_{n-1}a+c_n$, т. е. предел многочлена при $x\to a$ существует и равен значению этого многочлена в точке a. □

Пример 4.7. Найдём $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$.

Решение. Находим $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-1)=-2$ и $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-4x+3)=8$, пользуясь результатом предыдущего примера. Поскольку предел знаменателя не равен нулю, применимо утверждение в) о пределе отношения функций. Следовательно, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-4x+3)}=-\dfrac{1}{4}$. □

Пример 4.8. Найдём $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$.

Решение. Пользуясь неравенством $-x^2 \leqslant x^2 \sin\frac{1}{x} \leqslant x^2$ и принципом двустороннего ограничения, получаем, что $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$. □

В дальнейшем будем постоянно пользоваться тем, что для любой основной элементарной функции $f(x)$ (см. с. 5) и внутренней точки a её области определения справедливо равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Определение. Если функция $f(x)$ определена всюду в некоторой окрестности (правой полуокрестности, левой полуокрестности) точки a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ ($\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$), то функция $f(x)$ называется *непрерывной* (*непрерывной справа*, *непрерывной слева*) *в точке* a.

Пользуясь этим определением, можно предыдущее замечание сформулировать так: каждая основная элементарная функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения и непрерывна справа (слева) в крайней левой (крайней правой) точке области определения.

При вычислении пределов часто применяют *теорему о пределе композиции*: если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ и существует $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$, то

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t)) = f(\lim_{t\to t_0} x(t)) = f(a).$$

Пример 4.9. Найдём $\lim\limits_{x\to 4\pi} \ln\left(2 + \sqrt{1+\sin^2(x/2)}\right)$.

Решение. Напишем цепочку соотношений: $y_1 = \frac{x}{2}$, $y_2 = \sin y_1$, $y_3 = y_2^2$, $y_4 = 1 + y_3$, $y_5 = \sqrt{y_4}$, $y_6 = 2 + y_5$, $y_7 = \ln y_6$.

Применяя последовательно теорему о пределе композиции, получим

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 4\pi} y_1(x) = 2\pi; &&\lim_{x\to 4\pi} y_2(x) = \lim_{y_1\to 2\pi} \sin y_1 = 0;\\
&\lim_{x\to 4\pi} y_3(x) = \lim_{y_2\to 0} y_2^2 = 0; &&\lim_{x\to 4\pi} y_4(x) = \lim_{y_3\to 0} (1+y_3) = 1;\\
&\lim_{x\to 4\pi} y_5(x) = \lim_{y_4\to 1} \sqrt{y_4} = 1; &&\lim_{x\to 4\pi} y_6(x) = \lim_{y_5\to 1} (2+y_3) = 3;
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 4\pi} \ln\left(2+\sqrt{1+\sin^2(x/2)}\right) = \lim_{x\to 4\pi} y_7(x) = \lim_{y_6\to 2} \ln y_6 = \ln 3. \quad \square$$

Заметим, что условие непрерывности функции f в точке $x = a$ в теореме о пределе композиции существенно: если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$, то нельзя утверждать, что $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t)) = l$. Действительно, если $f(x)$ — функция из примера 4.1, а $x(t) = 5$ при всех t, то в любой точке t_0 имеем $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t)) = f(5) = 0$, хотя $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 1$. Более того, из существования пределов функций $f(x)$ и $x(t)$ не вытекает даже существование предела $f(x(t))$ (см. пример Т4.1).

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого $C > 0$ существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a)$, что для любых $x \in \mathring{U}(a)$ имеем $|f(x)| > C$.

Заменяя в этом определении неравенство $|f(x)|>C$ на $f(x)>C$ ($f(x)<-C$), получаем определение положительной (отрицательной) бесконечно большой функции.

Определение бесконечно большой функции имеет много общего с определением предела функции: в первом определении требуется, чтобы все значения функции в некоторой проколотой окрестности точки a оси Ox попадали в заданную окрестность несобственной точки оси Oy, а во втором определении требуется, чтобы все значения функции в некоторой проколотой окрестности точки a оси Ox попадали в заданную окрестность собственной точки l оси Oy.

Коротко утверждение, что функция $f(x)$ при $x\to a$ является бесконечно большой (положительной бесконечно большой, отрицательной бесконечно большой), записывается так: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$).

Дополним основные утверждения, используемые для вычисления пределов, следующими пунктами:

д) если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $f(x)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$,

обратно: если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$;

е) если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=l$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x))=\infty$;

ж) если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x))=+\infty$;

з) если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=l\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x))=\infty$.

Из утверждений а)—з) следует, что

если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=l\neq 0$, $f_2(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)/f_2(x)=\infty$;

если же $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=l$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)/f_2(x)=0$.

Пример 4.10. Найдём $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}$.

Решение. Пользуясь утверждениями б) и д), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}=\lim_{x\to 0}\ln(x^2+4x+2)\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}=\ln 2\cdot 0=0. \quad \square$$

Пример 4.11. Найдём $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2^x}$.

Решение. Рассмотрим обратную величину $\dfrac{2^x}{x}=2^x\cdot\dfrac{1}{x}$. Применяя утверждения б) и д), получаем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2^x\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}2^x\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,$$

откуда, в силу утверждения д) и неравенства $\dfrac{x}{2^x}<0$ следует, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2^x}=-\infty$. □

Пример 4.12. Найдём $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+4x}+x)$.

Решение. Из утверждения ж) следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+4x}+x)=+\infty$. □

Пример 4.13. Найдём $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\cos x)$.

Решение. Поскольку $0\leqslant\left|\dfrac{\cos x}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{|x|}$, применяя утверждения д) и г), получаем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{\cos x}{x}\right|=0$, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$, следовательно, в силу утверждения о пределе суммы $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\cos x}{x}\right)=1$. Применяя утверждение з), получаем, что $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\cos x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1+\dfrac{\cos x}{x}\right)=\infty$. □

Рассмотрим теперь, как находится предел степенно-показательной функции $u(x)^{v(x)}$ $(u(x)>0)$.

Пользуясь непрерывностью показательной функции, получаем

$$\lim_{x\to a}u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to a}e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}v(x)\ln u(x)}.$$

Таким образом, нахождение предела степенно-показательной функции сводится к нахождению $\lim\limits_{x\to a}v(x)\ln u(x)$.

Рассмотрим подробнее отдельные случаи (I—III).

I. Если $\lim\limits_{x\to a}u(x)=u$, $u>0$, и $\lim\limits_{x\to a}v(x)=v$, то $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}=u^v$, так как в силу непрерывности логарифмической функции $\lim\limits_{x\to a}\ln u(x)=\ln u$, а следовательно, $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}=\lim\limits_{x\to a}e^{v(x)\ln u(x)}=e^{v\ln u}=u^v$.

II. Если $\lim\limits_{x\to a}v(x)\ln u(x)=+\infty$, то получаем $\lim\limits_{x\to a}e^{v(x)\ln u(x)}=+\infty$. Если же $\lim\limits_{x\to a}v(x)\ln u(x)=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}e^{v(x)\ln u(x)}=0$.

Отсюда видно, что если $\lim\limits_{x\to a}v(x)\ln u(x)=\infty$ и произведение $v(x)\ln u(x)$ не сохраняет знак ни в какой проколотой окрестности точки a, то функция $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$ не имеет предела при $x\to a$.

Пример 4.14. Найдём $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 1}\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}=\ln\dfrac{1}{2}$, а $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{ctg}\pi x=\infty$, получаем

$$\lim_{x\to 1}\left(\ln\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\operatorname{ctg}\pi x\right)=\infty.$$

При $\dfrac{1}{2}<x<1$ имеем $\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}\cdot\operatorname{ctg}\pi x>0$; при $1<x<\dfrac{3}{2}$ имеем $\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}\cdot\operatorname{ctg}\pi x<0$. Итак, бесконечно большая функция $\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}\cdot\operatorname{ctg}\pi x$ в любой проколотой окрестности точки $a=1$ принимает значения разных знаков. Поэтому функция

$$\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x} = \exp\left(\operatorname{ctg}\pi x\ln\frac{x^2}{x^2+1}\right)$$

не имеет предела при $x\to 1$ и не является бесконечно большой при $x\to 1$. В то же время $\lim\limits_{x\to 1+}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}=0$, $\lim\limits_{x\to 1-}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}=+\infty$. □

Пример 4.15. Найдём $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sin\dfrac{\pi x}{4}\right)^{x^2+3}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{\pi x}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)=4$, получаем

$$\lim_{x\to 1}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{x^2+3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4}.$$ □

Пример 4.16. Найдём $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{\operatorname{ctg}^2 \pi x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{1}{2}$ и $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{ctg}^2 \pi x=+\infty$, получаем

$$\lim_{x\to 1}\operatorname{ctg}^2 \pi x \ln\frac{x+1}{x+3}=-\infty, \text{ следовательно, } \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{\operatorname{ctg}^2 \pi x}=0. \qquad \square$$

Пример 4.17. Найдём $\lim\limits_{x\to \pi+}(\sin^2 x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to \pi+}\ln\sin^2 x=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to \pi+}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=-\infty$, получаем

$$\lim_{x\to \pi+}(\ln\sin^2 x)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=+\infty, \qquad \lim_{x\to \pi+}(\sin^2 x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=+\infty. \qquad \square$$

III. Пусть в произведении $v(x)\ln u(x)$ предел одного из сомножителей при $x\to a$ равен нулю, а второй сомножитель является бесконечно большой функцией. Такое положение возможно в трёх случаях:

1) $\lim\limits_{x\to a}v(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}u(x)=+\infty$ (символически ∞^0),
2) $\lim\limits_{x\to a}v(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}u(x)=0$ (символически 0^0),
3) $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}u(x)=1$ (символически 1^∞).

Непосредственное применение теорем о свойствах пределов и бесконечно больших функций не даёт возможности вычислить такие пределы. Так же обстоит дело с вычислением $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, когда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. Этот предел нельзя найти, пользуясь теоремой о пределе отношения, так как предел знаменателя равен нулю, нельзя использовать и утверждения д)—з), так как предел числителя равен нулю. В этом случае говорят, что имеется неопределённость типа $\dfrac{0}{0}$. Аналогично вводятся символические обозначения неопределённостей типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$. Методы вычисления таких пределов рассмотрим в следующих параграфах.

§ 4.2. Вычисление пределов методом тождественных преобразований

В тех случаях, когда имеет место неопределённость, для вычисления предела — «раскрытия неопределённости» — преобразовывают выражение так, чтобы сделать вычисление предела возможным. Для таких преобразований используются или тождественные (в проколотой окрестности точки a) соотношения, или сравнение поведения функций при стремлении аргумента к предельной точке. В данном параграфе мы подробно остановимся на первом из этих способов, а в следующем — на втором.

Пример 4.18. Найдём $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ (неопределённость типа $\dfrac{0}{0}$).

Решение. В проколотой окрестности точки $x=1$ функции $\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ и $\dfrac{x^2+x+1}{x-3}$ тождественно равны. Предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x-3}$ вычисляется с использованием утверждения о пределе частного и пределе многочлена. Итак,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)}=-\frac{3}{2}. \qquad \square$$

Пример 4.19. Найдём $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+4x+3}{x^3-3x-2}$ (неопределённость типа $\dfrac{0}{0}$).

Решение. *Первый способ.* Раскладывая числитель и знаменатель на множители, аналогично предыдущему примеру получаем

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4+4x+3}{x^3-3x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2(x^2-2x+3)}{(x+1)^2(x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x+3}{x-2}=\frac{6}{-3}=-2.$$

Второй способ. Положим $t=x+1$. При $x\to -1$ имеем $t\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4+4x+3}{x^3-3x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{(t-1)^4+4(t-1)+3}{(t-1)^3-3(t-1)-2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^4-4t^3+6t^2}{t^3-3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-4t+6}{t-3}=-2.$$

Отметим, что при таком способе приходится лишь раскрывать скобки, а не раскладывать многочлены на множители. □

Пример 4.20. Найдём $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n}{\beta_0x^m+\beta_1x^{m-1}+\ldots+\beta_{m-1}x+\beta_m}$, где $m>n\geqslant 1$, $\alpha_0\beta_0\neq 0$ (неопределённость $\dfrac{\infty}{\infty}$).

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^m:

$$\frac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n}{\beta_0x^m+\beta_1x^{m-1}+\ldots+\beta_{m-1}x+\beta_m}=\frac{\alpha_0\cdot\dfrac{1}{x^{m-n}}+\ldots+\alpha_{n-1}\cdot\dfrac{1}{x^{m-1}}+\alpha_n\cdot\dfrac{1}{x^m}}{\beta_0+\beta_1\cdot\dfrac{1}{x}+\ldots+\beta_{m-1}\cdot\dfrac{1}{x^{m-1}}+\beta_m\dfrac{1}{x^m}}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha_0x^n+\ldots+\alpha_n}{\beta_0x^m+\ldots+\beta_m}=\dfrac{0}{\beta_0}=0$ (т. е. правильная рациональная дробь стремится к нулю при $x\to\infty$).

Если в числителе такой дроби стоит многочлен нулевой степени, т. е. константа, то стремление дроби к нулю при $x\to\infty$ следует непосредственно из утверждения д) на с. 111. □

Пример 4.21. Найдём $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}+x)$ (неопределённость $\infty-\infty$).

Решение. Если $x<0$, то

$$\sqrt{x^2+4x+5}+x=\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=\frac{4+\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-1},$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}+x)=-2.$ □

Пример 4.22. Найдём $\lim\limits_{x\to\pi+}\sqrt{1+\cos x}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ (неопределённость типа $0\cdot\infty$).

Решение. Если $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$, то $\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2\cos^2\dfrac{x}{2}}=-\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}$, поэтому

$$\lim_{x\to\pi+}\sqrt{1+\cos x}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi+}\left(-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=-\sqrt{2}.$$ □

Пример 4.23. Найдём $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}$ (неопределённость типа $\dfrac{\infty}{\infty}$).

Решение. Имеем

$$\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}=\frac{2\ln|x|+\ln\left(1+\dfrac{4x+2}{x^2}\right)}{10\ln|x|+\ln\left(1+\dfrac{x^3+x}{x^{10}}\right)}=\frac{2+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{4x+2}{x^2}\right)}{\ln|x|}}{10+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x^2+1}{x^9}\right)}{\ln|x|}}.$$

Применяя утверждения б) и д) для вычисления пределов, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{\ln|x|}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln|x|}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2+1}{x^9}\right)}{\ln|x|}=0,$$

откуда, применяя утверждения а) и б), находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}=\frac{2+0}{10+0}=\frac{1}{5}. \qquad \square$$

Пример 4.24. Найдём $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}$ (неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$).

Решение. В главе 2 методом математической индукции было доказано (см. пример 2.15 на с. 61), что для всех натуральных чисел $n\geqslant 5$ имеем $n^2<2^n$. Пользуясь монотонностью показательной функции 2^x, получаем при $x>4$

$$2^{x+1}\geqslant 2^{[x]+1}>([x]+1)^2\geqslant x^2,$$

где $[x]$ — целая часть x. Поэтому при $x>4$ имеем $0<\frac{x}{2^x}<\frac{2}{x}$. Применяя утверждения г) и д) для вычисления пределов, получаем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}=0$. $\square$

Пример 4.25. Найдём $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$ (неопределённость типа 0^0).

Решение. Поскольку $x^x=e^{x\ln x}$, необходимо найти $\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x$. Положим $x=2^{-t}$, тогда условие $x\to 0+$ эквивалентно условию $t\to+\infty$. Пользуясь результатом предыдущего примера, получаем, что

$$\lim_{x\to 0+}x\ln x=\lim_{t\to+\infty}\frac{-t\ln 2}{2^t}=0,\ \text{следовательно,}\ \lim_{x\to 0+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x}=e^0=1. \qquad \square$$

§ 4.3. Сравнение асимптотического поведения функций

Определения. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a и $f(x)=\gamma(x)g(x)$. Говорят, что:

1) $f(x)$ *эквивалентна* $g(x)$ при $x\to a$ ($f(x)\sim g(x)$, $x\to a$), если $\gamma(x)\to 1$ при $x\to a$;

2) $f(x)$ есть *о-большое* от $g(x)$ при $x\to a$ ($f(x)=O(g(x))$, $x\to a$), если $\gamma(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a;

3) $f(x)$ есть *о-малое* от $g(x)$ при $x\to a$ ($f(x)=o(g(x))$, $x\to a$), если $\gamma(x)\to 0$ при $x\to a$.

Если $g(x)$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности точки a, то:

1) $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$;

2) $f(x)=O(g(x))$ при $x\to a$, если отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничено в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$;

3) $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

Отметим, что записи $f(x)=O(g(x))$ и $f(x)=o(g(x))$ не являются равенствами в обычном смысле; каждое из них означает лишь, что функция $f(x)$

обладает соответствующим свойством по отношению к функции $g(x)$. Например, из того, что $f_1(x)=o(g(x))$ и $f_2(x)=o(g(x))$ при $x\to a$, вовсе не следует, что $f_1(x)=f_2(x)$.

В соответствии с определением, запись $O(1)$ обозначает ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$ функцию, а запись $o(1)$ обозначает функцию, имеющую нулевой предел при $x\to a$ (бесконечно малую функцию при $x\to a$).

Свойства введённых соотношений (везде подразумевается, что $x\to a$).

1. Если $f(x)\sim g(x)$, то $g(x)\sim f(x)$ (симметричность).
2. Если $f(x)\sim g(x)$ и $g(x)\sim h(x)$, то $f(x)\sim h(x)$ (транзитивность).
3. Если $f(x)\sim g(x)$, то $f(x)=O(g(x))$.
4. Если $f(x)=o(g(x))$, то $f(x)=O(g(x))$.
5. Если $f(x)\sim g(x)$, то $o(f(x))=o(g(x))$.
6. Если постоянная $C\neq 0$, то $C\cdot O(g(x))=O(g(x))$, $C\cdot o(g(x))=o(g(x))$.
7. $O(O(g(x))=O(g(x))$, $o(O(g(x)))=o(g(x))$, $o(o(g(x)))=o(g(x))$.
8. $h(x)\cdot O(g(x))=O(h(x)\cdot g(x))$, $h(x)\cdot o(g(x))=o(h(x)\cdot g(x))$.
9. $O(g(x))\cdot O(g(x))=O(g^2(x))$, $O(g(x))\cdot o(g(x))=o(g^2(x))$, $o(g(x))\cdot o(g(x))=o(g^2(x))$.
10. $O(g(x))+O(g(x))=O(g(x))$, $O(g(x))+o(g(x))=O(g(x))$, $o(g(x))+o(g(x))=o(g(x))$.
11. Если $f(x)\sim g(x)$ и $h(x)\sim s(x)$, то $f(x)\cdot h(x)\sim g(x)\cdot s(x)$.
12. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=k\neq 0$, то $f(x)\sim k$.

Из этих свойств следует, что если $f(x)\sim g(x)$, то $f(x)-g(x)=o(g(x))$, или $f(x)=g(x)+o(g(x))$. Если функция $f(x)$ представлена в виде такой суммы, то говорят, что $g(x)$ есть *главная часть* функции $f(x)$ при $x\to a$.

Пример 4.26. Рассмотрим равенство

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n}{\alpha_0x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_0+\dfrac{\alpha_1}{x}+\dfrac{\alpha_2}{x^2}+\ldots+\dfrac{\alpha_n}{x^n}}{\alpha_0}=1,\quad \alpha_0\neq 0.$$

Следовательно, α_0x^n есть главная часть многочлена

$$\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n\quad (\alpha_0\neq 0)\quad \text{при}\ \ x\to\infty.$$

(Обращаем внимание, что, например, функции $y=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}$ и $y=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}$ также главные части данной функции при $x\to\infty$.) □

Пример 4.27. Рассмотрим равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-m}x^m}{\alpha_{n-m}x^m}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_0x^{n-m}+\alpha_1x^{n-m-1}+\ldots+\alpha_{n-m}}{\alpha_{n-m}}=1$$

($\alpha_{n-m}\neq 0$, $\alpha_0\neq 0$, $1\leqslant m\leqslant n$). Получаем, что $\alpha_{n-m}x^m$ есть главная часть многочлена $\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-m}x^m$ при $x\to 0$. □

Из примеров 4.24 и 4.20 следует, что при $x\to+\infty$ имеем 1) $x=o(2^x)$,
2) $\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n=o(\beta_0x^m+\beta_1x^{m-1}+\ldots+\beta_{m-1}x+\beta_m)$ ($\alpha_0\beta_0\neq 0$, $m>n$).

Справедливы следующие соотношения (*два замечательных предела*):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

В другой записи: $\sin x \sim x$, $e^x-1\sim x$ при $x\to 0$.

Отсюда получаем, что при $x\to 0$: $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{2}$ (свойство 11); $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}\sim x$ (свойства 11 и 12); $\arcsin x\sim\sin(\arcsin x)=x$; $\ln(1+x)\sim$ $\sim e^{\ln(1+x)}-1=x$; $(1+x)^\alpha-1=e^{\alpha\ln(1+x)}-1\sim\alpha\ln(1+x)\sim\alpha x$.

Сведём полученные и аналогичные им соотношения в таблицу.

Эквивалентность при $x\to 0$	Равенство при $x\to 0$
$\sin x\sim x$	$\sin x = x+o(x)$
$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$	$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$
$\operatorname{tg} x\sim x$	$\operatorname{tg} x = x+o(x)$
$\arcsin x\sim x$	$\arcsin x = x+o(x)$
$\operatorname{arctg} x\sim x$	$\operatorname{arctg} x = x+o(x)$
$e^x-1\sim x$	$e^x = 1+x+o(x)$
$\ln(1+x)\sim x$	$\ln(1+x) = x+o(x)$
$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$	$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+o(x)$

Пример 4.28. Справедливы равенства:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{tg}5x-\cos x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt[5]{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+5x+o(x)-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-\frac{x}{5}+o(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x+o(x)}{-\frac{x}{5}+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5+o(1)}{-\frac{1}{5}+o(1)}=\frac{5}{-\frac{1}{5}}=-25;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)-\sin 3x}{\operatorname{arctg}4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x+o(x))-3x+o(x)}{4x+o(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x+o(x)}{4x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+o(1)}{4+o(1)}=-\frac{1}{4};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x))\Big(1-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{2}.\qquad\square$$

Если $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$ и $g(x)\neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то равенство $h(x)f(x)=h(x)g(x)\frac{f(x)}{g(x)}$ показывает, что или $\lim\limits_{x\to a}h(x)f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)g(x)$, или оба предела не существуют. Таким образом, для упрощения вычисления предела произведения функций любой сомножитель в нём можно заменить на эквивалентную функцию. Пользуясь этим замечанием, нахождение предыдущего предела можно записать короче:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

В этом примере ясно видно, что соотношение $f(x)=o(x)$ при $x\to 0$ определяет только то, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, поэтому из соотношений $\sin x=x+o(x)$, $\operatorname{tg}x=x+o(x)$ при $x\to 0$ следует только, что $\operatorname{tg}x-\sin x=o(x)$, $x\to 0$ (свойства 6 и 10), т. е. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x}=0$, но эти соотношения не позволяют сравнить функцию $\operatorname{tg}x-\sin x$ с функцией x^3. Для такого сравнения требуется более глубокий анализ.

Внимание! Одна из самых распространённых ошибок при вычислении предела некоторого выражения — замена функции, не являющейся множителем всего этого выражения, на эквивалентную функцию (чаще всего такая ошибочная замена делается в отдельном слагаемом алгебраической суммы).

Пример 4.29. Справедливы равенства

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x-\sin^2 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^4}{x^4}=4.$$

Если же заменить функцию $y=2-2\cos 2x$ при $x\to 0$ эквивалентной функцией $4x^2$ и функцию $y=\sin^2 2x$ эквивалентной функцией $4x^2$, то получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-4x^2}{x^4}=0$, что не совпадает с ранее полученным верным результатом. □

Пример 4.30. Пользуясь тем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2^x}=0$ (см. пример 4.24), и утверждением д), получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}+x}{2^{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{x}{2^x}\cdot\dfrac{1}{2^{x^2-x}}}{2^x}=0.$$

Если же в функции $y=2^{x^2+x}$ заменить показатель эквивалентной при $x\to+\infty$ функцией $y=x^2$, то получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x^2}+x}{2^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{x}{2^x}\cdot\frac{1}{2^{x^2-x}}\Big)=1,$$

что не совпадает с ранее полученным верным результатом. □

Если ищется предел функции при $x\to a$, $a\neq 0$, то для удобства можно перейти к новому аргументу $y=x-a$, предел которого равен нулю при $x\to a$.

Пример 4.31. Найдём $\lim\limits_{x\to\pi/4}\Big(x-\dfrac{\pi}{4}\Big)\operatorname{tg}2x$.

Решение. Положим $x-\dfrac{\pi}{4}=y$, тогда

$$\lim_{x\to\pi/4}\Big(x-\frac{\pi}{4}\Big)\operatorname{tg}2x=\lim_{y\to 0}y\cdot\operatorname{tg}\Big(2y+\frac{\pi}{2}\Big)=\lim_{y\to 0}y(-\operatorname{ctg}2y)=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\Big(\frac{y}{\sin 2y}\cdot\cos 2y\Big)=-\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin 2y}\cdot\lim_{y\to 0}\cos 2y=-\Big(\lim_{y\to 0}\frac{y}{2y}\Big)\cdot 1=-\frac{1}{2}.\quad\square$$

Пример 4.32. Найдём $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{3\pi x^\alpha}{2}}{\ln(2x-\sqrt[7]{x})}$.

Решение. Положим $y=x-1$, тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\dfrac{3\pi x^\alpha}{2}}{\ln(2x-\sqrt[7]{x})}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos\Bigl(\dfrac{3\pi}{2}(1+y)^\alpha\Bigr)}{\ln(2y+2-\sqrt[7]{1+y})}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos\Bigl(\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{2}\alpha y+o(y)\Bigr)}{\ln\Bigl(2y+2-1-\dfrac{1}{7}y+o(y)\Bigr)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin\Bigl(\dfrac{3\pi}{2}\alpha y+o(y)\Bigr)}{\ln\Bigl(1+\dfrac{13}{7}y+o(y)\Bigr)}=\lim_{y\to 0}\Bigl(\Bigl(\frac{3\pi}{2}\alpha y+o(y)\Bigr):\Bigl(\frac{13}{7}y+o(y)\Bigr)\Bigr)=\frac{21}{26}\pi\alpha. \qquad \square$$

Пример 4.33. Найдём $\lim\limits_{x\to 1}(\sin\pi x+x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

Решение. Вычислим $\lim\limits_{x\to 1}\Bigl(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\ln(\sin\pi x+x)\Bigr)$, полагая $y=x-1$. Имеем

$$\lim_{x\to 1}\Bigl(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(\sin\pi x+x)\Bigr)=\lim_{y\to 0}\Bigl(\operatorname{tg}\frac{\pi(y+1)}{2}\ln(\sin\pi(y+1)+y+1)\Bigr)=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\Bigl(\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2}\ln(1+y-\sin\pi y)\Bigr)=-\lim_{y\to 0}\Bigl(\frac{2}{\pi y}(y-\sin\pi y)\Bigr)=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\frac{2(y-\pi y+o(y))}{\pi y}=\frac{2(\pi-1)}{\pi}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}(\sin\pi x+x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=e^{\frac{2(\pi-1)}{\pi}}$. $\square$

Отметим, что при $x\to a$ утверждения «$f(x)\sim g(x)$» и «$g(x)$ есть главная часть $f(x)$» равносильны. Поскольку функция $f(x)$ при $x\to a$ имеет бесконечное множество эквивалентных функций, при постановке задачи выделения главной части $f(x)$ при $x\to a$ мы указываем, какой именно вид должна иметь эта главная часть, по возможности — наиболее простой. Во многих случаях главную часть при $x\to a$ можно найти в виде $C(x-a)^\alpha$ для некоторых C и α. В частности, это так для всех функций в левой части таблицы на с. 117, а также их произведений и композиций друг с другом и со степенными функциями. Однако это возможно не всегда: например, функция $f(x)=\ln x$ не эквивалентна никакой функции вида $g(x)=Cx^\alpha$ при $x\to 0+$ (действительно, пользуясь доказанным в примере 4.25 равенством $\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x=0$, можно показать, что $\lim\limits_{x\to 0+}x^\alpha\ln x=0$ для любого $\alpha>0$, а при $\alpha\leqslant 0$ имеем $\lim\limits_{x\to 0+}x^\alpha\ln x=-\infty$).

Пример 4.34. Найдём главную часть вида $C|x|^\alpha$ функции

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}\quad\text{при}\ \ x\to 0.$$

Решение. Имеем

$$\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}=\sqrt{x+x^{2/3}}\cdot\ln\Bigl(1-\frac{2x^2}{1+x^2}\Bigr)=$$

$$=|x|^{1/3}\sqrt{x^{1/3}+1}\cdot\ln\Bigl(1-\frac{2x^2}{1+x^2}\Bigr)\sim|x|^{1/3}\cdot(-2x^2)=-2|x|^{7/3}\quad(x\to 0).$$

Итак, функция $g(x)=-2|x|^{7/3}$ является главной частью $f(x)$ при $x\to 0$. $\square$

Пример 4.35. Найдём главную часть вида $C(1-x)^\alpha$ функции
$$f(x) = 4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1 \quad \text{при} \ \ x \to 1.$$

Решение. Если ввести новую переменную $z = 1 - x$, то получим, что
$$4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1 = 4(1-z)^{1/4} - 5(1-z)^{1/5} + 1 =$$
$$= 4\Big(1 - \frac{z}{4} + o(z)\Big) - 5\Big(1 - \frac{z}{5} + o(z)\Big) + 1 = 4 - z + o(z) - 5 + z + o(z) + 1 = o(z),$$
таким образом, этим методом мы не получили функцию, эквивалентную данной. Введём переменную t так, чтобы избавиться от иррациональности: $x = t^{20}$. Тогда, поскольку $x \to 1$, получаем $t \to 1$ и
$$1 - x = 1 - t^{20} = (1-t)(1 + t + t^2 + \ldots + t^{19}) \sim 20(1-t), \quad 1 - t \sim \frac{1-x}{20},$$
$$4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1 = 4t^5 - 5t^4 + 1 = (1-t)^2(4t^3 + 3t^2 + 2t + 1) \sim 10(1-t)^2.$$
Следовательно, $f(x) \sim \dfrac{(1-x)^2}{400} \cdot 10 = \dfrac{(1-x)^2}{40}$ при $x \to 1$.

Итак, $g(x) = \dfrac{(1-x)^2}{40}$ является главной частью функции $f(x)$ при $x \to 1$. □

Пример 4.36. Найдём главную часть вида Cx^α функции
$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \arccos\frac{1}{x} \quad \text{при} \ \ x \to +\infty.$$

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\operatorname{arctg} x - \arccos\dfrac{1}{x}\Big) = 0$ и $\operatorname{tg} z \sim z$ при $z \to 0$, следовательно, при $x \to +\infty$ получаем
$$\operatorname{arctg} x - \arccos\frac{1}{x} \sim \operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg} x - \arccos\frac{1}{x}\Big) = \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{1 + x\sqrt{x^2-1}} =$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{x^2\Big(\frac{1}{x^2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\Big)} \sim \frac{1}{x\Big(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\Big)} \cdot \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{2x^3}.$$
Итак, $g(x) = \dfrac{1}{2x^3}$ является главной частью функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. □

Напомним (см. с. 21), что прямая $y = kx + b$ называется правой асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0$, или, в другой записи, $f(x) = kx + b + o(1)$, $x \to +\infty$. Аналогично определяется левая асимптота (при $x \to -\infty$).

Пример 4.37. Найдём асимптоты графика функции
$$y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x + 7}.$$

Решение. График данной функции имеет правую асимптоту $y = 2x + \dfrac{5}{2}$, поскольку при $x \to +\infty$ имеем
$$y = x + 1 + x\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} = x + 1 + x\Big(1 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = 2x + \frac{5}{2} + o(1),$$
и левую асимптоту $y = -\dfrac{1}{2}$, так как при $x \to -\infty$
$$y = x + 1 - x\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} = x + 1 - x\Big(1 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = -\frac{1}{2} + o(1). \quad □$$

Сравним порядки роста степенной, показательной и логарифмической функций на бесконечности.

Пример 4.38. Пусть $f_1(x)=\log_a x$, $a>1$; $f_2(x)=x^p$, $p>0$; $f_3(x)=x^q$, $q>p$; $f_4(x)=a^x$, $a>1$; $f_5(x)=b^x$, $b>a$. Докажем, что $f_k(x)=o(f_{k+1}(x))$, $1\leqslant k\leqslant 4$, при $x\to+\infty$.

Решение. 1. Начнём с $k=1$. В примере 4.24 (см. с. 115) было доказано равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2^x}=0$. Полагая $t=2^x$, отсюда получаем, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\log_2 t}{t}=0$. Из этого соотношения и равенства $\dfrac{\log_a x}{x^p}=\dfrac{\log_a 2}{p}\cdot\dfrac{\log_2(x^p)}{x^p}$ следует, что при $a>1$ и $p>0$ справедливо равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^p}=0$.

2. Для $k=2$ равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^p}{x^q}=0$ следует из неравенства $q-p>0$.

3. Для $k=3$ из равенства $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\log_a t}{t^{1/q}}=0$ получаем $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{(\log_a t)^q}{t}=0$, откуда заменой $t=a^x$ приходим к тому, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^q}{a^x}=0$.

4. Для $k=4$ равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{b^x}=0$ следует из неравенства $\dfrac{b}{a}>1$.

Итак, при $x\to+\infty$ степенная функция с положительным показателем растёт быстрее логарифмической, а показательная с основанием, большим единицы, — быстрее степенной. □

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Число $\overline{l}$ называется *верхним пределом* функции $f(x)$ при $x\to a$ и обозначается $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\mathring{U}(a):\ \forall x\in\mathring{U}(a)$ имеем $f(x)<\overline{l}+\varepsilon$ и существует такая последовательность $\{x_n\}$, что $x_n\to a$, $x_n\neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\overline{l}$. Аналогично число $\underline{l}$ называется *нижним пределом* функции $f(x)$ при $x\to a$ и обозначается $\varliminf\limits_{x\to a} f(x)$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\mathring{U}(a):\ \forall x\in\mathring{U}(a)$ имеем $f(x)>\underline{l}-\varepsilon$ и существует такая последовательность $\{x_n\}$, что $x_n\to a$, $x_n\neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\underline{l}$.

Условие существования предела функции при $x\to a$ эквивалентно условию равенства её верхнего и нижнего пределов при $x\to a$.

Пример 4.39. Рассмотрим функцию $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$ при $x\to 0$. Если $x_n=\dfrac{1}{2n}$, $n\in\mathbb{N}$, то $x_n\to 0$ и $f(x_n)=\cos 2\pi n=1$; если же $\widetilde{x}_n=\dfrac{1}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, то $\widetilde{x}_n\to 0$ и $f(\widetilde{x}_n)=\cos\pi(2n+1)=-1$. Поскольку для всех $x\neq 0$ справедливо неравенство $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$, отсюда следует, что $\varlimsup\limits_{x\to 0} f(x)=1$, $\varliminf\limits_{x\to 0} f(x)=-1$. В частности, из этого получаем, что функция $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$ не имеет предела при $x\to 0$. □

§ 4.4. Функции, непрерывные на промежутке. Точки разрыва

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве E и $\langle a;b\rangle\subset E$. Функция f называется *непрерывной* на $\langle a;b\rangle$, если: 1) она непрерывна в каждой внутренней точке $\langle a;b\rangle$; 2) в случае когда концевая точка промежутка собственная и принадлежит этому промежутку, f непрерывна в этой точке «изнутри» промежутка, т. е. справа в точке a и слева в точке b.

Как уже говорилось, все основные элементарные функции непрерывны во всех внутренних точках своей области определения. Применяя утверждения об арифметических операциях с непрерывными функциями и о непрерывности композиции, получаем, что всякая элементарная функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения.

Пример 4.40. Функция $y=\dfrac{1}{x}$ непрерывна на луче $(0;+\infty)$, так как она является элементарной и луч $(0;+\infty)$ содержится в её области определения. $\square$

Пример 4.41. Рассмотрим функцию $y(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{(a-x)(b-x)}}, & x\neq a,\ x\neq b,\\ 0, & x\in\{a\}\cup\{b\},\end{cases}$ $a<b$. Она определена для всех $x\in\mathbb{R}$. Если $x\to a+$ или $x\to b-$, то $y\to 0=y(a)=y(b)$; если же $x\to a-$ или $x\to b+$, то $y\to+\infty$. Отсюда следует, что на отрезке $[a;b]$ функция y непрерывна, а на отрезке $[a-1;b]$ нет, так как в точке $a\in(a-1;b)$ не выполняется равенство из определения непрерывности. $\square$

Определение. Пусть функция $f\colon E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$, определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a. Точка a называется *точкой разрыва* функции f, если f или не определена в точке a, или не является непрерывной в этой точке.

Определение. Пусть a — точка разрыва функции $f(x)$. Если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=f(a+0)$ и $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=f(a-0)$, то точка a называется точкой разрыва *первого рода*. При этом если $f(a+0)=f(a-0)$, то говорят, что a — точка *устранимого* разрыва, а если $f(a+0)\neq f(a-0)$, то a — точка *неустранимого* разрыва первого рода (или точка *скачка*). Если же хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен, то точка a называется точкой разрыва *второго рода*.

Пример 4.42. Функция $y=\dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x=0$ разрыв второго рода. $\square$

Пример 4.43. Функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x=0$, но определена в любой проколотой окрестности нуля. Поэтому нуль есть точка разрыва этой функции. Поскольку $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{\sin x}{x}=1$, это устранимый разрыв первого рода. Доопределим функцию y, положив $y(0)=b$. Если $b\neq1$, то точка $x=0$ остаётся точкой устранимого разрыва функции y, уже определённой для всех $x\in\mathbb{R}$, если же $b=1$, то полученная функция непрерывна на $\mathbb{R}$. В последнем случае говорят, что функция доопределена по непрерывности. $\square$

Пример 4.44. Если $y=\dfrac{|\sin x|}{x}$, то $\lim\limits_{x\to0+}y(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to0-}y(x)=-1$. Следовательно, $x=0$ есть точка неустранимого разрыва первого рода функции y. $\square$

Рассмотрим ещё две интересные функции.

Пример 4.45. Функция Дирихле: $D(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}.\end{cases}$

Зафиксируем произвольную точку $x_0\in\mathbb{R}$. В любой её полуокрестности $(x_0;x_0+\delta)$ или $(x_0-\delta;x_0)$, $\delta>0$, найдётся как рациональная точка x_1, так и иррациональная точка x_2, следовательно, $|f(x_1) - f(x_2)| = 1$. Применяя критерий Коши, получаем отсюда, что функция $D(x)$ в точке x_0 не имеет предела ни слева, ни справа. Таким образом, любая точка числовой прямой является точкой разрыва второго рода функции Дирихле. $\square$

Пример 4.46. Функция Римана:

$$R(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n}\text{, где } m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ n \in \mathbb{N} \text{ и дробь } \dfrac{m}{n} \text{ несократима,} \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Возьмём произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}$ и обозначим через M_n множество всех рациональных чисел вида $r = \dfrac{m}{q}$, m и q целые, $1 \leqslant q \leqslant n$, лежащих в проколотой 1-окрестности точки x_0, т. е. в множестве $\mathring{U}_1(x_0)$. Длина интервала $(x_0 - 1; x_0 + 1)$ равна 2, поэтому в множество M_n входит не более $2q$ чисел r со знаменателем q, следовательно, множество M_n конечно. Поскольку точка $x_0 \notin M_n$, получаем $\delta_n > 0$, где $\delta_n = \min\limits_{M_n} |x_0 - r|$.

Для любого $\varepsilon > 0$ возьмём $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ и $\delta = \delta_N$. Если $0 < |x_0 - x| < \delta$, то x или иррационально, тогда $R(x) = 0$, или $x = r = \dfrac{m}{q} \notin M_N$, т. е. $q > N > \dfrac{1}{\varepsilon}$, и тогда $R(x) = \dfrac{1}{q} < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$ при всех $x_0 \in \mathbb{R}$. Если x_0 иррационально, то $R(x_0) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} R(x)$, т. е. x_0 есть точка непрерывности функции Римана. Если же x_0 рационально, то $R(x_0) \neq 0 = \lim\limits_{x \to x_0} R(x)$, и x_0 есть точка устранимого разрыва этой функции. $\square$

Пример 4.47. Найдём все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции f, при всех значениях аргумента удовлетворяющие уравнению $f(2x) = f(x)$.

Решение. Зафиксируем произвольную точку $x \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) = \ldots = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Поскольку последовательность $\left\{\dfrac{x}{2^n}\right\}$ стремится к нулю, а функция f непрерывна в нуле, получаем $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(0)$. При любом $n \in \mathbb{N}$ имеем $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(0)$, значит, $f(x) = f(0)$ при всех $x \in \mathbb{R}$, т. е. $f(x)$ — константа. $\square$

Пример 4.48. Найдём все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции f, при всех значениях аргумента удовлетворяющие уравнению $f(2x) - f(x) = x$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $f(2x) - 2x = f(x) - x$ и рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - x$. Она непрерывна на $\mathbb{R}$, причём при всех значениях x имеем $g(2x) = g(x)$. Следовательно, функция g есть константа, поэтому $f(x) = x + C$, где C — произвольная постоянная. $\square$

§4.5. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Равенства в правой части таблицы на с. 117 представляют собой приближения при $x \to 0$ приведённых в ней функций многочленами первой или второй степени с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем старший член многочлена. Подобные формулы можно уточнять, используя приближение функции многочленом более высокой степени с соответствующей точностью, что даёт больше возможностей для выделения главных частей функций.

Многочленом Тейлора порядка n функции f в точке a является такой многочлен $T_n(x; f, a)$ вида $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$, что $f - T_n(x; f, a) = o((x-a)^n)$, $x \to a$. Представление функции f в виде $f(x) = T_n(x; f, a) + o((x-a)^n)$, $x \to a$, называется *разложением* функции f до $o((x-a)^n)$ или до n-го порядка при $x \to a$.

Пример 4.49. Найдём многочлены Тейлора $T_n(x; P(x), 0)$, $0 \leqslant n \leqslant 6$, если $P(x) = (1 + x^2 + x^4)^{50}$.

Решение. Запишем $P(x)$ в виде $(1+\alpha)^{50}$, $\alpha = x^2 + x^4$. Поскольку $\alpha \sim x^2$ при $x \to 0$, получаем $o(x^6) = o(\alpha^3)$, следовательно, $P(x) = (1+\alpha)^{50} = 1 + 50\alpha + 1225\alpha^2 + 19\,600\alpha^3 + o(\alpha^3) = 1 + 50(x^2 + x^4) + 1225(x^2 + x^4)^2 + 19\,600(x^2 + x^4)^3 + o(x^6)$. При раскрытии скобок используем то, что $x^m = o(x^n)$ при $x \to 0$, если $m > n$. Таким образом,

$$P(x) = 1 + 50x^2 + 50x^4 + 1225(x^4 + 2x^6 + o(x^6)) + 19\,600(x^6 + o(x^6)) + o(x^6) = \\ = 1 + 50x^2 + 1275x^4 + 22\,050x^6 + o(x^6).$$

Итак, $T_0(x; P, 0) = T_1(x; P, 0) = 1$; $T_2(x; P, 0) = T_3(x; P, 0) = 1 + 50x^2$;

$T_4(x; P, 0) = T_5(x; P, 0) = 1 + 50x^2 + 1275x^4$;

$T_6(x; P, 0) = 1 + 50x^2 + 1275x^4 + 22\,050x^6$. □

При разложении рациональных дробей удобно пользоваться методом деления многочлена на многочлен.

Пример 4.50. Найдём разложение функции $y = \dfrac{1 + x - 4x^2 + 2x^3}{1 + 3x + x^2}$ до $o(x^7)$ при $x \to 0$.

Решение. Имеем

$$\begin{array}{r|l}
-\ 1 + x - 4x^2 + 2x^3 & 1 + 3x + x^2 \\
1 + 3x + x^2 \phantom{{}+2x^3} & \hline 1 - 2x + x^2 + x^3 - 4x^4 + 11x^5 - 29x^6 + 76x^7 + o(x^7) \\
\cline{1-1}
-\ {-2x - 5x^2 + 2x^3} & \\
-2x - 6x^2 - 2x^3 & \\
\cline{1-1}
-\ x^2 + 4x^3 \phantom{{}+x^4} & \\
x^2 + 3x^3 + x^4 & \\
\cline{1-1}
-\ x^3 - x^4 \phantom{{}+x^5} & \\
x^3 + 3x^4 + x^5 & \\
\cline{1-1}
-4x^4 - x^5 & \\
11x^5 + 4x^6 & \\
-29x^6 - 11x^7 & \\
76x^7 + o(x^7). &
\end{array}$$

Итак, $T_7(x; y, 0) = 1 - 2x + x^2 + x^3 - 4x^4 + 11x^5 - 29x^6 + 76x^7$. □

Приведём следующие разложения основных элементарных функций по формуле Тейлора (или Тейлора — Маклорена) при $x \to 0$:

а) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;

б) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$;

в) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;

г) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$;

д) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$;

е) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;

ж) $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$.

Эти формулы являются частными случаями формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (см. п. 5.2.4), которая доказывается с помощью дифференциального исчисления, однако их практическое применение для нахождения главных частей функции при $x \to a$ и вычисления пределов мы рассмотрим уже в этом параграфе.

Обратите внимание: степень многочлена Тейлора $T_n(x; f, a)$ может быть и меньше его порядка (больше не может быть по определению), т. е. любые его коэффициенты, в том числе и при старших степенях, могут быть равны нулю. В частности, один и тот же многочлен может быть многочленом Тейлора разных порядков функции f в точке a. Например, многочлен $x - \frac{x^3}{6}$ является многочленом Тейлора как 3-го, так и 4-го порядков функции $\sin x$ в нуле.

Пример 4.51. Пусть $y(x) = (x^6 - 2x^{10})e^{x^4}$. Поскольку $y(x) \sim x^6$ при $x \to 0$, все многочлены Тейлора ниже шестого порядка функции y в нуле представляют собой тождественный нуль ($c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$). Поскольку $y - x^6 = o(x^6)$ при $x \to 0$, многочлен Тейлора шестого порядка $T_6(x; y, 0)$ функции y в нуле есть x^6, а так как $e^{x^4} = 1 + x^4 + o(x^4)$ и, следовательно, $y(x) = (x^6 - 2x^{10})(1 + x^4 + o(x^4)) = x^6 - x^{10} + o(x^{10})$, получаем $T_6(x; y, 0) = T_7(x; y, 0) = T_8(x; y, 0) = T_9(x; y, 0) = x^6$ и $T_{10}(x; y, 0) = x^6 - x^{10}$. □

Из всего вышесказанного следует, что если в многочлене Тейлора порядка n функции y в точке a все коэффициенты c_i с номерами меньше k ($k < n$) равны нулю, а $c_k \neq 0$, то при $x \to a$ имеем $y \sim T_n(x; y, a) = c_k(x-a)^k$.

Используя формулы а)—ж) для нахождения многочлена Тейлора, необходимо правильно оценивать отклонение полученного многочлена от данной функции, иначе можно допустить ошибки.

Пример 4.52. Найдём многочлены Тейлора первого, второго, третьего и четвёртого порядков функции $y = \ln(1 + x + x^2)$ в нуле.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\ln(1+\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\alpha^k}{k} + o(\alpha^n), \quad \alpha \to 0.$$

Заметим, что $\alpha = x + x^2 \sim x$ при $x \to 0$, следовательно, $o(\alpha^n) = o(x^n)$. Поэтому $\ln(1 + x + x^2) = \alpha + o(\alpha) = x + x^2 + o(x) = x + o(x)$. Итак, многочлен Тейлора первого порядка функции y в нуле будет равен $T_1(x; y, 0) = x$.

Обратите внимание: поскольку $y = x + x^2 + o(x)$, нельзя утверждать, что многочлен второй степени $x + x^2$ является многочленом Тейлора второго порядка функции в нуле. Действительно, при $x \to 0$ имеем

$$\ln(1+x+x^2) = \ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2) = (x+x^2) - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + o(x^2);$$

при раскрытии скобок используем то, что $x^k = o(x^2)$, если $k > 2$, следовательно,

$$(x+x^2) - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + o(x^2) = x + x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Итак, многочленом Тейлора второго порядка функции y в нуле является многочлен $T_2(x; y, 0) = x + \dfrac{x^2}{2}$. Таким же образом получаем

$$\ln(1+x+x^2) = x + x^2 - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \frac{1}{3}(x+x^2)^3 + o(x^3) =$$
$$= x + x^2 - \frac{1}{2}(x^2 + 2x^3) + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3),$$

следовательно, $T_3(x; y, 0) = x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2x^3}{3}$. Далее,

$$\ln(1+x+x^2) = x + x^2 - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \frac{1}{3}(x+x^2)^3 - \frac{1}{4}(x+x^2)^4 + o(x^4) =$$
$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

следовательно, $T_4(x; y, 0) = x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4}$. □

Пример 4.53. Разложим функцию $y = \sqrt[3]{\dfrac{a-x}{a+x}}$, $a > 0$, при $x \to 0$ до $o(x^3)$.

Решение. Имеем $y = \left(1 - \dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \dfrac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}$, поэтому

$$y = \left(1 - \frac{x}{3a} - \frac{x^2}{9a^2} - \frac{5x^3}{81a^3} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x}{3a} + \frac{2x^2}{9a^2} - \frac{14x^3}{81a^3} + o(x^3)\right) =$$
$$= 1 - \frac{2x}{3a} + \frac{2x^2}{9a^2} - \frac{22}{81}\cdot\frac{x^3}{a^3} + o(x^3), \quad x \to 0. \qquad \square$$

Пример 4.54. Разложим функцию $y = \operatorname{tg} x$ при $x \to 0$ до $o(x^5)$.

Решение. *Первый способ.* Имеем

$$\operatorname{tg} x = \sin x(1 - \sin^2 x)^{-1/2} = \sin x\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{3}{8}\sin^4 x + o(x^4)\right) =$$
$$= \sin x + \frac{1}{2}\sin^3 x + \frac{3}{8}\sin^5 x + o(x^5) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 + \frac{3}{8}(x + o(x))^5 + o(x^5) =$$
$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) + \frac{1}{2}x^3 - \frac{x^5}{4} + o(x^5) + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5) =$$
$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \quad \text{при } x \to 0.$$

Второй способ. Надлежит найти разложение функции $\operatorname{tg} x$ по степеням x с погрешностью $o(x^5)$ при $x \to 0$. Ищем это разложение в виде

$$\operatorname{tg} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5).$$

Из того, что $y = \operatorname{tg} x$ — нечётная функция, можно вывести, что $a_0 = a_2 = a_4 = 0$. Поскольку $\operatorname{tg} x \sim x$ и $a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5) \sim a_1 x$ при $x \to 0$, заключаем, что $a_1 = 1$. Для нахождения остальных коэффициентов имеем соотношение

$$\sin x = (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)) \cdot \cos x \quad \text{при } x \to 0, \quad \text{или}$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5))\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big), \quad \text{т. е.}$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = x + x^3\Big(a_3 - \frac{1}{2}\Big) + x^5\Big(a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{1}{24}\Big) + o(x^5).$$

Поделим это равенство на x^3, имеем

$$-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + o(x^2) = a_3 - \frac{1}{2} + x^2\Big(a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{1}{24}\Big) + o(x^2).$$

Переходя к пределу при $x \to 0$, получаем $-\frac{1}{6} = a_3 - \frac{1}{2}$, т. е. $a_3 = \frac{1}{3}$. Аналогично из соотношения $\frac{x^2}{120} + o(x^2) = x^2\Big(a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{1}{24}\Big) + o(x^2)$ находим, что $a_5 = \frac{2}{15}$.

Итак, при $x \to 0$ справедливо равенство $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

Третий способ. Запишем

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

и поделим уголком, как в примере 4.50:

$$\begin{array}{r|l}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\ \cline{2-2}
-\; x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^5) & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \\ \cline{1-1}
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + o(x^5) & \\
-\; \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + o(x^5) & \\ \cline{1-1}
\frac{2x^5}{15} + o(x^5) & \\
-\; \frac{2x^5}{15} + o(x^5) & \\ \cline{1-1}
o(x^5) &
\end{array}$$

В графе частного получили искомое разложение. □

Пример 4.55. Найдём главную часть вида Cx^α функции

$$y(x) = \sin x - \ln\Big(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\Big) \quad \text{при } x \to 0.$$

Решение. Пользуясь формулами для синуса и логарифма, запишем последовательно многочлены Тейлора функции $y(x)$ в нуле увеличивающегося порядка, пока не получим многочлен, отличный от нуля.

Для первого порядка имеем $T_1(x;y,0)\equiv 0$, так как

$$y(x)=\sin x-\ln\Big(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\Big)=(x+o(x))-(x+o(x))=o(x),\ x\to 0.$$

Для второго порядка $T_2(x;y,0)\equiv 0$, так как

$$y(x)=(x+o(x^2))-\Big(x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\Big)=o(x^2),\ x\to 0.$$

Для третьего порядка $T_3(x;y,0)\equiv 0$, так как

$$y(x)=\Big(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)-\Big(x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(x^2+x^3)+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\Big)=o(x^3),\ x\to 0.$$

Для четвёртого порядка $T_4(x;y,0)\equiv 0$, так как

$$y(x)=\Big(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\Big)-\Big(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{1}{2}\Big(x^2+x^3+\frac{x^4}{4}\Big)+\\ +\frac{1}{3}\Big(x^3+\frac{3x^4}{2}\Big)-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)\Big)=o(x^4),\ x\to 0.$$

Для пятого порядка $T_5(x;y,0)=-\frac{1}{15}x^5$, так как

$$y(x)=\Big(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\Big)-\Big(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{1}{2}\Big(x^2+x^3+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{4}\Big)+\\ +\frac{1}{3}\Big(x^3+\frac{3x^4}{2}+\frac{3x^5}{4}\Big)-\frac{1}{4}(x^4+2x^5)+\frac{1}{5}x^5+o(x^5)\Big)=-\frac{1}{15}x^5+o(x^5),\ x\to 0,$$

и $-\frac{1}{15}x^5$ есть главная часть функции $y=\sin x-\ln\Big(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\Big)$ при $x\to 0$. □

Пример 4.56. Найдём главную часть вида $C(x-1)^\alpha$ функции

$$y=\sqrt[4]{x^2-x+1}-\sqrt[8]{e^{x^2-1}}\quad \text{при } x\to 1.$$

Решение. Чтобы воспользоваться формулами а)—д), сделаем замену переменной $x=t+1$. Тогда задача сводится к нахождению главной части вида Ct^α функции $y(t)=(1+t+t^2)^{1/4}-e^{\frac{2t+t^2}{8}}$ при $t\to 0$. Пользуясь формулами а) и д), пишем последовательно многочлены Тейлора функции $y(t)$ в нуле увеличивающегося порядка, пока не получим многочлен, отличный от нуля.

Для первого порядка $T_1(x;y,0)\equiv 0$, так как

$$y(t)=(1+t+t^2)^{1/4}-e^{t/4+t^2/8}=\Big(1+\frac{1}{4}t+o(t)\Big)-\Big(1+\frac{t}{4}+o(t)\Big)=o(t),\ t\to 0.$$

Для второго порядка $T_2(x;y,0)\equiv 0$, так как

$$y(t)=\Big(1+\frac{1}{4}(t+t^2)-\frac{3}{32}t^2+o(t^2)\Big)-\Big(1+\frac{t}{4}+\frac{t^2}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{16}+o(t^2)\Big)=o(t^2),\ t\to 0.$$

Для третьего порядка $T_3(x;y,0)=-\frac{1}{6}t^3$, так как

$$y(t)=\Big(1+\frac{1}{4}(t+t^2)-\frac{3}{32}(t^2+2t^3)+\frac{7}{128}t^3+o(t^3)\Big)-\\ -\Big(1+\frac{t}{4}+\frac{t^2}{8}+\frac{1}{2}\Big(\frac{t^2}{16}+\frac{t^2}{32}\Big)+\frac{1}{6}\cdot\frac{t^2}{64}+o(t^3)\Big)=-\frac{1}{6}t^3+o(t^3),\ t\to 0,$$

и степенная функция $-\frac{1}{6}t^3$ есть главная часть функции $y(t)=(1+t+t^2)^{1/4}-$ $-e^{t/4+t^2/8}$ при $t\to 0$. Возвращаясь к x, получим, что функция $-\frac{1}{6}(x-1)^3$ есть главная часть функции $y(x)=\sqrt[4]{x^2-x+1}-\sqrt[8]{e^{x^2-1}}$ при $x\to 1$. □

При вычислении пределов полезно оценить заранее, какого порядка малости погрешность уже не влияет на предел соответствующего выражения. Важно, с одной стороны, не потерять членов нужного порядка, взяв многочлен слишком малой степени, а с другой — не выписывать лишних членов, так как это загромождает и затрудняет выкладки.

Пример 4.57. Найдём предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

Решение. В знаменателе стоит x^5, поэтому достаточно найти многочлен Тейлора числителя с погрешностью порядка $o(x^5)$ при $x\to 0$. Поскольку $\sin x\sim x$, получаем $o(x^5)=o(\sin^5 x)$, $x\to 0$. По формуле Тейлора имеем

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}+\frac{\sin^5 x}{120}+o(\sin^5 x),\quad \sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5).$$

Тогда

$$\sin^3 x=\Big(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\Big)^3=(x+\alpha(x))^3=x^3+3x^2\alpha(x)+3x\alpha^2(x)+\alpha^3(x),$$

где $\alpha(x)=-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$. Поэтому при $x\to 0$ получаем

$$\alpha(x)\sim-\frac{x^3}{6},\quad x\alpha^2(x)\sim x\cdot\frac{x^6}{36}=o(x^5),\quad \alpha^3(x)\sim-\frac{x^9}{216}=o(x^5),$$

и, следовательно, $\sin^3 x=x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^5)$, $x\to 0$. Наконец, $\sin^5 x\sim x^5$, $x\to 0$, т. е. $\sin^5 x=x^5+o(x^5)$, $x\to 0$. Значит, при $x\to 0$ справедливо равенство

$$\sin(\sin x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)-\frac{1}{6}\Big(x^3-\frac{x^5}{2}\Big)+o(x^5)+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)=$$
$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o(x^5).$$

Аналогично

$$x\sqrt[3]{1-x^2}=x(1-x^2)^{1/3}=x\Big(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o(x^4)\Big)=x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^5+o(x^5).$$

Итак,

$$\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5+o(x^3)-x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{9}x^5+o(x^5)=$$
$$=\frac{19}{90}x^5+o(x^5),$$

и, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{19}{90}+\dfrac{o(x^5)}{x^5}\Big)=\dfrac{19}{90}$. □

Разложения элементарных функций по формуле Тейлора и методы вычисления пределов можно использовать и при исследовании асимптотического поведения последовательностей, в том числе заданных рекуррентно.

Пример 4.58. Пусть последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно равенствами $a_1=1$, $a_{n+1}=\sin a_n$. Докажем, что $a_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{n}}$ при $n\to\infty$.

Решение. Сначала докажем по индукции, что $0<a_{n+1}<a_n\leqslant 1$ при всех $n\in\mathbb{N}$. При $n=1$ это неравенство верно: $0<\sin 1<1$. Пусть оно выполнено для номера n, тогда в силу неравенства $0<\sin x<x$, которое справедливо при $0<x<\pi$, получаем $0<a_{n+2}=\sin a_{n+1}<a_{n+1}<a_n\leqslant 1$, т. е. доказываемое неравенство имеет место и для номера $n+1$.

Из доказанного следует, что последовательность $\{a_n\}$ убывает и ограничена снизу, поэтому по теореме Вейерштрасса у неё существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Значение a найдём, переходя к пределу в равенстве $a_{n+1}=\sin a_n$: получаем $a=\sin a$, откуда $a=0$.

Итак, $a_n\to 0$ при $n\to\infty$. Определим $x_n=\dfrac{1}{a_n^2}$, тогда $x_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Докажем, что $x_n\sim\dfrac{n}{3}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=\dfrac{1}{3}$, откуда и следует требуемое. Применим к последовательности $\{x_n\}$ теорему Штольца (см. с. 84), полагая $y_n=n$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}\Big)=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{\sin^2 a_n}-\frac{1}{a_n^2}\Big).$$

Поскольку $a_n\to 0$ при $n\to\infty$, этот предел равен

$$\lim_{x\to0}\Big(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\Big)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2}{x^2(x+o(x))^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\frac{1}{3},$$

где использовано разложение функции $\sin x$ до $o(x^3)$ при $x\to 0$. □

Задачи

✓**4.1.** Проверить по определению предела равенство:
а) $\lim\limits_{x\to2}x^3=8$; б) $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}=2$; в) $\lim\limits_{x\to\pi}\cos x=-1$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$.

✓**4.2.** Доказать, что следующие пределы не существуют:
а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$; б) $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Найти предел функции (4.3—4.24).

✓**4.3°.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

✓**4.4°.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

✓**4.5°.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

✓**4.6.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-12x+16}{x^2-4}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^3-3x-2}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5-3x^4+3x^3-x^2}{x^4-6x^2+8x-3}$.

✓**4.9.** $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{4-\sqrt{21-x}}{\sqrt[3]{x-13}+2}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{29-x}}{x-\sqrt{2x}}$.

✓**4.11°.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x}+x)$.

✓**4.12°.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+5x}+x)$.

4.13°. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.

4.14°. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.

4.15. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x)$.

4.16. $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x)$.

4.17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\sqrt{4+2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+1}\big)$.

4.18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4+2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+1}\right)$.

4.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+x-1}\right)$.

4.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$.

4.21. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1+x}+x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1-x}}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right]$, $a\ne0$.

4.23. $\lim\limits_{x\to0+}x^2\left(1+2+3+\ldots+\left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$.

4.24. $\lim\limits_{x\to0+}x\left(\left[\dfrac{1}{x}\right]+\left[\dfrac{2}{x}\right]+\ldots+\left[\dfrac{k}{x}\right]\right)$, $k\in\mathbb{N}$.

✓**4.25.** Доказать равенства при $x\to0$:

а) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$;
б) $c\cdot o(x)=o(x)$, если c — постоянная;
в) $o(x^2)+o(x)=o(x)$;
г) $o(x^2+o(x^2))=o(x^2)$;
д) $o(x)+x^2=o(x)$;
е) $(x+o(x))^2=x^2+o(x^2)$;
ж) $(x+o(x))\left(\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)$;
з) $\sqrt{x^2+o(x^2)}=|x|+o(x)$;
е) $e^{x+o(x)}=1+x+o(x)$.

✓**4.26.** Верно ли, что при $x\to0$ справедливы равенства:

а) $o(1)+o(1)=o(1)$;
б) $o(1)-o(1)=0$;
в) $O(x^3)=o(x^3)$;
г) $e^{O(1)}=O(1)$;
д) $(x+x^2+o(x^2))^2=x^2+o(x^2)$;
е) $(x+x^2+o(x^2))^2=x^2+o(x^3)$?

4.27. Показать, что при $x\to0$

а) $\ln|x|=o(1/x^p)$ для любого $p>0$;
б) $x-\sin x=O(x^3)$.

✓**4.28.** Проверить, что при $x\to0$:

а) $x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=O(x)$ и $x=O\left(x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)$;
б) $x\cos\dfrac{1}{x}=O(x)$, но $x\ne O\left(x\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

4.29. Проверить, что при $x\to\infty$:

а) $\sqrt{x^2+4}\operatorname{arctg}x=O(x)$ и $x=O(\sqrt{x^2+4}\operatorname{arctg}x)$;
б) $\ln(x^2+2^x)=O(x)$, но $x\ne O(\ln(x^2+2^x))$.

4.30. Найти главные части вида Cx^α при $x\to+\infty$ следующих функций:

✓а)° $\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$, $a_0b_0\ne0$;
✓б) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;
в) $(x-\sqrt{x^2-1})^\alpha+(x+\sqrt{x^2-1})^\alpha$ $(\alpha>0)$;
✓г) $x^2\operatorname{arcctg}x$;
д) $x^2\operatorname{arcctg}(-x)$;
е) $(x^2-4x+10)e^{1/x}$;
ж) $\ln(x^2+4+4^{x^2})$;
з) $(x^2+2)\ln(x+2)-x^2\ln x$;
✓и) $\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$;
к) $\arcsin\dfrac{4x+1}{x^2+10x}$.

4.31. Найти главные части вида Cx^α при $x\to0$ следующих функций:

а) $(1+mx)^n-(1+nx)^m$, $m,n\in\mathbb{N}$;
б) $\sqrt{1-2x-4x^2}+x-1$;
✓в) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;
г) $\sqrt[m]{1+ax}\cdot\sqrt[n]{1+bx}-1$;
✓д) $\ln\cos\pi x$;
е) a^x-b^x, $a\ne b$;
ж) $1+\sin ax-\cos ax$;
з) $\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x-1$;
✓и) $\ln(x^2+4^x)$;
к) $\operatorname{ctg}\pi x$.

4.32. Найти главные части вида $C(1-x)^\alpha$ при $x \to 1$ следующих функций:

✓а) x^3+5x^2-3x-3; б) $x+x^2+\ldots+x^n-n$;

в) $(x^6-x^4-x^2+1)\operatorname{tg}\pi x$; ✓г) $\arccos x$;

✓д) x^x-1; е) $\ln\sin\dfrac{\pi x}{2}$; ж) $3\cdot 2^x-2\cdot 3^x$; з) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\sqrt[3]{1-\sqrt[7]{x}}}$;

и) $\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{-1}$; к) $\dfrac{\sqrt[5]{x^a-x^b}}{\operatorname{arctg}x-\pi/4}$ $(a\neq b)$.

4.33. Найти при $n\to\infty$ главные части вида $\dfrac{C}{n^\alpha}$ последовательностей $\{a_n\}$:

✓а) $a_n=\sqrt[4]{n^4+an+b}-n$; б) $a_n=\ln\dfrac{n+1}{n+5}\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}$;

✓в) $a_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+k})$, $k\neq 0$.

г) $a_n=a^{1/n}-\dfrac{1}{2}(b^{1/n}+c^{1/n})$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a^2\neq bc$;

д) $a_n=\operatorname{ctg}\dfrac{\pi n}{4n-2}-1$; е) $a_n=\sin\dfrac{\pi n}{2n+1}-1$;

✓ж) $a_n=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}$; з) $a_n=\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2}$;

и) $a_n=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$; к) $a_n=\ln(1+3^n)$.

Найти предел функции (4.34—4.121).

✓**4.34°.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{2}}{x}$. ✓**4.35°.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{2}}{x}$. ✓**4.36°.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{2}}{x}$.

4.37°. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{2x}$. **4.38°.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{2x}$. **4.39°.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{2x}$.

✓**4.40°.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$. ✓**4.41.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$. **4.42.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 4\pi x}$.

4.43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx-n}{\sin x^2}$.

✓**4.44.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx}{\sqrt{1+2x}-1}$. **4.45.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\ldots+\operatorname{tg}nx}{\operatorname{arctg}x}$.

4.46. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x+\cos x+1}{\sin 2x-\cos 2x+1}$. **4.47.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\operatorname{arctg}\sin^2 x}$.

4.48. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x\operatorname{tg}x-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$. **4.49.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\pi x^2}-\pi}$.

4.50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\alpha x-\sin^2\beta x}{\operatorname{arctg}^2 x+x^3}$. **4.51.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

✓**4.52.** а) $\lim\limits_{x\to\pi+}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$. б) $\lim\limits_{x\to\pi-}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$.

4.53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1-2x}}{1-\cos\pi x}$. **4.54.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1-2x}}{\cos\dfrac{\pi+x}{2}}$.

4.55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[21]{1+\sin 3x}-1+\operatorname{tg}x}{\arcsin x}$. **4.56.** $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\sqrt[5]{\dfrac{x^3+2x}{1+x^3}}\right)$.

✓**4.57.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)$. **4.58.** $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\pi-\operatorname{arcctg}x)$.

✓**4.59°.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^x-\beta^x}{x}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$. **4.60.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{(x-4)e^x+xe^2}$.

4.61. $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{(a^x-a)^2}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-2}}$. ✓**4.62.** $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{\sqrt[3]{bx^2}-b}$ $(a>0,\ b\neq 0)$.

4.63. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$. **4.64.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2}-\pi}$.

4.65. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\cos\pi x}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}}$.

4.66. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\sin\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\pi}}$.

✓**4.67.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(x^2+\cos\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{x}-1}$.

4.68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 4x}{x^2+\sqrt[3]{1-x^2}-1}$.

4.69. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-4x+4)}{\ln(x^{10}+5x^7+2)}$.

4.70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(1+xe^x)}$.

✓**4.71.** $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\ln(2x^2-x)}{\ln(x^4+x^2-x)}$.

✓**4.72.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x^2-x)}{\ln(x^4+x^2-x)}$.

✓**4.73.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin^2 ax}{\ln\sin^2 bx}$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$.

4.74. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\ln x}{x-e}$.

4.75. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x^2}-16}{\ln(x^2-x-1)}$.

4.76. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{\ln\cos 2x}$ $(a>0,\ b>0)$.

✓**4.77.** а) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\arcsin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\arcsin x}$.

✓**4.78.** $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(e^{1/x}-e^{1/(x+1)})$.

4.79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{\arcsin^3 x}$.

4.80. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos 2\pi x+\cos\pi x}{\ln(x^2-2x+2)}$.

4.81. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x-\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x+\ln(1+7x)}$.

4.82. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\alpha-x^\beta}{\sqrt[5]{x}-1}$.

4.83. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x^\alpha}{\sin 2\pi x^\beta}$ $(\beta\neq 0)$.

✓**4.84.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

✓**4.85.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}-1}\right)$.

4.86. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}+\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1+5x}-\sqrt{1+6x}}{\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[5]{1+2x}}$.

✓**4.87.** а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt[4]{4x^4+1}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt[4]{4x^4+1}}{x}$.

4.88. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[5]{x^5+2}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[5]{x^5+2}}{x}$.

4.89. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

✓**4.90.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x-x^2)+\arcsin 5x-3x^3}{\sin 3x+\operatorname{tg}^2 x+(e^x-1)^{10}}$.

4.91. $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{-\ln x}}$.

✓**4.92.** $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{-x})^{\operatorname{ctg} x}$.

4.93. $\lim\limits_{x\to 0}(3^x+x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

4.94. $\lim\limits_{x\to 0}(2^x+\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

✓**4.95.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$.

✓**4.96.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{\sin x}+b^{\sin x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0)$.

4.97. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\alpha_1^x+\alpha_2^x+\ldots+\alpha_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ $(\alpha_i>0)$.

4.98. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+\sin^2\pi x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

4.99. $\lim\limits_{x\to 1}(3\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}}$.

4.100. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x+3}-2}}$.

4.101. $\lim\limits_{x\to 1-}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{\arccos^2 x}}$.

4.102. $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(2-\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{\alpha}}$ $(\alpha\neq 0)$.

4.103. $\lim\limits_{x\to\beta}\left(\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta\alpha}\right)^{\frac{1}{x-\beta}}$ $(\alpha\beta\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$.

4.104. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

4.105. $\lim\limits_{x\to 1}(\ln(e^x+x-1))^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$.

4.106. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x^2+e^{x+1}))^{\operatorname{ctg} x}$.

4.107. $\lim\limits_{x\to 0+}(\ln(x+e^x))^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}}$.

✓**4.108.** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

4.109. $\lim\limits_{x\to 1}(\cos 2\pi x)^{\frac{1}{\ln(x^2-2x+2)}}$.

4.110. $\lim\limits_{x\to 1}(4^x-\sqrt{x+8})^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

4.111. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x\cdot 2^x+1}{x\cdot 3^x}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

4.112. $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{(\sqrt{\pi x}-\pi)^2}}$.

✓**4.113.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\ln(10+e^x)}{x}\right)^{\sqrt{e^{2x}+10}}$.

4.114*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

4.115*. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

4.116. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[m]{\cos\beta x}}{\operatorname{arctg}^2 x}$.

4.117. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x}\right)^x$.

4.118. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\sin 2x}-1}{x^3}$.

4.119. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(\sin x))^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$.

4.120. $\lim\limits_{x\to 0}|\operatorname{th} x|^{\operatorname{sh} 2x}$.

4.121. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\operatorname{th} x)^{\operatorname{sh} 2x}$.

Найти предел последовательности (4.122—4.129).

4.122. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-n+1}$.

4.123. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-2\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n})$.

✓**4.124.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+3n-1}}{\ln(1+n)-\ln(2+n)}$.

4.125. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right)$.

4.126°. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$.

4.127. $\lim\limits_{n\to\infty} n\arccos\dfrac{n^2}{n^2+1}$.

4.128. $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\pi\sqrt{4n^2+10}\right)$.

✓**4.129.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx\right)^{\operatorname{ctg}\pi\sqrt{n^2+1}}$ $(x>0)$.

Найти $\varliminf\limits_{x\to 0} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to 0} f(x)$ функции (4.130—4.133).

4.130°. $f(x)=\dfrac{\operatorname{sgn} x}{x^2+1}$;

4.131. $f(x)=e^{1/x}(x^2+4x+1)$;

4.132. $f(x)=\sin\pi x\cdot\cos\dfrac{\pi}{x}$.

✓**4.133.** $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{\pi}{x}$.

4.134. Найти все наклонные асимптоты графика функции:

а) $y=\sqrt{x^2+2x+3}-x$; ✓б) $y=(2x+3)e^{1/x}$; в) $y=\sqrt{x^4+x^3}-x^2$;
г) $y=x^2\sin\dfrac{1}{x}$; д) $y=x\cos\dfrac{1}{x}$; ✓е) $y=\ln(1+e^{2x})$; ж) $y=\dfrac{x^2+\sin x}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

4.135. Найти все точки разрыва функции и установить их характер:

✓а) $y=x\sin\dfrac{\pi}{x^2+x}$; ✓б) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; в) $y=\operatorname{sgn} x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;
г) $y=\dfrac{\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}}{x}$; д) $y=\dfrac{\operatorname{arcctg}\frac{1}{x^2}}{x^2}$; е) $y=x\ln|x|$.

4.136. Найти все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции f, при всех значениях аргумента удовлетворяющие уравнению:

а) $f(x)+f(2x)=0$; б) $f(x)+f(2x)=x$; в) $f(x^2)=f(x)$;
г) $f(x^2)-f(x)=x^2-x$; д) $f(x^2)+f(x)=x^2+x$.

✓**4.137.** Привести примеры всюду разрывных на $\mathbb{R}$ функций, удовлетворяющих уравнениям: а) $f(2x)=f(x)$; б) $f(2x)-f(x)=x$.

4.138. Проверить следующие формулы при $x\to 0$, используя разложения основных элементарных функций по формуле Тейлора:

✓а) $(1+x)^x=1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{6}x^4+o(x^4)$;

✓б) $\ln\left(1+x^3+\frac{x^6}{2}\right)=x^3-\frac{x^9}{6}+\frac{x^{12}}{8}+o(x^{12})$;

в) $\operatorname{ch}(\sin x)=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$; г) $\cos(\operatorname{sh}x)=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$;

д) $(\operatorname{ch}x)^{1/x^2}=e^{1/2}\cdot\left(1-\frac{x^2}{12}+\frac{37}{1440}x^4+o(x^4)\right)$;

✓е) $\sin(\operatorname{tg}x)=x+\frac{x^3}{6}-\frac{1}{40}x^5+o(x^5)$; ж) $\operatorname{tg}(\operatorname{th}x)=x-\frac{x^5}{15}+o(x^5)$.

4.139. При $x\to 0$ найти главные части вида Cx^n функций:

а) $(\cos x)^{2\sin x}-e^{-x^3}$; ✓б) $e-(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

в) $(1+x)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{x}{12}}-e$; г) $\operatorname{tg}(\sin x)-\operatorname{sh}x$;

д) $(\cos x^4-1)\operatorname{arctg}x^2\cdot 2x^2e^{\sin x}$; ✓е) $\sin x^3-\ln\left(1+x^3+\frac{x^6}{2}\right)$;

ж) $\operatorname{tg}(3x^2)-3\operatorname{th}x^2$; з) $(\operatorname{sh}(\operatorname{sh}x)-\operatorname{tg}x)\arcsin x^2$;

и)* $(\operatorname{sh}(\operatorname{sh}x)-\operatorname{tg}x+\frac{1}{6}x^2)\operatorname{tg}x^2$; к) $\sqrt[3]{\cos(x\sqrt{6})}-1-\ln(1-x^2)$;

л)* $\sqrt[3]{\cos(3xe^{-x^2/2})}-\cos(\sqrt{3}x)$; м)* $e^{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg}x)}-\sqrt[5]{1+\sin^7 x}$.

Найти предел, используя, используя разложения основных элементарных функций по формуле Тейлора при $x\to 0$ (4.140—4.172).

✓**4.140.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sqrt[3]{\cos x}-\sin x}{x^5}$.

4.141. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x\sqrt[3]{1+x^2}}{x^5}$.

✓**4.142.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[4]{e^{-x^2}}}{x^4}$.

4.143. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x^2+\sqrt[6]{1+3x^4}-1}{x^8}$.

4.144. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-e^{-2x^2+\frac{4}{3}x^4}}{\operatorname{tg}x^4}$.

4.145. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-e^{-2x^2-\frac{4}{3}x^4}}{\operatorname{tg}x^4}$.

✓**4.146.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x/3}-\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}}{x^3}$.

4.147. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x\sqrt[3]{1+3x+6x^2}}{\arcsin 2x\cdot\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{sh}3x}$.

4.148. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\sqrt{1+x}-\sin^3 x-\frac{x^3}{2}\operatorname{tg}x}{\ln(1+x^2)(\sqrt[3]{1+2x^3}-1)}$.

4.149. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3\sin x}-e^{-x^2}-\operatorname{sh}x}{\arcsin x^3}$.

4.150. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{18\sqrt[3]{\sin x^3}-18x+x^7}{x^{13}}$.

4.151. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos^2 x+x^2\sqrt[6]{1+x^2-x^4}}{x^6}$.

4.152. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cos x-\operatorname{ch}x}{x^5+x^3\sin^3 x}$.

4.153. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cos x-\operatorname{ch}x+x^5}{x^6+x^2\sin^3 x}$.

4.154. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cos x-\operatorname{ch}x-e^{-x^2}\operatorname{ch}x+\cos x}{x^6}$.

4.155. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1-x^2}-\cos x\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}}{\operatorname{tg}x-\sin x}$.

4.156. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2e^{-x}-x^3}{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}$.

4.157. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\sqrt[4]{\cos 2x}\cdot\operatorname{ch}x^3}{\ln^2(\cos 2x)}$.

✓**4.158.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}+e^{x^2/6}-1}{\ln\cos x+\sqrt{1+x^2}-1}$.

4.159. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x+e^{x^2/2}-1}{(\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x})\operatorname{tg}^2(\sin x)}$.

4.160. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(xe^{x^2/6})-x\cos x^2}{x^2\cdot\ln(1+x^3)}$.

4.161. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{\cos 4x}-\cos(2xe^{x^2})}{(\sin 2x-2\operatorname{tg}x)^2}$.

4.162. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\sqrt{1-x^2+x^4}}{x^4}$.

4.163. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}(\sin x)-\operatorname{sh}x}{(\sqrt[5]{\cos x}-1)^2\operatorname{arctg}x}$.

✓**4.164.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)-\operatorname{th}x}{x^5}$.

4.165. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)-x+\dfrac{x^3}{3}}{\operatorname{sh}(\operatorname{sh}x)-\operatorname{tg}x}$.

✓**4.166.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\cos x)^{\sin x}-\sqrt{1-x^3}}{x^6}$.

4.167. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x-\sin(x+x^3)}$.

4.168. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x^2)^{5+1/x}-e^x}{\ln\cos x}$.

4.169. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{((1+x)^{1/x}-e)^2}{\ln(x+\cos x)-x}$.

4.170. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left((1+x)^{1/x}-e\left(\sqrt{1-x+\dfrac{x^2}{2}}+\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\right)$.

4.171*. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^7}\left(\ln(1-x+x^2-x^3+x^4)-\ln(1-x+x^2)+x^3\cos x-\dfrac{x^5}{2}\sqrt[3]{1+3x}\right)$.

4.172*. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^4\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+\sqrt[3]{8x^9+12x^8+14x^7+15x^6+16x^5}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(2x^4\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+\sqrt[3]{8x^9+12x^8+14x^7+15x^6+16x^5}\right)$.

✓**4.173.** Пусть $a_1=1$, $a_{n+1}=\operatorname{arctg}a_n$. Доказать, что $a_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{2n}}$ при $n\to\infty$.

4.174. Пусть $a_1=a\in(0;1)$, $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$. Доказать, что при $n\to\infty$: а) $a_n\sim\dfrac{1}{n}$; б)* $a_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{\ln n}{n^2}+o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

4.175. Пусть $a_1=a>0$, $a_{n+1}=\ln(1+a_n)$. Доказать, что при $n\to\infty$: а) $a_n\sim\dfrac{2}{n}$; б)* $a_n=\dfrac{2}{n}+\dfrac{2\ln n}{3n^2}+o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

4.176*. Пусть $a_1=0$, $a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}$, $a>0$. Доказать, что существует такая постоянная $c_a>0$, что $l_a-a_n\sim\dfrac{c_a}{(2l_a)^n}$ при $n\to\infty$, где $l_a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$.

4.177*. Пусть $a_1=0$, $a_{n+1}=\sqrt[3]{6+a_n}$. Доказать, что: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2-a_n}=\dfrac{1}{12}$; б) существует такая постоянная $c>0$, что $2-a_n\sim\dfrac{c}{12^n}$ при $n\to\infty$.

Ответы и указания

4.3. -1. **4.4.** 5. **4.5.** 1. **4.6.** 0. **4.7.** ∞. **4.8.** $\frac{1}{4}$. **4.9.** $\frac{3}{2}$. **4.10.** $\frac{4}{27}$. **4.11.** $+\infty$. **4.12.** $-\frac{5}{2}$. **4.13.** 1. **4.14.** $+\infty$. **4.15.** $+\infty$. **4.16.** $-\frac{1}{2}$. **4.17.** 3. **4.18.** -3. **4.19.** $\frac{2}{3}$. **4.20.** $\frac{10}{3}$. **4.21.** а) $\frac{1}{6}$; б) 0. *Указание.* Положить $x=t^{12}-1$. **4.22.** $\frac{b}{a}$. **4.23.** $\frac{1}{2}$. **4.24.** $\frac{k(k+1)}{2}$. **4.26.** а) Да; б), в) нет; г), д) да; е) нет.

4.30. а) $\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$; б) $x^{1/2}$; в) $2^\alpha x^\alpha$; г) x; д) πx^2; е) x^2; ж) $x^2\ln 4$; з) $2x$; и) $\frac{1}{2x}$; к) $\frac{4}{x}$.

4.31. а) $\frac{mn(m-n)}{2}x^2$; б) $-\frac{5}{2}x^2$; в) $x^{1/8}$; г) $\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}\right)x$; д) $-\frac{\pi^2}{2}x^2$; е) $x\ln\frac{a}{b}$; ж) ax; з) $-7x^2$; и) $x\ln 4$; к) $\frac{1}{\pi x}$.

4.32. а) $-10(1-x)$; б) $-\dfrac{n(n+1)}{2}(1-x)$; в) $-8\pi(1-x)^3$; г) $\sqrt{2}(1-x)^{1/2}$; д) $-(1-x)$; е) $-\dfrac{\pi^2}{8}(1-x)^2$; ж) $6\ln\dfrac{3}{2}(1-x)$; з) $\dfrac{2}{\pi}\sqrt[3]{7}(1-x)^{-4/3}$; и) $-\dfrac{2}{\pi}(1-x)^{-1}$; к) $2(a-b)^{1/5}(1-x)^{-4/5}$.

4.33. а) $\dfrac{a}{4n^2}$; б) $-\dfrac{4\pi}{n^2}$; в) $\dfrac{(-1)^n}{2n}\pi k$; г) $\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{a}{\sqrt{bc}}$; д) $-\dfrac{\pi}{4n}$; е) $-\dfrac{\pi^2}{32n^2}$; ж) $\dfrac{1}{n^{3/2}}$; з) $\dfrac{\ln 2}{n^2}$; и) $\dfrac{1}{n}$; к) $\dfrac{\ln 3}{n^{-1}}$.

4.34. $\dfrac{\pi}{2}$. **4.35.** 1. **4.36.** 0. **4.37.** $\dfrac{1}{2}$. **4.38.** $\dfrac{\pi}{8}$. **4.39.** 0. **4.40.** $-\dfrac{1}{4}$. **4.41.** π.
4.42. $-\dfrac{1}{4}$. **4.43.** $-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$. **4.44.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$. **4.45.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$. **4.46.** $-\dfrac{1}{2}$.
4.47. 3. **4.48.** -1. **4.49.** $-\dfrac{3}{2}$. **4.50.** $\alpha^2-\beta^2$. **4.51.** $\dfrac{4}{3}$. **4.52.** а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
4.53. $-\dfrac{1}{\pi^2}$. **4.54.** 0. **4.55.** $\dfrac{8}{7}$. **4.56.** $-\dfrac{9}{10}$. **4.57.** 1. **4.58.** -1. **4.59.** $\ln\dfrac{\alpha}{\beta}$.
4.60. ∞. **4.61.** 0. **4.62.** $\dfrac{3a^b\ln a}{2}$. **4.63.** 1. **4.64.** $-\dfrac{9}{2}$. **4.65.** $-2\sqrt{2}\pi^2$. **4.66.** 0.
4.67. $4-\pi$. **4.68.** -12. **4.69.** $\dfrac{1}{5}$. **4.70, 4.71.** 1. **4.72.** $\dfrac{3}{5}$. **4.73.** 1. **4.74.** $\dfrac{1}{e}$.
4.75. $\dfrac{64}{3}\ln 2$. **4.76.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{b}{a}$. **4.77.** а) 1; б) -1. **4.78.** 1. **4.79.** -2. **4.80.** $-\dfrac{3\pi^2}{2}$.
4.81. $\dfrac{3}{7}$. **4.82.** $5(\alpha-\beta)$. **4.83.** $-\dfrac{\alpha}{2\beta}$. **4.84.** $a^a\ln\dfrac{a}{e}$. **4.85.** $-\dfrac{1}{2}$. **4.86.** $\dfrac{40}{3}$.
4.87. а) $1-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}-1$. **4.88.** а) -2; б) 0. **4.89.** а) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$; б) $-\infty$. **4.90.** 2.
4.91. $\sqrt{2}$. **4.92.** e. **4.93.** $3e$. **4.94.** $2e$. **4.95.** e^{-2}. **4.96.** $\sqrt{ab}$. **4.97.** $\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$.
4.98. e^2. **4.99.** 1. **4.100.** $e^{2\pi}$. **4.101.** $e^{-\pi/4}$. **4.102.** $e^{-1/\pi}$. **4.103.** $e^{\alpha\cdot\mathrm{ctg}(\alpha\beta)}$.
4.104. e^2. **4.105.** $e^{3(1+1/e)}$. **4.106.** e. **4.107.** 0. **4.108.** $e^{-2/\pi}$. **4.109.** $e^{-2\pi^2}$.
4.110. $4^{-\frac{8}{\pi}}e^{\frac{1}{3\pi}}$. **4.111.** $\left(\dfrac{27e}{4}\right)^{\frac{2}{3\pi}}$. **4.112.** e^{16}. **4.113.** 1. **4.114.** $\dfrac{1}{2}$. **4.115.** $e^{1/2}$.
4.116. $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2m}$. **4.117.** e^2. **4.118.** -1. **4.119.** $e^{-1/2}$. **4.120.** 1. **4.121.** e^{-1}.
4.122. 1. **4.123.** 0. **4.124.** -1. **4.125.** 0. **4.126.** $\ln a$. **4.127.** $\sqrt{2}$. **4.128.** -1.
4.129. $e^{-\frac{4}{\pi^2 x}}$. **4.130.** 1; -1. **4.131.** $+\infty$; 0. **4.132.** 0; 0. **4.133.** $\dfrac{\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{2}$.

4.134. а) $y=1$ при $x\to+\infty$; $y=-2x-1$ при $x\to-\infty$; б) $y=2x+5$; в) $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{8}$; г) $y=x$; д) $y=x$; е) $y=2x$ при $x\to+\infty$; $y=0$ при $x\to-\infty$; ж) $y=\dfrac{x}{2}$ при $x\to+\infty$.

4.135. а) $x=0$ — точка устранимого разрыва, $x=-1$ — точка разрыва второго рода; б) $x=1$ и $x=-1$ — точки неустранимого разрыва первого рода; в) $x=0$ — точка устранимого разрыва; г) $x=0$ — точка разрыва второго рода; д) $x=0$ — точка устранимого разрыва; е) $x=0$ — точка устранимого разрыва.

4.136. а) $f(x)=0$; б) $f(x)=\dfrac{x}{3}$; в) $f(x)=C$; г) $f(x)=x+C$; д) $f(x)=x$.

4.137. а) $f(x)=D(x)$; б) $f(x)=x+D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле.

4.139. а) $-\dfrac{1}{40}x^7$; б) $\dfrac{e}{2}x$; в) $-\dfrac{e}{24}x^3$; г) $-\dfrac{1}{30}x^5$; д) $-x^{12}$; е) $-\dfrac{1}{8}x^{12}$; ж) $10x^6$ з) $-\dfrac{1}{30}x^7$; и) $-\dfrac{13}{30}x^6$; к) $-\dfrac{21}{20}x^6$; л) $-\dfrac{1}{8}x^7$; м) $-\dfrac{1}{6}x^7$.

4.140. $-\dfrac{1}{45}$. **4.141.** $\dfrac{11}{45}$. **4.142.** $-\dfrac{1}{24}$. **4.143.** $-\dfrac{17}{24}$. **4.144.** $-\dfrac{8}{3}$. **4.145.** 0.
4.146. $-\dfrac{1}{81}$. **4.147.** $\dfrac{1}{2}$. **4.148.** $\dfrac{9}{16}$. **4.149.** $\dfrac{4}{3}$. **4.150.** $-\dfrac{1}{180}$. **4.151.** $-\dfrac{101}{360}$.
4.152. 0. **4.153.** 1. **4.154.** $-\dfrac{4}{45}$. **4.155.** $-\dfrac{2}{3}$. **4.156.** $-\dfrac{5}{2}$. **4.157.** $\dfrac{1}{12}$.
4.158. $-\dfrac{1}{25}$. **4.159.** $-\dfrac{1}{12}$. **4.160.** $\dfrac{79}{180}$. **4.161.** -3. **4.162.** $-\dfrac{1}{6}$. **4.163.** $-\dfrac{10}{3}$.

4.164. $-\dfrac{1}{30}$. **4.165.** -3. **4.166.** $\dfrac{1}{4}$. **4.167.** $-\dfrac{3}{5}$. **4.168.** -10. **4.169.** $-\dfrac{e}{2}$.
4.170. $-\dfrac{e^2}{4}$. **4.171.** $\dfrac{13}{24}$. **4.172.** а) 0; б) $\dfrac{2}{45}$.
4.173—4.175. *Указание.* См. пример 4.58.
4.176. *Указание.* Заметить, что $l_a - a_n = \dfrac{l_a - a_{n-1}}{l_a + a_n} = \ldots = (l_a - a_1)\prod\limits_{k=1}^{n}(l_a + a_k)^{-1} < \dfrac{l_a - a_1}{l_a^n}$.
Далее, воспользовавшись оценками

$$0 < \ln\prod_{k=1}^{n}\frac{2l_a}{l_a + a_k} = \sum_{k=1}^{n}\ln\Bigl(1 + \frac{l_a - a_k}{l_a + a_k}\Bigr) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{l_a - a_k}{l_a + a_k} \leqslant (l_a - a_1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{l_a^{k+1}},$$

доказать, что последовательность $\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2l_a}{l_a + a_k}$ имеет конечный ненулевой предел.
4.177. *Указание.* Воспользоваться методом решения предыдущей задачи.

§ 4.6. Теоретические задачи

Множество непрерывных на $\langle a; b\rangle$ функций обозначается $C\langle a; b\rangle$.

Теорема (Вейерштрасс). *Если $f \in C[a; b]$, то f ограничена на $[a; b]$ и $\exists x_1, x_2 \in [a; b]\colon f(x_1) = \max\limits_{[a;b]} f(x)$, $f(x_2) = \min\limits_{[a;b]} f(x)$. Другими словами, функция, непрерывная на отрезке, достигает своих наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке.*

Теорема (Больцано — Коши). *Если $f \in C\langle a; b\rangle$, $x_1 \in \langle a; b\rangle$, $x_2 \in \langle a; b\rangle$ и $f(x_1) < f(x_2)$, то $[f(x_1); f(x_2)] \subset f(\langle a; b\rangle)$, т. е. непрерывная на промежутке функция принимает все свои промежуточные значения.*

Определение. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, называется *равномерно непрерывной* на множестве $E \subset X$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x_1, x_2 \in E$, $|x_1 - x_2| < \delta$, имеем $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Непосредственно из определения следует, что равномерно непрерывная на промежутке $\langle a; b\rangle$ функция непрерывна на этом промежутке. В случае отрезка верно и обратное.

Теорема (Кантор). *Если $f \in C[a; b]$, то f равномерно непрерывна на $[a; b]$.*

Перейдём к рассмотрению примеров, связанных с непрерывностью функций.

Пример Т4.1. Пусть $f(x) = \operatorname{sgn}^2 x = \begin{cases} 1, & x \neq 0,\\ 0, & x = 0;\end{cases}$

$$x(t) = \begin{cases} t, & x \in \Bigl(\dfrac{1}{2k}; \dfrac{1}{2k-1}\Bigr),\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0;\\[2ex] -t, & x \in \Bigl(\dfrac{1}{2k+1}; \dfrac{1}{2k}\Bigr),\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0;\\[2ex] 0, & x = \dfrac{1}{k},\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0.\end{cases}$$

Покажем, что $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, но $\lim\limits_{t\to 0} f(x(t))$ не существует.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число и $\delta = \varepsilon$. Поскольку $|x(t)| \leqslant |t|$, из неравенства $0 < |t| < \delta$ следует неравенство $|x(t)| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = 0$. Так как для любого $x \neq 0$ имеем $f(x) - 1 = 0$, получаем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Рассмотрим $f(x(t))$. Для любого $\delta > 0$ в интервалах $(-\delta; 0)$ и $(0; \delta)$ найдётся бесконечно много t, равных $1/k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, для которых $x(t) = 0$ и, следовательно, $f(x(t)) = 0$. С другой стороны, при всех значениях $t \neq 0$ и $t \neq 1/k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, имеем $x(t) \neq 0$, следовательно, $f(x(t)) = 1$.

Таким образом, в любой проколотой окрестности точки $t = 0$ функция $f(x(t))$ принимает как значение 1, так и значение 0. Отсюда следует, что $f(x(t))$ не имеет предела при $t \to 0$. □

Пример Т4.2. Докажем следующий критерий непрерывности функции на промежутке: функция $f: \langle a; b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\langle a; b\rangle$ тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$ каждое из множеств $M_c^+ = \{x \in \langle a; b\rangle : f(x) > c\}$ и $M_c^- = \{x \in \langle a; b\rangle : f(x) < c\}$ или пусто, или является пересечением промежутка $\langle a; b\rangle$ с открытым множеством.

Решение. Пусть $f \in C\langle a; b\rangle$ и $M_c^+ \neq \varnothing$. Для любой точки $x_0 \in M_c^+$, поскольку выполнено строгое неравенство $f(x_0) > c$, существует такая окрестность $U(x_0)$, что $f(x) > c$ для всех $x \in U(x_0) \cap \langle a; b\rangle$. Тогда $M_c^+ = G \cap \langle a; b\rangle$, где G — открытое множество, являющееся объединением всех таких окрестностей $U(x_0)$, $x_0 \in M_c^+$. Для множества M_c^- проводится аналогичное рассуждение.

Обратно, пусть $x_0 \in \langle a; b\rangle$ и $y_0 = f(x_0)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Точка x_0 принадлежит и множеству $M^+_{y_0-\varepsilon}$, и множеству $M^-_{y_0+\varepsilon}$, поэтому оба они не пусты. Тогда по условию получаем $M^+_{y_0-\varepsilon} = \langle a; b\rangle \cap G_1$, $M^-_{y_0+\varepsilon} = \langle a; b\rangle \cap G_2$, где G_1 и G_2 — некоторые открытые множества. Следовательно, $x_0 \in \langle a; b\rangle \cap$ $\cap (G_1 \cap G_2)$. Поскольку множество $G_1 \cap G_2$ также открыто, существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что $\forall x \in U(x_0) \cap \langle a; b\rangle$ имеем $f(x_0) - \varepsilon < f(x) <$ $< f(x_0) + \varepsilon$. Таким образом, функция f непрерывна в точке x_0. □

Пример Т4.3. Покажем, что в критерии непрерывности из предыдущего примера существенно выполнение соответствующего условия для множеств обоих видов — как M_c^+, так и M_c^-.

Решение. Пусть $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$ Эта функция разрывна в точке $x = 0$. Рассмотрим множества M_c^+. Если $0 \leqslant c < 1$, то $M_c^+ = (0; +\infty)$, Если $c \geqslant 1$, то $M_c^+ = \varnothing$, если $c < 0$, то $M_c^+ = \mathbb{R}$. Таким образом, все множества M_c^+ открытые, хотя функция f не является непрерывной на $\mathbb{R}$. □

Пример Т4.4. Пусть $f_n(x) \in C[a; b]$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ при $x \in [a; b]$. Докажем, что $f(x)$ имеет на $[a; b]$ точку непрерывности.

Решение. Из утверждения примера Т4.2 следует, что $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall m, n \in \mathbb{N}$ множество $B_{m,n,\varepsilon} = \{x \in [a; b] : |f_n(x) - f_{n+m}(x)| \leqslant \varepsilon\}$ замкнуто (так как является дополнением к открытому). Следовательно, множество $A_{n,\varepsilon} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} B_{m,n,\varepsilon}$ также замкнуто (см. задачу 2.140). Если $x \in A_{n,\varepsilon}$, то, переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве $|f_n(x) - f_{n+m}(x)| \leqslant \varepsilon$, получаем $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Кроме того, для любой точки $x \in [a; b]$ из сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ следует, что $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{n,\varepsilon}$ (см. задачу 3.69), поэтому $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{n,\varepsilon} = [a; b]$.

Применяя утверждение примера 2.21 (см. с. 65), получаем, что для любого отрезка $[\alpha;\beta]\subset[a;b]$ существуют число $n_0\in\mathbb{N}$ и отрезок $[\alpha';\beta']\subset[\alpha;\beta]$, для которых $[\alpha';\beta']\subset A_{n_0,\varepsilon}$, т. е. $|f_{n_0}(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$ при всех $x\in[\alpha';\beta']$. Из равномерной непрерывности функции $f_{n_0}(x)$ на отрезке $[\alpha';\beta']$ следует, что найдётся такой отрезок $[\alpha'_\varepsilon;\beta'_\varepsilon]\subset[\alpha';\beta']$, что для любых $x_1,x_2\in[\alpha'_\varepsilon;\beta'_\varepsilon]$ имеем $|f_{n_0}(x_1)-f_{n_0}(x_2)|<\varepsilon$. Тогда для любых $x_1,x_2\in[\alpha'_\varepsilon;\beta'_\varepsilon]$ получаем

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f_{n_0}(x_1)|+|f(x_2)-f_{n_0}(x_2)|+|f_{n_0}(x_1)-f_{n_0}(x_2)|<3\varepsilon.$$

Наконец, обозначим через $[a_{1/\varepsilon};b_{1/\varepsilon}]$ отрезок длины $\frac{1}{2}(\beta'_\varepsilon-\alpha'_\varepsilon)$, лежащий в интервале $(\alpha'_\varepsilon;\beta'_\varepsilon)$. Полагая теперь последовательно $\varepsilon=\frac{1}{k}$, $k=1,2,3,\ldots$, таким образом получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_k;b_k]\}_{k=1}^{\infty}$ со следующими свойствами:

1) $[a;b]\supset[a_1;b_1]\supset(a_1;b_1)\supset[a_2;b_2]\supset\ldots\supset(a_k;b_k)\supset[a_{k+1};b_{k+1}]\supset\ldots$,

2) для любых $x_1,x_2\in[a_k;b_k]$ имеем $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{3}{k}$.

Если c — общая точка этих отрезков, то функция f непрерывна в точке c. Действительно, для произвольного $\varepsilon>0$ возьмём $k_0=[3/\varepsilon]+1$, тогда в силу условия 1) имеем $c\in[a_{k_0+1};b_{k_0+1}]\subset(a_{k_0};b_{k_0})$, следовательно, найдётся такая окрестность $U(c)$ точки c, что $U(c)\subset(a_{k_0};b_{k_0})$. Из условия 2) следует, что для всех $x\in U(c)$ выполнено неравенство $|f(x)-f(c)|<3/k_0<\varepsilon$, что и доказывает непрерывность функции f в точке c. □

Пример Т4.5. Пусть функция f выпукла вниз на $(a;b)$, т. е. удовлетворяет следующему условию: $\forall\lambda\in(0;1)$ и $\forall x_1,x_2\in(a;b)$ имеем $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$. Докажем, что функция f непрерывна на $(a;b)$.

Решение. Пусть $x_0\in(a;b)$ и $0<h<h_0$. Положим $x_1=x_0$, $x_2=x_0+h_0$. Если $x=x_0+h=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, то $\lambda=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}=\dfrac{h_0-h}{h_0}\in(0;1)$, и тогда заданное условие даёт неравенство

$$f(x_0+h)\leqslant\frac{h_0-h}{h_0}f(x_0)+\frac{h}{h_0}f(x_0+h_0),\quad\text{откуда}$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)\leqslant\frac{f(x_0+h_0)-f(x_0)}{h_0}h=Ah.$$

Аналогично, полагая $x_1=x_0-h_0$, $x_2=x_0$, $x=x_0-h=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, где $\lambda=\dfrac{h}{h_0}\in(0;1)$, получим неравенство

$$f(x_0)-f(x_0-h)\geqslant\frac{f(x_0)-f(x_0-h_0)}{h_0}h=Bh.$$

Кроме того, применяя неравенство из условия задачи для $x_1=x_0-h$, $x_2=x_0+h$ и $\lambda=\frac{1}{2}$, имеем $f(x_0)\leqslant\frac{1}{2}(f(x_0+h)+f(x_0-h))$, или $f(x_0)-f(x_0-h)\leqslant f(x_0+h)-f(x_0)$. Итак, при всех $h\in(0;h_0)$ выполнены неравенства

$$Bh\leqslant f(x_0)-f(x_0-h)\leqslant f(x_0+h)-f(x_0)\leqslant Ah,$$

откуда при $h\to0+$ получаем $f(x_0+h)\to f(x_0)$ и $f(x_0-h)\to f(x_0)$, следовательно, функция f непрерывна в точке x_0. □

Замечание. Если в условии рассмотренного примера интервал $(a; b)$ заменить на отрезок $[a; b]$, то утверждение будет, вообще говоря, неверно. Действительно, из решения видно, что если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то разностное отношение $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ или $\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ соответственно ограничено только с одной стороны, откуда непрерывность не вытекает. В качестве примера можно взять функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 0 \text{ или } x = 1. \end{cases}$$

Пример Т4.6. Докажем, что непрерывная и биективная на $[a; b]$ функция монотонна на $[a; b]$.

Решение. Из условия биективности следует, что для любых $x_1, x_2 \in [a; b]$ имеем $f(x_1) \neq f(x_2)$, в частности, $f(a) \neq f(b)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(a) < f(b)$, тогда следует доказать возрастание функции f. Предположим, что f невозрастающая. Тогда найдутся такие точки x_1, x_2, что $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ и $f(x_1) > f(x_2)$. Если при этом $f(x_2) < f(a)$, то по теореме Больцано — Коши существует точка $x_0 \in [x_2; b]$, для которой $f(x_0) = f(a)$, что противоречит условию биективности. Предположение $f(x_1) > f(b)$ также противоречит условию биективности. Итак, осталось рассмотреть случай, при котором $f(a) < f(x_2) < f(x_1) < f(b)$. Но тогда снова по теореме Больцано — Коши найдётся такая точка $x_0 \in [x_2; b]$, что $f(x_0) = f(x_1)$. Полученное противоречие с условием биективности завершает доказательство. □

Пример Т4.7. Докажем, что для непрерывной на окружности функции f найдутся две диаметрально противоположные точки a и b этой окружности, для которых $f(a) = f(b)$.

Решение. Не ограничивая общности, можно рассматривать окружность единичного радиуса. Обозначим через M_0 фиксированную точку окружности, и через $M(x)$ — точку окружности, полученную из M_0 поворотом на угол x в положительном направлении (против часовой стрелки). Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(M(x)) - f(M(x+\pi))$. Она непрерывна на отрезке $[0; \pi]$, а поскольку $M_0 = M(0) = M(2\pi)$, имеем

$$\varphi(0) = f(M_0) - f(M(\pi)) = f(M(2\pi)) - f(M(\pi)) = -\varphi(\pi).$$

Если $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, то можно взять $a = M_0$, $b = M(\pi)$. В противном случае функция φ принимает на концах отрезка $[0; \pi]$ значения разных знаков, поэтому в силу теоремы Больцано — Коши существует $x_0 \in [0; \pi]$, для которого $\varphi(x_0) = 0$, т. е. $f(a) = f(b)$, где $a = M(x_0)$, $b = M(x_0 + \pi)$. □

Пример Т4.8. Исследуем на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \sqrt{x}$ на множествах: а) $[0; 1]$, б) $(0; 1)$, в) $[1; +\infty)$, г) $[0; +\infty)$.

Решение. а) Поскольку функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$, по теореме Кантора она равномерно непрерывна на этом отрезке.

б) Равномерная непрерывность данной функции на интервале $(0; 1)$ следует из результата п. а), так как $(0; 1) \subset [0; 1]$.

в) Проверим по определению равномерную непрерывность функции $f(x) = \sqrt{x}$ на промежутке $[1; +\infty)$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Если $x_1, x_2 \geqslant 1$, то

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leqslant \frac{|x_1 - x_2|}{2}.$$

Поэтому неравенство $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon$ выполнено при $|x_1 - x_2| < \delta$, где $\delta = 2\varepsilon$. Таким образом, функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[1; +\infty)$.

г) Как доказано в п. а) и в), данная функция равномерно непрерывна на множествах $[0; 1]$ и $[1; +\infty)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $x_1, x_2 \in [0; +\infty)$. Если обе точки x_1, x_2 принадлежат отрезку $[0; 1]$, то в силу равномерной непрерывности на этом отрезке существует такое $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|x_1 - x_2| < \delta_1$ следует неравенство $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon$. Аналогично если обе точки x_1, x_2 принадлежат $[1; +\infty)$, то такое же утверждение верно при некотором $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$. Если же $x_1 \in [0; 1]$, а $x_2 \in [1; +\infty)$, то воспользуемся непрерывностью функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке 1: существует такое $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in \mathring{U}_{\delta_3}(1)$ имеем $|\sqrt{x} - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Если $x_1 < 1 < x_2$ и $|x_1 - x_2| < \delta_3$, то $x_1, x_2 \in \mathring{U}_{\delta_3}(1)$, поэтому $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leqslant |\sqrt{x_1} - 1| + |\sqrt{x_2} - 1| < \varepsilon$. Если теперь положить $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, то для функции $f(x) = \sqrt{x}$ будет выполнено определение равномерной непрерывности на всём луче $[0; +\infty)$. □

При решении п. г) можно было рассуждать и иначе. Пусть $\varepsilon > 0$ и, для определённости, $0 \leqslant x_1 < x_2$. Обозначим $h = x_2 - x_1 > 0$. Тогда

$$0 < \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{h}{\sqrt{x_1 + h} + \sqrt{x_1}} \leqslant \frac{h}{\sqrt{h}} = \sqrt{h},$$

так как $x_1 \geqslant 0$. Следовательно, если $|x_1 - x_2| < \delta$ и $\delta = \varepsilon^2$, то $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon$, откуда и следует равномерная непрерывность на $[0; +\infty)$. Отметим, что при таком способе решения зависимость $\delta = \delta(\varepsilon)$ найдена явно.

Т4.1. Пусть предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует и не равен нулю. Доказать, что:

а) если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ не существует, то и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\varphi(x)$ не существует;

б) если функция $\varphi(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то и $f(x)\varphi(x)$ — бесконечно большая функция при $x \to x_0$.

✓**Т4.2.** Что можно сказать о непрерывности в точке x_0 функций $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ и $f(x)g(x)$, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна в точке x_0;

б) функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке x_0?

Т4.3. Пусть $f : \mathring{U}(0) \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$. Доказать, что: а) $\lim\limits_{x \to 0} f(|x|) = l$; б) $\lim\limits_{x \to 0} f(\sin x) = l$. Верны ли обратные утверждения к пунктам а) и б)?

Т4.4. Пусть $f : \mathring{U}(0) \to (0; +\infty)$ и $\lim\limits_{x \to 0}\left(f(x) + \dfrac{1}{f(x)}\right) = 2$. Доказать, что тогда $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Т4.5. Доказать, что если $\lim\limits_{x \to a}\left(f(x) + \dfrac{1}{|f(x)|}\right) = 0$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -1$.

✓**Т4.6.** Пусть $f(x) = x^2 \cos\dfrac{\pi}{x}$, $g(y) = \operatorname{sgn}^2 y$. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$, но $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$ не существует. Объяснить, почему неприменима теорема о пределе сложной функции.

✓**Т4.7.** Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y\to b} g(y) = l$ и $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности точки a. Доказать, что $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = l$.

Т4.8. Построить пример таких функций $f(x)$ и $g(x)$, что $f(g(x))$ непрерывна в точке a, а $g(f(x))$ разрывна в точке a.

Т4.9. Привести пример ограниченной в некоторой окрестности нуля функции, для которой $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ не существует, а $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ существует.

Т4.10. Пусть $\omega[f, (\alpha;\beta)]$ означает колебание функции f на $(\alpha;\beta)$, т. е. $\omega[f, (\alpha;\beta)] = \sup\limits_{x_1, x_2 \in (\alpha;\beta)} |f(x_1) - f(x_2)|$. Доказать, что:

а) для любой функции f, ограниченной в некоторой окрестности точки x_0, существует предел $\omega(f, x_0) = \lim\limits_{\delta\to 0+} \omega[f, (x_0-\delta; x_0+\delta)]$ (он называется *колебанием f в точке x_0*);

б) функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\omega(f, x_0) = 0$;

в) $\omega(f, x_0) = \max\Big\{\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}\, f(x) - f(x_0),\ \overline{\lim\limits_{x\to x_0}}\, f(x) - \underline{\lim\limits_{x\to x_0}}\, f(x),\ f(x_0) - \underline{\lim\limits_{x\to x_0}}\, f(x)\Big\}$.

Т4.11. Функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Пусть $\{a_n\}$ — некоторая последовательность неотрицательных чисел, и пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $\delta_n > 0$, что из неравенства $|x - x_0| < \delta_n$ следует неравенство $|f(x) - f(x_0)| < a_n$. Какое свойство функции описывается этим условием? Каким свойством должна обладать последовательность $\{a_n\}$, чтобы из этого условия следовала непрерывность $f(x)$ в точке x_0?

✓**Т4.12.** Доказать, что $D(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n}(\pi m! x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле (см. пример 4.45).

Т4.13. Привести пример функции, определённой на $\mathbb{R}$ и непрерывной только: а) в одной точке; б) в двух точках; в) в n точках; г) в счётном множестве точек.

✓**Т4.14.** Доказать, что если $f, g \in C[a;b]$ и $\varphi_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $\varphi_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, то φ_1 и φ_2 — непрерывные функции на $[a;b]$.

Т4.15. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$ и

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при таких } x, \text{ что } |f(x)| \leqslant n, \\ n & \text{при таких } x, \text{ что } f(x) > n, \\ -n & \text{при таких } x, \text{ что } f(x) < -n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Доказать, что для любого n функция $f_n(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Т4.16. Доказать, что если функция f непрерывна на $[a;b]$, то и функции $m(x) = \inf\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)$ и $M(x) = \sup\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)$ также непрерывны на $[a;b]$.

Т4.17. Найти такой многочлен $g(x)$ наименьшей степени, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x^2}{1+x^2}, & 1 \leqslant |x| \leqslant 2, \\ g(x), & |x| \leqslant 1 \text{ или } |x| \geqslant 2. \end{cases}$$ была непрерывна на $\mathbb{R}$.

T4.18. Доказать, что периодическая функция f, непрерывная на $\mathbb{R}$ и имеющая два несоизмеримых периода T_1 и T_2 (т. е. $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$), постоянна. Привести пример непостоянной функции с двумя несоизмеримыми периодами.

√**T4.19.** Доказать, что непостоянная непрерывная периодическая функция имеет наименьший положительный период. Привести пример непостоянной периодической функции, не имеющей наименьшего положительного периода.

T4.20. Пусть периодические функции f и g непрерывны на $\mathbb{R}$ и

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0.$$

Доказать, что $f(x)\equiv g(x)$.

T4.21. Может ли определённая в некоторой окрестности точки a и разрывная в точке a функция f удовлетворять условию:

а) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\colon \forall h\in(-\delta;\delta)$ имеем $|f(a+h)-f(a-h)|<\varepsilon$;

б) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\colon \forall h\in(-\delta;\delta)$ имеем $|f(a+h)-2f(a)+f(a-h)|<\varepsilon$;

в) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\colon \forall h,\,h'\in(-\delta;\delta)$ имеем $|f(a+h)-2f(a)+f(a-h')|<\varepsilon$?

√**T4.22.** Привести пример такой разрывной в каждой точке отрезка $[0;1]$ функции, что её квадрат является непрерывной на $[0;1]$ функцией.

T4.23. Привести пример ограниченной на отрезке $[0;1]$ функции, не достигающей ни своей точной нижней грани, ни своей точной верхней грани на этом отрезке.

T4.24. Привести пример ограниченной на отрезке $[0;1]$ функции, не достигающей своей точной нижней грани ни на каком отрезке $[a;b]\subset[0;1]$.

√**T4.25.** Пусть f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и не принимает на нем нулевого значения. Доказать, что существует такое число $\eta>0$, что для любого $x\in[a;b]$ выполнено неравенство $|f(x)|\geqslant\eta$. Показать на примере, что для интервала это утверждение, вообще говоря, неверно.

T4.26. Пусть $f\in C(a;b)$. Доказать, что для любых $x_1, x_2, x_3\in(a;b)$ найдётся такая точка $\xi\in(a;b)$, что $f(\xi)=\frac{1}{3}\big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\big)$.

√**T4.27.** На плоскости задан произвольный многоугольник и некоторый вектор. Показать, что найдётся прямая, параллельная этому вектору и рассекающая многоугольник на две части одинаковой площади.

T4.28. На плоскости задан произвольный многоугольник и некоторая точка. Показать, что найдётся прямая, проходящая через эту точку и рассекающая многоугольник на две части одинаковой площади.

√**T4.29.** Доказать, что любой многочлен нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.

√**T4.30.** Доказать, что если $f, g\in C[a;b]$ и $f(a)>g(a)$, $f(b)<g(b)$, то найдётся такая точка $x_0\in(a;b)$, что $f(x_0)=g(x_0)$.

√**T4.31.** Доказать, что для любой непрерывной функции $f\colon[0;1]\to[0;1]$ существует точка $x_0\in[0;1]$, в которой $f(x_0)=x_0$ (*неподвижная точка* отображения f).

√**T4.32.** Привести пример непрерывного отображения $f\colon(0;1)\to(0;1)$, у которого не существует неподвижной точки.

T4.33. Пусть функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и $f(f(x))\equiv x$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Доказать, что существует такое x_0, что $f(x_0)=x_0$.

Т4.34. Привести пример функции f, определённой на отрезке $[0;1]$ и принимающей на любом отрезке $[a;b]\subset[0;1]$ все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, но не являющейся непрерывной на $[0;1]$.

Т4.35. Доказать, что строго монотонная функция $f(x)$, принимающая на отрезке $[a;b]$ все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, непрерывна на $[a;b]$.

Т4.36. Пусть функции f и g принимают на отрезке $[a;b]$ все свои промежуточные значения. Обладает ли тем же свойством функция $f+g$?

Т4.37. Пусть периодическая функция f имеет период $T>0$ и непрерывна на $\mathbb{R}$. Доказать, что существует такая точка x_0, что $f\Big(x_0+\dfrac{T}{2}\Big)=f(x_0)$.

Т4.38. Доказать, что для любого ненулевого многочлена $P(x)$ уравнение $|P(x)|=e^x$ имеет хотя бы одно решение.

Т4.39. Пусть $f\in C[0;2]$. Доказать, что существуют такие точки $x, y\in[0;2]$, что $x-y=1$ и $f(x)-f(y)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}$.

Т4.40. Доказать, что непрерывная на отрезке функция, не имеющая на этом отрезке ни одного внутреннего экстремума, монотонна. Привести пример, показывающий, что для разрывных функций это утверждение неверно.

√Т4.41. Привести пример функции $f\colon[0;1]\to[0;1]$, не являющейся монотонной, для которой существует обратная функция $f^{-1}\colon[0;1]\to[0;1]$ (ср. с примером Т4.6).

√Т4.42. Привести пример разрывной функции, определённой на некотором промежутке $\langle a;b\rangle$, для которой обратная функция существует и непрерывна.

Т4.43. Привести пример монотонной на $[0;1]$ функции с бесконечным множеством точек разрыва.

Т4.44. Доказать, что для функции, определённой на $[a;b]$, множество точек строгого локального экстремума не более чем счётно. Построить пример функции, непрерывной на $[a;b]$, с бесконечным множеством точек строгого локального экстремума.

√Т4.45. Существует ли непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция f, взаимно однозначно отображающая его на: а) $\mathbb{R}$; б) $(c;d)$; в) $[0;1]\cup[3;4]$?

√Т4.46. Существует ли функция f, непрерывная на интервале $(0;1)$, для которой множеством значений является множество

а) $(0;2)$; б) $(0;2)\cup(3;5)$; в) $(1;+\infty)$; г) $[0;2]$?

Если нет, то объяснить почему; если да, то привести примеры.

√Т4.47. Существует ли функция f, непрерывная на интервале $(-1;2)$, для которой образом интервала $(0;1)$ является множество

а) $(0;2)$; б) $(0;2)\cup(3;5)$; в) $(1;+\infty)$; г) $[0;2]$?

Если нет, то объяснить почему; если да, то привести примеры.

√Т4.48. Существует ли такое непрерывное биективное отображение $(-1;2)$ в $\mathbb{R}$, что образом $(0;1)$ является множество

а) $(0;2)$; б) $(0;2)\cup(3;5)$; в) $(1;+\infty)$; г) $[0;2]$?

Если нет, то объяснить почему; если да, то привести примеры.

Т4.49. Доказать, что если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и E_n — множество всех точек из $[a;b]$, для которых $n\leqslant f(x)\leqslant n+1$, то множество

$E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup \ldots$ замкнуто. Показать, что в случае интервала $(a; b)$ аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно.

✓**Т4.50.** Сформулировать отрицание утверждения: функция f равномерно непрерывна на множестве E.

Т4.51. Привести пример функции, которая непрерывна, но не равномерно непрерывна на множестве: а) $(0; 1)$; б) $[0; +\infty)$.

Т4.52. Привести пример функции, неограниченной и равномерно непрерывной на множестве $[0; +\infty)$.

Т4.53. Доказать, что равномерно непрерывная на ограниченном множестве функция ограничена на нём.

✓**Т4.54.** Привести пример ограниченной и непрерывной на интервале $(0; 1)$ функции, не являющейся равномерно непрерывной на нём.

Т4.55. Пусть функции f и g равномерно непрерывны на луче $[a; +\infty)$. Верно ли, что равномерно непрерывна на этом луче и функция: а) $f(x)+g(x)$; б) $f(x)\cdot g(x)$; в) $f(x)\sin x$?

✓**Т4.56.** Доказать, что функция f, равномерно непрерывная на каждом из двух отрезков, равномерно непрерывна на их объединении. Привести пример, показывающий, что для интервалов это утверждение неверно.

✓**Т4.57.** Доказать, что если функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и периодична, то она равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Т4.58. Пусть функция f равномерно непрерывна на множестве $E \subset \mathbb{R}$. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и $x_n \in E$, то последовательность $\{f(x_n)\}$ также фундаментальна.

Т4.59. Пусть функция f определена на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}$ и для любой фундаментальной последовательности $\{x_n\}$, где $x_n \in E$, последовательность $\{f(x_n)\}$ также фундаментальна. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на множестве E. Существенно ли условие ограниченности множества E?

✓**Т4.60.** Доказать, что функция f равномерно непрерывна на множестве E тогда и только тогда, когда для любых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $x_n, y_n \in E$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

✓**Т4.61.** Доказать, что функция f равномерно непрерывна на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда существует непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция g, совпадающая с f на интервале $(a; b)$.

Т4.62. Пусть функция f равномерно непрерывна на $(0; +\infty)$. Обязательно ли существует предел: а) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

Т4.63. Пусть функция f равномерно непрерывна и неограниченная на $[0; +\infty)$. Обязательно ли $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$?

Т4.64. Пусть функция f непрерывна на $[0; +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = C$. Доказать, что: а) f ограничена на $[0; +\infty)$; б) f равномерно непрерывна на $[0; +\infty)$.

Т4.65. Является ли функция f равномерно непрерывной на множестве E:

✓а) $f(x) = \sin^2 x$, $E = [0; +\infty)$; ✓б) $f(x) = \sin x^2$, $E = [0; +\infty)$;

✓в) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $E=(0;1)$;
✓г) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $E=(0;1)$;
д) $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$, $E=(0;1)$;
е) $f(x)=x\sin x$, $E=[0;+\infty)$;
ж) $f(x)=e^x$, $E=\mathbb{R}$;
з) $f(x)=\ln x$, $E=(0;1)$;
✓и) $f(x)=\operatorname{ctg}x$, $E=\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;
✓к) $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $E=\mathbb{R}$;
л) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $E=(0;1)$;
м) $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$, $E=(0;+\infty)$?

T4.66. Пусть функция f, принимающая положительные значения, равномерно непрерывна на $(0;+\infty)$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x+\frac{1}{x}\right)}{f(x)}=1$?

T4.67. Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна в нуле, $f(0)=0$ и $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$ при всех $x, y\in\mathbb{R}$. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

T4.68. *Модулем непрерывности* функции $f: E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$, называется функция

$$\omega_f(\delta)=\sup\{|f(x)-f(y)|: x,\ y\in E,\ |x-y|<\delta\},\quad \delta>0.$$

Доказать, что функция f равномерно непрерывна на множестве E тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega_f(\delta)=0$.

Ответы и указания

T4.2. а) $f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$ разрывны; $f(x)g(x)$ может быть как непрерывной, так и разрывной, например: 1) $f(x)=x$, $g(x)=\operatorname{sgn}x$; 2) $f(x)=x+1$, $g(x)=\operatorname{sgn}x$;
б) рассмотреть примеры: 1) $f(x)=\operatorname{sgn}x$, $g(x)=-\operatorname{sgn}x$; 2) $f(x)=g(x)=\operatorname{sgn}x$;
3) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

T4.3. а) Нет. *Указание.* Рассмотреть $f(x)=\operatorname{sgn}x$. б) Да.

T4.8. Например, $g(x)=\operatorname{sgn}x$, $f(x)=x(x^2-1)$, $a=0$.

T4.9. Например, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ \cos x, & x\leqslant 0.\end{cases}$

T4.10. а) *Указание.* Показать, что $\omega[f,(x_0-\delta, x_0+\delta)]$ есть монотонная и ограниченная функция от δ в некоторой правой полуокрестности нуля.
в) *Указание.* Рассмотреть три случая:
1) $f(x_0)>\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)$; 2) $\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant f(x_0)\leqslant\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)$; 3) $f(x_0)<\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)$.

T4.11. Функция ограничена в некоторой окрестности точки x_0. Более того, для любого $\varepsilon>0$ найдётся такая окрестность точки x_0, что для любого x из этой окрестности имеем $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon+\inf a_n$. Условие $\inf a_n=0$ необходимо и достаточно для эквивалентности сформулированного условия и непрерывности $f(x)$ в точке x_0.

T4.13. Например, а) $f(x)=xD(x)$; б) $f(x)=x(x-5)D(x)$; в) $f(x)=(x-1)(x-2)\ldots(x-n)D(x)$; г) $f(x)=D(x)\sin x$, где $D(x)$ — функция Дирихле (см. пример 4.47).

T4.17. $-\frac{1}{2}x^2+2$. **T4.18, T4.19.** Например, $f(x)=D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле.

T4.21. а) Да. Например, $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x-a}, & x\neq a,\\ 0, & x=a,\end{cases}$ или $f(x)=\operatorname{sgn}^2(x-a)$.

б) Да. Например, $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-a}, & x\neq a, \\ 0, & x=a, \end{cases}$ или $f(x)=\operatorname{sgn}(x-a)$.

в) Нет. *Указание.* Рассмотреть $h'=-h$.

Т4.22. Например, $f(x)=D(x)-\dfrac{1}{2}$, где $D(x)$ — функция Дирихле (см. пример 4.47).

Т4.23. Например, $f(x)=x$, если $x\in(0;1)$; $f(0)=f(1)=\dfrac{1}{2}$.

Т4.24. Например, $f(x)=R(x)$, если $x\in\mathbb{Q}$, где $R(x)$ — функция Римана (см. пример 4.46); $f(x)=1$, если $x\notin\mathbb{Q}$.

Т4.25. *Указание.* Пользуясь теоремой Больцано — Коши показать, что функция $f(x)$ принимает только значения одного знака, затем применить теорему Вейерштрасса о достижении наибольшего и наименьшего значений. Для случая интервала рассмотреть $f(x)=x$ на $(0;1)$.

Т4.26. *Указание.* Пусть $x_1<x_2<x_3$; показать, что

$$\min_{[x_1;x_3]} f(x) \leqslant \frac{1}{3}(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)) \leqslant \max_{[x_1;x_3]} f(x),$$

и воспользоваться теоремой Больцано — Коши.

Т4.27. *Указание.* Ввести декартову систему координат так, чтобы ось Ox была перпендикулярна данному вектору, а данный многоугольник лежал в первом квадранте. Показать, что функция $S(t)$, равная площади части многоугольника, лежащей между осью Oy и прямой $x=t$, непрерывна и достигает максимального значения на $[0;+\infty)$, затем использовать теорему Больцано — Коши.

Т4.28. *Указание.* Пусть l — произвольная прямая, проходящая через данную точку. Выберем на ней положительное направление и обозначим направленную прямую $\overline{l}$. Пусть $\overline{l}(\alpha)$ есть направленная прямая, образующая с $\overline{l}$ угол α ($\overline{l}(\pi)=-\overline{l}$, $\overline{l}(2\pi)=l$). Обозначим через $S(\alpha)$ площадь той части многоугольника, которая лежит справа от $\overline{l}(\alpha)$. Показать, что $S(\alpha)$ — непрерывная функция на $[0;\pi]$, и воспользоваться теоремой Больцано — Коши.

Т4.29. *Указание.* Показать, что найдётся отрезок, на котором многочлен меняет знак.

Т4.30. *Указание.* Рассмотреть функцию $\varphi(x)=f(x)-g(x)$.

Т4.31. *Указание.* Если $f(0)=a\neq 0$ и $f(1)=b\neq 1$, то функция $\varphi(x)=f(x)-x$ должна принять на $[0;1]$ нулевое значение.

Т4.32. Например, $f(x)=x^2$.

Т4.33. *Указание.* Показать, что $f(x)$ принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$ и применить результат задачи 2.26.

Т4.34. Например, $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$, $x\neq 0$, $f(0)=0$.

Т4.36. Необязательно. *Указание.* Рассмотреть на отрезке $[0;1]$ функции $f(x)=x$, $g(x)=1-x$ и $f(x)=x$, $g(x)=1-x$ при $x\in(0;1)$, $g(0)=0$, $g(1)=1$.

Т4.37. *Указание.* Применить теорему Больцано — Коши к функции

$$g(x)=f\left(x+\frac{T}{2}\right)-f(x).$$

Т4.39. *Указание.* Рассмотреть сначала случай $f(0)=f(2)$.

Т4.40. *Указание.* Доказательство провести от противного. Пример для разрывной функции:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\leqslant x<0, \\ x, & 0<x\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2}, & x=0. \end{cases}$$

Т4.41. Например, $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 1-x, & \text{если } x \text{ иррационально}.\end{cases}$

Т4.42. Любая монотонная, но разрывная функция, например, $f(x)=x+\operatorname{sgn} x$.

Т4.43. Например, $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{2^n}, & \dfrac{1}{2^n}<x\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}},\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$

Т4.44. *Указание.* Пусть E_n — множество всех таких x из $(a;b)$, что $f(x)>f(x+t)$ при всех таких t, что $0<|t|<\dfrac{1}{n}$ и $a\leqslant x-t<x+t<b$. Доказать, что множество E точек строгого локального максимума есть $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ и каждое из множеств E_n состоит только из изолированных точек. Далее применить результат задачи 2.143. Пример: $f(x)=\begin{cases} (x-a)\sin\dfrac{\pi}{x-a}, & x\neq a,\\ 0, & x=a.\end{cases}$

Т4.45. а) Нет, в силу теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на отрезке функции.
б) Нет, в силу теоремы Вейерштрасса о максимуме и минимуме непрерывной на отрезке функции. в) Нет, в силу теоремы Больцано — Коши.

Т4.46. а) $f(x)=2x$; б) нет, в силу теоремы о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции; в) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$; г) $f(x)=1+\sin 2\pi x$.

Т4.47. а) $f(x)=2x$; б) нет, см. ответ к задаче Т4.46; в) нет, так как $f((0;1))\subset f([0;1])$, а на $[0;1]$ f непрерывна, следовательно, ограничена; г) $f(x)=1+\sin 2\pi x$.

Т4.48. а) $f(x)=2x$; б) нет, см. ответ к задаче Т4.46; в) нет, см. ответ к задаче Т4.47; г) нет, так как непрерывная на отрезке и биективная на нём функция монотонна, т. е. если $0<x<1$, то $f(0)<f(x)<f(1)$ (см. пример Т4.6).

Т4.49. *Указание.* Использовать результаты примера Т4.6 и задачи 2.138. Рассмотреть $f(x)=\dfrac{1}{x}$ на $(0;2)$.

Т4.50. $\exists\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0\ \ \exists x_1,x_2\in E: |x_1-x_2|<\delta$, но $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon$.

Т4.51. а) Например, $y=\sin\dfrac{1}{x}$ или $y=\dfrac{1}{x}$; б) например, $y=x\cos x$ или $y=x^2$.

Т4.52. Например, $y=\sqrt{x}$ или $y=x+\sin x$.

Т4.53. *Указание.* Представить множество E в виде объединения таких множеств E_n, что $E_n\subset\Big[(n-1)\cdot\dfrac{\delta(1)}{2};n\cdot\dfrac{\delta(1)}{2}\Big]$, $n\in\mathbb{N}$, где $\delta(1)$ — число, удовлетворяющее условию: из неравенства $|x_1-x_2|<\delta(1)$ следует неравенство $|f(x_1)-f(x_2)|<1$.

Т4.54. Например, $y=\cos\dfrac{1}{x}$.

Т4.55. а) Да. б) Нет. *Указание.* Рассмотреть $f(x)=g(x)=x$. в) Нет. *Указание.* Рассмотреть $f(x)=x$.

Т4.56. Например, $f=|\sin x|/x$, $E_1=(-1;0)$, $E_2=(0;1)$.

Т4.59. Существенно (например, рассмотреть $f(x)=x^2$ на $(0;+\infty)$).

Т4.62. а) Да; б) нет. *Указание.* Рассмотреть $f(x)=x$ на $(0;+\infty)$. **Т4.63.** Нет.

Т4.64. *Указание.* Использовать критерий Коши существования $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Т4.65. а) Да; б), в) нет; г) да; д), е), ж), з), и) нет; к) да; л) нет; м) да.

Т4.66. Нет. *Указание.* Рассмотреть функцию, которая принимает значение $\dfrac{1}{n}$ и $\dfrac{2}{n}$ в точках n и $n+\dfrac{1}{n}$ соответственно ($n\geqslant 2$), а на остальных участках линейна. Для доказательства равномерной непрерывности воспользоваться задачей Т4.64.

Т4.68. *Указание.* Доказать, что функция $\omega_f(\delta)$ неубывающая, и поэтому $\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega_f(\delta)=$ $=\inf\limits_{\delta>0}\omega_f(\delta)$.

Глава 5

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

§ 5.1. Производная и дифференциал

5.1.1. Определение дифференцируемости

В предыдущей главе рассматривались непрерывные функции, для которых малому приращению аргумента Δx соответствует малое изменение приращения функции Δf, т. е. $\Delta f \equiv f(x+\Delta x) - f(x) = o(1)$ при $\Delta x \to 0$. Однако для произвольной непрерывной функции ничего нельзя сказать заранее о порядке малости этой бесконечно малой величины. Как в теории, так и на практике крайне важен более узкий класс непрерывных функций, называемых *дифференцируемыми*, для которых приращение функции имеет или тот же порядок малости, что и приращение аргумента, т. е. $\Delta f \sim C\Delta x$ при $\Delta x \to 0$, где $C \neq 0$, или более высокий порядок малости, чем приращение аргумента, т. е. $\Delta f = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Определение. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x. Число $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ называется *производной* функции f в точке x и обозначается $f'(x)$. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Определение. Функция f называется *дифференцируемой* в точке x, если справедливо представление $f(x+h) - f(x) = A(x)h + \alpha(x;h)$, где $\alpha(x;h) = o(h)$ при $h \to 0$. Выражение $A(x)h$, представляющее собой главную линейную часть приращения функции f, называется *дифференциалом* этой функции в точке x и обозначается df.

Для функции одной переменной понятия дифференцируемости функции в точке x и существования производной в точке x эквивалентны, причём величина $A(x)$ из определения дифференцируемости в точности равна $f'(x)$. Таким образом, для дифференциала функции f справедливо равенство $df = df(x;h) = f'(x)h$. Заметим, что дифференциал является функцией двух аргументов: точки x и приращения h. Однако в большинстве случаев для краткости второй аргумент дифференциала (приращение) опускается; если же из контекста ясно, в какой точке рассматривается дифференциал, то опускаются оба аргумента.

Если $f(x) \equiv x$, то $f'(x) \equiv 1$ и $df = 1 \cdot h$, т. е. $dx = h$. Поэтому дифференциал функции f обычно записывают в виде $df(x) = f'(x)\,dx$, где dx — синоним приращения h. Формально поделив на dx, получаем ещё одно распространённое обозначение для производной: $f' = \dfrac{df}{dx}$.

Пример 5.1. Найдём по определению дифференциал функции $f(x)=x^n$, где $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Для произвольного $x\in\mathbb{R}$ для $\Delta f=f(x+h)-f(x)$ имеем

$$\Delta f=(x+h)^n-x^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k h^k x^{n-k}-x^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^k h^k x^{n-k}=nx^{n-1}h+\alpha(x;h),$$

где $\alpha(x;h)=\sum\limits_{k=2}^{n}C_n^k h^k x^{n-k}$ при $n\geqslant 2$ и $\alpha(x;h)\equiv 0$ при $n=1$. В любом случае $\alpha(x;h)=o(h)$ при $h\to 0$, поэтому функция f дифференцируема в каждой точке x и $df(x)=nx^{n-1}\,dx$. В частности, отсюда вытекает, что $f'(x)=nx^{n-1}$. $\square$

Основные правила дифференцирования

Если функции f и g дифференцируемы в точке x, α и β — постоянные, то в этой точке

$(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$, $\quad d(\alpha f+\beta g)=\alpha df+\beta dg$,

$(fg)'=f'g+g'f$, $\quad d(fg)=gdf+fdg$,

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$, $\quad d\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{gdf-fdg}{g^2}$, если $g(x)\neq 0$.

Дифференцирование композиции функций. Если функция g дифференцируема в точке t, а функция f дифференцируема в точке $x=g(t)$, то сложная функция $f\circ g$ дифференцируема в точке t и $(f\circ g)'(t)=f'(x)g'(t)=f'(g(t))g'(t)$.

Из правила дифференцирования композиции вытекает свойство *инвариантности формы первого дифференциала*, которое состоит в следующем. Если $y=f(x)$, где x — независимая переменная, то $dy=f'(x)\,dx$. Если же теперь x есть функция аргумента t, $y=f(x(t))$, то по правилу дифференцирования сложной функции получаем $dy=f'(x(t))x'(t)\,dt$. Поскольку $dx=x'(t)\,dt$, в данном случае также получаем $dy=f'(x)\,dx$, т. е. вид дифференциала не зависит от того, является ли x независимым аргументом или функцией другого аргумента. Необходимо только иметь в виду, что если x — независимая переменная, то dx есть приращение этой переменной Δx, а если $x=x(t)$, то dx есть дифференциал функции $x(t)$, представляющий собой главную линейную часть приращения Δx.

5.1.2. Вычисление производной

Таблица производных основных элементарных функций

$(1)'=0$	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^a)'=ax^{a-1}$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)'=a^x\ln a$ (в частности, $(e^x)'=e^x$)	
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ (в частности, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$)	$(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$
$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$
$(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
	$(\operatorname{cth} x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Степенная функция $y=x^a$ при $0<a<1$ определена, но не дифференцируема при $x=0$, и именно при $x=0$ выражение для её производной теряет смысл. Точно так же выражения для производных функций $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ теряют смысл, если $|x|\geqslant 1$, т. е. именно при тех значениях аргумента, при которых соответствующие функции либо не определены, либо не дифференцируемы. Все остальные основные элементарные функции дифференцируемы во всех точках множества определения, и выражения для их производных имеют смысл во всех точках этого множества.

Любая элементарная функция f дифференцируема во всякой точке, в которой выражение для её производной (т. е. функции f') имеет смысл. Если же выражение для производной не определено для некоторого значения x_0 из множества определения f, то это говорит о том, что какая-то из основных элементарных функций, из которых составлено выражение для функции f, не дифференцируема при соответствующем значении аргумента; и, следовательно, вопрос о существовании и величине производной f в этой точке требует дополнительного исследования.

Пример 5.2. Найдём производную функции $f(x)=x\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}$, $x\in$ $\in(-1{,}5;\,1{,}5)$.

Решение. Формально применяя правила дифференцирования, получаем

$$f'(x)=\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}+x\cdot\frac{2x\cos x^2\cdot(1-x)^2-2(1-x)\sin x^2}{2\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}}. \tag{1}$$

На данном интервале функция $f'(x)$ не определена только при $x=0$ и $x=1$, поэтому для всех x из множества $(-1{,}5;\,1{,}5)\setminus\{0,\,1\}$ производная существует и её значение вычисляется по полученной формуле. Вопрос о существовании и величине производной данной функции при $x=0$ и при $x=1$ решаем непосредственно исходя из определения производной в точке.

Рассмотрим отношение $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $x=0$ и $x=1$. Если $x=0$, то $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\sqrt{(1-h)^2\sin h^2}$, следовательно, $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=0=f'(0)$. Если $x=1$, то $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=(1+h)\sqrt{\sin(1+h)^2}\cdot\dfrac{\sqrt{h^2}}{h}$, а это выражение не имеет предела при $h\to0$.

Итак, функция $f(x)=x\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}$ не дифференцируема при $x=1$, а при $x=0$ имеет производную, равную нулю. $\square$

Пример 5.3. Найдём производную функции $y=\dfrac{4x^2-2x+10}{\sqrt{x}}$.

Решение. Поскольку $y=4x^{3/2}-2x^{1/2}+10x^{-1/2}$, получаем

$$y'=4\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{1/2}-2\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}+10\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)x^{-3/2}=\frac{6x^2-x-5}{x\sqrt{x}},\quad x>0. \qquad \square$$

Пример 5.4. Найдём производную функции $y=x(\cos x-4\sin x)$.

Решение. Имеем $y'=(\cos x-4\sin x)+x(-\sin x-4\cos x)=(1-4x)\cos x-$ $-(4+x)\sin x$, $x\in\mathbb{R}$. $\square$

Пример 5.5. Найдём производную функции $y=\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}$.

Решение. Получаем $y'=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)-(-2x)\arcsin x}{(1-x^2)^2}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+2x\arcsin x}{(1-x^2)^2}$, $|x|<1$. □

Пример 5.6. Найдём производную функции $y=\sqrt{\operatorname{tg}^3 2x+2}$, $|x|<\dfrac{\pi}{8}$.

Решение. Получаем $y'(x)=\Big((\operatorname{tg}^3 2x+2)^{\frac{1}{2}}\Big)'=\dfrac{1}{2}(\operatorname{tg}^3 2x+2)^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{tg}^3 2x+2)'=$

$$=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^3 2x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3\operatorname{tg}^2 2x\cdot(\operatorname{tg}2x)'=\frac{1}{2}\cdot(\operatorname{tg}^3 2x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3\operatorname{tg}^2 2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2,$$

т. е. $y'(x)=\dfrac{3\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x\sqrt{\operatorname{tg}^3 2x+2}}$. □

Пример 5.7. Найдём производную функции $y=\ln^3\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$, $x>0$.

Решение. Получаем

$$y'=3\ln^2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^3}}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^3}}\cdot\Big(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\Big)=-\frac{9\ln^2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^3}}}{2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^3}}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}.$$ □

Для дифференцирования степенно-показательной функции $(u(x))^{v(x)}$ $(u(x)>0)$, где $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, пользуются тождеством $(u(x))^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$.

Пример 5.8. Найдём производную функции $y=x^x$, $x>0$.

Решение. Имеем $y=e^{x\ln x}$,

$$y'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=e^{x\ln x}\Big(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\Big)=x^x(\ln x+1).$$ □

Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля и дифференцируема в некоторой точке. Тогда в этой точке существует производная функции $\ln|f(x)|$, называемая *логарифмической производной* функции $f(x)$. По правилу дифференцирования композиции функций справедливо равенство $(\ln|f(x)|)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. В самом деле, если $f(x)>0$, то это равенство очевидно, а если $f(x)<0$, то $(\ln|f(x)|)'=(\ln(-f(x)))'=\dfrac{-f'(x)}{-f(x)}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Следовательно, если $f(x)\neq 0$, то производную функции $f(x)$ можно найти следующим образом:

$$f'(x)=f(x)(\ln|f(x)|)'.$$

Пример 5.9. Найдём производную функции $f(x)=\dfrac{\sqrt[7]{(x+3)^5}}{(x-2)^6(2x+9)^3}$.

Решение. При $x\neq -3, 2, -\dfrac{9}{2}$ функция $f(x)$ отлична от нуля и дифференцируема, поэтому при таких x имеем

$$\ln|f(x)|=\frac{5}{7}\ln|x+3|-6\ln|x-2|-3\ln|2x+9|,$$

следовательно, $f'(x)=f(x)\Big(\dfrac{5}{7}\ln|x+3|-6\ln|x-2|-3\ln|2x+9|\Big)'=$

$$=\frac{\sqrt[7]{(x+3)^5}}{(x-2)^6(2x+9)^3}\Big(\frac{5}{7(x+3)}-\frac{6}{x-2}-\frac{6}{2x+9}\Big).$$ □

Пример 5.10. Найдём производную функции $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^x$, $x > 0$.
Решение. Имеем $\ln f(x) = x \ln \operatorname{arctg} x$. Следовательно,

$$f'(x) = f(x)(x \ln \operatorname{arctg} x)' = (\operatorname{arctg} x)^x \Big(\ln \operatorname{arctg} x + \frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} \Big). \qquad \square$$

Числа $\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_+(x)$ и $\lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_-(x)$ называются соответственно *правой* и *левой производной* функции f в точке x. Условие $f'_+(x) = f'_-(x)$ (т. е. существование и равенство односторонних производных функции f в точке x) эквивалентно дифференцируемости функции f в точке x, при этом $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$.

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой на ограниченном или неограниченном промежутке $\langle a; b\rangle$, если 1) она дифференцируема в каждой внутренней точке этого промежутка; 2) в случае когда концевая точка промежутка собственная и принадлежит этому промежутку, f имеет в этой точке одностороннюю производную: правую в точке a и левую в точке b.

Пример 5.11. Исследуем функцию $f(x) = |x|$ на дифференцируемость: а) в точке $x = 0$; б) на отрезке $[0; 1]$.

Решение. а) Поскольку $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{x} = 1$ и $f'_-(0) = {}$ $= \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{-x}{x} = -1$, функция $f(x) = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$.

б) При $x \geqslant 0$ имеем $f(x) = x$, поэтому на интервале $(0; 1)$ функция f дифференцируема. Кроме того, функция дифференцируема и в точке $x = 1$, а значит, существует $f'_-(1)$. Согласно п. а) существует $f'_+(0)$. Итак, функция $f(x) = |x|$ дифференцируема на отрезке $[0; 1]$. $\square$

Пример 5.12. Найдём $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, если $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.
Решение. Имеем

$$f'(x) = \frac{-e^{-x^2} \cdot (-2x)}{2\sqrt{1-e^{-x^2}}} = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

Функция f' определена при всех $x \neq 0$. Если $x \to 0$, то $\sqrt{1-e^{-x^2}} \sim \sqrt{x^2}$, поэтому

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Итак, $f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) = \dfrac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ при всех $x \neq 0$, $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$. Поскольку $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, заключаем, что в точке $x = 0$ рассматриваемая непрерывная функция не дифференцируема. $\square$

Отметим, что всякая чётная функция f или не дифференцируема в нуле, или $f'(0) = 0$ (см. задачу T5.12).

Пример 5.13. Найдём $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, если $f(x)=x\sqrt{\ln(1+x^2)}$.

Решение. Имеем

$$f'(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)} + \frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{\ln(1+x^2)}}.$$

Функция $f'(x)$ определена при всех $x\neq 0$. Для $x=0$ находим $f'_+(0)=f'_-(0)=0$, поскольку

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x} = \lim_{x\to 0}\sqrt{\ln(1+x^2)} = 0.$$

Итак, функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой и

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) = \begin{cases} \sqrt{\ln(1+x^2)} + \dfrac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{\ln(1+x^2)}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases} \quad \square$$

Пример 5.14. Найдём $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, если $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Решение. Заметим, что функция f непрерывна на $\mathbb{R}$. Если $x\neq 0$, то

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) = \sin\frac{1}{x} - x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x} = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

Найти производную $f'(0)$, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, нельзя. Поскольку $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\sin\dfrac{1}{x}$ и функция $\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела как при $x\to 0+$, так и при $x\to 0-$, заключаем, что функция f не имеет в точке $x=0$ ни левой, ни правой производной. $\square$

Замечание. На практике удобно пользоваться следующим свойством: если функция f непрерывна в точке a, производная f' существует в некоторой правой (левой) полуокрестности a и существует $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$ ($\lim\limits_{x\to a-} f'(x)$), то этот предел равен $f'_+(a)$ ($f'_-(a)$) (см. задачу T5.23).

Обратите внимание: условие непрерывности функции f в этом утверждении существенно, что показывает следующий пример.

Пример 5.15. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Поскольку $-\dfrac{\pi}{2}=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)<f(0)<\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$, функция f в точке $x=0$ не является непрерывной ни справа, ни слева, следовательно, $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$ не существуют (см. задачу T5.26). В то же время при $x\neq 0$ справедливо равенство $f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$, и существуют оба предела $\lim\limits_{x\to 0-} f'(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=-1$. $\square$

Пример 5.16. Найдём производную функции $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x\geqslant 0,\\ x^2+x, & x<0.\end{cases}$

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ при $x>0$, $f'(x)=$ $=2x+1$ при $x<0$, поэтому $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{1+x^2}=1$, $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-}(2x+1)=1$. Итак, функция $f(x)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, причём

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ 2x+1, & x<0. \end{cases}$$
□

Пример 5.17. Найдём производную функции

$$f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой. Если $x\neq 0$, то $f'(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}$, откуда получаем

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}f'(x)=\frac{\pi}{2},\quad f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}f'(x)=-\frac{\pi}{2},\quad f'_-(0)\neq f'_+(0).$$

Итак, в точке $x=0$ функция $f(x)$ не дифференцируема, а при $x\neq 0$ $f'(x)=$ $=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}$. □

Пример 5.18. Найдём производную функции $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Решение. Имеем $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$, если $x\neq 0$. Значение $f'(0)$ вычислим по определению: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$. Поэтому функция f дифференцируема на всей числовой прямой, и

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

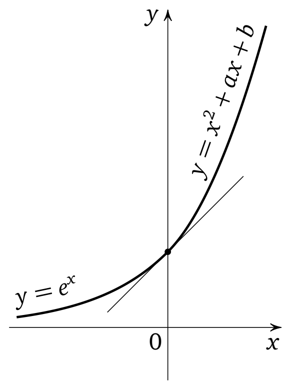
Заметим, что пределы $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)$ не существуют. □

Пример 5.19. Пусть $\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & x\geqslant a,\\ g(x), & x<a.\end{cases}$ Какому условию должны удовлетворять непрерывные функции f и g, чтобы функция φ была дифференцируемой на всей числовой прямой?

Решение. Поскольку $\varphi(x)=f(x)$ при $x>a$ и $\varphi(x)=g(x)$ при $x<a$, условие дифференцируемости f при $x>a$ и g при $x<a$ необходимо и достаточно для дифференцируемости φ на множестве $(-\infty;a)\cup(a;+\infty)$. Для дифференцируемости φ в точке a прежде всего необходимо условие непрерывности: $\varphi(a-0)=\varphi(a+0)=\varphi(a)$, которое в данном случае эквивалентно условию $f(a)=g(a-0)$. Кроме того, требуется выполнение равенства $\varphi'_+(a)=\varphi'_-(a)$, т. е. $f'_+(a)=g'_-(a-0)$ (см. замечание на с. 155). □

Пример 5.20. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0, \\ x^2 + ax + b, & x > 0. \end{cases}$$



Найдём такие значения a и b, чтобы f была дифференцируемой на всей числовой прямой.

Решение. Поскольку f должна быть непрерывна в точке 0, получаем

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 1,$$

т. е. $\lim\limits_{x\to 0+}(x^2 + ax + b) = b = e^0 = 1$, откуда $b = 1$. Далее, $f'_+(0) = (x^2 + ax + b)'|_{x=0} = a$ и $f'_-(0) = (e^x)'|_{x=0} = 1$, следовательно, $f'(0)$ существует, если $a = 1$ и $b = 1$. При этих значениях a и b функция f дифференцируема на всей числовой прямой. □

5.1.3. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная функции $f'(x)$ называется *второй производной функции* f и обозначается f''. Далее определение даётся по индукции: *производная n-го порядка* (n-я производная) $f^{(n)}$ есть производная от производной $(n-1)$-го порядка: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Для неё также используют обозначение $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Пример 5.21. Покажем, что $y^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$, где $y = \sin x$.

Решение. Имеем $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Если $y^{(n-1)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right)$, то

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right).$$

Согласно принципу математической индукции формула доказана. □

Таблица производных n-го порядка

$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0)$	$(e^x)^{(n)} = e^x$
$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$	$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$
$(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$	$(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

Всякая основная элементарная функция имеет производные любого порядка в каждой внутренней точке своей области определения (за исключением степенной функции $y = x^a$, которая при $0 < a < 1$ недифференцируема в нуле). Если функция f дифференцируема n раз на промежутке $\langle a; b\rangle$ и её n-я производная непрерывна на $\langle a; b\rangle$, то функцию f называют n раз непрерывно дифференцируемой на промежутке $\langle a; b\rangle$ и пишут $f \in C^n\langle a; b\rangle$. Если $f \in C^n\langle a; b\rangle$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то пишут $f \in C^\infty\langle a; b\rangle$ и называют функцию f *бесконечно дифференцируемой* на $\langle a; b\rangle$.

Для нахождения n-й производной в некоторых случаях полезно предварительно преобразовать функцию, в частности, рациональную функцию разложить в сумму простейших дробей, понизить степень тригонометрической функции с помощью кратных углов и т. д. Например,

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right), \qquad \ln\frac{1+x}{3x+1}=\ln|1+x|-\ln|3x+1|,$$

$$\sin^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3), \quad \sin 2x\cos^2 3x=\frac{1}{4}(\sin 8x-\sin 4x)+\frac{1}{2}\sin 2x.$$

При нахождении производных высших порядков от произведения двух функций полезно пользоваться *формулой Лейбница*: если каждая из функций $u=f(x)$ и $v=g(x)$ имеет в точке x производную n-го порядка, то их произведение $u\cdot v$ также имеет n-ю производную в точке x, причём

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}, \quad \text{где } u^{(0)}\equiv u(x),\, v^{(0)}\equiv v(x),\, C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 5.22. Найдём $y^{(10)}(x)$, если $y(x)=(x^3+4x^2+2)e^{2x}$.

Решение. Обозначим $u(x)=x^3+4x^2+2$, $v(x)=e^{2x}$, тогда, применяя формулу Лейбница, находим

$$\begin{aligned}((x^3+4x^2+2)e^{2x})^{(10)}&=C_{10}^0\cdot(x^3+4x^2+2)^{(0)}\cdot(e^{2x})^{(10)}+\\&+C_{10}^1\cdot(x^3+4x^2+2)^{(1)}\cdot(e^{2x})^{(9)}+C_{10}^2\cdot(x^3+4x^2+2)^{(2)}\cdot(e^{2x})^{(8)}+\\&+C_{10}^3\cdot(x^3+4x^2+2)^{(3)}\cdot(e^{2x})^{(7)}=2^{10}\cdot e^{2x}\cdot(x^3+4x^2+2)+\\&+2^9\cdot 10\cdot(3x^2+8x)e^{2x}+2^8\cdot 45\cdot(6x+8)e^{2x}+2^7\cdot 120\cdot 6\cdot e^{2x}.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что все производные порядка выше третьего функции $y=x^3+4x^2+2$ равны нулю. □

Для определения дифференциала второго порядка зафиксируем произвольное приращение аргумента dx. Тогда дифференциал df функции $f(x)$ будет являться функцией только от переменной x. Найдём дифференциал $d(df)$ этой функции для того же приращения аргумента dx. Получившееся выражение называется *дифференциалом второго порядка* функции $f(x)$ и обозначается d^2f. Аналогичным образом индуктивно определяются дифференциалы более высоких порядков: $d^nf=d(d^{n-1}f)$.

Если x — независимая переменная, то $d(dx)=0$ и

$$d^2f=d(df)=d(f'(x)\,dx)=d(f'(x))\,dx=f''(x)\,(dx)^2, \;\; d^3f=f'''(x)\,(dx)^3, \;\; \ldots$$

Скобки у приращения аргумента опускают и пишут $d^nf=f^{(n)}(x)\,dx^n$.

Если x является функцией аргумента t, то для дифференциала второго порядка функции $f(x)$ справедливо следующее равенство:

$$d^2f=d(f'(x)\,dx)=d(f'(x))\,dx+f'(x)\,d\,(dx)=f''(x)\,dx^2+f'(x)\,d^2x.$$

Отсюда получаем, что дифференциал второго порядка (а также дифференциалы более высоких порядков), в отличие от дифференциала первого порядка, в общем случае не обладает свойством инвариантности. Отметим, что если $x(t)$ — линейная функция, то инвариантность формы d^2f сохраняется, так как в этом случае $d^2x \equiv 0$.

5.1.4. Дифференцирование параметрически заданной, обратной и неявной функций

Если функция $y(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, причём существует $y'(x_0) \neq 0$, то на образе этой окрестности определена обратная функция $x(y)$, дифференцируемая в точке $y_0 = y(x_0)$, и для её производной справедливо равенство $x'(y_0) = \dfrac{1}{y'(x_0)}$.

Отметим, что обратная функция $x(y)$ монотонна на указанной окрестности точки y_0, причём её характер монотонности совпадает с характером монотонности функции $y(x)$.

Пример 5.23. Найдём производную функции, обратной к функции $y(x) = x + \operatorname{arctg} x$.

Решение. Функция $y(x)$ дифференцируема, возрастает на всей числовой оси как сумма двух дифференцируемых возрастающих функций и принимает все действительные значения. Имеем

$$y'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2+x^2}{1+x^2} > 0 \quad \text{для всех } x.$$

Следовательно, на $\mathbb{R}$ существует обратная функция $x(y)$, она также возрастает, и её производная равна $x'(y) = \dfrac{1+x^2(y)}{2+x^2(y)}$. □

Если функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна на некотором интервале $(\alpha; \beta)$, то на промежутке $x((\alpha; \beta))$ определена обратная функция $t(x)$; тем самым на этом промежутке определена функция $y = f(x) = y(t(x))$. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ задана *параметрически*. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы на $(\alpha; \beta)$ и $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$, то функция $y = f(x)$ дифференцируема на $x((\alpha; \beta))$ и $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$.

Внимание! При рассмотрении параметрически заданных функций (и только в этом случае!) во избежание путаницы производные функций $x(t)$ и $y(t)$ по переменой t будем обозначать через $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ соответственно; производную же функции $y = f(x)$ по переменной x будем, как обычно, обозначать y'. Таким образом, формула для производной параметрически заданной функции записывается в виде $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Производная $y' = f'(x)$ связана с аргументом x, как и исходная функция $y = f(x)$, через параметр t: $y' = \dot{y}(t)/\dot{x}(t)$, $x = x(t)$. Поэтому при выполнении соответствующих условий вторая производная y по x равна

$$y'' = (y')' = \frac{\dfrac{d}{dt}(y')}{\dot{x}} = \frac{1}{\dot{x}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}.$$

Аналогичным способом можно отыскать производные более высоких порядков.

Пример 5.24. Найдём y', y'' и y''', если функция $y=f(x)$ задана параметрически: $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$.

Решение. Поскольку функция $\dot{x}(t)=a(1-\cos t)$ положительна при $t\neq 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, в соответствующих точках получаем

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},\quad y''=-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}:\left(2a\sin^2\frac{t}{2}\right)=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}},$$

$$y'''=\frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin^5\frac{t}{2}}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}. \qquad \square$$

Формула для производной параметрически заданной функции широко используется при преобразовании выражений, содержащих производные.

Пример 5.25. В выражении $(1-x^2)y'-xy$, где $y=f(x)$, $x\in(-1;1)$, перейдём к переменной t, если $x=\sin t$.

Решение. Пользуясь равенством $y'=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$, получаем

$$(1-x^2)y'-xy=(1-\sin^2 t)\frac{\dot{y}}{\cos t}-y\sin t=\dot{y}\cos t-y\sin t. \qquad \square$$

Пример 5.26. В выражении $(1+x^2)y''-y$, где $y=f(x)$, перейдём к функции $u(t)$, если $y=\dfrac{u}{\cos t}$, $x=\operatorname{tg} t$.

Решение. Имеем $y'=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{\dot{u}\cos t+u\sin t}{\cos^2 t}\cos^2 t=\dot{u}\cos t+u\sin t$. Далее,

$$y''=\frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)=\cos^2 t(\ddot{u}\cos t-\dot{u}\sin t+\dot{u}\sin t+u\cos t)=\cos^3 t(\ddot{u}+u).$$

Подставляя выражения для y и y'' в исходное выражение, получаем

$$(1+\operatorname{tg}^2 t)(\ddot{u}+u)\cos^3 t-\frac{u}{\cos t}=\frac{\ddot{u}\cos^2 t-u\sin^2 t}{\cos t}. \qquad \square$$

Пример 5.27. В выражении $2y''+(x+y)(1-y')^3$, где $y=f(x)$, перейдём к функции $v(t)$, если $x=v+t$, $y=v-t$.

Решение. Имеем $\dot{x}=\dot{v}+1$, $\dot{y}=\dot{v}-1$, откуда находим

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\dot{v}-1}{\dot{v}+1};\quad y''=\frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{v}-1}{\dot{v}+1}\right)=\frac{2\ddot{v}}{(\dot{v}+1)^3}.$$

Подставляя выражения для x, y, y', y'' в исходное выражение, получаем

$$\frac{4\ddot{v}}{(\dot{v}+1)^3}+2v\left(1-\frac{\dot{v}-1}{\dot{v}+1}\right)^3=\frac{4\ddot{v}+16v}{(\dot{v}+1)^3}. \qquad \square$$

Рассмотрим теперь дифференцирование функции, заданной неявно, т. е. равенством $F(x,y(x))=0$. Предположим, что такая функция $y(x)$ определена и дифференцируема на некотором интервале $(\alpha;\beta)$. Тогда при формальном дифференцировании равенства $F(x,y(x))=0$ по переменной x получим линейное относительно $y'(x)$ уравнение, из которого при выполнении некоторых условий можно найти выражение этой производной (условие существования и дифференцируемости заданной таким образом функции $y(x)$ рассматривается в теории функций нескольких переменных, см. § 8.5).

Пример 5.28. Уравнение $x^3+y^3-y^5-x=0$ определяет функцию $y(x)$. Найдём $y'(1)$, если $y(1)=1$.

Решение. Заметим, что значения $x=1$ и $y=1$ удовлетворяют данному уравнению. Дифференцируя равенство $x^3+y^3(x)-y^5(x)-x\equiv 0$ по переменной x, получаем $3x^2+3y^2y'(x)-5y^4y'(x)-1=0$. При $x=1$ и $y=1$ имеем $3+3y'(1)-5y'(1)-1=0$, откуда $y'(1)=1$. □

При соответствующих условиях функция $y(x)$ будет иметь и производные высших порядков, которые определяются уравнениями $(F(x, y(x)))''=0$, $(F(x, y(x)))'''=0$ и т. д.

Пример 5.29. Пусть функция $y(x)$ определяется из уравнения $\ln(x^2+y^2)=$ $=x-y$ и $x_0=y_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Найдём $y'(x_0)$ и $y''(x_0)$.

Решение. Дифференцируя равенство $\ln(x^2+y^2(x))=x-y(x)$, имеем

$$\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}-1+y'=0,$$

или, поскольку $x^2+y^2\neq 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0),

$$2x+2yy'-(1-y')(x^2+y^2)=0, \qquad (2)$$

откуда следует, что $y'(x)=\dfrac{x^2+y^2(x)-2x}{x^2+y^2(x)+2y(x)}$, следовательно, $y'\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)=2\sqrt{2}-3$. Дифференцируя по x равенство $y'=\dfrac{x^2+y^2-2x}{x^2+y^2+2y}$, получим y''. Заметим, что в равенство, определяющее y'', входит y', которое уже найдено. Технически проще найти y'', дифференцируя равенство (2). В нашем случае имеем

$$2+2(y')^2+2yy''+(x^2+y^2)y''-(1-y')(2x+2yy')=0,$$

поэтому

$$2+2(2\sqrt{2}-3)^2+\sqrt{2}y''\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)+y''\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)-(1-(2\sqrt{2}-3))(\sqrt{2}+\sqrt{2}(2\sqrt{2}-3))=0,$$

$$y''\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)=4(7-5\sqrt{2}).$$ □

§ 5.2. Приложения дифференциального исчисления

5.2.1. Касательные и нормали к кривым

Если на промежутке $\langle a; b\rangle$ заданы непрерывные функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$, то множество

$$L=\{(x, y): x=x(t),\ y=y(t),\ t\in\langle a; b\rangle\}$$

называется *кривой* (или *линией*) *в* $\mathbb{R}^2$ (*плоской кривой*). Аналогично *кривой* (*линией*) *в* $\mathbb{R}^3$ называется множество

$$L=\Big\{(x, y, z): x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in\langle a; b\rangle\Big\},$$

если функции x, y и z непрерывны на промежутке $\langle a; b\rangle$.

Пара $(x(t), y(t))$ (тройка $(x(t), y(t), z(t))$ в случае пространственной кривой) упомянутых непрерывных функций называется *параметризацией* кривой L. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем рассматривать только такие кривые и такие их параметризации, что лишь конечное число точек рассматриваемой кривой может иметь более одного прообраза при рассматриваемой параметризации, причём прообраз каждой точки может быть только конечным множеством. Можно доказать, что для рассматриваемых кривых число прообразов их точек при рассматриваемых параметризациях не зависит от выбора этих параметризаций. Точки кривой, которые имеют более одного прообраза, называются *точками самопересечения кривой*.

Точки $(x(a), y(a))$ и $(x(b), y(b))$, если они принадлежат кривой L и различны, называются её *краевыми* (*граничными*) *точками*; точки кривой, не являющиеся граничными, называются её *внутренними точками*.

Кривая L называется *замкнутой*, если промежуток $\langle a; b\rangle$ является отрезком $[a; b]$ и граничные точки совпадают друг с другом, т. е.

$$(x(a), y(a)) = (x(b), y(b)).$$

Пусть $(x(t), y(t))$ — некоторая параметризация плоской кривой L. Если в некоторой точке t_0 промежутка $\langle a; b\rangle$ функции $x(t)$, $y(t)$ имеют правые производные $x'_+(t_0)$, $y'_+(t_0)$, хотя бы одна из которых отлична от нуля, то задаваемая параметрическими уравнениями полупрямая

$$x = x(t_0) + x'_+(t_0)(t - t_0), \quad y = y(t_0) + y'_+(t_0)(t - t_0), \quad t \geqslant t_0,$$

называется *полукасательной* к кривой L в точке $M_0(x(t_0), y(t_0))$. Если в точке t_0 промежутка $\langle a; b\rangle$ функции $x(t)$, $y(t)$ имеют левые производные $x'_-(t_0)$, $y'_-(t_0)$, хотя бы одна из которых отлична от нуля, то полупрямая $x = x(t_0) + x'_-(t_0)(t - t_0)$, $y = y(t_0) + y'_-(t_0)(t - t_0)$, $t \leqslant t_0$, также называется полукасательной к кривой L в точке $M_0(x(t_0), y(t_0))$. Если же в точке t_0 промежутка $\langle a; b\rangle$ функции $x(t)$, $y(t)$ имеют производные $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, хотя бы одна из которых отлична от нуля, то в точке M_0 существуют полукасательные к L как с одной, так и с другой стороны, а угол между ними равен π, т. е. эти две полупрямые сливаются в прямую. Эта прямая называется *касательной* к кривой L в точке M_0. Можно доказать, что во всякой внутренней точке M_0 кривой L существует не более одной касательной, т. е. при любых параметризациях кривой L, для которых существуют касательные в точке M_0, эти касательные совпадают.

Нормалью к кривой L в точке M_0 называется прямая, перпендикулярная касательной к кривой L в точке M_0.

Кривая называется *гладкой*, если она имеет касательную в каждой своей внутренней точке. Кривая называется кусочно гладкой, если она не имеет касательных не более чем в конечном числе своих внутренних точек.

Если кривая L на плоскости xOy — график непрерывной функции $y = f(x)$, то дифференцируемость f в точке x_0 эквивалентна существованию у кривой L невертикальной касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, а уравнение $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ является уравнением этой касательной.

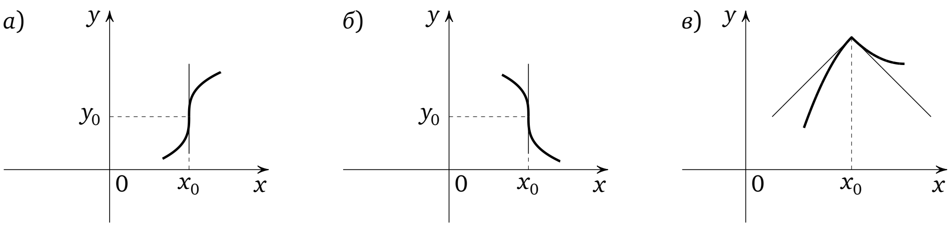


Рис. 25

Если функция f непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ (или $-\infty$), то в точке $M_0(x_0, y_0)$ график этой функции имеет вертикальную касательную $x=x_0$. Локальное поведение кривой в окрестности такой точки показано на рис. 25 *а* и рис. 25 *б* соответственно.

Если в точке x_0 непрерывная функция f не дифференцируема, однако существуют $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, то график этой функции имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ односторонние полукасательные: левую — полупрямую $y-y_0=f'_-(x_0)(x-x_0)$, $x\leqslant x_0$, и правую — полупрямую $y-y_0=f'_+(x_0)(x-x_0)$, $x\geqslant x_0$. Тогда точка x_0 называется *точкой излома* или *угловой точкой кривой* (см. рис. 25 *в*).

Если функция f непрерывна в точке x_0 и

$$\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty,\qquad \lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty,$$

то её график в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет левую и правую полукасательные, каждая из которых является вертикальной полупрямой, направленной вниз: $x=x_0$, $y\leqslant y_0$ (см. рис. 26 *а*). Если

$$\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty,\qquad \lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty,$$

то левая и правая полукасательные — одна и та же полупрямая, направленная вверх: $x=x_0$, $y\geqslant y_0$ (рис. 26 *б*).

Точка кривой, в которой односторонние полукасательные совпадают, называется *точкой возврата*. Поведение кривой в окрестности такой точки показано на рис. 26 *а*, *б*, *в*. Отметим, что для графика непрерывной функции возможен только один из вариантов: *а*) или *б*).

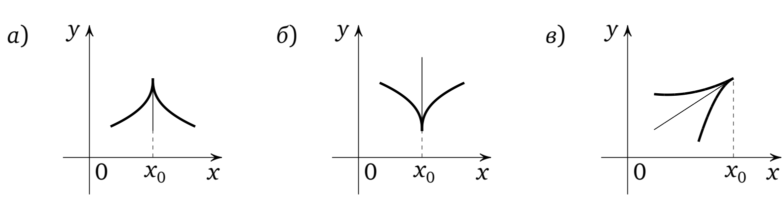
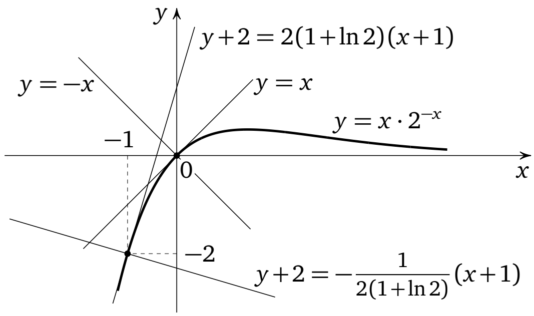


Рис. 26

Если две кривые имеют общую точку M_0 и в этой точке каждая из этих кривых имеет касательную, то углом между этими кривыми называется угол между их касательными в точке M_0. Для краткости в дальнейшем вместо слов «кривая, являющаяся графиком функции $y=f(x)$» будем говорить «кривая $y=f(x)$».

Пример 5.30. Напишем уравнения касательных и нормалей к кривой $y = x2^{-x}$ в точках с абсциссами: а) $x=0$; б) $x=-1$.

Решение. Имеем $y(0)=0$, $y(-1)=-2$, $y'=2^{-x}-x2^{-x}\ln 2=2^{-x}(1-x\ln 2)$, $y'(0)=1$, $y'(-1)=2(1+\ln 2)$. Следовательно, уравнения касательных будут иметь вид: а) $y=x$, б) $y+2=2(1+\ln 2)(x+1)$, уравнения нормалей а) $y=-x$, б) $y+2=-\dfrac{1}{2(1+\ln 2)}(x+1)$. □



Пример 5.31. Напишем уравнения касательных к кривой $y = x\sqrt[3]{1-x}$ в точках с абсциссами: а) $x=0$; б) $x=1$.

Решение. Имеем $y(0)=0$, $y(1)=0$,

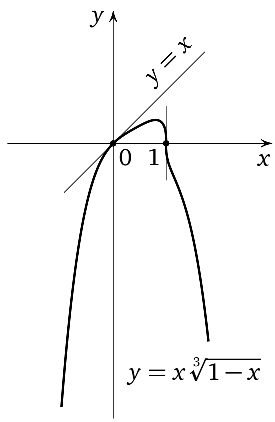
$$y'(x) = (1-x)^{1/3} - x\cdot\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3} = \frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}(3-4x), \quad x \neq 1. \qquad (3)$$

Следовательно, $y'(0)=1$, поэтому уравнение касательной в случае а) имеет вид $y=x$.

При $x=1$ формула (3) теряет смысл, поэтому по определению производной находим

$$y'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{y(x)-y(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{-\sqrt[3]{(1-x)^2}} = -\infty.$$

Заметим, что проще использовать следующее утверждение: если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ (соответственно, $+\infty$ или $-\infty$). Таким образом, в точке $(1,0)$ кривая $y = x\sqrt[3]{1-x}$ имеет вертикальную касательную $x=1$. □



Пример 5.32. К кривой $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$ напишем уравнения касательных в точках: а) $t=\pi/2$; б) $t=\pi$; в) $t=3\pi/2$.

Решение. Имеем

$$\dot{x} = -2\sin t + 2\sin 2t, \quad \dot{y} = 2\cos t - 2\cos t, \quad y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{tg}\frac{3t}{2};$$

$$t = \frac{\pi}{2}\colon\ x=1, y=2, y'|_{t=\pi/2} = -1; \quad t = \frac{3\pi}{2}\colon\ x=1, y=-2, y'|_{t=3\pi/2} = 1.$$

Следовательно, уравнения касательных в случаях а) и в) будут иметь вид соответственно $y-2=-(x-1)$ и $y+2=x-1$.

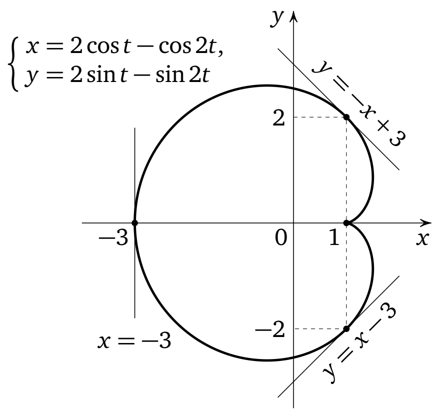


Рис. 27

В случае б) при $t=\pi:\ x=-3,\ y=0$, функция y' не определена. Рассмотрим кривую в окрестности точки $x=-3$. Параметрическую связь x и y можно рассматривать и как определение функции $y=f(x)$, и как определение функции $x=g(y)$. Поскольку $\dot{y}<0$ в окрестности точки $t=\pi$, в этой окрестности x непрерывно зависит от y и $x'=\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}=\operatorname{ctg}\dfrac{3t}{2}$. Уравнение касательной к графику этой функции в точке $(-3, 0)$ имеет вид $x+3=0\cdot y$, т. е. $x=-3$ — касательная, параллельная оси Oy. Если же рассматривать функцию $y=f(x)$, то точка $(-3, 0)$ является общей точкой графиков двух непрерывных функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, соответствующих участкам монотонного изменения $x(t)$: x убывает от $3/2$ до -3 при $t\in(\pi/3;\pi)$, x возрастает от -3 до $3/2$ при $t\in(\pi;5\pi/3)$. Поскольку $x\geqslant-3$, обе ветви $f_1(x)$ и $f_2(x)$ кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$ лежат справа от прямой $x=-3$, и в этой точке можно говорить только об односторонних полукасательных к каждой из ветвей. Имеем

$$\lim_{x\to-3+} f_1'(x) = \lim_{t\to\pi-} \operatorname{tg}\frac{3t}{2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-3+} f_2'(x) = \lim_{t\to\pi+} \operatorname{tg}\frac{3t}{2} = -\infty.$$

Отсюда, рассматривая кривую в целом, видим, что полукасательная «сверху» в точке $(-3, 0)$ является вертикальной полупрямой, направленной вверх: $x=-3$, $y\geqslant 0$; полукасательная «снизу» — вертикальной полупрямой, направленной вниз: $x=-3$, $y\leqslant 0$. Угол между этими полупрямыми равен π, поэтому кривая имеет вертикальную касательную $x=-3$ (см. рис. 27). □

Пример 5.33. Напишем уравнения касательных к кривой $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$ в точках а) $t=-1$; б) $t=1-\sqrt{2}$; в) $t=1$.

Решение. Имеем $\dot{x}=2-2t$, $\dot{y}=3-3t^2$, $y'=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{3(1-t^2)}{2(1-t)}=\dfrac{3}{2}(1+t)$, $t\neq1$;

$$t=-1:\quad x=-3,\quad y=-2,\qquad y'|_{t=-1}=0;$$

$$t=1-\sqrt{2}:\quad x=-1,\quad y=-4+2\sqrt{2},\quad y'|_{t=1-\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\left(2-\sqrt{2}\right).$$

Следовательно, уравнения касательных в случаях а) и б) будут иметь вид соответственно $y+2=0$ и $y+4-2\sqrt{2}=\frac{3}{2}(2-\sqrt{2})(x+1)$.

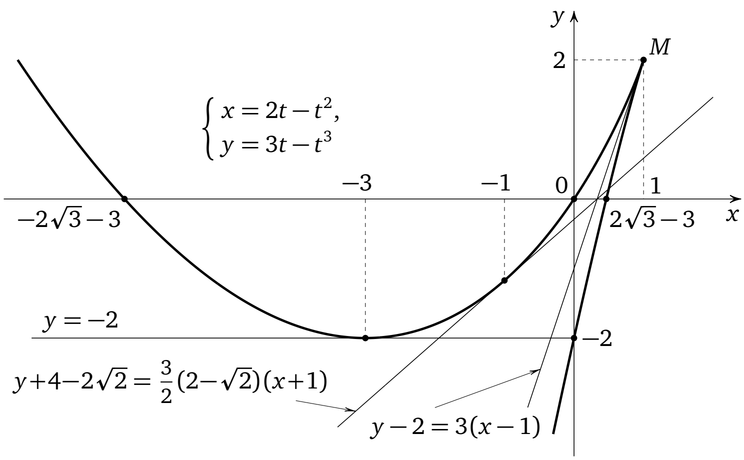


Рис. 28

В случае в) $x=1$, $y=2$, в точке $t=1$ функция $\dfrac{3(1-t^2)}{2(1-t)}$ не определена, при $t=1$ имеем $\dot{y}=0$ и $\dot{x}=0$. Поэтому нельзя утверждать, что в окрестности точки $(1,2)$ существует взаимно однозначное соответствие между x и y. У функции $x(t)$ два участка монотонности: она возрастает на $(-\infty; 1]$ от $-\infty$ до 1, убывает на $[1; +\infty)$ от 1 до $-\infty$. Соответственно получаем две непрерывные ветви рассматриваемой кривой $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, каждая с областью определения $x \leqslant 1$. Точка $M(1,2)$ — общая для них. Поскольку $x \leqslant 1$, можно найти только односторонние полукасательные к каждой из ветвей в точке M. Имеем

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f_1(x)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1-} f_1'(x) = \lim_{t\to 1-} \frac{3}{2}(1+t) = 3;$$
$$\lim_{x\to 1-} \frac{f_2(x)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1-} f_2'(x) = \lim_{t\to 1+} \frac{3}{2}(1+t) = 3.$$

Итак, полупрямая $y-2=3(x-1)$, $x \leqslant 1$, является общей полукасательной для обеих ветвей рассматриваемой кривой в точке $(1,2)$. Точка $(1,2)$ — точка возврата (см. рис. 28). $\square$

Пример 5.34. Напишем уравнения касательных в точках с абсциссами а) $x=0$; б) $x=a$ к кривой $3x^2+2y^2-4xy=a^2$, $a>0$.

Решение. Пользуясь правилом дифференцирования неявной функции, имеем $6x+4yy'-4y-4xy'=0$ и при $x \neq y$ получаем

$$y' = \frac{3x-2y}{2(x-y)}. \tag{4}$$

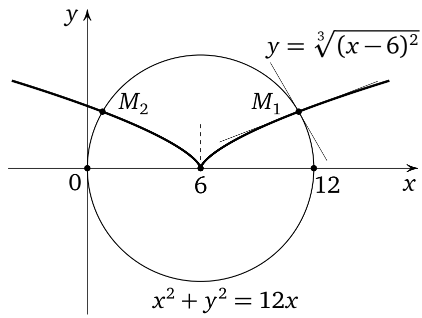
Значению $x=0$ на заданной кривой отвечают две точки $M_1\Big(0, \dfrac{a}{\sqrt{2}}\Big)$ и $M_2\Big(0, -\dfrac{a}{\sqrt{2}}\Big)$. Поскольку $y'|_{M_1} = y'|_{M_2} = 1$, уравнение касательной в точке M_1 имеет вид $y=x+\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, а в точке M_2 имеет вид $y=x-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Значению $x=a$ на заданной кривой отвечает единственная точка $M_0(a,a)$. Её абсцисса и ордината совпадают, поэтому для нахождения y' в этой точке равенство (4) неприменимо. Если же в окрестности точки M_0 рассматривать не y как функцию от x, а x как функцию от y, то получим $x' = \dfrac{2(x-y)}{3x-2y}$, а значит, в точке M_0 данная кривая имеет вертикальную касательную $x = a$. □

Пример 5.35. Найдём угол, под которым пересекаются кривые

$$x^2 + y^2 = 12x \quad \text{и} \quad y = \sqrt[3]{(x-6)^2}.$$

Решение. Чтобы найти точку пересечения кривых, решим уравнение $(x-6)^2 + \sqrt[3]{(x-6)^4} = 36$. Положим $(x-6)^2 = z^3$, тогда $z^3 + z^2 = 36$. Поскольку $z^3 + z^2 - 36 = (z-3)(z^2 + 4z + 12)$, уравнение имеет единственный корень $z = 3$, откуда $x = 6 \pm \sqrt{27}$. Итак, точками пересечения кривых являются точки $M_1(6+\sqrt{27}, 3)$ и $M_2(6-\sqrt{27}, 3)$. Поскольку кривые симметричны относительно прямой $x = 6$, углы, под которыми они пересекаются в точках M_1 и M_2, равны. Найдём угловые коэффициенты касательных к кривым в точке M_1. Для первой кривой имеем $2x + 2yy' = 12$, откуда $y' = \dfrac{6-x}{y}$. Следовательно, угловой коэффициент касательной к ней в точке M_1 равен $-\sqrt{3}$. Для второй кривой получаем $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-6}}$, поэтому угловой коэффициент касательной к ней в точке M_1 равен $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. Таким образом, при помощи формулы для тангенса разности находим угол, под которым пересекаются кривые в точке M_1 (и в точке M_2), он равен

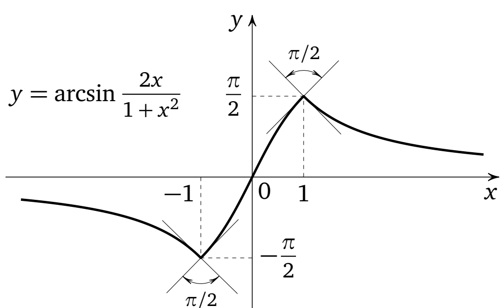


$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}}{1 - \frac{2}{3}} = \operatorname{arctg} \frac{11\sqrt{3}}{3}.$$ □

Пример 5.36. Найдём угол между левой и правой полукасательными к кривой $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ в угловой точке (см. определение на с. 163).

Решение. Имеем

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}(1+x^2)} \qquad (|x| \neq 1).$$



Следовательно, только точки $M_1(1, \pi/2)$ и $M_2(-1, -\pi/2)$ могут быть угловыми. Имеем $y'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1+} y'(x) = \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{-2}{1+x^2} = -1$, $y'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1-} y'(x) = 1$. Угловые коэффициенты левой и правой полукасательных в точке M_1 равны 1 и -1, угол между ними равен $\pi/2$. Поскольку функция $y(x)$ нечётная, кривая симметрична относительно начала координат и угол между левой и правой полукасательными в точке M_2 также равен $\pi/2$. $\square$

5.2.2. Возрастание и убывание функции. Экстремумы

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $\langle a; b\rangle$. Говорят, что функция $f(x)$ *возрастающая* (*неубывающая*) на промежутке $\langle a; b\rangle$, если для любых точек x_1 и x_2 из $\langle a; b\rangle$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) \leqslant f(x_2))$.

Говорят, что функция $f(x)$ *убывающая* (*невозрастающая*) на промежутке $\langle a; b\rangle$, если для любых точек x_1 и x_2 из $\langle a; b\rangle$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$.

Функция $f(x)$ называется *монотонной* на промежутке $\langle a; b\rangle$, если она невозрастающая или неубывающая на $\langle a; b\rangle$.

Если монотонная на интервале $(a; b)$ функция дифференцируема на $(a; b)$, то её производная либо неотрицательна на интервале $(a; b)$, либо неположительна на нём. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для всех $x \in (a; b)$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых $f'(x) = 0$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a; b)$.

Пример 5.37. Покажем, что функция $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ возрастает на луче $(0; +\infty)$.

Решение. Имеем $f'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \left(\ln\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right)$. При $x > 0$ знак $f'(x)$ совпадает со знаком функции $g(x) = \ln\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$, поскольку $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x > 0$. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x(x+1)} < 0$ при $x > 0$. Итак, функция $g(x)$ убывает и стремится к нулю при $x \to +\infty$, следовательно, для всех $x > 0$ имеем $g(x) > 0$ и, значит, $f'(x) > 0$, откуда вытекает, что $f(x)$ возрастает на луче $(0; +\infty)$. $\square$

Определение. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*локального минимума*) функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ определена и для любого x из этой окрестности выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$. Если при этом найдётся такая проколотая окрестность точки x_0, в которой неравенство становится строгим, то точку x_0 называют точкой *строгого локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$; в противном случае говорят о *нестрогом максимуме* (*минимуме*).

Говорят, что точка x_0 является *точкой локального экстремума* функции $f(x)$, если x_0 — точка локального максимума или минимума функции $f(x)$. Заметим, что точка локального экстремума обязательно является внутренней точкой области определения функции.

Определение. Внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, а её производная равна нулю или не существует, назовём *критическими*.

Всякая точка локального экстремума непрерывной функции является критической, но, как будет показано далее на примерах, не всякая критическая точка непрерывной функции есть её точка экстремума.

Достаточные условия локального экстремума

1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в проколотой окрестности критической точки x_0, причём $f'(x)$ в левой ($U_-(x_0)$) и правой ($U_+(x_0)$) полуокрестностях сохраняет знак. Тогда если $f'(x)>0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x)<0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 есть точка локального максимума; если $f'(x)<0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x)>0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 — точка локального минимума.

Как показывает следующий пример, требование непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 существенно.

Пример 5.38. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1-x, & x>0,\end{cases}$$

тогда $f'(x)=1$ при $x<0$ и $f'(x)=-1$ при $x>0$, т. е. при переходе через точку $x=0$ производная меняет знак, но точка $x=0$ не является точкой локального экстремума. □

2. Пусть f имеет в точке x_0 производную порядка n, причём $f'(x_0)=$ $=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ и $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогда если n чётно, то x_0 — точка локального минимума при $f^{(n)}(x_0)>0$ и точка локального максимума при $f^{(n)}(x_0)<0$; если число n нечётно, то критическая точка x_0 не будет точкой локального экстремума.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Точка a называется *точкой краевого максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если найдётся такая правая полуокрестность точки a, что для всех x из этой полуокрестности выполнено неравенство $f(x)\leqslant f(a)$ $(f(x)\geqslant f(a))$. Аналогично определяется краевой максимум (минимум) в точке b. Точки краевого максимума и минимума называются точками *краевого экстремума*.

Пример 5.39. Найдём точки экстремума и промежутки монотонности функции

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{x+1}}{x+2}+\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}.$$

Решение. Имеем $f'(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}$, $x>-1$. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на луче $x\geqslant -1$, а функция $f'(x)$ — на луче $x>-1$; $f'(x)>0$ при $-1<x<0$, $f'(0)=0$, $f'(x)<0$ при $x>0$. Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[-1;0]$ и убывает на луче $[0;+\infty)$. Итак, $x=-1$ — точка краевого минимума, а $x=0$ — точка локального максимума. □

Пример 5.40. Найдём точки экстремума и промежутки монотонности функции $f(x)=x^3\cdot\sqrt[3]{x^2-1}$.

Решение. Имеем $f'(x)=\dfrac{x^2(11x^2-9)}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$. Точки $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{11}}$ — критические точки данной непрерывной функции. Функция $f'(x)$ меняет знак только в точках $x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{11}}$, причём $f'(x)<0$ при $0<|x|<\dfrac{3}{\sqrt{11}}$, $f'(x)>0$ при $\dfrac{3}{\sqrt{11}}<|x|<1$ и $|x|>1$. Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на луче $\left(-\infty;-\dfrac{3}{\sqrt{11}}\right]$, убывает на отрезке $\left[-\dfrac{3}{\sqrt{11}};\dfrac{3}{\sqrt{11}}\right]$, возрастает на луче $\left[\dfrac{3}{\sqrt{11}};+\infty\right)$, в точке $x=-\dfrac{3}{\sqrt{11}}$ имеет локальный максимум, в точке $x==\dfrac{3}{\sqrt{11}}$ — локальный минимум. Критические точки $x=0$, $x=\pm1$ не являются точками локального экстремума. □

Заметим, что рассмотренная функция нечётна, а её производная чётна (см. также задачу T5.11), поэтому каждой точке экстремума на луче $x>0$ соответствует симметричная ей точка экстремума на луче $x<0$, экстремум в которой носит обратный характер.

Пример 5.41. Докажем неравенство $1+2\ln x\leqslant x^2$ для всех $x>0$.

Решение. Пусть $t=x^2$. Тогда неравенство можно записать в виде $1+\ln t\leqslant t$. Рассмотрим функцию $f(t)=t-\ln t-1$ при $t>0$. Имеем $f'(t)=\dfrac{t-1}{t}$, следовательно, $f'(t)>0$ при $t>1$, $f'(t)<0$ при $0<t<1$. Таким образом, функция $f(t)$ убывает на промежутке $(0;1]$ и возрастает на луче $[1;+\infty)$. Поскольку функция $f(t)$ непрерывна, точка $t=1$ является точкой минимума. Итак, для всех $t>0$ справедливо неравенство $f(t)=t-\ln t-1\geqslant f(1)=0$. □

Пример 5.42. Докажем неравенство $\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ для всех $x>0$.

Решение. Обозначим $f(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\sin x$ и покажем, что $f(x)>0$ при $x>0$. Ясно, что $f(0)=0$. Последовательно дифференцируя, находим, что $f'(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\cos x$, $f'(0)=0$, $f''(x)=-x+\dfrac{x^3}{6}+\sin x$, $f''(0)=0$, $f'''(x)=-1+\dfrac{x^2}{2}+\cos x$, $f'''(0)=0$, $f^{(4)}(x)=x-\sin x>0$ при $x>0$, поскольку $\sin x<x$ при $x>0$. Следовательно, функция $f'''(x)$ возрастает на луче $(0;+\infty)$, и поэтому $f'''(x)>f'''(0)=0$ при $x>0$. Аналогичные рассуждения показывают, что $f''(x)>0$, $f'(x)>0$ и $f(x)>0$ при $x>0$ (см. также задачу T5.35). □

Пусть непрерывная функция f задана на отрезке $[a;b]$. Тогда на отрезке $[a;b]$ существуют такие точки x_1 и x_2, что

$$f(x_1)=\max_{[a;b]}f(x)\quad\text{и}\quad f(x_2)=\min_{[a;b]}f(x).$$

Точки x_1 и x_2 являются либо точками локального экстремума функции f на $(a;b)$, либо концами отрезка $[a;b]$. Поэтому чтобы найти $\max\limits_{[a;b]}f(x)$ и $\min\limits_{[a;b]}f(x)$, достаточно сравнить значения функции f во всех критических точках и концах отрезка $[a;b]$.

Пример 5.43. Найдём $\max\limits_{[-4;4]} f(x)$ и $\min\limits_{[-4;4]} f(x)$, если $f(x)=x^3+3x^2-9x$.

Решение. Функция $f(x)$ дифференцируема на всей прямой, поэтому критическими точками данной функции являются только точки, в которых $f'(x)=0$. Поскольку $f'(x)=3x^2+6x-9$, критические точки есть $x_1=-3$ и $x_2=1$. Эти точки принадлежат отрезку $[-4; 4]$, поэтому следует сравнить значения функции в точках $x_0=-4$, $x_1=-3$, $x_2=1$ и $x_3=4$. Поскольку $f(-4)=20$, $f(-3)=27$, $f(1)=-5$ и $f(4)=76$, находим $\max\limits_{[-4;4]} f(x)=f(4)=76$, $\min\limits_{[-4;4]} f(x)=f(1)=-5$. □

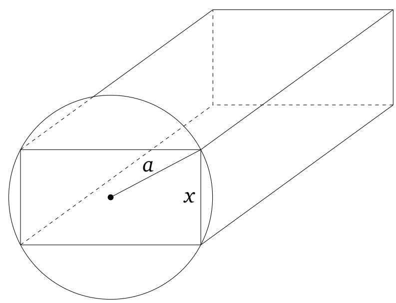
Пример 5.44. Для функции $f(x)=|3x^4-16x^3+24x^2-43|$ найдём $\max\limits_{[-2;3]} f(x)$ и $\min\limits_{[-2;3]} f(x)$.

Решение. Функция $f(x)$ может быть недифференцируема только в тех точках, где $3x^4-16x^3+24x^2-43=0$. Имеем $3x^4-16x^3+24x^2-43=$ $=(x+1)(3x^3-19x^2+43x-43)$. Положим $g(x)=3x^3-19x^2+43x-43$. Тогда $g'(x)=9x^2-38x+43>0$ при всех x, т. е. $g(x)$ возрастает и $g(x)<0$ при всех $x\in[-2; 3]$, так как $g(3)=-4$. Следовательно, $x=-1$ единственная возможная точка недифференцируемости $f(x)$ на $[-2; 3]$. При $x<-1$ имеем $f'(x)=12x(x-2)^2$, при $x>-1$ имеем $f'(x)=-12x(x-2)^2$, следовательно, критическими точками $f(x)$ на отрезке $[-2; 3]$ являются точки $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$. Вычисляя значения $f(x)$ при $x_0=-2$, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=3$, получаем $f(-2)=229$, $f(-1)=0$, $f(0)=43$, $f(2)=27$, $f(3)=16$, поэтому $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(-2)=229$ и $\min\limits_{[-2;3]} f(x)=f(-1)=0$. □

Пример 5.45. Прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна произведению основания на квадрат высоты этого прямоугольника. Найдите форму такого бруса, вытесанного из бревна, поперечное сечение которого есть круг радиусом a, допускающего наибольшую нагрузку.

Решение. Пусть x — высота бруса. Тогда основание бруса равно $\sqrt{4a^2-x^2}$. Обозначим прочность бруса через

$$P(x)=kx^2\sqrt{4a^2-x^2},$$



где k — коэффициент пропорциональности. Заметим, что x может принимать значения только из интервала $(0; 2a)$. Исследуем поведение функции $P(x)$ на этом интервале. Имеем

$$P'(x)=k\Big(2x\sqrt{4a^2-x^2}-\frac{x^3}{\sqrt{4a^2-x^2}}\Big)=\frac{kx(8a^2-3x^2)}{\sqrt{4a^2-x^2}}.$$

Следовательно, $P(x)$ возрастает на $\Big(0; \frac{2\sqrt{6}}{3}a\Big]$ и убывает на $\Big[\frac{2\sqrt{6}}{3}a; 2a\Big)$. Таким образом, при высоте бруса $x=\frac{2\sqrt{6}}{3}a$ и основании, равном $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$, прочность бруса будет наибольшей. □

Методы дифференциального исчисления можно использовать для исследования монотонности как функций действительного аргумента, так и для числовых последовательностей.

Пример 5.46. Пусть $a_1=0$, $a_{n+1}=4^{-a_n}$ при $n\in\mathbb{N}$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть $f(x)=4^{-x}$ и $F(x)=f(f(x))-x$. Покажем, что $F'(x)<0$ при $x>0$. Поскольку $F'(x)=4^{-4^{-x}-x}\ln^2 4-1$, неравенство $F'(x)<0$ эквивалентно неравенству $\left(\frac{1}{4}\right)^{4^{-x}+x}<\frac{1}{\ln^2 4}$. Положим $g(x)=x+4^{-x}$, тогда $g'(x)=$ $=1-4^{-x}\ln 4=0$ при $4^{-x}=\frac{1}{\ln 4}$. Следовательно, в точке $x=\frac{\ln\ln 4}{\ln 4}$ функция g достигает минимального значения, равного $\frac{\ln\ln 4+1}{\ln 4}$. Поэтому

$$4^{-g(x)}\leqslant 4^{-\frac{\ln\ln 4+1}{\ln 4}}=\frac{1}{e\ln 4}<\frac{1}{\ln^2 4}.$$

Таким образом, функция $F(x)$ убывает на $(0;+\infty)$, кроме того, $F\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Отсюда следует, что $F(x)>0$ при $0<x<\frac{1}{2}$ и $F(x)<0$ при $x>\frac{1}{2}$. Иначе говоря, $f(f(x))<x$ при $x>\frac{1}{2}$ и $f(f(x))>x$ при $0<x<\frac{1}{2}$.

Докажем теперь, что $a_{2n-1}<\frac{1}{2}$ и $a_{2n}>\frac{1}{2}$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Находим $a_1=0<\frac{1}{2}$ и $a_2=1>\frac{1}{2}$. Если $a_{2n-1}<\frac{1}{2}$ при некотором $n\in\mathbb{N}$, то в силу убывания функции f имеем $a_{2n}-\frac{1}{2}=f(a_{2n-1})-\frac{1}{2}>f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=0$. Аналогично, если $a_{2n}>\frac{1}{2}$ при некотором $n\in\mathbb{N}$, то $a_{2n+1}-\frac{1}{2}=f(a_{2n})-\frac{1}{2}<0$. В силу принципа математической индукции оба неравенства верны при всех $n\in\mathbb{N}$.

Наконец, проверим монотонность последовательностей $\{a_{2n-1}\}$ и $\{a_{2n}\}$. Поскольку $a_{2n-1}<\frac{1}{2}$ при всех $n\in\mathbb{N}$, по доказанному выше получаем $a_{2n+1}-$ $-a_{2n-1}=f(f(a_{2n-1}))-a_{2n-1}>0$, значит, последовательность $\{a_{2n-1}\}$ возрастает и ограничена сверху. Аналогично доказывается, что последовательность $\{a_{2n}\}$ убывает и ограничена снизу. Следовательно, каждая из них сходится к единственному корню уравнения $x=4^{-x}$, равному $\frac{1}{2}$. □

5.2.3. Выпуклость функции

Определение. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз* (*вверх*) на промежутке $\langle a;b\rangle$, если она определена на этом промежутке и для любых точек $x_1, x_2\in\langle a;b\rangle$ и для любых чисел $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$ с условием $\alpha_1+\alpha_2=1$ имеет место неравенство

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\underset{(\geqslant)}{\leqslant}\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2).$$

Если при $x_1\neq x_2$ это неравенство является строгим, то функция f называется *строго выпуклой вниз* (*вверх*) на промежутке $\langle a;b\rangle$.

Геометрически условие выпуклости вниз (вверх) на промежутке $\langle a;b\rangle$ означает, что для любых точек x_1, x_2, $x_1<x_2$, из промежутка $\langle a;b\rangle$ график функции на отрезке $[x_1;x_2]$ лежит не выше (не ниже) хорды, соединяющей точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ (см. рис. 29). При этом если на интервале $(x_1;x_2)$ график функции $f(x)$ имеет хотя бы одну общую точку с хордой, то он совпадает с ней всюду на отрезке $[x_1;x_2]$.

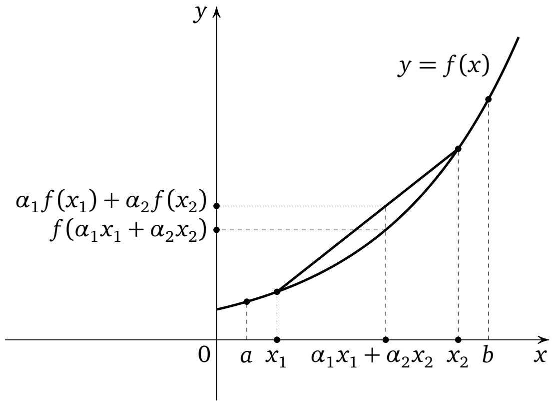


Рис. 29

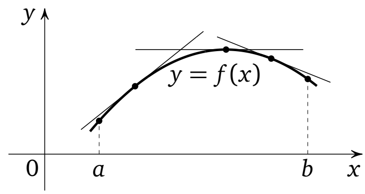


Рис. 30

Дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция выпукла вниз (вверх) на $(a; b)$ тогда и только тогда, когда её график лежит не ниже (не выше) касательной, проведённой к нему в любой точке этого интервала (см. рис. 30).

Если функция f имеет вторую производную на интервале $(a; b)$, то она является выпуклой вниз (вверх) на этом интервале тогда и только тогда, когда $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) \leqslant 0$) при всех $x \in (a; b)$. Если же $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) на $(a; b)$, то функция f строго выпукла вниз (вверх) на интервале $(a; b)$.

Будем говорить, что дифференцируемая в точке x_0 функция f имеет *перегиб* в точке x_0, если существует такое число $\delta > 0$, что функция f выпукла вниз (вверх) на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$ и выпукла вверх (вниз) на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$. В этом случае точка $(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции f. Таким образом, точки перегиба функции — это те точки, в которых характер выпуклости функции меняется на противоположный.

Геометрически это означает, что взаимное расположение графика дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательной к этому графику в точке перегиба меняется на противоположное при переходе через эту точку.

Заметим, что любая линейная функция во всех точках выпукла и вниз, и вверх, причём все точки являются точками перегиба.

Достаточное условие перегиба

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0, $n \geqslant 2$, причём $f^{(k)}(x_0) = 0$ для всех k, $2 \leqslant k < n$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, если n нечётно, и не является таковой при чётном n.

Пример 5.47. Исследуем выпуклость функции $f(x) = x^a$ на луче $(0; +\infty)$.

Решение. Если $a = 0$ или $a = 1$, то функция $f(x)$ является линейной, а этот случай описан выше.

При остальных значениях a воспользуемся равенством $f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$. Следовательно, при $a > 1$ или $a < 0$ выполнено неравенство $f''(x) > 0$ и функция $f(x)$ выпукла вниз на луче $(0; +\infty)$, а при $a \in (0; 1)$ выполнено неравенство $f''(x) < 0$ и функция $f(x)$ выпукла вверх на луче $(0; +\infty)$. □

Пример 5.48. Докажем неравенство $\frac{a^s+b^s}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^s$ для положительных a, b, $a \neq b$, и $s > 1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^s$. Данная функция непрерывна и выпукла вниз на луче $(0; +\infty)$. Пусть $a < b$, возьмём $x_1 = a$, $x_2 = b$, тогда $a < \frac{a+b}{2} < b$ и точка $((a+b)/2, (a+b)^s/2^s)$ лежит не выше хорды, соединяющей точки (a, a^s) и (b, b^s). Следовательно, выполняется неравенство $\left(\frac{a+b}{2}\right)^s \leqslant a^s + \frac{b^s-a^s}{b-a}\left(\frac{a+b}{2} - b\right) = \frac{a^s+b^s}{2}$. Поскольку $f''(x)$ строго положительна и $f(x)$ не является линейной функцией ни на каком подмножестве луча $(0; +\infty)$, выполняется строгое неравенство $\left(\frac{a+b}{2}\right)^s < \frac{a^s+b^s}{2}$. □

Для доказательства неравенств удобно пользоваться следующим утверждением.

Теорема (неравенство Йенсена). *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $\langle a; b\rangle$ и выпукла вниз (вверх) на интервале $(a; b)$, то для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из промежутка $\langle a; b\rangle$ и для любых неотрицательных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, сумма которых равна 1, справедливо неравенство*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \quad \left(f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)\right).$$

5.2.4. Формула Тейлора, правило Лопиталя

Пусть в некоторой точке x_0 функция f имеет n производных. Тогда справедлива *локальная формула Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),$$

т. е. многочлен Тейлора порядка n функции f в точке x_0 — это многочлен

$$T_n(x; f, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Величина $R_n(x; f, x_0) = f(x) - T_n(x; f, x_0)$ называется *остаточным членом* формулы Тейлора. В локальной формуле Тейлора остаточный член записан в форме Пеано: $R_n(x; f, x_0) = o((x-x_0)^n)$.

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет $(n+1)$-ю производную на интервале $(a; b)$ и $x_0 \in (a; b)$. Тогда для любого $x \in (a; b)$ найдётся такая точка c, лежащая на интервале с концами x_0 и x, что $R_n(x; f, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$; в этом случае говорят, что остаточный член записан *в форме Лагранжа*.

Использование формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для выделения главной части функции f в окрестности некоторой точки и для вычисления пределов было подробно рассмотрено в § 4.5. Выражение остаточного члена в форме Лагранжа в отличие от формы Пеано позволяет оценить величину погрешности, допускаемой при замене функции f многочленом T_n на некотором промежутке.

Пример 5.49. Оценим погрешность при замене функции $f(x)=\operatorname{arctg} x$ многочленом Тейлора $T_5(x; f, 1)$ на отрезке $[1/2; 3/2]$.

Решение. Поскольку $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}}\sin(n\operatorname{arcctg} x)$, $n\geqslant 2$ (это можно доказать по индукции), имеем

$$T_5(x; f, 1)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{12}(x-1)^3-\frac{1}{40}(x-1)^5,$$

$$f(x)-T_5(x; f, 1)=R_5(x; f, 1)=\frac{f^{(6)}(c)(x-1)^6}{6!}.$$

Точка c лежит между x и 1, $|x-1|\leqslant\dfrac{1}{2}$ и $|\sin(n\operatorname{arcctg} c)|\leqslant 1$, поэтому

$$|R_5(x; f, 1)|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{6!}\cdot\frac{5!}{(1+c^2)^3}\leqslant\frac{1}{2^6\cdot 6}\cdot\frac{4^3}{5^3}=\frac{1}{6\cdot 5^3}=\frac{1}{750}.$$

Итак, для всех $x\in[1/2; 3/2]$ многочлен

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{12}(x-1)^3-\frac{1}{40}(x-1)^5$$

приближает функцию $\operatorname{arctg} x$ с погрешностью не более чем $1/750$. □

Правило Лопиталя. Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в некоторой правой полуокрестности $U_+(a)$ точки a, причём $g'(x)\neq 0$ при всех $x\in U_+(a)$ и $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$. Тогда если

1) $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\lim\limits_{x\to a+} g(x)=0$ или 2) $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\lim\limits_{x\to a+} g(x)=\infty$,

то $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

Правило верно и тогда, когда l есть один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Аналогичное утверждение справедливо и для $\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, и для $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (в первом случае функции f и g должны удовлетворять соответствующим условиям в некоторой левой полуокрестности точки a, во втором случае — в некоторой проколотой окрестности точки a).

Пример 5.50. Найдём $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Решение. Для применения правила Лопиталя сведём задачу к вычислению предела отношения функций. Справедливы равенства

$$\lim_{x\to 0+} x^x=\lim_{x\to 0+} e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-1}}}.$$

Функции $f(x)=\ln x$ и $g(x)=x^{-1}$ удовлетворяют условиям применимости правила Лопиталя для раскрытия неопределённости типа $\frac{\infty}{\infty}$ при $x\to 0+$, причём $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to 0+}(-x)=0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0+} x^x=e^0=1$. □

Подчеркнём, что выкладка вида $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ должна читаться с конца: если предел отношения производных существует и равен l, то существует и предел отношения исходных функций, также равный l. На практике обычно пишут соответствующую цепочку в естественном порядке, применяя правило Лопиталя достаточное число раз. Если на некотором шаге получается отношение, имеющее предел, то тем самым устанавливается обоснованность результата для исходного отношения.

Отметим, что для вычисления рассмотренного предела неприменима формула Тейлора, так как функция $\ln x$ не определена в нуле, а значит, не может быть приближена многочленом Тейлора ни в какой правой полуокрестности этой точки. Тем не менее, $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$ можно вычислить и без использования правила Лопиталя, положив $t = -\ln x$ и воспользовавшись примером 4.38:

$$\lim_{x\to 0+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{t\to +\infty} \frac{-t}{e^t}} = e^0 = 1.$$

Пример 5.51. Найдём $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x - \operatorname{arctg} x} - 1}{\ln(x^3+1)}$.

Решение. Чтобы упростить выкладки, связанные с применением правила Лопиталя, заменим числитель и знаменатель дроби на эквивалентные им при $x\to 0$ функции (см. табл. на с. 117):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x - \operatorname{arctg} x} - 1}{\ln(x^3+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

Обозначим $f(x) = \sin x - \operatorname{arctg} x$, $g(x) = x^3$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы при всех значениях x, причём $g'(x) \neq 0$ в любой проколотой окрестности нуля. Предел отношения $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\cos x - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}$ при $x\to 0$ представляет собой неопределённость типа $\dfrac{0}{0}$. Если мы раскроем эту неопределённость любым способом, то есть вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то согласно правилу Лопиталя найденное значение и будет искомым пределом. Воспользуемся формулой Тейлора:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 - x^2 + o(x^2))}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, искомый предел равен $\dfrac{1}{6}$. □

Таким образом, при вычислении пределов следует выбирать наиболее рациональный путь и комбинировать различные методы, заменяя множители (но не отдельные слагаемые!) эквивалентными функциями и применяя как формулу Тейлора, так и правило Лопиталя (разумеется, не забывая убедиться в применимости того или иного метода к данной задаче).

Пример 5.52. Найдём $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \pi \operatorname{ctg} \pi x\right)$.

Решение. Предел можно найти с помощью правила Лопиталя, представив данную разность в виде отношения функций:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \pi \operatorname{ctg} \pi x\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x - \pi \cos \pi x \cdot \ln x}{\sin \pi x \cdot \ln x},$$

однако выкладки, связанные с дифференцированием, очень громоздки, а данный пример можно решить проще, воспользовавшись формулами Тейлора. Положив $y = x - 1$, получаем

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{\ln x} - \pi \operatorname{ctg} \pi x\Big) = \lim_{y\to 0} \frac{\sin \pi y - \pi \cos \pi y \cdot \ln(1+y)}{\ln(1+y)\cdot \sin \pi y} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\pi y + o(y^2) - \pi(1+o(y))\Big(y - \dfrac{y^2}{2} + o(y^2)\Big)}{\pi y^2} = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Внимание! Если предел отношения производных не существует, то это ничего не говорит о существовании предела отношения функций.

Пример 5.53. Пусть $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} + 2 \sin x$ и $g(x) = x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\Big(x \sin\frac{1}{x} + 2\frac{\sin x}{x}\Big) = 2,$$

а $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + 2\cos x}{1}$ не имеет предела при $x \to 0$. $\square$

Применяя правило Лопиталя, необходимо также следить за тем, чтобы было выполнено либо условие 1), либо условие 2).

Пример 5.54. Пусть $f(x) = \sin x + \cos x$ и $g(x) = x + 2$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{2}$, а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \sin x}{1} = 1$. Здесь не выполнены ни условие $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, ни условие $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$. $\square$

5.2.5. Исследование функций и построение кривых

Будем считать, что исследовать функцию — это означает:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на периодичность и чётность, выявить симметрии графика;

3) рассмотреть граничные точки области определения (включая $\pm\infty$): если граничная точка принадлежит области определения, то найти в ней значение функции, а если не принадлежит, то исследовать поведение функции в её полуокрестностях; указать точки разрыва и промежутки непрерывности функции;

4) найти вертикальные и горизонтальные (используя результаты п. 3), а также наклонные асимптоты графика функции;

5) найти точки пересечения графика функции с осями координат, определить промежутки знакопостоянства;

6) найти промежутки возрастания и убывания функции, определить локальные и краевые экстремумы функции;

7) найти промежутки выпуклости функции и точки перегиба.

По результатам такого исследования функции строится её график (отметим, что на основании п. 1—5 и соображений монотонности можно построить эскиз графика, см. § 1.3).

Пример 5.55. Исследуем функцию $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ и построим её график.

Решение. 1. Функция определена при $x \neq 1$.

2. Функция общего вида.

3. При $x \to 1$ имеем $y \sim \dfrac{8}{(x-1)^2}$, $\lim\limits_{x\to 1} y(x) = +\infty$; при $x \to \infty$ имеем $y \sim x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$, $y(x) \in C((-\infty; 1) \cup (1; +\infty))$ и $x = 1$ — точка разрыва второго рода.

4. Согласно п. 3 $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Поскольку $y(x) = x + 5 + \dfrac{12x-4}{(x-1)^2} = x + 5 + o(1)$ при $x \to \infty$, заключаем, что $y = x + 5$ — правая и левая наклонная асимптота.

5. $y(0) = 1$, $y(-1) = 0$, $y(x) > 0$ на $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$, $y(x) < 0$ на $(-\infty; -1)$.

6. $y'(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$. Следовательно, функция $y(x)$ возрастает на лучах $(-\infty; 1)$ и $[5; +\infty)$, убывает на полуинтервале $(1; 5]$, $x = 5$ — точка локального минимума функции ($y(5) = 13{,}5$). Отметим, что $y'(-1) = 0$, поэтому у графика функции в этой точке горизонтальная касательная; точка $x = -1$ является критической, но локального экстремума у функции $y(x)$ в этой точке нет.

7. $y''(x) = \dfrac{24(x+1)}{(x-1)^4}$. Следовательно, функция $y(x)$ выпукла вверх на луче $(-\infty; -1]$ и выпукла вниз на промежутках $[-1; 1)$ и $(1; +\infty)$. Точка $(-1, 0)$ — точка перегиба графика функции $y(x)$, $y'(-1) = 0$.

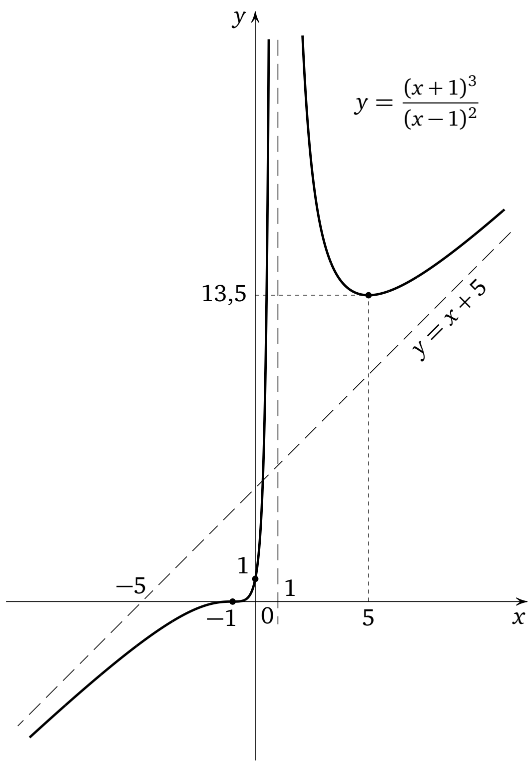


Рис. 31

Результаты исследования представим в виде таблицы.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;5)$	5	$(5;+\infty)$
Знач. $f(x)$ Монот. Выпукл. Асимпт.	$-$ $\nearrow$ $\frown$ $y=x+5$	0 $y'(-1)=0$ т. перегиба	$+$ $\nearrow$ $\smile$	верт. асимпт. $x=1$	$+$ $\searrow$ $\smile$	$13{,}5$ лок. мин.	$+$ $\nearrow$ $\smile$ $y=x+5$

По результатам исследования строим график (см. рис. 31). □

Пример 5.56. Исследуем функцию $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$ и построим её график.

Решение. 1. Функция определена при $x\in\mathbb{R}$.

2. Функция общего вида.

3. $y\sim x\sqrt[3]{x^2}$ при $x\to\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)=-\infty$, $y(x)\in C(\mathbb{R})$.

4. Асимптот нет.

5. $y(0)=0$, $y(5)=0$, $y(x)>0$ на $(5;+\infty)$, $y(x)<0$ на $(-\infty;0)\cup(0;5)$.

6. $y'(x)=\dfrac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$ при $x\neq0$. Следовательно, функция $y(x)$ возрастает на лучах $(-\infty;0]$ и $[2;+\infty)$, убывает на отрезке $[0;2]$; $x=0$ — точка локального максимума ($y(0)=0$), $x=2$ — точка локального минимума ($y(2)=-3\sqrt[3]{4}$).

Поскольку функция $y(x)$ непрерывна в нуле и $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x}}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$, заключаем, что полупрямая $x=0$, $y\leqslant0$ является левой и правой полукасательной к графику функции в точке $(0,0)$. Следовательно, $(0,0)$ — точка возврата кривой.

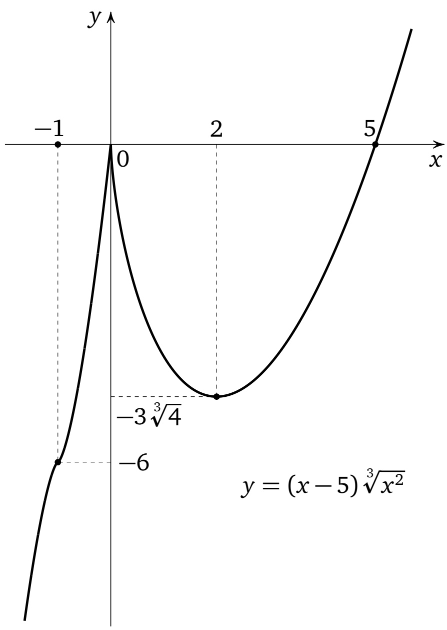


Рис. 32

7. $y''(x)=\dfrac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$ при $x\neq 0$. Таким образом, функция $y(x)$ выпукла вверх на луче $(-\infty;-1]$ и выпукла вниз на промежутках $[-1;0]$ и $[0;+\infty)$. Точка $(-1,-6)$ — точка перегиба графика функции $y(x)$, $y'(-1)=5$.

Результаты исследования представим в виде таблицы.

$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;5)$	5	$(5;+\infty)$
$-$ $\nearrow$ $\frown$	-6 $y'(-1)=5$ т. перегиба	$-$ $\nearrow$ $\smile$	0 лок. макс. т. возврата	$-$ $\searrow$ $\smile$	$-3\sqrt[3]{4}$ лок. мин.	$-$ $\nearrow$ $\smile$	0	$+$ $\nearrow$ $\smile$

По результатам исследования строим график (см. рис. 32). □

Перейдём к построению кривой, заданной параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$. Основной задачей является дополнение исследования кривой, проведённого при построении эскиза (см. § 1.7), недостающими данными: выпуклость, поведение в особых точках и т. д. Таким образом, для исследования и построения кривой, заданной параметрически следует:

а) исследовать функции $x=x(t)$, $y=y(t)$ (без нахождения асимптот и промежутков выпуклости) и построить их графики;

б) выделить ветви кривой (этот пункт подробно описан в § 1.7);

в) построить эскиз кривой и определить её глобальные особенности (симметрия, ограниченность, замкнутость);

г) дополнить исследование каждой ветви в соответствии с планом исследования явной функции (выпуклость и т. д.);

д) исследовать поведение кривой в точках сопряжения ветвей (выявить точки возврата и угловые точки и составить уравнения полукасательных в них, найти вертикальные касательные).

Отметим, что достаточно рассмотреть функции $x(t)$ и $y(t)$ на пересечении их областей определения, а результаты исследования оформить в виде таблицы (в приведённых ниже примерах мы и заполним таблицу, и построим графики функций $x(t)$ и $y(t)$). Если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют конечные пределы a и b соответственно при $t\to+\infty$ (или при $t\to-\infty$), то точку (a,b) будем считать принадлежащей кривой.

Пример 5.57. Исследуем и построим кривую, заданную параметрически: $x(t)=te^t$, $y(t)=te^{-t}$.

Решение. Функции $x(t)$ и $y(t)$ определены при всех значениях $t\in\mathbb{R}$.

Исследуем функцию $x(t)=te^t$:

1) $\lim\limits_{t\to-\infty} te^t=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} te^t=+\infty$;

2) $x(0)=0$, $x(t)<0$ на $(-\infty;0)$, $x(t)>0$ на $(0;+\infty)$;

3) $\dot{x}(t)=(1+t)e^t$, функция $x(t)$ убывает на $(-\infty;-1]$ и возрастает на $[-1;+\infty)$, $t=-1$ — точка локального минимума ($x(-1)=-\frac{1}{e}$).

Исследуем функцию $y(t)=te^{-t}$:

1) $\lim\limits_{t\to-\infty} te^{-t}=-\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} te^t=0$;

2) $y(0)=0$, $y(t)<0$ на $(-\infty;0)$, $y(t)>0$ на $(0;+\infty)$;

3) $\dot{y}(t) = (1-t)e^{-t}$, функция $y(t)$ возрастает на $(-\infty; 1]$ и убывает на $[1; +\infty)$, $t=1$ — точка локального максимума ($y(1)=\frac{1}{e}$).

Результаты исследования функций $x(t)$ и $y(t)$ представим в виде таблицы.

t	$-\infty$	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$	$+\infty$
$x(t)$	$0-$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$0+$

Графики функций $x(t)$ и $y(t)$ см. на рис. 33 *а*, *б*.

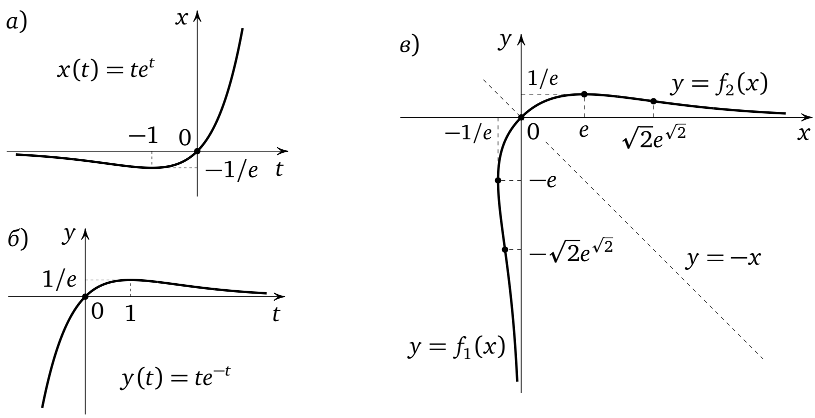


Рис. 33

Поскольку функция $x(t)$ имеет два участка монотонности: $(-\infty; -1]$ и $[-1; +\infty)$, рассматриваемая кривая состоит из двух ветвей $y = f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, соответствующих этим участкам.

Первая ветвь $y = f_1(x)$, соответствующая $t \in (-\infty; -1]$, определена при $x \in \left[-\frac{1}{e}; 0\right)$, отрицательна и убывает от $-e$ до $-\infty$. Поскольку $f_1(0-) = \lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$, заключаем, что $x=0$ — вертикальная асимптота графика функции $y=f_1(x)$.

Вторая ветвь $y = f_2(x)$, соответствующая $t \in [-1; -\infty)$, определена при $x \in \left[-\frac{1}{e}; +\infty\right)$, $f_2(0)=0$, отрицательна на $\left[-\frac{1}{e}; 0\right)$ и положительна на $(0; +\infty)$, возрастает на $\left[-\frac{1}{e}; e\right]$ от $-e$ до $\frac{1}{e}$ и убывает на $[e; +\infty)$ от $\frac{1}{e}$ до 0, точка $x=e$ является точкой максимума $f_2(x)$ ($f_2(e)=\frac{1}{e}$).

Условие $x \to +\infty$ эквивалентно условию $t \to +\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$, следовательно, $y = 0$ — правая горизонтальная асимптота графика функции $y=f_2(x)$.

Кривая симметрична относительно прямой $y=-x$. Действительно, при замене параметра t на $-t$ точка $(x(-t), y(-t))$ перейдёт в точку $(-y(t), -x(t))$.

Исследуем ветви на выпуклость. При всех $t \neq -1$ справедливы равенства

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1-t}{1+t}e^{-2t}, \quad y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \frac{2(t^2-2)}{(t+1)^3}e^{-3t}.$$

Имеем $y'' < 0$ при $t < -\sqrt{2}$ и при $-1 < t < \sqrt{2}$, $y'' > 0$ при $-\sqrt{2} < t < -1$ и при $t > \sqrt{2}$. Следовательно, функция $f_1(x)$ выпукла вниз на $\left[-\frac{1}{e}; -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}\right]$ и выпукла вверх на $\left[-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}; 0\right)$. Точка $\left(-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}, -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right)$ является точкой перегиба графика функции $y = f_1(x)$. Функция $f_2(x)$ выпукла вверх на $\left[-\frac{1}{e}; \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right]$ и выпукла вниз на $\left[\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}; +\infty\right)$, а $\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}\right)$ — точка перегиба графика функции $y = f_2(x)$.

Исследуем поведение кривой в точке сопряжения ветвей. Точка $\left(-\frac{1}{e}, -e\right)$, соответствующая значению параметра $t = -1$, — общая для двух ветвей. Поскольку $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{e}+} f_1'(x) = \lim\limits_{t \to -1-} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{e}+} f_2'(x) = \lim\limits_{t \to -1+} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = +\infty$, кривая в точке $\left(-\frac{1}{e}, -e\right)$ имеет вертикальную касательную $x = -\frac{1}{e}$.

Суммируя всё сказанное, строим кривую (см. рис. 33 *в*). □

Пример 5.58. Исследуем и построим кривую, заданную параметрически: $x(t) = \frac{t^2}{t^2-1}$, $y(t) = \frac{t^2}{t^3+1}$.

Решение. Функции $x(t)$ и $y(t)$ одновременно определены при $t \neq \pm 1$.

Исследуем функцию $x(t) = \frac{t^2}{t^2-1}$:

1) $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \frac{t^2}{t^2-1} = 1$, $\lim\limits_{t \to -1\mp} \frac{t^2}{t^2-1} = \pm\infty$, $\lim\limits_{t \to 1\mp} \frac{t^2}{t^2-1} = \mp\infty$.

2) $x(0) = 0$, $x(t) > 0$ на $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $x(t) < 0$ на $(-1; 0) \cup (0; 1)$.

3) $\dot{x}(t) = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}$, функция $x(t)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0]$, убывает на промежутках $[0; 1)$ и $(1; +\infty)$, точка $t = 0$ является точкой локального максимума.

Исследуем функцию $y(t) = \frac{t^2}{t^3+1}$:

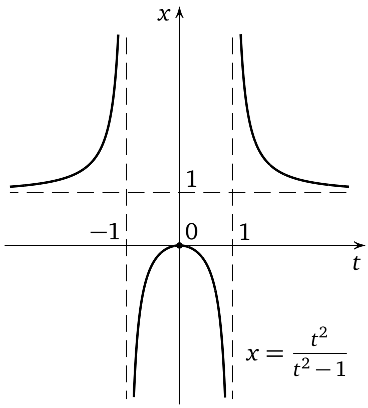
1) $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \frac{t^2}{t^3+1} = 0$, $\lim\limits_{t \to -1\mp} \frac{t^2}{t^3+1} = \mp\infty$;

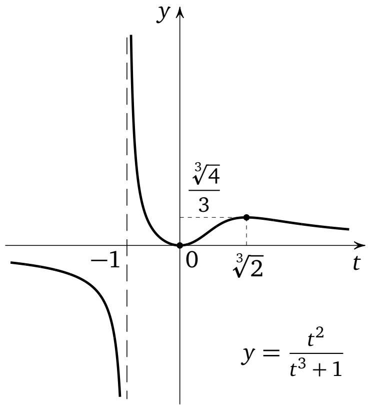
2) $y(0) = 0$, $y(t) < 0$ на $(-\infty; -1)$, $y(t) > 0$ на $(-1; 0) \cup (0; +\infty)$;

3) $\dot{y}(t) = \frac{t(2-t^3)}{(t^3+1)^2}$, функция $y(t)$ убывает на промежутках $(-\infty; -1)$, $(-1; 0]$ и $[\sqrt[3]{2}; +\infty)$, возрастает на отрезке $[0; \sqrt[3]{2}]$, $t = 0$ — точка локального минимума, $t = \sqrt[3]{2}$ — точка локального максимума ($y(\sqrt[3]{2}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$).

Результаты исследования функций $x(t)$ и $y(t)$ представим в виде таблицы.

t	$-\infty$	$(-\infty; -1)$	$-1\mp$	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	$1\mp$	$(1; \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}; +\infty)$	$+\infty$
$x(t)$	$1+$	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}-1}$	$\searrow$	$1+$
$y(t)$	$0-$	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$\searrow$	$0+$





Поскольку функция $x(t)$ имеет четыре участка монотонности: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0]$, $[0; 1)$, $(1; +\infty)$, рассматриваемая кривая состоит из четырёх ветвей $y = f_k(x)$, $k = 1, 2, 3, 4$, соответствующих этим участкам.

Первая ветвь $y = f_1(x)$, соответствующая $t \in (-\infty; -1)$, определена при $x \in [1; +\infty)$, $f_1(1) = 0$, отрицательна на $(1; +\infty)$, убывает от 0 до $-\infty$. Поскольку

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{t\to-1-} \frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{2}{3}, \quad \lim_{x\to+\infty}\Big(f_1(x) + \frac{2}{3}x\Big) = \lim_{t\to-1-} \frac{t^2(2t-1)}{3(t-1)(t^2-t+1)} = \frac{1}{6},$$

заключаем, что $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$ — правая асимптота графика функции $y = f_1(x)$.

Вторая ветвь $y = f_2(x)$, соответствующая $t \in (-1; 0]$, определена при $x \in (-\infty; 0]$, $f_2(0) = 0$, положительна на $(-\infty; 0)$, убывает от $+\infty$ до 0. Поскольку

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{t\to-1+} \frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{2}{3}, \quad \lim_{x\to-\infty}\Big(f_2(x) + \frac{2}{3}x\Big) = \lim_{t\to-1+} \frac{t^2(2t-1)}{3(t-1)(t^2-t+1)} = \frac{1}{6},$$

заключаем, что $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$ — левая асимптота графика функции $y = f_2(x)$.

Третья ветвь $y = f_3(x)$ соответствует $t \in [0; 1)$, определена при $x \in (-\infty; 0]$, $f_3(0) = 0$, положительна на $(-\infty; 0)$, убывает от $\frac{1}{2}$ до 0. Поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = \lim\limits_{t\to1-} y(t) = \frac{1}{2}$, заключаем, что $y = \frac{1}{2}$ — левая горизонтальная асимптота графика функции $y = f_3(x)$.

Четвёртая ветвь $y = f_4(x)$, соответствующая $t \in (1; +\infty)$, определена при $x \in [1; +\infty)$, $f_4(1) = 0$, положительна на $(1; +\infty)$, возрастает на $\Big[1; \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}-1}\Big]$ от 0 до $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, убывает на $\Big[\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}-1}; +\infty\Big)$ от $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ до $\frac{1}{2}$, точка $x = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}-1}$ — точка локального максимума. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = \lim\limits_{t\to1+} y(t) = \frac{1}{2}$, заключаем, что $y = \frac{1}{2}$ — правая горизонтальная асимптота графика функции $y = f_4(x)$.

Завершая построение эскиза, отметим, что кривая имеет две асимптоты (горизонтальную и наклонную), каждая их которых является асимптотой двух ветвей рассматриваемой кривой.

Исследуем ветви на выпуклость. При всех t справедливы равенства

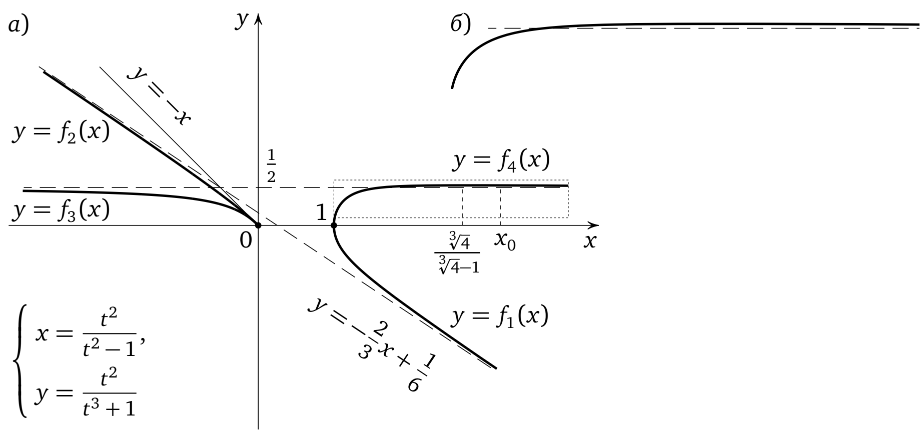
$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(t^3-2)(t-1)^2}{2(t^2-t+1)^2}, \quad y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = -\frac{(t^2-1)^3(t^3-3t^2+9t-8)}{4(t^2-t+1)^2}.$$

Обозначим $g(t) = t^3 - 3t^2 + 9t - 8$. Поскольку $g(1) = -1 < 0$, $g(\sqrt[3]{2}) = -3\sqrt[3]{4}+9\sqrt[3]{2}-6 = -3(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2}-2) > 0$ и $g'(t) = 3t^2-6t+9>0$, получаем, что на интервале $(1;\ \sqrt[3]{2})$ существует единственный корень t_0 многочлена $g(t)$. Следовательно, $y''>0$ при $t<-1$ и при $1<t<t_0$, $y''<0$ при $-1<t<1$ и при $t>t_0$. Таким образом, $f_1(x)$ выпукла вниз, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ выпуклы вверх, $f_4(x)$ выпукла вверх на $[1; x_0]$, $x_0 = x(t_0)$, и выпукла вниз на $[x_0; +\infty)$. Точка (x_0, y_0), $y_0 = y(t_0)$, является точкой перегиба графика функции $y = f_4(x)$.

Исследуем поведение кривой в точках сопряжения ветвей.

Точка $(1, 0)$ — общая точка первой и четвёртой ветвей. В силу равенств $\lim\limits_{x\to 1+} f_1'(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1+} f_4'(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = +\infty$ кривая в этой точке имеет вертикальную касательную $x=1$.

Точка $(0, 0)$ — общая точка второй и третьей ветвей. В силу равенств $\lim\limits_{x\to 0-} f_2'(x) = \lim\limits_{t\to 0-} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -1$ и $\lim\limits_{x\to 0-} f_3'(x) = \lim\limits_{t\to 0+} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -1$ кривая в этой точке имеет полукасательную $y=-x$, $x\leqslant 0$, а сама точка есть точка возврата.



Суммируя всё сказанное, строим кривую. □

Задачи

Найти производную функции (5.1—5.64).

✓**5.1°.** $y = \frac{(x+\sqrt[3]{x})^2}{x^3}$. **5.2°.** $y = \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x}}$. ✓**5.3°.** $y = (3x-5)^6$.

5.4°. $y = \sqrt[4]{(8x-3)^3}$. **5.5°.** $y = \sqrt[8]{(1-2x)^3}$. ✓**5.6°.** $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+4)^2}}$.

✓**5.7.** $y = x^2\sqrt[3]{x^2+4x+1}$. **5.8°.** $y = \frac{x}{(x^3+2)^3}$.

✓**5.9°.** $y = \frac{x^3}{(1-x^4)^2}$. ✓**5.10.** $y = \frac{2+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. **5.11.** $y = \frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x\sqrt{1-x}}$.

5.12°. $y = \frac{1}{\sin^3 2x}$. **5.13°.** $y = \sin 3x \cdot \cos^2 3x$. ✓**5.14.** $y = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

5.15. $y=\dfrac{\sin 2x+1}{\sin x-\cos x}$. **5.16.** $y=\dfrac{x^2}{(x+\sin x)^3}$.

5.17. $y=e^{3x}(x+3)$. **5.18.** $y=e^{-x}\dfrac{x-2}{(1-x)^2}$.

5.19. $y=e^{-x}(\cos x+\sin x)$. ✓**5.20.** $y=e^{2x}(3\cos 3x-2\sin 3x)$.

5.21. $y=x^2 2^x+x^3 3^x$. **5.22.** $y=x\cdot 2^{1-x^2}$.

✓**5.23.** $y=3^{\sin^2\frac{x}{2}}$. **5.24.** $y=4^{x\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

5.25. $y=2^{\sqrt[5]{\operatorname{tg}5x+1}}$. **5.26.** $y=x^2\sqrt{5^{-x}+3}$.

✓**5.27.** $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$ $(a>0)$. ✓**5.28.** $y=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

5.29. $y=\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$. ✓**5.30.** $y=\ln\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}2x$.

5.31. $y=\ln\operatorname{ctg}\dfrac{2x+\pi}{4}$. **5.32.** $y=x\operatorname{ctg}x-\ln\sin x$.

5.33. $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}-\ln\operatorname{ctg}^2 x$. **5.34.** $y=x+\ln(\cos x+\sin x)$.

5.35. $y=\log_2\dfrac{\cos x+x\sin x}{\sin x-x\cos x}$. ✓**5.36.** $y=x(\cos(2\ln x)+2\sin(2\ln x))$.

5.37. $y=2\cos x\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}\cos x-\sqrt{\cos 2x}\right)$.

5.38. $y=3^{\ln^2(1+e^{-x})}$. ✓**5.39.** $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2}$. **5.40.** $y=2^{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+1}}$.

✓**5.41.** $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$. **5.42.** $y=x^2\arccos 3x$.

✓**5.43.** $y=\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3$. **5.44.** $y=x^2\operatorname{arctg}x$.

✓**5.45.** $y=\arcsin\dfrac{x+2}{2x+2}$ $(x>0)$. ✓**5.46.** $y=\arccos\dfrac{1-x^3}{1+x^3}$.

5.47. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$. **5.48.** $y=\dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}-\arcsin 2x$.

5.49. $y=x\arcsin\sqrt{1-2x^3}$. ✓**5.50.** $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}$.

5.51. $y=\operatorname{arcctg}(\cos^2 x)$. ✓**5.52.** $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

✓**5.53.** $y=(e^x+e^{-x})^{\cos 2x}$. **5.54.** $y=\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}\right)^{\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}}$.

5.55. $y=(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}$. **5.56.** $y=\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{x\arcsin 2x}$.

5.57. $y=(\operatorname{arctg}4x)^{\sqrt[3]{1+x^2}}$. ✓**5.58.** $y=\dfrac{x^x\sqrt[7]{(2x-1)^2}}{(x+3)^4(x-5)^3}$.

5.59. $y=\dfrac{x^3}{x+1}\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{(x+2)^3}}$. ✓**5.60.** $y=\arcsin(\sin x)$.

5.61. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+4}{x-4}$. ✓**5.62.** $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

5.63. $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

5.64. $y=\begin{cases}(x+1)\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x+1}+2x, & x\neq -1,\\ -2, & x=-1.\end{cases}$

✓**5.65.** Найти $f'(0)$, если а) $f(x)=|x|(1-\cos x)$;

б) $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x^4\sin\dfrac{5}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ в) $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{4}{3x}+\dfrac{x}{2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

5.66. Найти такие числа a_1, b_1, a_2, b_2, чтобы следующие функции были дифференцируемы на $\mathbb{R}$:

√а) $y = \begin{cases} a_1 x + b_1, & x > \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ a_2 x + b_2, & x < -\frac{\pi}{2}; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1, & x > 1, \\ x \sin \pi x, & x \in [-1; 1], \\ a_2 x + b_2, & x < -1; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} a_1 (x-2)^2 + b_1, & x > 1, \\ x^2 \operatorname{arctg} x, & |x| \leqslant 1, \\ a_2 (x+2)^2 + b_2, & x < -1; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1, & x < \frac{1}{e}, \\ x^2 \ln x, & \frac{1}{e} \leqslant x \leqslant e, \\ a_2 x + b_2, & x > e. \end{cases}$

5.67. Найти такой многочлен $g(x)$ наименьшей степени, чтобы функция $f(x)$ была: 1) непрерывна на $\mathbb{R}$, 2) дифференцируема на $\mathbb{R}$, если

а) $f(x) = \begin{cases} \frac{5x}{4+x^2}, & |x| \geqslant 1, \\ g(x), & |x| < 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-2x}, & |x| \leqslant 1, \\ g(x), & |x| > 1. \end{cases}$

Найти $y'_-(x)$ и $y'_+(x)$ (5.68—5.73).

√**5.68.** $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$. **5.69.** $y = \arccos \sqrt{1-x^2}$.

5.70. $y = \arcsin e^{-x^2}$. **5.71.** $y = x|\sin x|$.

5.72. $y = \begin{cases} \frac{x}{2^{1/x} - 1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ **5.73.** $y = \begin{cases} x \arcsin\left(\cos \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

√**5.74.** Пусть $y(x) = |x|^p \cos \frac{\pi}{|x|^q}$, $x \neq 0$, $y(0) = 0$. Найти все такие p и $q > 0$, что в точке $x = 0$:

а) функция $y(x)$ непрерывна; б) функция $y(x)$ дифференцируема;
в) функция $y'(x)$ непрерывна.

5.75. Пусть $f'(0) \neq 0$. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)}$.

√**5.76.** Пусть f и g дифференцируемы в точке a. Найти $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}$.

5.77. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и дифференцируемая в нуле функция f такова, что $f(0) = 0$. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{x}{k}\right)$.

5.78. Пусть $f(a) > 0$ и f дифференцируема в точке a. Найти:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right)^n$; б) $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{\ln x - \ln a}}$ $(a > 0)$.

5.79. Пусть f дифференцируема в точке a. Найти:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} n \left(\sum\limits_{j=1}^{k} f\left(a + \frac{j}{n}\right) - kf(a) \right)$, $k \in \mathbb{N}$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n^2}\right) - nf(a) \right)$.

Найти производную n-го порядка (5.80—5.88).

√**5.80.** $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$. **5.81.** $y = \frac{1+2x}{3x-1}$. √**5.82.** $y = (x^2 + x + 1)e^{-3x}$.

5.83. $y = x^2 \ln \frac{1}{1+x}$. √**5.84.** $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-2x}}$. **5.85.** $y = \frac{x+2}{\sqrt[3]{1-x}}$.

√**5.86.** $y = \cos^4 x$. **5.87.** $y = \sin x \cdot \cos^2 2x$. **5.88.** $y = x^2 \sin^2 x$.

5.89. Пусть $n\in\mathbb{N}$. Доказать равенства:

✓а) $(e^x\sin x)^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{\pi n}{4}\right)$;

б) $(x^n\ln x)^{(n)}=n!\left(\ln x+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$, $x>0$;

в) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n n!x^{-n-1}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n}\right)$, $x>0$;

г) $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$, $x\neq 0$.

Найти производную n-го порядка (5.90—5.92).

✓**5.90.** $y=e^{-x}\cos x$. **5.91.** $y=e^{3x}\sin 4x$. **5.92.** $y=e^x\cos^2 x$.

Найти производные указанного порядка функций, заданных параметрически (5.93—5.100).

✓**5.93.** y'': $x(t)=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$, $y(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

5.94. y'': $x(t)=a\left(\cos t-\ln\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)$, $y(t)=a\sin t$.

5.95. y'': $x(t)=t^3+3t$, $y(t)=t\operatorname{arctg} t-\ln\sqrt{1+t^2}$.

✓**5.96.** y''': $x(t)=e^t(\cos t+\sin t)$, $y(t)=e^t(\cos t-\sin t)$.

5.97. y''': $x(t)=a(1+\cos t)\cos t$, $y(t)=a(1-\cos t)\sin t$.

5.98. y''': $x(t)=a\cos t+(at+b)\sin t$, $y(t)=a\sin t-(at+b)\cos t$.

5.99. y''': $x(t)=a\cos^5 t$, $y(t)=a\sin^5 t$.

5.100. y''': $x(t)=t^2$, $y(t)=\ln\sin t-t\operatorname{ctg} t$.

Найти производные $y'(x)$ и $y''(x)$ функции, заданной неявно (5.101—5.106).

✓**5.101.** $x+y=e^{x-y}$. **5.102.** $x^2-1+\cos xy=0$.

5.103. $x^3+4y^3-3yx^2=2$.

5.104. $x^2+2xy+y^2-4x+2y=2$ в точке $x=1$.

5.105. $x(x^2+y^2)=a(x^2-y^2)$ в точке $x=\frac{a}{2}$.

5.106. $x\cos\pi y-y\sin\pi x=x-1$ при $x=y=\frac{1}{2}$.

Сделать указанную замену переменных в уравнении (5.107—5.117).

5.107. $v''+\frac{v'}{x}+\left(1-\frac{\mu^2}{x^2}\right)v=0$, $u=\sqrt{x}v$, $u=u(x)$.

5.108. $x^2y''-4xy'+6y=0$, $x=e^t$, $y=y(t)$.

5.109. $(xu')'+u^nx^\sigma=0$, $t=\ln x$, $u=u(t)$.

✓**5.110.** $(x^2-1)u''+2xu'-\frac{m^2}{x^2-1}u=0$, $x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $u=u(t)$.

✓**5.111.** $u''+\frac{\mu}{x^2}u=0$, $u=\sqrt{x}z$, $x=e^t$, $z=z(t)$.

5.112. $u''-q(x)u=0$, $u=\sqrt{x}v$, $t=\frac{1}{2}\ln x$, $v=v(t)$.

5.113. $(\sqrt{x}u')'-\sqrt{x}u^5=0$, $t=2\sqrt{x}$, $u=4v$, $v=v(t)$.

✓**5.114.** $(x^3u')'+x^3u^2=0$, $t=\frac{1}{2}x^2$, $u=\frac{2v}{t}$, $v=v(t)$.

5.115. $y''+2y(y')^2=0$, $x=x(y)$.

5.116. $y'-\frac{x-y}{x+y}=0$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r=r(\varphi)$.

✓**5.117.** $(x^2+y^2)^2y''-2(xy'-y)(yy'+x)^2=0$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r=r(\varphi)$.

Составить уравнения касательной и нормали или полукасательной к кривой в заданной точке (5.118—5.127).

✓**5.118.** $y=2^{-x^2}\sin\pi x$, а) $x=0$; б) $x=1$.

5.119. $y=x^2\arcsin\dfrac{x}{2}$, а) $x=1$; б) $x=\sqrt{3}$.

5.120. $y=x^3\operatorname{ctg}\pi x$, а) $x=\dfrac{1}{4}$; б) $x=\dfrac{1}{2}$.

✓**5.121.** $y=\sqrt[3]{1-\cos^3 2x}$, а) $x=0$; б) $x=\dfrac{\pi}{6}$.

5.122. $x(t)=t^3-3t$, $y(t)=t^2+2t$, а) $t=-1$; б) $t=0$; в) $t=\sqrt{3}$.

5.123. $x(t)=e^{-t}\sin t$, $y(t)=e^{-t}\cos t$, а) $t=0$; б) $t=\dfrac{\pi}{4}$; в) $t=\dfrac{3\pi}{4}$.

✓**5.124.** $x(t)=\pi t-\sin\pi t$, $y(t)=t-\operatorname{arctg} t$, а) $t=0$; б) $t=1$; в) $t=2$.

✓**5.125.** $x^2-xy+2y^2+x-y-14=0$, $x=1$.

5.126. $2x^4-y^2-x^2+2y=0$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

5.127. $2^{x/y}+2^{2y/x}=6$, $x=2$, $y=1$.

5.128. Найти вертикальные касательные к кривой $r=a(1+\cos\varphi)$ и показать, что кривая лежит между этими касательными.

Найти углы между кривыми (5.129—5.134).

✓**5.129.** $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

5.130. $y=x^2\ln x$, $y=4-4x^2$.

5.131. $y=4+2\sqrt[3]{x-2}$, $y=2x$.

5.132. $x(t)=t^3+3t$, $y(t)=(t+1)\ln(1+t)$, $y=-\dfrac{x}{1+x^2}$.

5.133. $r=a$, $r^2=2a^2\cos 2\varphi$.

5.134. $r=5a\cos\varphi$, $r=a(4-3\cos\varphi)$.

5.135. Найти угол между левой и правой полукасательными в угловых точках кривых:

✓а) $y=\sqrt{\ln(1+9x^2)}$; б) $y=\arccos\dfrac{2}{e^{2x}+e^{-2x}}$; в) $y=\arccos(\sin x)$, $|x|\leqslant 2\pi$.

✓**5.136.** Найти угол между двумя окружностями одного радиуса, если центр одной из них лежит на другой.

5.137. Найти все такие значения R, что окружности $(x-2)^2+y^2=R^2$ и $x^2+y^2=1$ пересекаются под прямым углом.

5.138. Доказать, что семейства гипербол $x^2-y^2=a^2$ и $xy=b$ образуют ортогональную сетку, т. е. любая кривая первого семейства пересекает любую кривую второго семейства под прямым углом.

5.139. Доказать, что любая касательная к логарифмической спирали $r=ae^{m\varphi}$ образует постоянный угол с радиусом-вектором точки касания.

5.140. Доказать, что любая касательная к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ образует с её асимптотами треугольник постоянной площади.

✓**5.141.** Доказать, что у астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ для любой касательной длина её отрезка, заключённого между осями координат, постоянна.

5.142. Доказать, что у трактрисы $x(t)=a\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}+\cos t\right)$, $y(t)=a\sin t$, $0<t<\pi$, длина отрезка касательной от точки касания до оси Ox постоянна.

5.143. Доказать, что расстояние от начала координат до любой нормали к кривой $x(t)=a(\cos t+t\sin t)$, $y(t)=a(\sin t-t\cos t)$ постоянно.

5.144. Доказать, что если к кривой $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$, провести касательные в точках, соответствующих значениям t_0 и $t_0+\pi$, то они будет перпендикулярны при любом $t_0\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

5.145. Доказать, что кривая $xy\sin(x+y)=2x^2-y^2$ касается прямой $y=x$ во всех общих точках, кроме начала координат.

5.146. Найти промежутки возрастания и убывания, выделить точки экстремума и выяснить их характер для следующих функций:

✓а) $y=x^2e^{-x}$; ✓б) $y=\sqrt[3]{x^2}(x-2)^3$;

в) $y=\dfrac{3x-7}{(x^2-1)^2}$; г) $y=\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$;

д) $y=-\arcsin\sqrt{1-4x^2}+2\sqrt{1-4x^2}$; е) $y=\operatorname{arctg} x-\ln x$;

ж) $y=x^x$; з) $y=x-\sin 2x$;

и) $y=x^2-\ln x^2$; к) $y=\dfrac{\pi}{2}x-x\operatorname{arctg} x$.

✓**5.147.** Доказать, что $\ln x<\dfrac{x}{e}$ при $x>0$, $x\neq e$. Что больше: e^π или π^e?

5.148. Доказать, что $\dfrac{x\ln x}{x^2-1}<\dfrac{1}{2}$ при $x>0$, $x\neq 1$. Что больше: $2^{\sqrt{2}}$ или e?

5.149. Доказать неравенства при указанных значениях переменной:

✓а) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x$, $x>0$; ✓б) $1-\dfrac{x^2}{2}<\cos x<1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$, $x\neq 0$;

в) $\operatorname{tg} x>x+\dfrac{x^3}{3}$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$; г) $1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$, $x>0$;

д) $x^a-1>a(x-1)$, $a\geqslant 2$, $x>1$; ✓е) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, $x>0$;

ж) $\ln\left(1+\dfrac{x}{a}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)<\dfrac{b}{a}$, $x>0$ $(a,b>0)$;

з) $\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, $x>0$; и) $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)<\dfrac{1}{x}+\ln x$, $x>0$;

к) $e^{-x}>1-x$, $x\neq 0$; л) $e^x+e^{-x}\geqslant x^2+2$;

м) $e^{x^2}-e^{-x^2}\geqslant 2x^2$; н) $xe^{-x}\geqslant\dfrac{1}{e}-\dfrac{(x-1)^2}{2}$, $x>0$;

о) $e^x<(1+x)^{1+x}$, $x>0$; п) $(e+x)^{e-x}>(e-x)^{e+x}$, $0<x<e$;

р) $e^{x-1}+\ln x-2x+1>0$, $x>1$; с) $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{x+1}\leqslant x^x$, $x>0$;

т) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x>0$;

✓у) $0<e^x-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}<\dfrac{x}{n}(e^x-1)$, $x>0$ $(n\in\mathbb{N})$;

ф) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\operatorname{arctg} x>1$, $x>0$; ✓х) $\dfrac{2x+\pi x^2}{2x^2+2}>\operatorname{arctg} x$, $x>0$;

ц) $\operatorname{arcctg} x<\dfrac{1}{x}$, $x>0$; ч) $x(2+\cos x)>3\sin x$, $x>0$;

ш) $\ln(1+\cos x)<\ln 2-\dfrac{x^2}{4}$, $0<x<\pi$; щ) $\operatorname{tg} x+2\sin x>3x$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$;

э)* $\operatorname{sh} x<2\operatorname{tg} x$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$; ю)* $\sin(\operatorname{tg} x)\geqslant x$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$;

я)* $\operatorname{tg}(\sin x)\geqslant x$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3}$.

5.150. Доказать неравенства при указанных значениях переменных:

✓а) $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{\sin y}{y}$, $0<x<y<\pi$; б) $\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg} x<\dfrac{1}{y}-\operatorname{ctg} y$, $0<x<y<\pi$;

в)* $(x^a+y^a)^{1/a}>(x^b+y^b)^{1/b}$, $x>0$, $y>0$, $0<a<b$.

В заданиях 5.151—5.155 удобно использовать выпуклость функции.

✓**5.151.** Доказать, что $\sin x > \frac{2}{\pi} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

5.152. Пусть $x, y > 0$. Доказать неравенство $x \ln x + y \ln y \geqslant (x+y) \ln \frac{x+y}{2}$.

5.153. Пусть $\alpha > 1$ и $x_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Доказать неравенство

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\alpha} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha}.$$

5.154. Пусть $x_k \in (0; \pi)$, $k = 1, \ldots, n$, и $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = x$. Доказать неравенства:

а) $\prod_{k=1}^{n} \sin x_k \leqslant \sin^n x$; б) $\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin x_k}{x_k} \leqslant \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$.

5.155. Пусть $x_k, a_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$, и $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$. Доказать неравенство

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x_k}} \leqslant \prod_{k=1}^{n} x_k^{a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k x_k.$$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на заданном отрезке (5.156—5.158).

✓**5.156.** $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$: а) $[-4; 2]$; б) $[-1; 0]$; в) на $[-6; 4]$.

5.157. $f(x) = e^x(x^2 - x - 1)$: а) $[-3; 0]$; б) $[-3; 2]$; в) $[-1; 0]$.

5.158. $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ на $[0; 1]$.

Найти $\sup\limits_{E} f(x)$ и $\inf\limits_{E} f(x)$ (5.159—5.161).

✓**5.159.** $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 10}$: а) $E = (2; +\infty)$; б) $E = \mathbb{R}$; в) $E = (-2; 2)$.

5.160. $f(x) = \frac{x^2 + x\sqrt{3 + x^2}}{3 + x^2}$: а) $E = (0; +\infty)$; б) $E = \mathbb{R}$; в) $E = (-1; 1)$.

5.161. $f(x) = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - 1|}$, $E = \mathbb{R}$.

5.162. Средней порядка s для двух положительных чисел a и b называется функция, определяемая равенством $\Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{1/s}$, если $s \neq 0$.

а) Доказать, что $\min\{a, b\} \leqslant \Delta_s \leqslant \max\{a, b\}$.

б) Доказать, что функция $\Delta_s(a, b)$ при $a \neq b$ есть возрастающая функция переменной s.

в) Найти: 1) $\lim\limits_{s \to -\infty} \Delta_s(a, b)$; 2) $\lim\limits_{s \to +\infty} \Delta_s(a, b)$; 3) $\lim\limits_{s \to 0} \Delta_s(a, b)$.

5.163. По углам прямоугольной пластинки со сторонами a и b вырезаны четыре равных квадрата. Из оставшейся фигуры образована коробка, высота которой равна стороне квадрата. Найти длину стороны вырезаемого квадрата, при которой получается коробка наибольшего объёма.

5.164. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного симметрично в сектор круга радиусом a с центральным углом 2α.

5.165. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции её площадь будет наибольшая, если меньшее основание трапеции равно a, а боковые стороны равны b?

5.166. Найти наибольший объём конуса с данной образующей длины l.

5.167. Найти наименьший объём конуса, описанного около полушара радиусом a.

5.168. Из сектора круга радиусом a свёртывается коническая воронка. При каком центральном угле она имеет наибольший объём?

√**5.169.** От канала шириной a под прямым углом к нему отходит канал шириной b. Стенки каналов прямолинейны вплоть до вершины угла. Найти наибольшую длину бревна l, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой. Толщиной бревна пренебречь.

5.170. Сечение канала представляет равнобедренную трапецию площадью S и высотой h. Каким должен быть угол между боковой стороной и основанием, чтобы сумма длин нижнего основания и боковых сторон была наименьшая?

5.171. Две точки равномерно движутся по осям координат. Скорость первой точки равна v_1, скорость второй — v_2. В некоторый момент времени точки занимали положения $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ соответственно. Найти кратчайшее расстояние между ними.

√**5.172.** Точка движется по плоскости со скоростью v_1, а по оси Ox со скоростью v_2, $v_2 > v_1$. Найти путь из точки $A(0, a)$ в точку $B(b, 0)$, требующий наименьшего времени на его прохождение.

5.173. Чашка имеет форму полушара радиусом a. В неё опущен стержень длиной l, $l > 2a$. Найти положение равновесия стержня.

5.174. Стержень длиной $2b$ опирается концами на две прямые в вертикальной плоскости, наклонённые к горизонтами под углами α и β. При каком положении стержня его середина находится выше всего?

5.175. Рычаг второго рода имеет точку опоры на одном конце и уравновешивается силой F на втором. Вес единицы длины рычага равен m кг. На расстоянии a от точки опоры к рычагу подвешен груз весом p кг. При какой длине рычага l сила F будет наименьшей?

5.176. Яркость освещения выражается формулой $l = \dfrac{m\sin\varphi}{r^2}$, где φ — угол наклона лучей, r — расстояние от площадки до источника света, m — постоянная (сила источника света). На какой высоте h надо поместить фонарь на столбе, чтобы освещение горизонтальной площадки на расстоянии a от столба было наибольшим?

5.177. Под каким углом к оси Ox надо провести прямую через точку $A(a, b)$ $(a > 0,\ b > 0)$, чтобы её отрезок, отсекаемый положительными полуосями координат, имел наименьшую длину?

5.178. Под каким углом к оси Ox надо провести прямую через точку $A(a, b)$ $(a > 0,\ b > 0)$, чтобы треугольник, образованный этой прямой и положительными полуосями координат, имел наименьший периметр?

5.179. На оси Ox найти такую точку $A(x, 0)$ $(x > 0)$, что отрезок $[1; 4]$ оси Oy виден из этой точки под наибольшим углом.

5.180. Пусть $a_1 > 0$, $a_{n+1} = 2^{1-a_n}$ при $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

5.181. Пусть $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2^{a_n}}$ при $n \in \mathbb{N}$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

5.182*. Пусть $a_1 = a > 0$, $a_{n+1} = a^{a_n}$ при $n \in \mathbb{N}$. Исследовать на сходимость последовательность $\{a_n\}$.

5.183. Написать многочлен Тейлора $T_4(x; f, 0)$ четвёртого порядка для следующих функций: а) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{\sin x}{x}}$; б) $f(x) = (1+x)^{1/x}$; в) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

5.184. Написать многочлен Тейлора $T_n(x; f, x_0)$ порядка n и оценить разность этого многочлена и функции на указанном отрезке, принимая в качестве x_0 середину этого отрезка:

✓а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на $[-9; -7]$, $n = 4$; ✓б) $f(x) = \operatorname{tg} x$ на $\left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right]$, $n = 5$;
в) $f(x) = \cos x$ на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $n = 6$; г) $f(x) = xe^{-x}$ на $[0; 2]$, $n = 6$;
д) $f(x) = x\ln(1+x)$ на $[1; 3]$, $n = 4$.

5.185. Найти $f^{(n)}(0)$, если: а) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$; б) $f(x) = \cos x^2$.

5.186. Найти $f^{(n)}(0)$ и выписать многочлен Тейлора $T_n(x; f, 0)$ порядка n для функций: а) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; б) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

5.187. Вычислить с точностью до 10^{-3}: а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt[3]{26}$; в) $\arcsin\dfrac{1}{3}$;
г) $\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$; д) $\ln 10$ ($\ln 3 = 1{,}0986\ldots$); е) $\ln 15$ ($\ln 2 = 0{,}6932\ldots$).

5.188. Написать многочлен Тейлора третьего порядка в указанной точке для следующей функции $y(x)$, заданной неявно:
а) $x^4 - 4ax^2y + 2ay^3 + a^2y^2 = 0$, $x_0 = y_0 = a$ $(a > 0)$;
б) $x^3 + y^3 - axy = a^3$, $x_0 = 0$, $y_0 = a$; в) $y^3 - x^2y + x^5 = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$;
г) $x\cos y + y\cos x = 2x$, $x_0 = y_0 = 0$.

Найти следующие пределы, используя правило Лопиталя или формулу Тейлора (5.189—5.218).

✓**5.189.** $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{1 + 2\ln\sin x}$.

✓**5.190.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) + \dfrac{x^2}{2} - \sin x}{\operatorname{arctg}^3 x}$.

5.191. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2+x^4)}{1-\cos x}$.

✓**5.192.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(\sqrt{1+x^2}+x)}{x - \sin x}$.

5.193. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^3)}$.

5.194. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$.

✓**5.195.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}}$.

5.196. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2\operatorname{arctg} x^2 - \pi}$.

✓**5.197.** $\lim\limits_{x\to 0+} \sin x \cdot \ln x$.

5.198. $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln\ln\dfrac{1}{x}$.

5.199. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$.

✓**5.200.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{x}\right)$.

5.201. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

5.202. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.

5.203. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{1-\cos x}\right)$.

5.204. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{tg} x + \dfrac{2}{2x-\pi}\right)$.

✓**5.205.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$.

5.206. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

5.207. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi x - 1}{2x^2} + \dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right)$.

✓**5.208.** $\lim\limits_{x\to +\infty} (x + 2^x)^{1/x}$.

5.209. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{1/x}$.

✓**5.210.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arcctg} x\right)^x$.

5.211. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin \pi x}}$.

5.212. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

✓**5.213.** $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

5.214. $\lim\limits_{x\to 0+} (\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

5.215. $\lim\limits_{x\to 0+} (2\sqrt{x}+x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

5.216. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

5.217. $\lim\limits_{x\to \pi-} (\sin x)^{\pi-x}$.

5.218. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{1+x}\right)^{1/x}$.

✓**5.219.** Найти такое значение a, при котором функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$. Проверить существование и найти величины производных $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$, если $f(0)=a$, а при $x\neq 0$:

а) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; б) $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$; в) $f(x)=\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x$.

Исследовать функцию и построить её график (5.220—5.245).

✓**5.220.** $y=\frac{x^4}{x^3-2}$.

✓**5.221.** $y=\frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3}$.

5.222. $y=\frac{x^3(x+2)}{(x+1)^3}$.

5.223. $y=\frac{x^3(x+3)}{(x+1)^3}$.

5.224. $y=\frac{(x+2)(x^2+6x+4)}{(x+1)^2}$.

✓**5.225.** $y=\sqrt[3]{x(x-3)^2}$.

✓**5.226.** $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{1-x^2}}$.

5.227. $y=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

5.228*. $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}$.

✓**5.229.** $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

✓**5.230.** $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

5.231. $y=\sin 2x-2\sin x$.

✓**5.232.** $y=e^x\sin x$.

✓**5.233.** $y=x^2e^{-x}$.

5.234. $y=x^2e^{-x^2}$.

✓**5.235.** $y=(x-6)e^{-1/x}$.

5.236. $y=\sqrt[3]{x^2}e^{-2x/3}$.

5.237. $y=\sqrt{x}\ln x$.

5.238. $y=x^2\ln^2 x$.

5.239. $y=x\ln^{2/3} x$.

✓**5.240.** $y=\frac{\ln^{2/3} x}{x}$.

✓**5.241.** $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$.

✓**5.242.** $y=2x+4\operatorname{arcctg} x$.

5.243. $y=x\operatorname{arctg} x-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)x$.

✓**5.244.** $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{5}$.

5.245. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{2x}{17}$.

Исследовать и построить кривую, заданную параметрически (5.246—5.263).

✓**5.246.** $x(t)=\operatorname{arctg} t$, $y(t)=t^3-3t$.

5.247. $x(t)=t^3+t$, $y(t)=t^3-t$.

✓**5.248.** $x(t)=a\cos^2 t$, $y(t)=a\sin t\cos^3 t$, $a>0$.

5.249. $x(t)=\frac{\ln t}{t^2}$, $y(t)=t^2\ln t$.

✓**5.250.** $x(t)=t+e^{-t}$, $y(t)=2t+e^{-2t}$.

5.251. $x(t)=te^t$, $y(t)=e^t/t$.

✓**5.252.** $x(t)=3t^2-2t^3$, $y(t)=3t^2+2t^3$.

5.253. $x(t)=t^3-3t$, $y(t)=t(t^2-1)^2$.

5.254. $x(t)=t^2-2t$, $y(t)=t+\frac{1}{t}$.

✓**5.255.** $x(t)=\frac{2t}{1+t^2}$, $y(t)=t^3-t$.

5.256. $x(t)=\frac{2t}{1+t^2}$, $y(t)=t^3-3t$.

✓**5.257.** $x(t)=\frac{2t}{1+t^2}$, $y(t)=t^3-6t$.

✓**5.258.** $x(t)=\frac{t^3}{t^3+1}$, $y(t)=\frac{t^2}{t^3+1}$.

5.259. $x(t)=\frac{t^3}{t^3+1}$, $y(t)=\frac{t^3}{t+1}$.

✓**5.260.** $x(t)=\frac{(t+2)^2}{t+1}$, $y(t)=\frac{(t-2)^2}{t-1}$.

5.261. $x(t)=\frac{t}{3-t^2}$, $y(t)=\frac{t(2-t^2)}{3-t^2}$.

5.262. $x(t)=\frac{t^2}{t^2-1}$, $y(t)=\frac{t^2}{t-1}$.

5.263*. $x(t)=\frac{t^2}{t-1}$, $y(t)=\frac{t}{t^2-1}$.

Ответы и указания

5.1. $-\frac{3x\sqrt[3]{x}+10\sqrt[3]{x^2}+7}{3x^3\sqrt[3]{x}}$. **5.2.** $\frac{5x^2+2x-1}{3x\sqrt[3]{x}}$. **5.3.** $18(3x-5)^5$. **5.4.** $\frac{6}{\sqrt[4]{8x-3}}$.

5.5. $-\frac{3}{4\sqrt[8]{(1-2x)^5}}$. **5.6.** $\frac{-2}{\sqrt[3]{(3x+4)^5}}$. **5.7.** $\frac{8x^3+28x^2+6x}{3\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^2}}$. **5.8.** $\frac{2-8x^3}{(x^3+2)^4}$.

5.9. $\frac{3x^2+5x^6}{(1-x^4)^3}$. **5.10.** $\frac{x^3}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **5.11.** $\frac{6-5x-7x^2+3(3x-2)(1+x)^{2/3}}{6x^2(1-x)^{3/2}(1+x)^{2/3}}$.

5.12. $\frac{-6\cos 2x}{\sin^4 2x}$. **5.13.** $\frac{3}{2}\cos 3x(3\cos 6x-1)$. **5.14.** $\frac{2-\cos 2x}{\cos^4 x}$.

5.15. $\frac{(\cos x+\sin x)(\sin 2x-3)}{1-\sin 2x}$. **5.16.** $\frac{2x\sin x-3x^2\cos x-x^2}{(x+\sin x)^4}$. **5.17.** $e^{3x}(3x+10)$.

5.18. $e^{-x}\frac{x^2-2x-1}{(1-x)^3}$. **5.19.** $-2e^{-x}\sin x$. **5.20.** $-13e^{2x}\sin 3x$.

5.21. $x^2(2^x\ln 2+x3^x\ln 3)+x(2^{x+1}+x3^{x+1})$. **5.22.** $2^{1-x^2}(1-x^2\ln 4)$.

5.23. $\frac{\ln 3}{2}\sin x\cdot 3^{\sin^2\frac{x}{2}}$. **5.24.** $4^{x\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\cdot\ln 4\cdot\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)$.

5.25. $2^{\sqrt[5]{\mathrm{tg}\,5x+1}}\cdot\frac{\ln 2}{(\mathrm{tg}\,5x+1)^{4/5}}\cdot\frac{1}{\cos^2 5x}$. **5.26.** $\frac{12x+x5^{-x}(4-x\ln 5)}{2\sqrt{5^{-x}+3}}$.

5.27. $a^a x^{a^a-1}+a^{x^a+1}x^{a-1}\ln a+a^{a^x+x}\ln^2 a$. **5.28.** $\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5.29. $\frac{\sqrt{1+x^2}-x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. **5.30.** $\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{\sin^2 2x}$. **5.31.** $-\frac{1}{\cos x}$. **5.32.** $-\frac{x}{\sin^2 x}$.

5.33. $\frac{2}{\sin x\cdot\cos^3 x}$. **5.34.** $\frac{2\cos x}{\sin x+\cos x}$. **5.35.** $\frac{-x^2}{\ln 2}\cdot\frac{2}{(1-x^2)\sin 2x-2x\cos 2x}$.

5.36. $5\cos(2\ln x)$. **5.37.** $-4\sin x\sqrt{\cos 2x}$. **5.38.** $-3^{\ln^2(1+e^{-x})}\cdot\frac{2\ln 3\ln(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}e^{-x}$.

5.39. $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2}\cdot\ln\frac{1}{3}\cdot 2x}{\sqrt{1-x^4}}$. **5.40.** $2^{\mathrm{arcctg}\sqrt{1+x^2}}\ln 2\cdot\frac{-x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. **5.41.** $\arccos x$.

5.42. $2x\arccos 3x-\frac{3x^2}{\sqrt{1-9x^2}}$. **5.43.** $\frac{x^4+1}{x^6+1}$. **5.44.** $2x\,\mathrm{arctg}\,x+\frac{x^2}{1+x^2}$.

5.45. $-\frac{1}{(x+1)\sqrt{3x^2+4x}}$. **5.46.** $\frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}$. **5.47.** $-\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$. **5.48.** $\frac{8x^2}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}$.

5.49. $\arcsin\sqrt{1-2x^3}-\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{2-4x^3}}$. **5.50.** $\frac{\sqrt{2}}{1+\cos^2 x}$. **5.51.** $\frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}$.

5.52. $(1+x)^{\frac{1-x}{x}}\cdot\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2}$.

5.53. $(e^x+e^{-x})^{\cos 2x}\left(-2\sin 2x\cdot\ln(e^x+e^{-x})+\cos 2x\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)$.

5.54. $\left(\mathrm{ctg}\frac{x}{3}\right)^{\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}}\left(\frac{1}{3}(e^x-e^{-x})^{-2/3}(e^x+e^{-x})\ln\mathrm{ctg}\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2x}{3}}\cdot\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}\right)$.

5.55. $(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\ln\arcsin x+\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

5.56. $\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^{x\arcsin 2x}\left(\arcsin 2x\cdot\ln\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\ln\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{x\arcsin 2x}{\sin x}\right)$.

5.57. $(\mathrm{arctg}\,4x)^{\sqrt[3]{1+x^2}}\left(\frac{2}{3}x(1+x^2)^{-2/3}\cdot\ln\mathrm{arctg}\,4x+\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\mathrm{arctg}\,4x}\cdot\frac{4}{1+16x^2}\right)$.

5.58. $\frac{x^x\sqrt[7]{(2x-1)^2}}{(x+3)^4(x-5)^3}\left(1+\ln x+\frac{4}{7(2x-1)}-\frac{4}{x+3}-\frac{3}{x-5}\right)$.

5.59. $\frac{x^3}{x+1}\sqrt[5]{\frac{x-1}{(x+2)^3}}\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{5(x-1)}-\frac{3}{5(x+2)}\right)$.

5.60. $y' = \operatorname{sgn}\cos x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.61.** $-\frac{4}{x^2+16}$, $x \neq 4$.

5.62. $\frac{2x}{2x^4-2x^2+1}$, $x \neq \pm 1$. **5.63.** $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} + 1$, $x \neq 0$, $y'(0) = 1$.

5.64. $\frac{-2(x+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}^2\frac{1}{x+1} + 2$, $x \neq -1$; $y'(-1) = \frac{\pi^2}{4} + 2$.

5.65. а) 0; б) 0; в) $\frac{1}{2}$.

5.66. а) $a_1 = -1$, $b_1 = \frac{\pi}{2}$, $a_2 = 1$, $b_2 = \frac{\pi}{2}$; б) $a_1 = -\frac{\pi}{2}$, $b_1 = \frac{\pi}{2}$, $a_2 = \pi$, $b_2 = \pi$;
в) $a_1 = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$, $b_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$, $b_2 = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$;
г) $a_1 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = -\frac{1}{2e^2}$, $a_2 = 3e$, $b_2 = -2e^2$.

5.67. а) 1) x, 2) $-\frac{1}{5}x^3 + \frac{6}{5}x$;
б) 1) $\frac{e^{-2}-e^2}{2}x + \frac{e^2+e^{-2}}{2}$, 2) $\left(\frac{-3}{4}e^2 - \frac{e^{-2}}{4}\right)x^3 + e^2x^2 + \left(\frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}e^2\right)x + \left(\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^2}{2}\right)$.

5.68. $y'_+ = y'_- = \frac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}$, $x \neq 0$, $y'_+(0) = 2$, $y'_-(0) = -2$.

5.69. $y'_+ = y'_- = \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \neq 0$, $y'_+(0) = 1$, $y'_-(0) = -1$.

5.70. $y'_+ = y'_- = \frac{-2xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}$, $x \neq 0$, $y'_+(0) = -\sqrt{2}$, $y'_-(0) = \sqrt{2}$.

5.71. $y'_+ = y'_- = |\sin x| + x\cos x \operatorname{sgn}\sin x$, $x \neq k\pi$,
$y'_+(0) = y'_-(0) = 0$, $y'_+(k\pi) = k\pi \operatorname{sgn} k$, $y'_-(k\pi) = -k\pi \operatorname{sgn} k$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.72. $y'_+ = y'_- = \frac{2^{1/x}\left(1 + \frac{\ln 2}{x}\right) - 1}{(2^{1/x}-1)^2}$, $x \neq 0$, $y'_+(0) = 0$, $y'_-(0) = -1$.

5.73. $y'_+ = y'_- = \frac{1}{x}\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{1}{x}\right) + \arcsin\cos\frac{1}{x}$, $x \neq \frac{1}{k\pi}$, $x \neq 0$, $y'_+(0)$ и $y'_-(0)$ не существуют,
$y'_-\left(\frac{1}{\pi k}\right) = (-1)^k\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $y'_+\left(\frac{1}{\pi k}\right) = (-1)^{k+1}\left(\pi k - \frac{\pi}{2}\right)$.

5.74. а) $p > 0$; б) $p > 1$; в) $p > q + 1$. **5.75.** $1 + \frac{f(0)}{f'(0)}$. **5.76.** $f'(a)g(a) - f(a)g'(a)$.

5.77. $f'(0)H_n$, где $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. **5.78.** а) $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$; б) $e^{a\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

5.79. а) $\frac{k(k+1)}{2}f'(a)$; б) $\frac{1}{2}f'(a)$. **5.80.** $(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right)$.

5.81. $\frac{(-1)^n \cdot 5 \cdot 3^{n-1} \cdot n!}{(3x-1)^{n+1}}$. **5.82.** $(-1)^{n-2}3^{n-2}e^{-3x}(9x^2 + x(9-6n) + n^2 - 4n + 9)$.

5.83. $y' = -2x\ln(1+x) - \frac{x^2}{1+x}$, $y'' = -2\ln(1+x) - \frac{4x+3x^2}{(1+x)^2}$,
$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-3)!}{(x+1)^n}(2x^2 + 2xn + n^2 - n)$, $n \geqslant 3$.

5.84. $\frac{1}{2}\left(\frac{(2n-3)!!}{(1-2x)^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}\right)$.

5.85. $\frac{2\cdot(-1)^n}{3^n}1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-5)(x-1)^{2/3-n} - \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot(x-1)^{-1/3-n}$, $n \geqslant 2$.

5.86. $2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right) + 2^{2n-3}\cos\left(4x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

5.87. $\frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right) + \frac{5^n}{4}\sin\left(5x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

5.88. $y' = x - x\cos 2x + x^2\sin 2x$, $y'' = 1 - \cos 2x + 4x\sin 2x + 2x^2\cos 2x$, а при $n \geqslant 3$
$y^{(n)} = -2^{n-3}\left(4x^2\cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right) + 4nx\cos\left(2x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right) + (n^2-n)\cos\left(2x + \frac{\pi(n-2)}{2}\right)\right)$.

5.90. $(\sqrt{2})^n e^{-x}\cos\left(x + \frac{3\pi n}{4}\right)$. **5.91.** $5^n e^{3x}\sin(4x + n\varphi)$, $\varphi = \arcsin\frac{4}{5}$.

5.92. $\frac{e^x}{2}+\frac{e^x}{2}5^{n/2}\cos\left(2x+n\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. **5.93.** $\frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$. **5.94.** $\frac{\sin t}{a\cos^4 t}$.

5.95. $\frac{1-2t\operatorname{arctg} t}{9(1+t^2)^3}$. **5.96.** $\frac{\cos t-3\sin t}{4e^{2t}\cos^5 t}$. **5.97.** $-\frac{3}{16a^2}\cdot\frac{\cos 2t}{\cos^5\frac{t}{2}\sin^3\frac{3t}{2}}$.

5.98. $\frac{3(at+b)\sin t-a\cos t}{(at+b)^3\cos^5 t}$. **5.99.** $-\frac{3}{25a^2}\cdot\frac{1+7\sin^2 t}{\cos^{13} t\cdot\sin t}$. **5.100.** $\frac{t+2t\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin 2t}{4t^3\sin^4 t}$.

5.101. $y'=-\frac{1-x-y}{1+x+y}$, $y''=\frac{4x+4y}{(1+x+y)^3}$.

5.102. $y'=\frac{2}{\sin xy}-\frac{y}{x}$, $y''=\frac{2y}{x^2}-\frac{2}{x\sin xy}-\frac{4x\cos xy}{\sin^3 xy}$.

5.103. $y'=\frac{x}{x+2y}$, $y''=\frac{2xy+4y^2-x^2}{(x+2y)^3}$.

5.104. $y'=-2$, $y''=\frac{1}{3}$ при $x=1$, $y=-5$; $y'=0$, $y''=-\frac{1}{3}$ при $x=1$, $y=1$.

5.105. $y'=\frac{\sqrt{3}}{9}$, $y''=\frac{-8\sqrt{3}}{9a}$ при $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{a}{\sqrt{12}}$;

$y'=-\frac{\sqrt{3}}{9}$, $y''=\frac{8\sqrt{3}}{9a}$ при $x=\frac{a}{2}$, $y=-\frac{a}{\sqrt{12}}$.

5.106. $y'=\frac{-2}{\pi+2}$, $y''=\frac{\pi^3+2\pi^2+8\pi}{(\pi+2)^2}$. **5.107.** $u''+\left(1-\frac{\mu^2-1/4}{x^2}\right)u=0$.

5.108. $\ddot{y}-5\dot{y}+6y=0$. **5.109.** $\ddot{u}+e^{t(\sigma+1)}u^n=0$. **5.110.** $\ddot{u}+\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}\dot{u}-\frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 t}u=0$.

5.111. $\ddot{z}+\left(\mu-\frac{1}{4}\right)z=0$. **5.112.** $\ddot{v}-\left(1+4e^{4t}q(e^{2t})\right)v=0$. **5.113.** $\ddot{v}-t^8v^5=0$.

5.114. $\ddot{v}+\frac{v^2}{t^2}=0$. **5.115.** $x''-2x'y=0$. **5.116.** $r'\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-r\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

5.117. $r''-r=0$. **5.118.** а) $y=\pi x$, $y=-\frac{1}{\pi}x$; б) $y=-\frac{\pi}{2}(x-1)$, $y=\frac{2}{\pi}(x-1)$.

5.119. а) $y-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi+\sqrt{3}}{3}(x-1)$, $y-\frac{\pi}{6}=-\frac{3}{\pi+\sqrt{3}}(x-1)$;

б) $y-\pi=\frac{2\sqrt{3}\pi+9}{3}(x-\sqrt{3})$, $y-\pi=-\frac{3}{2\sqrt{3}\pi+9}(x-\sqrt{3})$.

5.120. а) $y-\frac{1}{64}=\frac{6-\pi}{32}\left(x-\frac{1}{4}\right)$, $y-\frac{1}{64}=\frac{32}{\pi-6}\left(x-\frac{1}{4}\right)$; б) $y=-\frac{\pi}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $y=\frac{8}{\pi}\left(x-\frac{1}{12}\right)$.

5.121. а) Полукасательная $x=0$, $y\geqslant 0$;

б) $y-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{49}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $y-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}=-\frac{\sqrt[3]{49}}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

5.122. а) Полукасательная $y+1=-\frac{1}{3}(x-2)$, $x\leqslant 2$; б) $y=-\frac{2}{3}x$, $y=\frac{3}{2}x$;

в) $y-(3+2\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}+1}{3}x$, $y-(3+2\sqrt{3})=-\frac{3}{\sqrt{3}+1}x$.

5.123. а) $y-1=-x$, $y-1=x$; б) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$; в) $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$.

5.124. а) $y=\frac{2}{\pi^3}x$, $y=-\frac{\pi^3}{2}x$; б) $y+\frac{\pi}{4}-1=\frac{1}{4\pi}(x-\pi)$, $y+\frac{\pi}{4}-1=-4\pi(x-\pi)$;
в) $x=2\pi$, $y=2-\operatorname{arctg} 2$.

5.125. $y-3=\frac{1}{10}(x-1)$, $y-3=-10(x-1)$ в точке $(1,3)$;

$y+2=\frac{1}{2}(x-1)$, $y+2=-2(x-1)$ в точке $(1,-2)$.

5.126. $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y=\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$;

$y-2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y-2=-\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},2\right)$.

5.127. $y-1=\frac{1}{2}(x-2)$, $y-1=-2(x-2)$. **5.128.** $x=2a$, $x=-\frac{a}{4}$. **5.129.** $\operatorname{arctg} 3$.
5.130. $\operatorname{arctg}\frac{9}{7}$. **5.131.** $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$ в точках $(1,2)$ и $(3,6)$; $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ в точке $(2,4)$.
5.132. $\operatorname{arctg} 2$. *Указание.* Показать, что точка $(0,0)$ — единственная точка пересечения.
5.133. $\frac{\pi}{3}$. *Указание.* Уравнения данных кривых представить в виде $x=x(\varphi)$, $y=y(\varphi)$, полагая $x=r(\varphi)\cos\varphi$, $y=r(\varphi)\sin\varphi$.
5.134. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$. *Указание.* См. предыдущую задачу.
5.135. а) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$. **5.136.** $\frac{\pi}{3}$. **5.137.** $R=\sqrt{3}$.
5.146. а) Убывает на $(-\infty;0]$, $[2;+\infty)$; возрастает на $[0;2]$; $x=0$ — т. мин.; $x=2$ — т. лок. макс.;
б) возрастает на $(-\infty;0]$, $\left[\frac{4}{11};+\infty\right)$; убывает на $\left[0;\frac{4}{11}\right]$; $x=0$ — т. лок. макс.; $x=\frac{4}{11}$ — т. лок. мин.;
в) убывает на $(-\infty;-1)$, $\left[\frac{1}{9};1\right)$, $[3;+\infty)$; возрастает на $\left(-1;\frac{1}{9}\right]$, $(1;3]$; $x=\frac{1}{9}$ и $x=3$ — т. лок. макс.;
г) убывает на $(0;1]$, $[e^4;+\infty)$; возрастает на $[1;e^4]$; $x=1$ — т. мин.; $x=e^4$ — т. лок. макс.;
д) возрастает на $\left[-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right]$, $\left[0;\frac{1}{4}\right]$; убывает на $\left[-\frac{1}{4};0\right]$, $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$; $x=\pm\frac{1}{2}$ — краевой мин.; $x=\pm\frac{1}{4}$ — т. макс.; $x=0$ — т. лок. мин.;
е) убывает на $(0;+\infty)$; ж) убывает на $\left(0;\frac{1}{e}\right]$; возрастает на $\left[\frac{1}{e};+\infty\right)$; $x=\frac{1}{e}$ — т. мин.;
з) возрастает на $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{5\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; убывает на $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, — т. лок. макс.; $x=\frac{\pi}{6}+\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$, — т. лок. мин.;
и) убывает на $(-\infty;-1]$, $(0;1]$; возрастает на $[-1;0)$, $[1;+\infty)$; $x=\pm1$ — т. мин.;
к) возрастает на $\mathbb{R}$.
5.147. $e^\pi>\pi^e$. **5.148.** $2^{\sqrt{2}}<e$.
5.154. *Указание*. Применить неравенство Йенсена к выпуклой функции:
а) $\ln\sin x$; б) $\ln\frac{\sin x}{x}$.
5.156. а) $\max f=f(-3)=29$, $\min f=f(1)=-3$;
б) $\max f=f(-1)=13$, $\min f=f(0)=2$; в) $\max f=f(4)=78$, $\min f=f(-6)=-52$.
5.157. а) $\max f=f(-2)=5e^{-2}$, $\min f=f(0)=-1$;
б) $\max f=f(2)=e^2$, $\min f=f(1)=-e$; в) $\max f=f(-1)=\frac{1}{e}$, $\min f=f(0)=-1$.
5.158. $\max f=f(1)=\frac{\pi}{2}$, $\min f=f(0)=1$.
5.159. а) $\sup f=f(5)=\frac{7}{5}$, $\inf f=f(-\infty)=1$; б) $\sup f=f(5)=\frac{7}{5}$, $\inf f=f(-2)=0$;
в) $\sup f=f(2)=\frac{8}{7}$, $\inf f=f(-2)=0$.
5.160. а) $\sup f=f(+\infty)=2$, $\inf f=f(0)=0$; б) $\sup f=f(+\infty)=2$, $\inf f=f(-1)=-\frac{1}{4}$;
в) $\sup f=f(1)=\frac{3}{4}$, $\inf f=f(-1)=-\frac{1}{4}$.
5.161. $\inf f=0$, $\sup f=f(0)=f(1)=\frac{3}{2}$. **5.162.** в) 1) $\min\{a,b\}$; 2) $\max\{a,b\}$; 3) $\sqrt{ab}$.
5.163. $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$. **5.164.** $a^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **5.165.** $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{a^2+8b^2}-a}{4b}$.
5.166. $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi l^3$. **5.167.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. **5.168.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi a$. **5.169.** $l=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$.
5.170. $\varphi=\frac{\pi}{3}$ при $S\geqslant\frac{h^2}{3}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{h^2}{S}$ при $S<\frac{h^2}{3}$. **5.171.** $\frac{|av_2-bv_1|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$.
5.172. Если $x=\frac{av_1}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}}<b$, то ломаная ACB, где $C=C(x,0)$; если $x\geqslant b$, то отрезок AB.

5.173. При $l \leqslant 4a$ угол наклона стержня к горизонту равен $\arccos \dfrac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$.

5.174. $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, где φ — угол наклона стержня к горизонту.

5.175. $l = \sqrt{\dfrac{2ap}{m}}$, если $p > \dfrac{ma}{2}$; $l = a$, если $p \leqslant \dfrac{ma}{2}$. **5.176.** $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

5.177. $\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$. **5.178.** $\varphi = \arcsin \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \arcsin \dfrac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **5.179.** $x=2$.

5.180. *Указание*. См. пример 5.43.

5.181. 2. *Указание*. Доказать, что $1 < a_n < 2$, функция $F(x) = 2^{\frac{x}{2}} - x$ убывает при $x \in (1; 2)$ и $F(2)=0$, откуда следует, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает.

5.182. Сходится при $(1/e)^e \leqslant a \leqslant e^{1/e}$, расходится при остальных a. *Указание*. При $a>1$ доказать, что последовательность возрастает, а если уравнение $a^x = x$ имеет корень, то и ограничена сверху. В случае $0<a<1$ доказать, что последовательности $\{a_{2n}\}$ и $\{a_{2n+1}\}$ монотонны, а если уравнение $a^{a^x} = x$ имеет единственный корень, то сходятся к общему пределу, равному этому корню.

5.183. а) $1 - \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{x^4}{3240}$; б) $e - \dfrac{ex}{2} + \dfrac{11e}{24}x^2 - \dfrac{7e}{16}x^3 + \dfrac{2447e}{5760}x^4$; в) $\dfrac{\pi}{2} - x + \dfrac{1}{3}x^3$.

5.184. а) $-2 + \dfrac{1}{12}(x+8) + \dfrac{1}{9\cdot 32}(x+8)^2 + \dfrac{5}{3^4\cdot 2^8}(x+8)^3 + \dfrac{5}{3^5\cdot 2^{10}}(x+8)^4$,

$$|R_4(x; f, -8)| \leqslant \frac{22\cdot\sqrt[3]{7}}{3^6\cdot 7^5} \leqslant \frac{1}{10^6};$$

б) $x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5$, $\quad |R_5(x; f, 0)| \leqslant \dfrac{1}{45}\cdot\dfrac{2^6}{27\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^6\cdot\dfrac{189}{8} < \dfrac{1}{50}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{6\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \dfrac{1}{24\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^4 -$
$- \dfrac{1}{120\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^5 - \dfrac{1}{720\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^6$, $\quad \left|R_6\left(x; f, \dfrac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^7\dfrac{1}{7!} \leqslant \dfrac{1}{5000}$;

г) $\dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2e}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3e}(x-1)^3 - \dfrac{1}{8e}(x-1)^4 + \dfrac{1}{30e}(x-1)^5 - \dfrac{1}{144e}(x-1)^6$,

$$|R_6(x; f, 1)| \leqslant \frac{1}{6!} = \frac{1}{720};$$

д) $2\ln 3 + \left(\ln 3 + \dfrac{2}{3}\right)(x-2) + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{9}(x-2)^2 + \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{-5}{162}(x-2)^3 + \dfrac{1}{24}\cdot\dfrac{4}{27}(x-2)^4$,

$$|R_4(x; f, 2)| \leqslant \frac{6}{5!}\cdot\frac{6}{32} < \frac{1}{100}.$$

5.185. а) $n!$, если n делится на 3; 0 в противном случае;

б) $(-1)^k\dfrac{(4k)!}{(2k)!}$, если $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$; 0 в противном случае.

Указание. Пользуясь основными разложениями элементарных функций в нуле, выписать многочлен $T_n(x; f, 0)$ и воспользоваться единственностью многочлена Тейлора.

5.186. а) $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k)!$, $f^{(2k)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$;

$$T_{2k+1}(x; f, 0) = T_{2k+2}(x; f, 0) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1};$$

б) $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(2k)!$, $f^{(2k)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$;

$$T_{2k+1}(x; f, 0) = T_{2k+2}(x; f, 0) = \sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{x^{2m+1}}{2m+1}.$$

Указание. Рассмотреть производную данной функции и воспользоваться указанием к предыдущей задаче.

5.187. а) 3,162; б) 2,963; в) 0,340; г) 1,823; д) 2,303; е) 2,708.

5.188. а) $a + (x-a) - \dfrac{1}{4a}(x-a)^2 - \dfrac{(x-a)^3}{8a^2}$; б) $a + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{28}{81}x^3$;

в) $5(x-1) + 130(x-1)^3$; г) $x + x^3$.

5.189. $\dfrac{1}{2}$. **5.190.** $\dfrac{1}{2}$. **5.191.** 2. **5.192.** 1. **5.193.** $\dfrac{1}{2}$. **5.194.** 1. **5.195.** -1.

5.196. $-\frac{1}{2}$. **5.197.** 0. **5.198.** 0. **5.199.** 0. **5.200.** 2π. **5.201.** 0. **5.202.** $\frac{1}{2}$.
5.203. $\frac{1}{2}$. **5.204.** 0. **5.205.** $\frac{2}{3}$. **5.206.** -1. **5.207.** $\frac{\pi^2}{6}$. **5.208.** 2. **5.209.** 1.
5.210. $e^{1/\pi}$. **5.211.** $e^{1/\pi}$. **5.212.** $e^{-2/\pi}$. **5.213.** e. **5.214.** 1. **5.215.** $\sqrt{e}$.
5.216. $e^{-1/3}$. **5.217.** 1. **5.218.** 1.
5.219. а) $a=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-\frac{1}{3}$, $f'''(0)=0$, $f^{(4)}(0)=\frac{1}{5}$;
б) $a=1$, $f'(0)=\frac{1}{2}$, $f''(0)=\frac{1}{3}$, $f'''(0)=\frac{1}{4}$, $f^{(4)}(0)=\frac{1}{5}$;
в) $a=0$, $f'(0)=\frac{1}{3}$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=\frac{2}{15}$, $f^{(4)}(0)=0$.
5.220. $x\neq\sqrt[3]{2}$; $y=x$ и $x=\sqrt[3]{2}$ — асимптоты; $\left(2, 2\frac{2}{3}\right)$ — лок. мин.; $(0,0)$ — лок. макс.; возрастает на $(-\infty;0]$ и $[2;+\infty)$; убывает на $\left[0;\sqrt[3]{2}\right)$ и $\left(\sqrt[3]{2};2\right]$; $\left(-\sqrt[3]{4}, -\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}\right)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $\left(-\infty;-\sqrt[3]{4}\right]$ и $\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$; выпукла вверх на $\left[-\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{2}\right)$.
5.221. $x\neq-1$; $y(0)=y\left(-\frac{4}{3}\right)=0$; $x=-1$ и $y=3x-5$ — асимптоты; возрастает на $(-\infty;-1)$ и $(-1;+\infty)$; $(-2,-16)$, $(0,0)$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $(-\infty;-2]$ и $(-1;0]$; выпукла вниз на $[-2;-1)$ и $[0;+\infty)$.
5.222. $x\neq-1$; $y(0)=y(-2)=0$; $x=-1$ и $y=x-1$ — асимптоты; возрастает на $(-\infty;-1)$ и $(-1;+\infty)$; $(0,0)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $(-\infty;-1)$ и $[0;+\infty)$; выпукла вверх на $(-1;0]$.
5.223. $x\neq-1$; $y(0)=y(-3)=0$; $x=-1$ и $y=x$ — асимптоты; возрастает на $(-\infty;-1)$ и $(-1;+\infty)$; $(0,0)$ и $(3, 81/32)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $(-\infty;-1)$ и $[0;3]$; выпукла вверх на $(-1;0]$ и $[3;+\infty)$.
5.224. $x\neq-1$; $y(-2)=y\left(-3\pm\sqrt{5}\right)=0$; $x=-1$ и $y=x+6$ — асимптоты; $(-3, 5/4)$ — лок. макс.; возрастает на $(-\infty;-3]$ и $(-1;+\infty)$; убывает на $[-3;-1)$; $(0,8)$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $(-\infty;-1)$, $(-1;0]$; выпукла вниз на $[0;+\infty)$.
5.225. $y(0)=y(3)=0$; $y=x-2$ — асимптота; $(1,\sqrt[3]{4})$ — лок. макс.; $(3,0)$ — лок. мин.; $(3,0)$ — т. возврата; вертикальная полукасательная $x=3$, $y\geqslant0$; возрастает на $(-\infty;1]$ и $[3;+\infty)$; убывает на $[1;3]$; $(0,0)$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $[0;3]$ и $[3;+\infty)$; выпукла вниз на $(-\infty;0]$.
5.226. $x\neq\pm1$; чётная; $y(0)=0$; $x=-1$, $x=1$ и $y=-1$ — асимптоты; $(0,0)$ — лок. мин.; возрастает на $[0;1)$ и $(1;+\infty)$; убывает на $(-\infty;-1)$ и $(-1;0]$; $(0,0)$ — т. возврата; вертикальная полукасательная $x=0$, $y\geqslant0$; $\left(-\frac{1}{3},2\right)$, $\left(\frac{1}{3},2\right)$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $(-\infty;-1)$, $\left[-\frac{1}{3};0\right]$, $\left[0;\frac{1}{3}\right]$, $(1;+\infty)$; выпукла вниз на $\left(-1;-\frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{1}{3};1\right)$.
5.227. $x\neq0$; чётная; $y(\pm1)=0$; $x=0$ и $y=-1$ — асимптоты; в точках $(-1,0)$ и $(1,0)$ вертикальная касательная; возрастает на $(-\infty;0)$; убывает на $[0;+\infty)$; $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)$, $(1,0)$ и $(-1,0)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $(-\infty;-1]$, $\left[-\frac{\sqrt{5}}{3};0\right)$, $\left(0;\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$ и $[1;+\infty)$; выпукла вверх на $\left[-1;-\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$ и $\left[\frac{\sqrt{5}}{3};1\right]$.
5.228. $x\leqslant0$, $x>6$; $y(0)=0$; $y=-x-3$ — левая асимптота; $y=x+3$ — правая асимптота; $(9, 9\sqrt{3})$ — лок. мин.; $(0,0)$ — краевой мин.; убывает на $(-\infty;0]$ и $(6;9]$; возрастает на $[9;+\infty)$; выпукла вниз на $(-\infty;0]$ и $(6;+\infty)$.
5.229. Чётная; положительная; $(0, 2\sqrt[3]{4})$ — лок. макс.; $(-2, 2\sqrt[3]{2}]$ и $(2, 2\sqrt[3]{2})$ — мин.; возрастает на $[-2;0]$ и $[2;+\infty)$; убывает на $(-\infty;-2]$ и $[0;2]$; в точках $(-2, 2\sqrt[3]{2})$ и $(2, 2\sqrt[3]{2})$ вертикальные полукасательные $x=-2$, $y\geqslant2\sqrt[3]{2}$ и $x=2$, $y\geqslant2\sqrt[3]{2}$; выпукла вверх на $(-\infty;-2]$, $[-2;2]$, $[2;+\infty)$.

5.230. Нечётная; $y(0)=0$; $y=0$ — асимптота; $(-2, 2\sqrt[3]{2})$ — макс.; $(2, -2\sqrt[3]{2})$ — мин.; возрастает на $(-\infty; -2]$, $[2; +\infty)$; убывает на $[-2; 2]$; в точках $(-2, 2\sqrt[3]{2})$ и $(2, -2\sqrt[3]{2})$ вертикальные полукасательные $x=-2$, $y\leqslant 2\sqrt[3]{2}$ и $x=2$, $y\geqslant -2\sqrt[3]{2}$; $(0,0)$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $[0; 2]$ и $[2; +\infty)$; выпукла вниз на $(-\infty; -2]$, $[-2; 0]$.

5.231. Нечётная, 2π — период; на $[-\pi; \pi]$: $y(0)=y(\pm\pi)=0$; $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ — лок. мин.; $\left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ — лок. макс.; возрастает на $\left[-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$; убывает на $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$; $(\pm\pi, 0)$, $(0,0)$, $\left(-\arccos\frac{1}{4}, \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$, $\left(\arccos\frac{1}{4}, -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $\left[-\pi; -\arccos\frac{1}{4}\right]$, $\left[0; \arccos\frac{1}{4}\right]$; выпукла вниз на $\left[-\arccos\frac{1}{4}; 0\right]$, $\left[\arccos\frac{1}{4}; \pi\right]$.

5.232. $y(\pi n)=0$, $n\in\mathbb{Z}$; $y=0$ — левая асимптота; $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n, -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi n}\right)$ — лок. мин.; $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2\pi n}\right)$ — лок. макс.; возрастает на $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]$; убывает на $\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right]$; $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n, (-1)^n e^{\frac{\pi}{2}+\pi n}\right)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$; выпукла вверх на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$.

5.233. Неотрицательная; $y(0)=0$; $y=0$ — правая асимптота; $(0,0)$ — мин.; $(2, 4e^{-2})$ — лок. макс.; возрастает на $[0; 2]$; убывает на $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$; (x_1, y_1), (x_2, y_2), где $x_1=2-\sqrt{2}$, $y_1=y(x_1)$, $x_2=2+\sqrt{2}$, $y_2=y(x_2)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $(-\infty; x_1]$, $[x_2; +\infty)$; выпукла вверх на $[x_1; x_2]$.

5.234. Чётная; неотрицательная; $y(0)=0$; $y=0$ — асимптота; $(\pm 1, e^{-1})$ — макс.; $(0,0)$ — мин.; возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$; убывает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$; (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), где $x_1=-\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}$, $x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}$, $x_3=\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}$, $x_4=\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}$, $y_k=y(x_k)$, $k=1,2,3,4,$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $(-\infty; x_1]$, $[x_2; x_3]$, $[x_4; +\infty)$; выпукла вверх на $[x_1; x_2]$ и $[x_3; x_4]$.

5.235. $x\neq 0$, $y(6)=0$; $y=x-7$ — наклонная асимптота; $x=0$, $y\leqslant 0$ — вертикальная асимптота; $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=0$; $(-3, -9\sqrt[3]{e})$ — лок. макс.; $\left(2, -\frac{4}{\sqrt{e}}\right)$ — лок. мин.; возрастает на $(-\infty; -3]$, $[2; +\infty)$; убывает на $[-3; 0)$, $(0; 2]$; $\lim\limits_{x\to 0+} y'=0$; (x_0, y_0) — т. перегиба графика, где $x_0=\frac{6}{13}$, $y_0=y(x_0)$; выпукла вверх на $(-\infty; 0)$ и $\left(0; \frac{6}{13}\right]$; выпукла вниз на $\left[\frac{6}{13}; +\infty\right)$.

5.236. Неотрицательная; $y(0)=0$; $y=0$ — правая асимптота; $(1, e^{-2/3})$ — лок. макс.; $(0,0)$ — мин.; возрастает на $(0; 1)$; убывает на $(-\infty; 0]$ и $[1; +\infty)$; в точке $(0,0)$ вертикальная полукасательная $x=0$, $y\geqslant 0$; (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — т. перегиба графика; выпукла вверх на $[x_1; 0]$ и $[0; x_2]$; выпукла вниз на $(-\infty; x_1]$, $[x_2; +\infty)$, где $x_1=1-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y_1=y(x_1)$, $x_2=1+\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y_2=y(x_2)$.

5.237. $x>0$; $y(1)=0$ при $x=1$; $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=0$; $(e^{-2}, -2e^{-1})$ — мин.; возрастает на $[e^{-2}; +\infty)$; убывает на $(0; e^{-2}]$; $\lim\limits_{x\to 0+} y'=-\infty$; $(1,0)$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $(0; 1]$; выпукла вниз на $[1; +\infty)$.

5.238. $x>0$; неотрицательная; $y(1)=0$; $\lim\limits_{x\to 0+} y=0$; (e^{-1}, e^{-2}) — лок. макс.; $(1,0)$ — мин.; возрастает на $(0; e^{-1}]$ и $[1; +\infty)$; убывает на $[e^{-1}; 1]$; $\lim\limits_{x\to 0+} y'=0$; (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — т. перегиба графика, где $\ln x_1=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $\ln x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $y_1=y(x_1)$, $y_2=y(x_2)$; выпукла вниз на $(0; x_1]$ и $[x_2; +\infty)$; выпукла вверх на $[x_1; x_2]$.

5.239. $x>0$; неотрицательная; $y(1)=0$; $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=0$; $(1,0)$ — мин.; $\left(e^{-2/3}, \left(\frac{2}{3e}\right)^{2/3}\right)$ — лок. макс.; возрастает на $(0; e^{-2/3}]$ и $[1;+\infty)$; убывает на $[e^{-2/3}; 1]$; в точке $(1,0)$ вертикальная полукасательная $x=1$, $y\geqslant 0$; $(\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{e/9})$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $(0; 1]$ и $\left[1; \sqrt[3]{e}\right]$; выпукла вниз на $\left[\sqrt[3]{e}; +\infty\right)$.

5.240. $x>0$; неотрицательная; $y(1)=0$; $x=0$, $y\geqslant 0$ — вертикальная асимптота; $y=0$ — правая асимптота; $(1,0)$ — мин.; $\left(e^{2/3}, \left(\frac{2}{3e}\right)^{2/3}\right)$ — лок. макс.; убывает на $(0; 1]$ и $[e^{2/3}; +\infty)$; возрастает на $[1; e^{2/3}]$; в точке $(1,0)$ вертикальная полукасательная $x=1$, $y\geqslant 0$; (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — т. перегиба графика, где $\ln x_1=(-3-\sqrt{13})/6$, $y_1=y(x_1)$, $\ln x_2=(3+\sqrt{13})/6$, $y_2=y(x_2)$; выпукла вниз на $(0; x_1]$ и $[x_2; +\infty)$; выпукла вверх на $[x_1; 1]$ и $[1; x_2]$.

5.241. $x\neq 0$; $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0-} y(x)=\pi$; $y=\frac{\pi-x}{2}$ — асимптота; $\left(-1, \frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$ — лок. мин.; $\left(1, \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$ — лок. макс.; убывает на $(-\infty; -1]$, $[1; +\infty)$; возрастает на $[-1; 0)$ и $(0; 1]$; выпукла вниз на $(-\infty; 0)$; выпукла вверх на $(0; +\infty)$.

5.242. $y(0)=2\pi$; $y=2x$ — правая асимптота; $y=2x+4\pi$ — левая асимптота; $(1, 2+\pi)$ — лок. мин.; $(-1, -2+3\pi)$ — лок. макс.; возрастает на $(-\infty; -1]$, $[1; +\infty)$; убывает на $[-1; 1]$; $(0, 2\pi)$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $(-\infty; 0]$; выпукла вниз на $[0; +\infty)$.

5.243. $y(0)=0$; $y=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)x-1$ — правая асимптота; $y=\left(-\frac{1}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)x-1$ — левая асимптота; $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ — мин.; убывает на $(-\infty; 1]$; возрастает на $[1; +\infty)$; выпукла вниз.

5.244. $y(0)=\frac{\pi}{2}$; $y=-\frac{2x}{5}+\frac{\pi}{2}$ — асимптота; $\left(-2, \pi+\frac{4}{5}-\arccos\frac{4}{5}\right)$, $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ — лок. мин.; $\left(2, \arccos\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\right)$, $\left(-1, \pi+\frac{2}{5}\right)$ — лок. макс.; $\left(-1, \pi+\frac{2}{5}\right)$, $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ — угловые точки; в точке $\left(-1, \pi+\frac{2}{5}\right)$ левая полукасательная $y=\left(\pi+\frac{2}{5}\right)+\frac{3}{5}(x+1)$, $x\leqslant -1$, правая полукасательная $y=\left(\pi+\frac{2}{5}\right)-\frac{7}{5}(x+1)$, $x\geqslant -1$; в точке $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ левая полукасательная $y=-\frac{2}{5}-\frac{7}{5}(x-1)$, $x\leqslant 1$, правая полукасательная $y=-\frac{2}{5}+\frac{3}{5}(x-1)$, $x\geqslant 1$; убывает на $(-\infty; -2]$, $[-1; 1]$, $[2; +\infty)$; возрастает на $[-2; -1]$, $[1; 2]$; $(0, \pi/2)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $(-\infty; -1]$, $[0; 1]$; выпукла вверх на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$.

5.245. $y(0)=\frac{\pi}{2}$; $y=-\frac{2x}{17}-\frac{\pi}{2}$ — асимптота; $\left(-4, \frac{8}{17}-\arcsin\frac{15}{16}\right)$ — лок. мин.; $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ — лок. макс.; $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ — угловая точка; $y=\frac{\pi}{2}+\frac{32}{17}x$ — левая полукасательная; $y=\frac{\pi}{2}-\frac{36}{17}x$ — правая полукасательная; убывает на $(-\infty; -4]$ и $[0; +\infty)$; возрастает на $[-4; 0]$; выпукла вниз на $(-\infty; 0]$, $[0; +\infty)$.

5.246. $y=f(x)$; $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$; нечётная; $f(0)=f(\pm\sqrt{3})=0$; $x=\pm\frac{\pi}{2}$ — асимптоты; $(-1, 2)$ — лок. макс.; $(1, -2)$ — лок. мин.; возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right]$, $\left[1; \frac{\pi}{2}\right)$; убывает на $[-1; 1]$; выпукла вверх на $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; выпукла вниз на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

5.247. $y=f(x)$; $x\in\mathbb{R}$; нечётная; $f(0)=f(\pm 2)=0$; $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{9}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ — лок. макс.; $\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ — лок. мин.; возрастает на $\left(-\infty; -\frac{4\sqrt{3}}{9}\right]$ и $\left[\frac{4\sqrt{3}}{9}; +\infty\right)$; убывает на $\left[-\frac{4\sqrt{3}}{9}; \frac{4\sqrt{3}}{9}\right]$; выпукла вверх на $(-\infty; 0]$; выпукла вниз на $[0; +\infty)$.

5.248. Кривая состоит из двух ветвей.

Первая ветвь: $y=f_1(x)$, $0\leqslant x\leqslant a$, $f_1(0)=f_1(a)=0$; $\left(\frac{3}{4}a, \frac{3\sqrt{6}}{8}a\right)$ — лок. макс.; возрастает на $\left[0; \frac{3}{4}a\right]$; убывает на $\left[\frac{3}{4}a; a\right]$; $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}a, \frac{(3-\sqrt{3})\sqrt[4]{12}}{16}a\right)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $\left[0; \frac{3-\sqrt{3}}{4}a\right]$; выпукла вверх на $\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4}a; a\right]$.

Вторая ветвь симметрична первой относительно оси Ox.

В точке $(a, 0)$ кривая имеет вертикальную касательную $x=a$; $(0, 0)$ — т. возврата с полукасательной $y=0$, $x\geqslant 0$.

5.249. Кривая состоит из двух ветвей.

Первая ветвь $y=f_1(x)$; $x\leqslant\frac{1}{2e}$; $f_1(0)=0$; $y=0$ — асимптота; $\left(-\frac{e}{2}, -\frac{1}{2e}\right)$ — лок. мин.; убывает на $\left(-\infty; -\frac{e}{2}\right]$; возрастает на $\left[-\frac{e}{2}; \frac{1}{2e}\right]$; $\left(-\frac{\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2e^{\sqrt{2}}}\right)$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}{2}\right]$; выпукла вниз на $\left[-\frac{\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}{2}; \frac{1}{2e}\right]$.

Вторая ветвь $y=f_2(x)$; $0<x\leqslant\frac{1}{2e}$; положительна; $f_2(0+)=+\infty$; $x=0$ — асимптота; убывает; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^{\sqrt{2}}}, \frac{\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}{2}\right)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2e^{\sqrt{2}}}\right]$; выпукла вверх на $\left[\frac{\sqrt{2}}{2e^{\sqrt{2}}}; \frac{1}{2e}\right]$.

Кривая симметрична относительно прямой $y=-x$. В точке $\left(\frac{1}{2e}, \frac{e}{2}\right)$ кривая имеет вертикальную касательную $x=\frac{1}{2e}$.

5.250. Кривая состоит из двух ветвей.

Первая ветвь: $y=f_1(x)$, $x\geqslant 1$, $f_1(1)=1$; $y=2x$ — асимптота; возрастает и выпукла вверх.

Вторая ветвь: $y=f_2(x)$, $x\geqslant 1$, $f_2(1)=1$; возрастает и выпукла вниз.

$(1, 1)$ — т. возврата с полукасательной $y=2x-1$, $x\geqslant 1$.

5.251. Кривая состоит из трёх ветвей.

Первая ветвь: $y=f_1(x)$; $x>0$; $x=0$ — асимптота; $f_1(0+)=+\infty$; (e, e) — лок. мин.; убывает на $(0; e]$; возрастает на $[e; +\infty)$; (x_1, y_1), $x_1=x\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $y_1=y\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $(0; x_1]$; выпукла вверх на $[x_1; +\infty)$.

Вторая ветвь: $y=f_2(x)$, $-\frac{1}{e}\leqslant x<0$; $x=0$ — асимптота; $f_2\left(-\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$, $f_2(0-)=-\infty$; убывает; (x_2, y_2), $x_2=x\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $y_2=y\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $\left[-\frac{1}{e}; x_2\right]$; выпукла вверх на $[x_2; 0)$.

Третья ветвь: $y=f_3(x)$, $-\frac{1}{e}\leqslant x<0$; $f_3\left(-\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$, $f_3(0-)=0$; возрастает и выпукла вверх.

В точке $\left(-\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$ кривая имеет вертикальную касательную $x=-\frac{1}{e}$.

5.252. Кривая симметрична относительно прямой $y=x$ и состоит из трёх ветвей.

Первая ветвь: $y=f_1(x)$; $x\geqslant 0$; $f_1(0)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=-\infty$; $(5, 1)$ — лок. макс.; возрастает на $[0; 5]$; убывает на $[5; +\infty)$; выпукла вверх.

Вторая ветвь: $y=f_2(x)$; $0\leqslant x\leqslant 1$; $f_2(0)=0$, $f_2(1)=5$; возрастает и выпукла вниз.

Третья ветвь: $y=f_3(x)$; $x\leqslant 1$; $f_3(0)=27/2$, $f_3(1)=5$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x)=+\infty$; убывает и выпукла вверх.

В точке $(1, 5)$ вертикальная касательная $x=1$; $(0, 0)$ — т. возврата с полукасательной $y=x$, $x\geqslant 0$.

5.253. Кривая состоит из трёх ветвей.
Первая ветвь: $y=f_1(x)$; $-2\leqslant x\leqslant 2$; нечётная; $f_1(0)=f(\pm 2)=0$; $\left(\frac{-14\sqrt5}{25}, \frac{16\sqrt5}{125}\right)$ — лок. макс.; $\left(\frac{14\sqrt5}{25}, \frac{-16\sqrt5}{125}\right)$ — лок. мин.; возрастает на $\left[-2; \frac{-14\sqrt5}{25}\right]$, $\left[\frac{14\sqrt5}{25}; 2\right]$; убывает на $\left[\frac{-14\sqrt5}{25}; \frac{14\sqrt5}{25}\right]$; выпукла вверх на $[-2; 0]$; выпукла вниз на $[0; 2]$.
Вторая ветвь: $y=f_2(x)$; $x\geqslant -2$; $f_2(-2)=0$, $f_2(0)=4\sqrt3$; возрастает и выпукла вниз.
Третья ветвь: симметрична второй относительно начала координат.
$(-2, 0)$ — т. возврата с полукасательной $y=\frac{4}{3}(x+2)$, $x\geqslant -2$; $(2, 0)$ — т. возврата с полукасательной $y=\frac{4}{3}(x-2)$, $x\leqslant 2$.

5.254. Кривая состоит из трёх ветвей.
Первая ветвь: $y=f_1(x)$; $x>0$; $x=0$ — асимптота; $(3, -2)$ — лок. макс.; возрастает на $(0; 3]$; убывает на $[3; +\infty)$; $(8, -2{,}5)$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $(0; 8]$, выпукла вниз на $[8; +\infty)$.
Вторая ветвь: $y=f_2(x)$; $-1\leqslant x<0$; $f_2(-1)=2$; $x=0$ — асимптота; возрастает и выпукла вниз.
Третья ветвь: $y=f_3(x)$; $x\geqslant -1$; $f_3(-1)=2$, $f_3(0)=2{,}5$; возрастает и выпукла вверх.
$(-1, 2)$ — т. возврата с полукасательной $y=x+3$, $x\geqslant -1$.

5.255. Кривая состоит из трёх ветвей.
Первая ветвь: $y=f_1(x)$; $-1\leqslant x\leqslant 1$; нечётная; $f_1(0)=f_1(\pm 1)=0$; $\left(-\frac{\sqrt3}{2}, \frac{2}{3\sqrt3}\right)$ — макс.; $\left(\frac{\sqrt3}{2}, -\frac{2}{3\sqrt3}\right)$ — мин.; возрастает на $\left[-1; -\frac{\sqrt3}{2}\right]$ и $\left[\frac{\sqrt3}{2}; 1\right]$; убывает на $\left[-\frac{\sqrt3}{2}; \frac{\sqrt3}{2}\right]$; $(0, 0)$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $[-1; 0]$; выпукла вниз на $[0; 1]$.
Вторая ветвь: $y=f_2(x)$; $0<x\leqslant 1$, $y\geqslant 0$; $f_2(1)=0$; $x=0$ — асимптота; $(1, 0)$ — краевой мин.; убывает на $(0; 1]$; $\left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $\left(0; \frac{\sqrt{15}}{4}\right]$; выпукла вверх на $\left[\frac{\sqrt{15}}{4}; 1\right]$.
Третья ветвь симметрична второй ветви относительно начала координат.
Кривая в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ имеет вертикальные касательные $x=-1$ и $x=1$.

5.256. Кривая состоит из трёх ветвей.
Первая ветвь: $y=f_1(x)$; $-1\leqslant x\leqslant 1$; нечётная; $f_1(0)=0$, $f_1(-1)=2$, $f_1(1)=-2$; $(-1, 2)$ — краевой макс.; $(1, -2)$ — краевой мин.; убывает на $[-1; 1]$; $(0, 0)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $[-1; 0]$; выпукла вверх на $[0; 1]$.
Вторая ветвь: $y=f_2(x)$; $0<x\leqslant 1$, $f_2(\sqrt3/2)=0$; $x=0$ — асимптота; $(1, -2)$ — краевой мин.; убывает на $(0; 1]$; выпукла вниз.
Третья ветвь симметрична второй ветви относительно начала координат.
$(-1, 2)$, $(1, 2)$ — т. возврата; полукасательные $y=2-6(x+1)$, $x\geqslant -1$ и $y=-2-6(x-1)$, $x\leqslant 1$.

5.257. Кривая состоит из трёх ветвей.
Первая ветвь: $y=f_1(x)$; $-1\leqslant x\leqslant 1$; нечётная; $f_1(0)=0$, $f_1(-1)=5$, $f_1(1)=-5$; $(-1, 5)$ — краевой макс.; $(1, -5)$ — краевой мин.; убывает на $[-1; 1]$; $(0, 0)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $[-1; 0]$; выпукла вверх на $[0; 1]$.
Вторая ветвь: $y=f_2(x)$; $0<x\leqslant 1$; $f_2(1)=-5$; $f_2(2\sqrt6/7)=0$; $x=0$ — асимптота; $\left(\frac{2\sqrt2}{3}, 4\sqrt2\right)$ — мин.; убывает на $\left(0; \frac{2\sqrt2}{3}\right]$; возрастает на $\left[\frac{2\sqrt2}{3}; 1\right]$; выпукла вниз.
Третья ветвь симметрична второй ветви относительно начала координат.
Кривая имеет в точках $(-1, 5)$ и $(1, -5)$ вертикальные касательные $x=-1$ и $x=1$ и две двойные точки — пересечение первой ветви со второй и третьей.

5.258. $y=f(x)$; $f(0)=0$; $y=-x+\dfrac{1}{3}$ — асимптота; $(0,0)$ — лок. мин.; $\left(\dfrac{2}{3},\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}\right)$ — лок. макс.; убывает на $(-\infty;0]$ и $\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$; возрастает на $\left[0;\dfrac{2}{3}\right]$; $(0,0)$ — т. возврата; вертикальная полукасательная $x=0$, $y\geqslant 0$; $(1,0)$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $(-\infty;0]$ и $[0;1]$; выпукла вниз на $[1;+\infty)$.

5.259. $y=f(x)$; $x\neq 1$; $f(0)=0$; $x=1$, $y=3x+1$ — асимптоты; $\left(\dfrac{27}{19},\dfrac{27}{4}\right)$ — лок. мин.; возрастает на $(-\infty;1)$ и $\left[\dfrac{27}{19};+\infty\right)$; убывает на $\left(1;\dfrac{27}{19}\right]$; $\left(\dfrac{8}{133},\dfrac{8}{175}\right)$ — т. перегиба графика; выпукла вверх на $\left(-\infty;\dfrac{8}{133}\right]$; выпукла вниз на $\left[\dfrac{8}{133};1\right)$ и $(1;+\infty)$.

5.260. Кривая состоит из четырёх ветвей.

Первая ветвь: $x\geqslant 4$, $-\dfrac{9}{2}<y\leqslant -4$; $y=-\dfrac{9}{2}$ — асимптота; $(4,-4)$ — краевой макс.; убывает на $[4;+\infty)$; выпукла вниз.

Вторая ветвь симметрична первой ветви относительно прямой $y=-x$.

Третья ветвь: $y=f_3(x)$; $x>\dfrac{9}{2}$, $y\geqslant 0$, $f_3\!\left(\dfrac{16}{3}\right)=0$; $x=\dfrac{9}{2}$ и $y=x-6$ — асимптоты; $\left(\dfrac{16}{3},0\right)$ — т. мин.; убывает на $\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{16}{3}\right]$; возрастает на $\left[\dfrac{16}{3};+\infty\right)$; выпукла вниз.

Четвёртая ветвь симметрична относительно прямой $y=-x$ третьей ветви.

$(4,-4)$ — т. возврата кривой с полукасательной $y=-x$, $x\geqslant 4$.

5.261. Кривая состоит из трёх ветвей.

Первая ветвь: $y=f_1(x)$; нечётная; $f_1(0)=f_1(\pm\sqrt{2})=0$; $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ — лок. мин.; $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ — лок. макс.; $y=-x+\sqrt{3}$ — правая асимптота; $y=-x-\sqrt{3}$ — левая асимптота; убывает на $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$; возрастает на $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$; $(0,0)$ — т. перегиба графика; выпукла вниз на $(-\infty;0]$; выпукла вверх на $[0;+\infty)$.

Вторая ветвь: $y=f_2(x)$; $x>0$; $x=0$, $y=-x-\sqrt{3}$ — асимптоты; $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}},-4\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$ — макс.; возрастает на $\left(0;\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$; убывает на $\left[\sqrt{\dfrac{2}{3}};+\infty\right)$; выпукла вверх.

Третья ветвь симметрична второй ветви относительно начала координат.

5.262. Кривая состоит из четырёх ветвей.

Первая ветвь: $y=f_1(x)$; $x\leqslant 0$, $-\dfrac{1}{2}<y\leqslant 0$; $f_1(0)=0$; $y=-\dfrac{1}{2}$ — асимптота; возрастает и выпукла вниз.

Вторая ветвь: $y=f_2(x)$; $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$, $f_2(0)=0$; $y=2x+\dfrac{1}{2}$ — асимптота; возрастает и выпукла вверх.

Третья ветвь: $x>1$, $y>0$; $x=1$, $y=2x+\dfrac{1}{2}$ — асимптоты; $\left(\dfrac{4}{3},4\right)$ — мин.; убывает на $\left(1;\dfrac{4}{3}\right]$; возрастает на $\left[\dfrac{4}{3};+\infty\right)$; выпукла вниз.

Четвёртая ветвь: $x>1$, $y<0$; $x=1$, $y=-\dfrac{1}{2}$ — асимптоты; возрастает и выпукла вверх.

$(0,0)$ — т. возврата кривой с полукасательной $y=x$, $x\leqslant 0$.

5.263. Кривая состоит из пяти ветвей.

Первая ветвь: $x<-\dfrac{1}{2}$, $y<0$; $y=0$, $x=-\dfrac{1}{2}$ — асимптоты; убывает и выпукла вверх.

Вторая ветвь: $y=f_2(x)$; $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$; $f_2(0)=0$; $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$ — асимптота; возрастает и выпукла вниз.

Третья ветвь: $y=f_3(x)$; $-\dfrac{1}{2}<x\leqslant 0$; $y\geqslant 0$; $f_3(0)=0$; $x=-\dfrac{1}{2}$ — асимптота; убывает; (x_0,y_0) — т. перегиба графика, соответствующая такому t_0, что $t_0^3+3t_0+1=0$; выпукла вниз на $\left(-\dfrac{1}{2};x_0\right]$; выпукла вверх на $[x_0;0]$.

Четвёртая ветвь: $y=f_4(x)$; $x\geqslant 4$, $y\geqslant\dfrac{2}{3}$; $f_4(4)=\dfrac{2}{3}$; $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$ — асимптота; возрастает и выпукла вверх.

Пятая ветвь: $x \geqslant 4$, $y \leqslant \frac{2}{3}$; $y=0$ — асимптота; убывает и выпукла вниз.

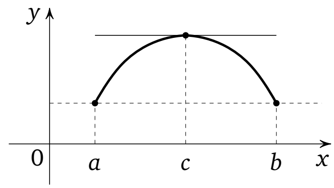
Кривая имеет вертикальные касательные $x=0$ и $x=4$ в точках $(0, 0)$ и $\left(4, \frac{2}{3}\right)$ соответственно и двойную точку — пересечение первой и второй ветвей.

§ 5.3. Теоретические задачи

Сформулируем некоторые теоремы дифференциального исчисления.

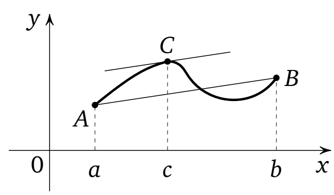
Теорема (Ферма). *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет локальный экстремум в этой точке, то $f'(x_0)=0$.*

Теорема (Ролль). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f(a)=f(b)$, то существует такая точка $c \in (a; b)$, что $f'(c)=0$.*



Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что на гладкой кривой $y=f(x)$ между точками с одинаковыми ординатами найдётся точка, касательная в которой параллельна оси абсцисс.

Теорема (Лагранж). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то существует такая точка $c \in (a; b)$, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.*



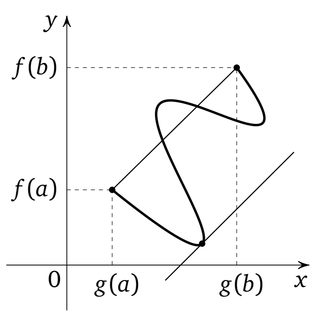
Заметим, что величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент секущей, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, а $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке c. Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что на гладкой кривой $y=f(x)$ между точками A и B найдётся точка C, касательная в которой параллельна секущей AB.

Теорема (Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$. Тогда найдётся такая точка $c \in (a; b)$, что*

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c).$$

Если к тому же $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a; b)$, то $g(a) \neq g(b)$ и справедливо равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$



Геометрическая интерпретация теоремы Коши состоит в следующем. Пусть функции f и g удовлетворяют её условию. Тогда на дуге кривой $x=g(t)$, $y=f(t)$, $t \in [a; b]$, найдётся такая точка, в которой касательная к этой кривой параллельна хорде, соединяющей начало и конец дуги.

Пример Т5.1. Докажем, что для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $|\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$.

Решение. Без ограничения общности будем считать, что $x_1 < x_2$. Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[x_1; x_2]$, получаем

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = |\cos c| \cdot |x_1 - x_2| \leqslant |x_1 - x_2|, \ c \in (x_1; x_2). \qquad \square$$

Пример Т5.2. Пусть функция $f \in C[a; b]$ дифференцируема на $(a; b)$ и $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$. Докажем, что уравнение $f(x)f'(x) = x$ имеет хотя бы один корень на интервале $(a; b)$.

Решение. Функция $g(x) = f^2(x) - x^2$ непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$ и $g(a) = g(b)$. По теореме Ролля $g'(c) = 0$ для некоторой точки $c \in (a; b)$. Поскольку $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2x$, получаем $f(c)f'(c) = c$. $\square$

Пример Т5.3. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $\langle \alpha; \beta \rangle$ и $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, где $\alpha < a < b < \beta$. Докажем, что существует такая точка $c \in (a; b)$, что $f'(c) = 0$.

Решение. Пусть для определённости $f'(a) < 0$ и $f'(b) > 0$. Тогда найдётся такое число $\delta > 0$, что $f(x) < f(a)$ при всех $x \in (a; a + \delta)$ и $f(x) < f(b)$ при всех $x \in (b - \delta; b)$. Таким образом, точки a и b не являются точками максимума непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$. Следовательно, такой точкой является некоторая точка $c \in (a; b)$, для которой в силу теоремы Ферма получаем $f'(c) = 0$. $\square$

Пример Т5.4. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на луче $(a; +\infty)$, выпукла вниз (вверх) и прямая $y = kx + b$ является правой асимптотой графика $f(x)$. Докажем, что на этом луче выполнено неравенство $f(x) \geqslant kx + b$ ($f(x) \leqslant kx + b$) и $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = k$.

Решение. Выпуклость вниз дифференцируемой функции эквивалентна условию неубывания производной. Поэтому если равенство $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = k$ не выполнено, то найдутся такие числа $\varepsilon > 0$ и $c > a$, что на луче $(c; +\infty)$ выполнено одно из неравенств $f'(x) > k + \varepsilon$ или $f'(x) < k - \varepsilon$. В первом случае на этом луче имеем $f(x) > (k + \varepsilon)(x - c) + f(c)$. Следовательно, прямая $y = kx + b$ не является асимптотой графика функции $f(x)$. Во втором случае такой же вывод получаем из соотношения $f(x) < (k - \varepsilon)(x - c) + f(c)$. Итак, утверждение, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = k$ доказано. Значит, $f'(x) \leqslant k$ на луче $(a; +\infty)$.

Положим $\varphi(x) = f(x) - (kx + b)$. Поскольку $\varphi'(x) \leqslant 0$ на $(a; +\infty)$, функция $\varphi(x)$ является невозрастающей на этом луче. Если $f(c) < kc + b$ при некотором $c \in (a; +\infty)$, то $\varphi(c) < 0$ и, следовательно, $\varphi(x) \leqslant \varphi(c) < 0$ на $(c; +\infty)$. Пришли к противоречию с тем, что $\varphi(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Следовательно, $f(x) \geqslant kx + b$ на луче $(a; +\infty)$.

Случай выпуклой вверх функции $f(x)$ рассматривается аналогично. $\square$

Геометрический смысл рассмотренного примера состоит в том, что если график функции имеет правую или левую асимптоту, а функция не меняет направление выпуклости в окрестности соответствующей несобственной точки, то в этой окрестности график функции лежит по одну сторону от асимптоты.

Пример Т5.5. Пусть функция f выпукла вниз на ограниченном или неограниченном промежутке $(a; b)$. Докажем, что либо f монотонна на $(a; b)$, либо существует такая точка $c \in (a; b)$, что $f(c) = \min\limits_{(a;b)} f$ и f невозрастающая на $(a; c]$ и неубывающая на $[c; b)$.

Решение. Если функция f не является монотонной на $(a; b)$, то найдутся такие точки $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, что $f(x_1) > f(x_2)$ и $f(x_2) < f(x_3)$ или $f(x_1) < f(x_2)$ и $f(x_2) > f(x_3)$. Последний случай не реализуется, так как из выпуклости вниз функции f следует, что $f(x_2) \leqslant \max\{f(x_1), f(x_3)\}$. Функция f является непрерывной (см. пример Т4.5), поэтому достигает на отрезке $[x_1; x_3]$ минимального значения, т. е. существует такое $c \in [x_1; x_3]$, что $f(c) = \min\limits_{[x_1;x_3]} f$. Из выпуклости вниз функции f вытекает неравенство $f(x_1) \leqslant \max\{f(x), f(c)\}$ при всех $x \in (a; x_1)$. Отсюда следует, что $f(x_1) \leqslant f(x)$, так как $f(c) \leqslant f(x_1)$. Пусть теперь $x, y \in (a; c]$, тогда

а) если $x < y < x_1$, то $f(y) \leqslant \max\{f(x), f(x_1)\} = f(x)$;

б) если $x < x_1 \leqslant y$, то $f(y) \leqslant \max\{f(x_1), f(c)\} = f(x_1) \leqslant f(x)$;

в) если $x_1 \leqslant x < y$, то $f(y) \leqslant \max\{f(x), f(c)\} = f(x)$.

В любом случае функция f невозрастающая на $(a; c]$. Аналогично проверяется, что f неубывающая на $[c; b)$. □

Пример Т5.6. Пусть функция f дифференцируема на $[0; 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, существует f'' на $(0; 1)$ и $|f''(x)| \leqslant A$ при всех $x \in (0; 1)$. Докажем, что $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}$ при всех $x \in [0; 1]$.

Решение. По формуле Тейлора при $x \in (0; 1]$ получаем

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) - xf'(x) + \frac{x^2}{2} f''(\xi), \ \xi \in (0; 1); \tag{5}$$

при $x \in [0; 1)$ аналогично имеем

$$0 = f(1) = f(x + 1 - x) = f(x) + (1 - x)f'(x) + \frac{(1-x)^2}{2} f''(\eta), \ \eta \in (0; 1). \tag{6}$$

Из равенства (5) при $x = 1$ следует, что $|f'(1)| \leqslant \frac{A}{2}$, а из равенства (6) при $x = 0$ получаем $|f'(0)| \leqslant \frac{A}{2}$. Вычитая (6) из (5), находим

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 f''(\xi) - (1 - x)^2 f''(\eta)), \quad x \in (0; 1).$$

Следовательно, $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}|2x^2 - 2x + 1| < \frac{A}{2}$ при $x \in (0; 1)$. □

Пример Т5.7. Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на $\mathbb{R}$ и ограничена. Докажем, что существует такая точка a, что $f''(a) = 0$.

Решение. Если $f'(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $f''(x)$ также тождественно равна нулю, а значит, в качестве a можно взять любую точку. Пусть теперь существует такая точка x_0, что $f'(x_0) \neq 0$. Если не существует такой точки a, что $f''(a) = 0$, то по свойству Дарбу производной (см. задачу Т5.36) функция $f''(x)$ сохраняет знак на всей прямой. Положим для определённости $f''(x) > 0$. Разложим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в точке x_0 до первого порядка с остаточным членом в форме Лагранжа: для любого $x > x_0$

справедливо равенство

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2,$$

где c — некоторая точка из интервала $(x_0; x)$. Тогда в силу положительности $f''(x)$ справедливо неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Поскольку $f(x)$ ограничена на всей прямой, найдётся такое $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для любого x. Возьмём $x = x_0 + \dfrac{M + 1 - f(x_0)}{f'(x_0)}$. Подставляя в неравенство, получаем $f(x) \geqslant M + 1$. Противоречие. □

Пример Т5.8. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и существуют такие числа $L > 0$ и $q > 1$, что $|f^{(n)}(x)| \leqslant Lq^n$ для любых n и любых x. Докажем, что если $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ при $n \in \mathbb{N}$, то $f(x) \equiv 0$.

Решение. Докажем, что для любого целого $k \geqslant 0$ существует сходящаяся к нулю положительная монотонная последовательность точек $\{u_n\}$, в каждой из которых $f^{(k)}(u_n) = 0$. Доказательство проведём методом математической индукции. Для $k = 0$ утверждение следует из условия задачи. Пусть предположение верно для $k = m$, т. е. существует такая положительная монотонная последовательность точек $\{x_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $f^{(m)}(x_n) = 0$. Тогда для любого i, $i \in \mathbb{N}$, в силу теоремы Ролля между точками x_i и x_{i+1} найдётся такая точка y_i, что $f^{(m+1)}(y_i) = 0$, а это означает, что существует такая положительная монотонная последовательность $\{y_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ и $f^{(m+1)}(y_i) = 0$. Итак, утверждение доказано. Отсюда следует, что $f^{(k)}(0) = 0$ для любого натурального k (так как $f \in C^\infty(\mathbb{R})$). Применяя формулу Тейлора, имеем

$$f(x_0) = f(0) + f'(0)x_0 + \frac{f''(0)}{2!}x_0^2 + \ldots + \frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!}x_0^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x_0^n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x_0^n,$$

$n \in \mathbb{N}$, $0 < |c| < |x_0|$. Следовательно, $|f(x_0)| \leqslant Lq^n |x_0|^n / n!$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого x_0, т. е. $f(x_0) = 0$, откуда следует, что $f(x) = 0$ при любом x. □

Пример Т5.9. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Докажем, что $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, причём $f^{(n)}(0) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Докажем по индукции, что

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $P_n(t)$ — некоторый многочлен степени не выше $3n$ $(\deg P_n \leqslant 3n)$.

В самом деле, $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$, $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{t\to\infty} te^{-t^2} = 0$ (см. пример 4.39). Таким образом, база индукции установлена.

Пусть, далее, формула (7) справедлива при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда при $x \neq 0$

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P_n'\Big(\frac{1}{x}\Big) e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3} P_n\Big(\frac{1}{x}\Big) e^{-\frac{1}{x^2}} = P_{n+1}\Big(\frac{1}{x}\Big) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где $P_{n+1}(t) = 2t^3 P_n(t) - t^2 P_n'(t)$. По предположению индукции $\deg P_n \leqslant 3n$, поэтому $\deg P_{n+1} \leqslant 3n+3$. Если же $x=0$, то

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} P_n\Big(\frac{1}{x}\Big) e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to\infty} t P_n(t) e^{-t^2} = 0.$$

Следовательно, равенство (7) верно при всех $n \in \mathbb{N}$. □

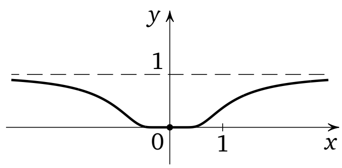


График функции $f(x)$ из рассмотренного примера см. выше.

✓**T5.1.** Доказать, что функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0)$, где g — функция, непрерывная в точке x_0.

T5.2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, а функция $g(x)$ непрерывна, но не дифференцируема в этой точке. Доказать, что функция $f(x) \cdot g(x)$ не является дифференцируемой в точке x_0.

✓**T5.3.** Имеют ли производные в точке $x=0$ следующие функции:

а) $y = x|x|$; б) $y = |x^3|$; в) $y = x|x^3|$?

T5.4. Привести пример двух недифференцируемых в точке x_0 функций:

а) сумма которых дифференцируема в точке x_0;

б) произведение которых дифференцируемо в точке x_0;

в) частное которых дифференцируемо в точке x_0.

✓**T5.5.** Пусть в некоторой точке x существует $f'(x)$. Обязательно ли существует $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$?

✓**T5.6.** Следует ли дифференцируемость функции f в точке x из существования конечного предела: а) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$; б) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$?

✓**T5.7.** Привести пример функции, дифференцируемой в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ и разрывной в остальных точках отрезка $[-2; 2]$.

T5.8. Исследовать на дифференцируемость функцию f, если

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{3}{2^{n+1}} & \text{при } x \in [2^{-n}; 2^{1-n}) \cap \mathbb{Q}, \\ \sin\Big(x - \dfrac{3}{2^{n+1}}\Big) & \text{при } x \in [2^{-n}; 2^{1-n}) \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

T5.9. Привести пример функции, дифференцируемой ровно а) в одной точке; б) в n точках; в) в счётном множестве точек.

Т5.10. Привести пример монотонной функции, производная которой не является монотонной функцией.

✓**Т5.11.** Пусть $f(x)$ — дифференцируемая чётная (нечётная) функция. Доказать, что $f'(x)$ — нечётная (чётная) функция.

Т5.12. Доказать, что если чётная функция f дифференцируема в нуле, то $f'(0)=0$.

✓**Т5.13.** Доказать, что производная периодической дифференцируемой функции является периодической функцией.

Т5.14. Доказать, что функция $f(x)=\sin x+\cos\sqrt{2}x$ не периодическая.

Т5.15. Пусть многочлен P степени n имеет n различных действительных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а степень многочлена Q не выше $n-1$. Доказать, что

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x-x_k)}$$

при $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1, \ldots, x_n\}$, и найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{P'(x_k)}$ при $n\geqslant 2$.

Т5.16. Доказать, что при $x\in\mathbb{R}\setminus\{-n, -(n-1), \ldots, -1, 0\}$ справедливо равенство $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{x+k}=\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$.

Т5.17. Привести пример такой функции $f(x)$, что $f'(x)$ существует всюду на $(-1;1)$, ограничена и при этом разрывна только в нуле.

Т5.18. Привести пример такой функции $f(x)$, что $f'(x)$ существует всюду на $(-2;2)$, ограничена и множество $\left\{\pm\frac{1}{n}\right\}$, $n\in\mathbb{N}$, есть множество точек разрыва $f'(x)$.

Т5.19. Привести пример функции $f(x)$, дифференцируемой на $(a;+\infty)$, у которой существует $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, но не существует $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$.

Т5.20. Привести пример такой ограниченной функции $f(x)$, дифференцируемой на $(a;+\infty)$, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$, но не существует $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Т5.21. Привести пример такой функции $f(x)$, дифференцируемой на $(0;1)$, что $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\infty$, но предела производной при $x\to0+$ не существует.

Т5.22. Привести пример такой функции $f(x)$, дифференцируемой на $(0;1)$, что $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=\infty$, но $f(x)$ является ограниченной на $(0;1)$.

✓**Т5.23.** Доказать, что если для непрерывной в точке x_0 функции f существует $\lim\limits_{x\to x_0+}f'(x)=l$, то существует $f'_+(x_0)=l$.

✓**Т5.24.** Привести пример такой непрерывной на $[-1;1]$ функции $f(x)$, что для всех $x\in(-1;1)$ производная $f'(x)$ существует, но $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to0-}f'(x)$ не существуют.

✓**Т5.25.** Привести пример функции, непрерывной в нуле, но не имеющей в этой точке ни левой, ни правой производной.

✓**Т5.26.** Доказать, что существование односторонних производных $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$ влечёт непрерывность функции f в точке x.

Т5.27. Пусть f дважды дифференцируема на $(0;+\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f''(x))$. Следует ли отсюда существование $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$?

✓**T5.28.** Пусть функции f и g таковы, что $f(x)-f(x_0)=g(x)(x-x_0)$ при $x\in U(x_0)$ и $g\in C^{(n-1)}(U(x_0))$. Доказать, что существует $f^{(n)}(x_0)$ и найти её.

T5.29. Доказать, что функция $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, если

✓а) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x\leqslant 0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}} & \text{при } x\in(a;b),\\ 0 & \text{при } x\notin(a;b).\end{cases}$

T5.30. Пусть $f(x)=\sqrt{x^2-1}$. Доказать, что $f^{(2n)}(x)<0$ и $f^{(2n-1)}(x)>0$ при всех $x>1$ и $n\in\mathbb{N}$.

T5.31. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\ldots(1-a_nx)}$, причём $a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k>0$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Доказать, что $f^k(0)>0$ при всех $k\in\mathbb{N}$.

T5.32. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\in(0;2)\cap\mathbb{Q},\\ 2x-1, & \text{если } x\in(0;2)\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

дифференцируема только при $x=1$ и $f'(1)\neq 0$. Является ли обратная функция дифференцируемой в точке $1=y=f(1)$?

T5.33. Пусть функция $f\colon(a;b)\to\mathbb{R}$ достигает своего наибольшего значения в точке $c\in(a;b)$ и существуют односторонние производные $f'_-(c)$ и $f'_+(c)$. Доказать, что $f'_-(c)\geqslant 0$ и $f'_+(c)\leqslant 0$.

✓**T5.34.** Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\Bigl(2+\sin\dfrac{1}{x}\Bigr), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$$

всюду дифференцируема на $\mathbb{R}$ и достигает в нуле глобального минимума, но ни на каком из интервалов $(-\varepsilon;0)$ и $(0;\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, не является монотонной.

✓**T5.35.** Пусть $\varphi,\psi\in C^n[x_0;+\infty)$; $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$ при $k=0,1,2,\ldots,n-1$ и $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$ при $x\geqslant x_0$. Доказать, что $\varphi(x)>\psi(x)$ при $x>x_0$.

✓**T5.36.** Пусть функция $f(x)$ является производной некоторой функции на интервале $(a;b)$ и $[a_1;b_1]\subset(a;b)$. Доказать, что тогда для любого числа μ, лежащего между $f(a_1)$ и $f(b_1)$, найдётся такая точка $c\in[a_1;b_1]$, что $f(c)=\mu$ (*свойство Дарбу* производной).

✓**T5.37.** Пусть функция f дифференцируема на $(a;b)$. Доказать, что функция f' не может иметь разрывов первого рода на $(a;b)$.

✓**T5.38.** Существует ли такая функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что $f'(x)=\operatorname{sgn}x$ при всех $x\in\mathbb{R}$?

✓**T5.39.** Проверить, применима ли теорема Ролля для следующих функций на $[-1;1]$: а) $f(x)=|x|$; б) $f(x)=x$; в) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. В случае неприменимости указать, какое из условий теоремы не выполняется.

T5.40. Пусть функция $f\in C[a;b]$ дифференцируема на $(a;b)$, причём $f(a)=f(b)=0$. Доказать, что для любого $\lambda\in\mathbb{R}$ найдётся такое число $x\in(a;b)$, что $\lambda f(x)+f'(x)=0$.

T5.41. Пусть функции $f,g\in C[a;b]$ дифференцируемы на $(a;b)$, нигде не обращаются в нуль на $[a;b]$ и $f(a)g(b)=f(b)g(a)$. Доказать, что существует такая точка $x\in(a;b)$, что $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$.

T5.42. Пусть функция $f \in C[0;2]$ дважды дифференцируема на $(0;2)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f(2)=2$. Доказать, что существует такая точка $x\in(0;2)$, что $f''(x)=0$.

T5.43. Пусть функция $f\in C^1[a;b]$ дважды дифференцируема на $(a;b)$ и $f(a)=f(b)=f'(a)=0$. Доказать, что существует такая точка $x\in(a;b)$, что $f''(x)=0$.

T5.44. Пусть $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n+1-k}=0$. Доказать, что многочлен $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}$ имеет хотя бы один корень на интервале $(0;1)$.

✓**T5.45.** Доказать, что если многочлен $P(x)$ степени n имеет n действительных корней, то все многочлены $P^{(k)}(x)$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$ также имеют только действительные корни.

T5.46. Пусть функция $f\in C^n(a;b)$ обращается в нуль в некоторых $n+1$ точках промежутка $(a;b)$. Доказать, что существует такая точка $x\in(a;b)$, что $f^{(n)}(x)=0$.

✓**T5.47.** Пусть $f'(x)=0$ при всех $x\in(a;b)$. Доказать, что $f(x)$ постоянна на $(a;b)$.

T5.48. Доказать тождества при $x\neq 0$:

а) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}x^3=\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x}+\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x$;

б) $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)=\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x$.

T5.49. Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет условию $f(x+h)-f(x)=$ $=Ah+\alpha(x;h)$, где $|\alpha|\leqslant C|h|^3$, C — постоянная. Доказать, что $f(x)=Ax+B$, где A и B — постоянные.

T5.50. Пусть $f(x)$ определена на $[a;b]$ и для любых $x_1,x_2\in[a;b]$ верно неравенство $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant C|x_1-x_2|^{\alpha}$, где C — постоянная и $\alpha>1$. Доказать, что $f(x)$ постоянна на $[a;b]$.

✓**T5.51.** Пусть $n\in\mathbb{N}$ и $f^{(n)}(x)=0$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Доказать, что $f(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$.

T5.52. Пусть функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $f'(x)=\lambda f(x)$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Доказать, что $f(x)=Ce^{\lambda x}$, где C — постоянная.

T5.53. Пусть функция $f(x)\in C^1(a;b)$. Верно ли, что для любого $c\in(a;b)$ существуют такие $x_1,x_2\in(a;b)$, что $c\in(x_1;x_2)$ и $f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$?

T5.54. Привести пример такой непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, что множество точек c, удовлетворяющих равенству $f(1)-f(0)=$ $=f'(c)$, состоит ровно из трёх точек, и изобразить её график.

T5.55. Пусть функция f дифференцируема в точке a и последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к a, причём $x_n\neq a$, $z_n\neq a$, $x_n\neq z_n$ при всех $n\in\mathbb{N}$.

а) Показать на примере, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(x_n)}{z_n-x_n}$ может не существовать или не совпадать с $f'(a)$.

б) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(x_n)}{z_n-x_n}=f'(a)$ при дополнительном условии $f\in C^1(U(a))$.

в) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(z_n)-f(x_n)}{z_n-x_n}=f'(a)$ при дополнительном условии $x_n<a<z_n$, $n\in\mathbb{N}$.

T5.56. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0; 1]$, дифференцируема на $(0; 1)$, $f(0)=4$, $f(1)=2$, $f'(x)\geqslant -2$. Доказать, что $f(x)$ — линейная функция.

T5.57. Пусть функция $f\in C[a; b]$ дифференцируема на $(a; b)$ и не является линейной. Доказать, что существуют такие точки $x, y\in(a; b)$, что $f'(x)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(y)$.

T5.58. Пусть функция $f(x)\in C^1[0; +\infty)$, $f(0)=1$ и $|f(x)|\leqslant e^{-x}$ при $x\geqslant 0$. Доказать, что существует такая точка $c>0$, что $f'(c)=-e^{-c}$.

T5.59. Доказать неравенства:

✓а) $\ln\dfrac{1+x^2}{1+y^2}\leqslant|x-y|$, если $x, y\in\mathbb{R}$; б) $\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}\leqslant\dfrac{1}{4}|x-y|$, если $x, y\geqslant 1$;

в) $\sqrt{3}|\arcsin(\operatorname{tg} x)-\arcsin(\operatorname{tg} y)|\leqslant 2\sqrt{2}|x-y|$, если $x, y\in\left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right)$;

✓г) $\dfrac{1}{\alpha x^{\alpha+1}}<\dfrac{1}{(x-1)^\alpha}-\dfrac{1}{x^\alpha}$, если $x>1$, $\alpha>0$.

✓**T5.60.** Доказать, что функция f, имеющая ограниченную производную на ограниченном или неограниченном промежутке $\langle a; b\rangle$, равномерно непрерывна на $\langle a; b\rangle$. Верно ли обратное утверждение для дифференцируемой функции f?

T5.61. Пусть f на интервале $(a; b)$ имеет ограниченную вторую производную. Доказать, что f равномерно непрерывна на $(a; b)$.

T5.62. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, если

а) $f(x)=\operatorname{tg}(\sin x)$; б) $f(x)=x\sin(\ln|x|)$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$.

T5.63. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы при $x\geqslant x_0$ и $|f'(x)|\leqslant g'(x)$. Доказать, что $|f(x)-f(x_0)|\leqslant g(x)-g(x_0)$ для любого $x\geqslant x_0$.

T5.64. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[x_1; x_2]$ и $x_1>0$. Доказать, что существует такая точка $c\in(x_1; x_2)$, что

$$\frac{1}{x_2-x_1}(x_1 f(x_2)-x_2 f(x_1)) = f(c)-cf'(c).$$

T5.65. Пусть функция f дифференцируема на $(0; +\infty)$ и $f(x)+f'(x)=o(1)$ при $x\to+\infty$. Доказать, что $f(x)=o(1)$ при $x\to+\infty$.

T5.66. Пусть функция f дифференцируема на $(0; +\infty)$ и при $x\to+\infty$ $f(x)+2\sqrt{x}f'(x)=o(1)$. Доказать, что $f(x)=o(1)$ при $x\to+\infty$.

✓**T5.67.** Пусть существует $f''(x)$. Доказать, что $f''(x)$ равна

а) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$; б) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$.

T5.68. Пусть $f, g\in C^2[0; 1]$, $g'(x)\neq 0$ при $x\in(0; 1)$ и $f'(0)g''(0)\neq f''(0)g'(0)$. По теореме Коши выполнено равенство $\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\dfrac{f'(\theta(x))}{g'(\theta(x))}$. Найти $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\theta(x)}{x}$.

T5.69. Пусть $f(x)\in C^2[0; +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ и $|f''(x)|\leqslant 1$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

✓**T5.70.** Пусть $f(x)\in C^2[0; 1]$, $f(0)=f(1)=0$ и $\min\limits_{[0;1]}f=-1$. Доказать, что $\max\limits_{[0;1]}f''\geqslant 8$.

T5.71. Пусть функция f дифференцируема на $[a; b]$, $f'(a)=f'(b)=0$, и существует f'' на $(a; b)$. Доказать, что найдётся такая точка $c\in(a; b)$, что $|f''(c)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

T5.72. Пусть f дважды дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $M_k = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < \infty$, $k=0, 1, 2$. Доказать, что $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

T5.73. Пусть $f\colon [-1; 1] \to \mathbb{R}$ трижды дифференцируема, $f(-1)=f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f'(0)=0$. Доказать, что существует такая точка $c \in (-1; 1)$, что $f'''(c) \geqslant 3$.

T5.74. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k (-1)^k (x-k)^m$. Доказать, что $P(x) \equiv 0$.

T5.75. Пусть существует $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ и $\theta(h)$ — число из формулы Тейлора $f(x+h) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \dfrac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta(h)h)$. Доказать, что $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = \dfrac{1}{n+1}$.

✓**T5.76.** Привести пример двух таких выпуклых вверх функций, что их произведение не является выпуклой вверх функцией.

✓**T5.77.** Доказать, что выпуклая на интервале функция непрерывна на этом интервале.

✓**T5.78.** Доказать, что выпуклая вниз и ограниченная сверху функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ постоянна на $\mathbb{R}$.

✓**T5.79.** Пусть функция f ограничена и выпукла на луче вида $(-\infty; a)$ или $(a; +\infty)$. Обязательно ли функция f является константой?

T5.80. Функция $f(x) \in C^1(0; +\infty)$, не меняет направление выпуклости и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, где l — некоторое число. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

T5.81. Пусть функция f выпукла вниз на ограниченном или неограниченном промежутке $\langle a; b\rangle$. Доказать, что существуют конечные или бесконечные пределы $f(a+0)$ и $f(b-0)$.

T5.82. Пусть функция f ограничена и выпукла вниз на ограниченном или неограниченном промежутке $\langle a; b\rangle$. Доказать, что f равномерно непрерывна на $\langle a; b\rangle$.

✓**T5.83.** Пусть f непрерывна на промежутке $\langle a; b\rangle$ и $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ для всех $x, y \in (a; b)$. Доказать, что f выпукла вниз на $\langle a; b\rangle$.

T5.84. Пусть f дифференцируема на $(a; b)$ и для всех $x, y \in (a; b)$, $x \neq y$, существует ровно одна такая точка c, что $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$. Доказать, что f строго выпукла на $(a; b)$.

T5.85. Пользуясь выпуклостью вверх функции $f(x) = \ln x$, доказать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (см. пример 2.18).

T5.86. Доказать *неравенство Юнга*:

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad x, y, p, q \in (0; +\infty) \text{ и } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

T5.87. Доказать *неравенство Гёльдера*:

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\Big)^{1/q}, \quad p, q > 1 \text{ и } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

T5.88. Доказать *неравенство Минковского*:

$$\Big(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\Big)^{1/p}, \quad p \geqslant 1.$$

Ответы и указания

T5.3. а)—в) Да.

T5.4. Например, а) $f(x)=|x|$, $g(x)=1-|x|$, $x_0=0$;
б) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x|$, $x_0=0$; в) $f(x)=|x|+1$, $g(x)=(|x|+1)(x+2)$, $x_0=0$.

T5.5. Да, и равен $2f'(x)$. **T5.6.** Нет, например, а) $f(x)=\operatorname{sgn}^2(x)$; б) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$.

T5.7. Например, $f(x)=x^2(x^2-1)^2D(x)$, $D(x)$ — функция Дирихле.

T5.8. Дифференцируема при $x=\dfrac{3}{2^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N}$, и разрывна в остальных точках.

T5.9. а) $x^2D(x)$; б) $(x-1)^2\cdot\ldots\cdot(x-n)^2D(x)$; в) функция из предыдущей задачи.

T5.10. Например, $f(x)=x-\sin x$.

T5.14. *Указание.* Если предположить противное, то согласно предыдущей задаче функция $f''(x)$ будет иметь такой же период, что и $f(x)$. Тогда и любая линейная комбинация этих функций будет иметь тот же период, но среди этих комбинаций есть функции $\sin x$ и $\cos\sqrt{2}x$, которые не имеют общего периода.

T5.15. 0.

T5.16. *Указание*. Воспользоваться предыдущей задачей.

T5.17. Например, $f(x)=x^2\sin\dfrac{\pi}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$.

T5.18. *Указание.* Обозначим $g(x)=x(x-1)^2\sin\dfrac{\pi}{(x-1)^2}$, $\varphi_n(x)=g\left(\dfrac{x-\dfrac{1}{n+1}}{n(n+1)}\right)$. Положим $\varphi(x)=(1-x)^2$, $x\in[1;2]$; $\varphi(x)=\varphi_n(x)$, $x\in\left[\dfrac{1}{n+1};\dfrac{1}{n}\right)$; $\varphi(0)=0$; $\varphi(x)=\varphi_n(-x)$ при $x\in\left(-\dfrac{1}{n},-\dfrac{1}{n+1}\right]$; $\varphi(x)=(x+1)^2$, $x\in(-2;1]$. Тогда функция $f(x)=x^2\varphi(x)$ на интервале $(-2;2)$ удовлетворяет поставленным условиям.

T5.19. Например, $f(x)=\dfrac{\sin(x^2)}{x}$. **T5.20.** Например, $f(x)=\cos(\ln x)$.

T5.21. Например, $f(x)=\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}$. **T5.22.** Например, $f(x)=\sqrt{x}$.

T5.23. *Указание.* Воспользоваться теоремой Лагранжа.

T5.24. Например, $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

T5.25. Например, $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ или $f(x)=xD(x)$.

T5.27. Нет, например, $f(x)=\cos x$. **T5.28.** $f^{(n)}(x_0)=g^{(n-1)}(x_0)$.

T5.30. *Указание*. Применить формулу Лейбница к равенству $(f(x))^2=x^2-1$.

T5.31. *Указание*. Применить формулу Лейбница к равенству $f'(x)=f(x)(\ln|f(x)|)'$.

T5.32. Нет, поскольку множество определения обратной функции не содержит внутренних точек.

T5.35. *Указание.* Рассмотреть функцию $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$.

T5.36. *Указание*. Рассмотреть функцию $f(x)-\mu x$ и воспользоваться примером T5.3.

T5.37. *Указание*. Воспользоваться предыдущей задачей.

T5.38. Нет. *Указание*. Воспользоваться предыдущей задачей.

T5.39. а), в) Нет, так как нет дифференцируемости в точке $x=0$; б) нет, $f(1)\neq f(-1)$.

T5.40. *Указание*. Применить теорему Ролля к функции $g(x)=e^{\lambda x}f(x)$.

T5.43. *Указание*. Рассмотреть функцию $f(x)-x$ и применить к ней теорему Ролля.

T5.45. *Указание*. Применить теорему Ролля.

T5.48. *Указание*. Воспользоваться предыдущей задачей.

T5.49. *Указание.* Проверить, что функция $g(x)=f(x)-Ax$ постоянна.

T5.50. *Указание.* Показать, что $f'(x)=0$ при всех $x\in[a;b]$.

T5.52. *Указание*. Рассмотреть функцию $g(x)=f(x)e^{-\lambda x}$.

T5.53. Нет. Пусть $f(x) = x^3$; $(a; b) = (-1; 1)$, $c = 0$. Для любой пары $x_1 \in (-1; 0)$, $x_2 \in (0; 1)$ имеем $f'(0) = 0$, но $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$.

T5.54. Например, $f(x) = x^2(x-1)^2$.

T5.55. *Указание*. а) Рассмотреть функцию $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ где $\alpha \in (1; 2]$.

б) Применить теорему Лагранжа.

в) Показать, что $\dfrac{f(z_n) - f(x_n)}{z_n - x_n} = \dfrac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a}\gamma_n + \dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}(1 - \gamma_n)$, где $0 < \gamma_n < 1$.

T5.56. *Указание*. Рассмотреть функцию $g(x) = f(x) + 2x - 4$.

T5.57. *Указание*. Поскольку функция f не линейная, найдётся такое число $c \in (a; b)$, что $f(c) \neq f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$.

T5.58. *Указание*. Рассмотреть функцию $g(x) = f(x) - e^{-x}$.

T5.60. *Указание*. Применить теорему Лагранжа. Обратное утверждение неверно: рассмотреть $f(x) = \sqrt{x}$ на $(0; 1)$.

T5.63. *Указание*. Если $g(x) - g(x_0) \neq 0$, то применить теорему Коши. Если $g(x) - g(x_0) = 0$, то показать, что $f(x) - f(x_0) = 0$.

T5.64. *Указание*. Применить теорему Коши к функциям $u = \dfrac{f(x)}{x}$ и $v = \dfrac{1}{x}$ на $[x_1; x_2]$.

T5.65. *Указание*. Применить правило Лопиталя к пределу $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x f(x)}{e^x}$. **T5.68.** $\dfrac{1}{2}$.

T5.69. *Указание*. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотреть луч $(a_\varepsilon; +\infty)$, на котором выполнено неравенство $|f(x)| < \varepsilon^2$, и применить к разности $f(x+\varepsilon) - f(x)$ формулу Тейлора.

T5.70, T5.71. *Указание*. Воспользоваться формулой Тейлора.

T5.73. *Указание*. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотреть луч $(a_\varepsilon; +\infty)$, на котором выполнено неравенство $|f(x)| < \varepsilon^2$, и применить к разности $f(x+\varepsilon) - f(x)$ формулу Тейлора.

T5.74. *Указание*. Показать, что $P^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, m$.

T5.76. Например, $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = -e^x$. **T5.77.** *Указание*. См. пример T4.5.

T5.78. *Указание*. Проверить, что $f(x) \geqslant \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) - \dfrac{x - x_2}{x_2 - x_1} f(x_1)$ при $x_1 < x_2 < x$, $f(x) \geqslant \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) - \dfrac{x_1 - x}{x_2 - x_1} f(x_2)$ при $x < x_1 < x_2$. Показать, что если $f(x_1) \neq f(x_2)$, то одно из этих неравенств противоречит ограниченности функции f.

T5.79. *Ответ*. Нет, например $f(x) = e^x$ на $(-\infty; a)$ или $f(x) = e^{-x}$ на $(a; +\infty)$.

T5.80. *Указание*. См. пример T5.4.

T5.81. *Указание*. Воспользоваться результатом примера T5.5.

T5.82. *Указание*. Воспользоваться результатами предыдущей задачи, примера T4.5 и задач T4.61 и T4.64 б.

T5.83. *Указание*. Доказать индукцией по $n \in \mathbb{N}$, что при всех $x, y \in (a; b)$ и $\lambda \in T_n$, где $T_n = \left\{ \dfrac{k}{2^n} : k = 0, 1, \ldots, 2^n \right\}$, выполнено равенство $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

T5.86. *Указание*. Прологарифмировать неравенство и воспользоваться выпуклостью функции $f(x) = \ln x$.

Глава 6

Неопределённый интеграл

§ 6.1. Первообразная и интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется *точной первообразной* функции $f(x)$ на промежутке, если на этом промежутке справедливо равенство $F'(x)=f(x)$, или, что то же самое, $f(x)\,dx$ служит дифференциалом для $F(x)$: $dF(x)=f(x)\,dx$.

Определение. Функция $F(x)$ называется *обобщённой первообразной* функции $f(x)$ на промежутке, если $F(x)$ непрерывна на этом промежутке и для всех x из этого промежутка за исключением не более чем конечного множества точек справедливо равенство $F'(x)=f(x)$. Если нет необходимости подчёркивать, что мы имеем дело именно с точной или обобщённой первообразной, то называем $F(x)$ *первообразной*.

Пример 6.1. Функция $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ есть точная первообразная функции $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ на всей числовой прямой, так как $\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Функция $|x|$ есть обобщённая первообразная функции $\operatorname{sgn} x$ на $(-1;1)$, так как $|x|\in C(-1;1)$ и $|x|'=\operatorname{sgn} x$ при всех $x\neq 0$. □

Равенство $F'(x)=f(x)$ определяет функцию $F(x)$ неоднозначно.

Пример 6.2. а) $(\cos 2x)'=-2\sin 2x$, $(-2\sin^2 x)'=-4\sin x\cos x=-2\sin 2x$;

б) $(2\ln(\sqrt{4+x^2}-x))'=-\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}$, $\left(\ln\frac{\sqrt{4+x^2}-x}{\sqrt{4+x^2}+x}\right)'=-\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}$. □

Основным свойством первообразных является следующее: если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные одной и той же функции $f(x)$ на одном и том же промежутке, то их разность постоянна на этом промежутке.

Определение. Множество всех первообразных данной функции $f(x)$ на $\langle a;b\rangle$ называется *неопределённым интегралом* этой функции и обозначается $\int f(x)\,dx$ (промежуток $\langle a;b\rangle$ обычно ясен из контекста, чаще всего это промежуток непрерывности функции $f(x)$ и поэтому не указывается).

Следовательно, если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ на $\langle a;b\rangle$, то

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,\quad \text{где } C \text{ — произвольная постоянная.}$$

Пример 6.3. Найдём точную первообразную функции $f(x)=e^{|x|}$ на $\mathbb{R}$.

Решение. При $x\geqslant 0$ имеем $e^{|x|}=e^x$, и у этой функции на луче $[0;+\infty)$ одной из первообразных будет e^x. При $x<0$ имеем $e^{|x|}=e^{-x}$, у этой функции на луче $(-\infty;0)$ первообразной будет функция $-e^{-x}+k$ при любой постоянной k. Поскольку первообразная функции $e^{|x|}$ по определению должна быть непрерывной, должно выполняться условие $\lim\limits_{x\to 0-}(-e^{-x}+k)=e^0$, т. е. $1=-1+k$, откуда $k=2$.

Итак, функция
$$F(x)=\begin{cases} e^x, & x\geqslant 0,\\ -e^{-x}+2, & x<0,\end{cases}$$
непрерывна на $\mathbb{R}$. При $x>0$ имеем $F'(x)=e^x=e^{|x|}$, при $x<0$ имеем $F'(x)=$ $=e^{-x}=e^{|x|}$. Докажем, что эта функция будет точной первообразной функции $e^{|x|}$ на всей числовой прямой. Осталось проверить, что $F'(0)=e^0=1$. Имеем
$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1,$$
$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-e^{-x}+2-1}{x}=1,$$
т. е. $F'_+(0)=F'_-(0)=F'(0)=1=e^{|0|}$. Следовательно,
$$\int e^{|x|}\,dx=F(x)+C=\begin{cases} e^x+C, & x\geqslant 0,\\ -e^{-x}+2+C, & x<0.\end{cases}$$ □

Можно доказать, что любая непрерывная на $[a;b]$ функция имеет на $(a;b)$ точную первообразную, но в отличие от производной первообразная элементарной функции не всегда является элементарной функцией, например, таковы первообразные функций $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, e^{x^2}, e^{-x^2}.

Основные свойства неопределённого интеграла

$$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx;\qquad \Big(\int f(x)\,dx\Big)'=f(x);\qquad \int df(x)=\int f'(x)\,dx=f(x)+C$$

Таблица простейших интегралов

$\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C\ (a\neq -1)$	$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C\ (a>0)$
$\int\frac{dx}{x}=\ln\|x\|+C,\ x\neq 0$	$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|+C\ (a>0)$
$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\ (a>0, a\neq 1)$	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\ (a>0)$
$\int e^x\,dx=e^x+C$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\|x+\sqrt{x^2+k}\|+C\ (k\neq 0)$
$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$	$\int\operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C$
$\int\cos x\,dx=\sin x+C$	$\int\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C$
$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$	$\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth}x+C$
$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$	$\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th}x+C$

Все формулы справедливы на любом промежутке из области непрерывности правой части, а для их доказательства достаточно продифференцировать правую часть.

Пример 6.4. Докажем, что $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$.

Решение. Правая часть непрерывна на всей числовой прямой, причём при $x \neq 0$ имеем $\left(\frac{3}{2}x^{2/3}\right)' = x^{-\frac{1}{3}}$ (см. определение $x^{\frac{m}{n}}$ на с. 23). Следовательно, на любом промежутке функция $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ является (обобщённой) первообразной функции $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, а все первообразные имеют вид $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$. □

Пример 6.5. Докажем, что $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Решение. Область непрерывности правой части есть объединение лучей $x < 0$ и $x > 0$, причём при $x \neq 0$ имеем $(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}$. Следовательно, на любом промежутке, не содержащем нуля, любая первообразная функции $\frac{1}{x}$ имеет вид $\ln|x| + C$. Отметим, что если промежуток содержит точку $x = 0$, то функция $\frac{1}{x}$ не имеет на нём даже обобщённой первообразной. □

Пример 6.6. Докажем, что $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

Решение. Если промежуток содержится в области существования (совпадающей с областью непрерывности и дифференцируемости) тангенса, то на нём производная правой части равна $\frac{1}{\cos^2 x}$. Если же промежуток содержит точку вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то правая часть не является на нём непрерывной функцией, а следовательно, и первообразной $\frac{1}{\cos^2 x}$. Более того, на таких промежутках функция $\frac{1}{\cos^2 x}$ не имеет даже обобщённой первообразной. □

§ 6.2. Основные методы нахождения первообразной

6.2.1. Простое применение таблицы и свойств интеграла

Нахождение первообразной в основном состоит в таком преобразовании подынтегрального выражения, чтобы получить интегралы из таблицы на с. 218 («табличные интегралы»).

Свойства неопределённого интеграла

1. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad (k \neq 0)$.

2. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

3. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и u — непрерывно дифференцируемая функция, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

Свойство 3 показывает, что таблица интегралов справедлива независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или функцией. Основанный на этом свойстве приём нахождения первообразной называют *подведением под знак дифференциала*. При решении задач часто используют равенства

$$dx=\frac{1}{a}d(ax+b)\ (a\neq 0),\quad x^n\,dx=\frac{dx^{n+1}}{n+1}\ (n\neq -1),\quad \frac{dx}{x}=d\ln|x|,\quad \frac{dx}{x^2}=-d\frac{1}{x},$$

$$\cos x\,dx=d\sin x,\quad \sin x\,dx=-d\cos x,\quad \frac{dx}{2\sqrt{x}}=d\sqrt{x}.$$

Пример 6.7. $\int(x+1)\,dx=\int(x+1)\,d(x+1)=\int u\,du=\frac{u^2}{2}+C=\frac{(x+1)^2}{2}+C.$ □

Пример 6.8. $\int(5-3x)^{51}\,dx=-\frac{1}{3}\int(5-3x)^{51}\,d(5-3x)=-\frac{1}{156}(5-3x)^{52}+C.$ □

Заметим, что можно выражение в скобках под знаком интеграла возвести в степень 51 и взять интеграл как линейную комбинацию интегралов от степенных функций. Понятно, что этот метод крайне громоздок, и преимущество предложенного здесь подхода очевидно.

Пример 6.9. $\int x(1-2x)^{37}\,dx=\int\Big(-\frac{1}{2}(1-2x)+\frac{1}{2}\Big)(1-2x)^{37}\,dx=$

$$=-\frac{1}{2}\int(1-2x)^{38}\,dx+\frac{1}{2}\int(1-2x)^{37}\,dx=$$

$$=\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2\int(1-2x)^{38}\,d(1-2x)+\frac{1}{2}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)\int(1-2x)^{37}\,d(1-2x)=$$

$$=\frac{1}{156}(1-2x)^{39}-\frac{1}{152}(1-2x)^{38}+C.$$ □

Пример 6.10. $\int e^{-1/x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{2}\int e^{-1/x^2}\,d\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)=\frac{1}{2}e^{-1/x^2}+C.$ □

Пример 6.11. $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{du}{\sin u\cos u}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 u}\,du}{\frac{\sin u\cdot\cos u}{\cos^2 u}}=\int\frac{d\,\mathrm{tg}\,u}{\mathrm{tg}\,u}=$

$=\ln|\,\mathrm{tg}\,u|+C=\ln\Big|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\Big|+C.$ □

Пример 6.12. $\int\frac{1}{\arcsin^5 x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{d\arcsin x}{\arcsin^5 x}=-\frac{1}{4\arcsin^4 x}+C.$ □

Пример 6.13. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{x+1}\,dx-\frac{1}{2}\int\sqrt{x-1}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^3}+C.$$ □

6.2.2. Интегрирование по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Суть применения этого метода интегрирования состоит в том, что интеграл $\int v\,du$ может быть «проще» интеграла $\int u\,dv$. Этот метод часто применяется, когда под интегралом стоит произведение «разнородных» функций, например, $e^{\alpha x}$ и x^β, $e^{\alpha x}$ и $\sin\beta x$, x и $\ln x$, x и $\mathrm{arctg}\,x$ и т. п.

Пример 6.14. $\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$. Отметим, что после применения формулы интегрирования по частям задача свелась к нахождению табличного интеграла. □

Пример 6.15. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx = \int \operatorname{arctg} x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} =$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C. \quad \square$$

Иногда, применяя метод интегрирования по частям, удаётся получить нетривиальное уравнение для нахождения первообразной функции.

Пример 6.16. Найдём $\int e^x\cos x\,dx$.

Решение. Имеем $I = \int e^x \cos x\,dx = \int \cos x\,de^x = e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx =$

$$= e^x\cos x + \int \sin x\,de^x = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x(\cos x + \sin x) - I.$$

Поэтому $\int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} + C$. □

Пример 6.17. Найдём $\int \sqrt{x^2+k}\,dx$ $(k \neq 0)$.

Решение. Имеем $I = \int \sqrt{x^2+k}\,dx = x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+k}} = x\sqrt{x^2+k} -$ $- \int \frac{x^2+k-k}{\sqrt{x^2+k}}\,dx = x\sqrt{x^2+k} + k\ln|x+\sqrt{x^2+k}| - I$, поэтому

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C. \quad \square$$

6.2.3. Замена переменной и подстановки

Пусть функция f представима в виде $f(x) = g(u(x))u'(x)$, где функция g непрерывна, а u непрерывно дифференцируема на соответствующих промежутках. Тогда для нахождения первообразной функции f можно перейти к новой переменной u по формуле

$$\int f(x)\,dx = \int g(u(x))u'(x)\,dx = \int g(u)\,du,$$

найти последний интеграл, а затем вернуться к исходной переменной, подставив в результат интегрирования $u = u(x)$.

В ряде случаев для нахождения первообразной функции $f(x)$ бывает удобно подставить вместо x непрерывно дифференцируемую функцию $x = x(t)$ и найти интеграл от переменной t:

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))x'(t)\,dt.$$

Функция $x(t)$ подбирается таким образом, чтобы подынтегральное выражение приняло форму, более удобную для интегрирования, а её выбор определяется видом подынтегрального выражения. Рассмотрим некоторые часто встречающиеся замены и подстановки.

А. Интегрирование выражений вида $\sin^n x\cos^m x$, $n, m\in\mathbb{Z}$.

А1. Если один из показателей n и m есть положительное нечётное число, то соответствующая функция подводится под знак дифференциала, после чего подынтегральное выражение представляется в виде линейной комбинации степеней этой функции. Если второй показатель является нечётным и отрицательным, то можно также положить $t=\operatorname{tg} x$ или $t=\operatorname{ctg} x$.

Пример 6.18. $\displaystyle\int \sin^5 x\cos^4 x\,dx=-\int \sin^4 x\cos^4 x\,d\cos x=$

$$=-\int(1-\cos^2 x)^2\cos^4 x\,d\cos x=-\int(\cos^4 x-2\cos^6 x+\cos^8 x)\,d\cos x=$$

$$=-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{\cos^9 x}{9}+C.\quad\square$$

Пример 6.19. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,d\cos x=-\int\Big(\frac{1}{\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}\Big)d\cos x=$ $\displaystyle=\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\cos x|+C$, или, положив $t=\operatorname{tg} x$, получим $x=\operatorname{arctg} t$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$,

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx=\int\frac{t^3}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int\Big(1-\frac{1}{1+t^2}\Big)dt^2=\frac{1}{2}\Big(\operatorname{tg}^2 x-\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)\Big)+C.\quad\square$$

А2. Если оба показателя n и m — неотрицательные чётные числа, то, применяя формулы понижения степени (и выделяя, если это возможно, слагаемые уже рассмотренного в п. А1 вида), можно свести задачу к интегрированию линейной комбинации косинусов и синусов кратных значений аргумента. В ряде случаев удобно применять и другие формулы тригонометрии.

Пример 6.20. Найдём $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$ двумя способами.

Первый способ. Применим формулы понижения степени:

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x(1+\cos 2x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\,dx+\frac{1}{16}\int\sin^2 2x\,d\sin 2x=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)\,dx+\frac{\sin^3 2x}{48}=$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$$

Второй способ. Применяя формулы тригонометрии, получаем:

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx=\frac{1}{4}\int\cos^2 x\sin^2 2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}\,dx=\frac{1}{16}\int(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x\cos 4x)\,dx=$$

$$=\frac{x}{16}+\frac{\sin 2x}{32}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{1}{32}\int(\cos 2x+\cos 6x)\,dx=$$

$$=\frac{x}{16}+\frac{\sin 2x}{32}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin 2x}{64}-\frac{\sin 6x}{192}+C=\frac{x}{16}+\frac{\sin 2x}{64}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin 6x}{192}+C.\quad\square$$

А3. Если хотя бы один из показателей n и m отрицателен и чётность их одинакова, то можно применить тождества

$$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x},\qquad \frac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

и положить $t=\operatorname{tg} x$ или $t=\operatorname{ctg} x$.

Пример 6.21. $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\operatorname{tg}^2 x\,d\operatorname{tg}x=\int t^2(1+t^2)\,dt=$

$$=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C. \qquad \square$$

Пример 6.22. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^6 x\cos^2 x}=\int\frac{1}{\sin^4 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=$

$$=-\int(1+\operatorname{ctg}^2 x)^2\frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x}d\operatorname{ctg}x=-\int\Big(\frac{1}{t^2}+3+3t^2+t^4\Big)\,dt=$$

$$=\operatorname{tg}x-3\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^3 x-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+C. \qquad \square$$

Пример 6.23. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}=\int\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}\cdot\frac{1}{\cos^6 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^3}{\operatorname{tg}^3 x}d\operatorname{tg}x=$

$$=\int\Big(\frac{1}{t^3}+\frac{3}{t}+3t+t^3\Big)\,dt=-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+3\ln|\operatorname{tg}x|+\frac{3\operatorname{tg}^2 x}{2}+\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C. \qquad \square$$

А4. Пусть один из показателей n и m отрицателен и нечётен, а второй чётен. Предположим, что нечётным является показатель m. Если при этом $n\geqslant 0$, то произведение $\sin^n x\cos^m x$ можно представить в виде линейной комбинации нечётных степеней косинуса. Если же $n<0$, то, заменив в числителе подынтегральной функции единицу суммой $\sin^2 x+\cos^2 x$ достаточное число раз, получим представление этого произведения в виде линейной комбинации произведений $\sin^p x\cos^q x$, где или $q>0$ и нечётно (что уже было рассмотрено в п. А1), или $p=0$. Таким образом, остаётся рассмотреть интегралы вида:

$$I_m=\int\frac{dx}{\sin^m x},\qquad K_m=\int\frac{dx}{\cos^m x},\qquad m\in\mathbb{N}.$$

Первый способ. Для любого натурального числа $m>2$ имеем

$$I_m=\int\frac{1}{\sin^m x}\,dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^m x}\,dx=I_{m-2}-\frac{1}{m-1}\int\cos x\,d\Big(\frac{1}{\sin^{m-1} x}\Big)=$$

$$=I_{m-2}-\frac{1}{m-1}\Big(\frac{\cos x}{\sin^{m-1} x}+\int\frac{\sin x}{\sin^{m-1} x}\,dx\Big)=\frac{m-2}{m-1}I_{m-2}-\frac{\cos x}{(m-1)\sin^{m-1} x}.$$

Точно так же выводится равенство

$$K_m=\int\frac{1}{\cos^m x}\,dx=\frac{m-2}{m-1}K_{m-2}+\frac{\sin x}{(m-1)\cos^{m-1} x}.$$

Эти рекуррентные соотношения называются *формулами понижения* и позволяют найти I_m и K_m для любого натурального $m>2$, последовательно применяя формулы понижения и используя равенства

$$I_1=\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\Big|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|+C \qquad \text{(см. пример 6.11)},$$

$$K_1=\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\Big|\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big|+C \qquad \text{(см. задачу 6.87)}.$$

Второй способ. Если m чётно, то, как указывалось в п. А3, для нахождения интеграла I_m можно положить $t=\operatorname{ctg}x$, а для интеграла K_m положить $t=\operatorname{tg}x$.

Если же m нечётно, то, полагая $u=\dfrac{x}{2}$, получаем

$$I_m=\int\frac{dx}{\sin^m x}=\int\frac{d\frac{x}{2}}{2^{m-1}\sin^m\frac{x}{2}\cos^m\frac{x}{2}}=\frac{1}{2^{m-1}}\int\frac{du}{\sin^m u\cos^m u},$$

и интеграл находится (также в соответствии с п. A3) при помощи замены $t = \operatorname{ctg} u$. Интеграл K_m сводится к I_m следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\cos^m x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^m\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Пример 6.24. Найдём $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$, применяя оба способа.

Первый способ. Применим формулу понижения:

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = K_5 = \frac{3}{4}K_3 + \frac{\sin x}{4\cos^4 x};$$

$$K_3 = \frac{1}{2}K_1 + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + C;$$

$$K_5 = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Второй способ. $\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \int \frac{1}{\sin^5\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}d\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^4}\int \frac{1}{\sin^5 u\cos^5 u}du =$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{1}{\operatorname{tg}^5 u\cos^8 u}\cdot\frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{16}\int \frac{(1+t^2)^4}{t^5}dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{t^5}+\frac{4}{t^3}+\frac{6}{t}+4t+t^3\right)dt = -\frac{1}{64t^4} - \frac{1}{8t^2} + \frac{3}{8}\ln|t| + \frac{t^2}{8} + \frac{t^4}{64} =$$

$$= \frac{1}{64}\operatorname{tg}^4 z + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2 z + \frac{3}{8}\ln|\operatorname{tg} z| - \frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2 z - \frac{1}{64}\operatorname{ctg}^4 z + C, \quad \text{где } z = \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}.$$ □

Пример 6.25. $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^5 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^3}{\cos^5 x}dx =$

$$= \int\left(\frac{1}{\cos^5 x} - \frac{3}{\cos^3 x} + \frac{3}{\cos x} - \cos x\right)dx = K_5 - 3K_3 + 3\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x =$$

$$= \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - 3\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right) +$$

$$+3\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} - \frac{9\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{15}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C$$

(в решении использованы результаты предыдущего примера). □

Пример 6.26. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^4 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3}{\sin^3 x\cos^4 x}dx =$

$$= \int\left(\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\right)dx = \int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx +$$

$$+2\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + 2\int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{5}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$ □

B. Интегрирование выражений, содержащих радикалы

$$\sqrt{a^2 \pm x^2}; \quad \sqrt{x^2 \pm a^2}; \quad a > 0.$$

B1. Если подынтегральная функция содержит радикал $\sqrt{a^2 - x^2}$, то можно применить подстановку $x = a\sin t$.

Поскольку выражение $\sqrt{a^2-x^2}$ имеет смысл только при $|x|\leqslant a$, то и первообразная ищется на промежутке $-a\leqslant x\leqslant a$. Для переменной t промежуток изменения выбирается так, чтобы $-a\leqslant a\sin t\leqslant a$, следовательно, можно считать, что $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, тогда $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$. Также можно применить гиперболическую подстановку $x=a\,\mathrm{th}\,t$, тогда $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{\frac{a^2(\mathrm{ch}^2\,t-\mathrm{sh}^2\,t)}{\mathrm{ch}^2\,t}}=\frac{a}{\mathrm{ch}\,t}$.

Пример 6.27. Найдём $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$.

Решение. Применим тригонометрическую подстановку $x=a\sin t$, тогда

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int a^2\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}\Big(t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big)+C.$$

Поскольку $t=\arcsin\frac{x}{a}$, $\sin\arcsin\frac{x}{a}=\frac{x}{a}$, $\cos\arcsin\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, $|x|\neq a$, имеем

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C. \qquad \square$$

B2. Если подынтегральная функция содержит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то можно применить подстановку $x=\frac{a}{\cos t}$.

В этом случае первообразная ищется на луче $x\geqslant a$ или на луче $x\leqslant -a$. При $x\geqslant a$ выбираем $0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$, и тогда $\sqrt{x^2-a^2}=a\,\mathrm{tg}\,t$, а при $x\leqslant -a$ выбираем $\frac{\pi}{2}<t\leqslant\pi$, и тогда $\sqrt{x^2-a^2}=-a\,\mathrm{tg}\,t$. Также можно применить гиперболическую подстановку: $x=a\,\mathrm{ch}\,t$ на луче $x\geqslant a$ и $x=-a\,\mathrm{ch}\,t$ на луче $x\leqslant -a$. В обоих случаях $t\geqslant 0$ и $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\mathrm{ch}^2\,t-1)}=a\,\mathrm{sh}\,t$. Кроме того, аналогично случаю B1 можно применить гиперболическую подстановку $x=a\,\mathrm{cth}\,t$.

B3. Если подынтегральная функция содержит радикал $\sqrt{a^2+x^2}$, то можно применить подстановку $x=a\,\mathrm{tg}\,t$. Функция $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ непрерывно дифференцируема на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, при этом промежутком изменения x является вся числовая прямая и имеем $\sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos t}$.

В этом же случае можно положить $x=a\,\mathrm{sh}\,t$, $t\in\mathbb{R}$, тогда $\sqrt{x^2+a^2}=a\,\mathrm{ch}\,t$.

При использовании гиперболических подстановок полезно иметь в виду формулы, приведённые в гл. 1 (с. 20).

Пример 6.28. Найдём $\int\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\,dx$, $a>0$.

Решение. Положим $x=a\,\mathrm{tg}\,t$, тогда $dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}$, $t=\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}$ и

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\,dx=\int\frac{a^3\,\mathrm{tg}^2\,t\cdot\cos^3 t\,dt}{a^3\cos^2 t}=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\,dt=$$

$$=\int\frac{dt}{\cos t}\,dt-\int\cos t\,dt=\int\frac{d\Big(t+\frac{\pi}{2}\Big)}{\sin\Big(t+\frac{\pi}{2}\Big)}-\sin t=\ln\Big|\mathrm{tg}\Big(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big|-\sin t+C,$$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\,dx=\ln\Big|\mathrm{tg}\Big(\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big|-\sin\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C=$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\ln\Big(x+\sqrt{x^2+a^2}\Big)+C. \qquad \square$$

Пример 6.29. Найдём $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$, $a>0$.

Решение. Положим $x=a\operatorname{sh}t$, тогда

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2(1+\operatorname{sh}^2 t)}\,a\operatorname{ch}t\,dt = a^2\int \operatorname{ch}^2 t\,dt =$$
$$= a^2\int \frac{\operatorname{ch}2t+1}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\Big(\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t+t\Big)+C = \frac{a^2}{2}(\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t+t)+C.$$

Поскольку $\operatorname{ch}t=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2}}$, $e^t=\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t=\dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$, получаем $t=\ln\dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$, поэтому

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\Big(x+\sqrt{a^2+x^2}\Big)+C. \qquad \square$$

C. Интегрирование некоторых трансцендентных функций.

Основным методом нахождения интегралов от трансцендентных функций является интегрирование по частям. Если подынтегральная функция содержит трансцендентную функцию сложного аргумента $\varphi(x)$, то в ряде случаев для упрощения подынтегрального выражения полезно сделать замену $\varphi(x)=t$.

Пример 6.30. Найдём $\int e^{-\sqrt[3]{x+1}}\,dx$.

Решение. Положим $-\sqrt[3]{x+1}=t$, тогда $x+1=-t^3$, $dx=-3t^2\,dt$. Поэтому

$$\int e^{-\sqrt[3]{x+1}}\,dx = -3\int e^t t^2\,dt = -3\Big(e^t t^2-2\int te^t\,dt\Big) =$$
$$= -3(e^t t^2-2te^t+2e^t)+C = -3t^2e^t+6te^t-6e^t+C, \quad t=-\sqrt[3]{x+1}. \qquad \square$$

Пример 6.31. Найдём $\int \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. $$\int \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = x\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^3}\sqrt{1-\frac{1}{x}}} =$$
$$= x\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}} = x\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x-1}+C. \qquad \square$$

Отметим, что в этом примере также можно было сделать замену $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=t$.

6.2.4. Простейшие интегралы, содержащие квадратный трёхчлен

Рассмотрим интегралы вида ($a\neq 0$):

I. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$ II. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

III. $\displaystyle\int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ IV. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-x_0)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Выделяя в квадратном трёхчлене ax^2+bx+c полный квадрат, запишем его в виде $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2+q$. Если в интегралах I, II, III сделать замену $x-x_0=z$, то получим интегралы

I′. $\displaystyle\int \frac{A_1z+B_1}{az^2+q}\,dz$ II′. $\displaystyle\int \frac{A_1z+B_1}{\sqrt{az^2+q}}\,dz$ III′. $\displaystyle\int (A_1z+B_1)\sqrt{az^2+q}\,dz$

Нахождение этих интегралов в зависимости от знака числа a сводится к нахождению интегралов вида

$$\int \frac{Dz+E}{z^2 \pm r^2}\,dz, \quad \int \frac{Dz+E}{\sqrt{z^2 \pm r^2}}\,dz, \quad \int \frac{Dz+E}{\sqrt{r^2 - z^2}}\,dz,$$
$$\int (Dz+E)\sqrt{r^2 - z^2}\,dz, \quad \int (Dz+E)\sqrt{z^2 \pm r^2}\,dz,$$

каждый из которых представляет собой комбинацию двух интегралов: один из них табличный, а другой сводится к табличному при помощи равенства

$$d(z^2 \pm a^2) = 2z\,dz.$$

Интегралы $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ и $\int \sqrt{x^2 + k}\,dx$ не входят в таблицу на с. 218, но они уже были найдены ранее (см. примеры 6.27 и 6.17). Поскольку интегралы такого вида часто встречаются в приложениях, а нахождение их технически сложно, соответствующие первообразные полезно просто запомнить. Эти интегралы также называют *табличными*:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (a > 0),$$
$$\int \sqrt{x^2 + k}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2 + k}}{2} + \frac{k}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + C \quad (k \neq 0).$$

Пример 6.32. Найдём $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+4x+7}}\,dx$.

Решение. Поскольку $x^2+4x+7=(x+2)^2+3$, полагая $x+2=z$, получаем

$$\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+4x+7}}\,dx = \int \frac{2(x+2)+1}{\sqrt{(x+2)^2+3}}\,dx = \int \frac{2z+1}{\sqrt{z^2+3}}\,dz =$$
$$= \int \frac{d(z^2+3)}{\sqrt{z^2+3}} + \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+3}} = 2\sqrt{z^2+3} + \ln\left(z + \sqrt{z^2+3}\right) + C =$$
$$= 2\sqrt{x^2+4x+7} + \ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+7}\right) + C. \quad \square$$

Пример 6.33. Найдём $\int \frac{1-3x}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$.

Решение. Поскольку $1-x-x^2=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$, полагая $x+\frac{1}{2}=z$, получаем

$$\int \frac{1-3x}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx = \int \frac{-3(x+1/2)+5/2}{\sqrt{5/4-(x+1/2)^2}}\,dx = \int \frac{-3z+5/2}{\sqrt{5/4-z^2}}\,dz =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(5/4-z^2)}{\sqrt{5/4-z^2}} + \frac{5}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{5/4-z^2}} = 3\sqrt{\frac{5}{4}-z^2} + \frac{5}{2}\arcsin\frac{2z}{\sqrt{5}} + C =$$
$$= 3\sqrt{1-x-x^2} + \frac{5}{2}\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C. \quad \square$$

Пример 6.34. Найдём $\int (2x+7)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$.

Решение. Поскольку $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, получаем

$$\int (2x+7)\sqrt{x^2+x+1}\,dx = \int \left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)+6\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \int (2z+6)\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\,dz = 2\int z\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\,dz + 6\int \sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\,dz =$$

$$= \int \sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\,d\left(z^2+\frac{3}{4}\right) + 6\int \sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\,dz =$$

$$= \frac{2}{3}\left(z^2+\frac{3}{4}\right)^{3/2} + 6\left(\frac{z\sqrt{z^2+3/4}}{2} + \frac{3}{8}\ln\left(z+\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\right)\right) + C =$$

$$= \frac{2}{3}(x^2+x+1)^{3/2} + 3\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{9}{4}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + C. \quad \square$$

Для нахождения интеграла $\int \frac{dx}{(x-x_0)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, делая в нём замену $x-x_0=z$, получаем интеграл

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{az^2+b_1z+c_1}} = \int \frac{dz}{z|z|\sqrt{a+b_1/z+c_1/z^2}}.$$

При $x>x_0$ имеем $z>0$ и, полагая $\frac{1}{z}=u$, получаем табличный интеграл

$$\int \frac{dz}{z^2\sqrt{a+b_1/z+c_1/z^2}} = \int \frac{d(-1/z)}{\sqrt{a+b_1/z+c_1/z^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{a+b_1u+c_1u^2}}.$$

При $x<x_0$ имеем $z<0$, поэтому $z|z|=-z^2$, а значит, на этом луче получаем тот же табличный интеграл, но с противоположным знаком.

Отметим, что в данном интеграле можно сразу положить $u=\frac{1}{x-x_0}$.

Пример 6.35. Найдём $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{2x^2+4x+8}}$.

Решение. Полагая $x-2=z$, имеем

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{2x^2+4x+8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z\sqrt{(z+2)^2+2(z+2)+4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2+6z+12}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z|z|\sqrt{1+\frac{6}{z}+\frac{12}{z^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\operatorname{sgn} z\,dz}{z^2\sqrt{1+\frac{6}{z}+\frac{12}{z^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{-\operatorname{sgn} u\,du}{\sqrt{1+6u+12u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{24}}\int \frac{\operatorname{sgn} u\,du}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}u+\frac{1}{12}}} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}\int \frac{\operatorname{sgn} u\,d\left(u+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{48}}} =$$

$$= -\frac{\operatorname{sgn} u}{2\sqrt{6}}\ln\left(u+\frac{1}{4}+\sqrt{u^2+\frac{1}{2}u+\frac{1}{12}}\right)+C = -\frac{\operatorname{sgn} u}{2\sqrt{6}}\ln\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{12}}\right)+C =$$

$$= -\frac{\operatorname{sgn}(x-2)}{2\sqrt{6}}\ln\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{12}}\right)+C. \quad \square$$

§ 6.3. Интегрирование рациональных функций

В этом параграфе рассматривается интегрирование функций вида $\frac{T(x)}{Q(x)}$, где $T(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x. Если степень многочлена $T(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$, то делением многочлена $T(x)$ на многочлен $Q(x)$ выделяем целую часть — многочлен $\Phi(x)$ — и получаем $\frac{T(x)}{Q(x)} = \Phi(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$, где степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Тем самым интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Интегрирование правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ основано на теореме о представлении этой дроби конечной суммой простейших дробей. Вид этого разложения зависит от разложения многочлена $Q(x)$ на множители. Множителям вида $(x-a)^k$ (a — действительный корень многочлена $Q(x)$ кратности k) соответствуют k простейших дробей:

$$\frac{A_n}{(x-a)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots, k, \quad \text{где } A_n \text{ — постоянные.}$$

Множителям вида $(x^2+px+q)^m$ (трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней) соответствуют m простейших дробей вида

$$\frac{B_l x + D_l}{(x^2+px+q)^l}, \quad l = 1, 2, \ldots, m, \quad \text{где } B_l, D_l \text{ — постоянные.}$$

Если разложение многочлена $Q(x)$ на множители имеет вид

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

где $a_1, \ldots, a_r$ — действительные корни многочлена кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_r$ соответственно, а трёхчлены $x^2+p_1x+q_1, \ldots, x^2+p_sx+q_s$ не имеют действительных корней, то разложение $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей ищется в виде

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(r)}}{x-a_r} + \ldots + \frac{A_{k_r}^{(r)}}{(x-a_r)^{k_r}} + \\ + \frac{B_1^{(1)}x + D_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_2^{(1)}x + D_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{B_{m_1}^{(1)}x + D_{m_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \ldots \\ \ldots + \frac{B_1^{(s)}x + D_1^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s} + \frac{B_2^{(s)}x + D_2^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \ldots + \frac{B_{m_s}^{(s)}x + D_{m_s}^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}}.\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь коэффициенты в числителях — некоторые, пока неопределённые числа, способ отыскания которых будет указан ниже.

Итак, интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию дробей вида

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k \geqslant 2$; III. $\frac{Bx+D}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^m}$, $m \geqslant 2$,

где трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $q - p^2/4 > 0$.

Для дробей вида I и II соответственно имеем

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C; \quad \int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, \ k \geqslant 2.$$

Для нахождения интеграла III представим линейную функцию в числителе в виде комбинации производной знаменателя и константы:

$$\int \frac{Bx+D}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p)+D-\frac{Bp}{2}}{x^2+px+q}\,dx =$$
$$= \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \Big(D-\frac{Bp}{2}\Big)\int \frac{dx}{(x+p/2)^2+(q-p^2/4)} =$$
$$= \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{D-\frac{Bp}{2}}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-p^2/4}} + C.$$

Перейдём к интегралу IV. Имеем

$$\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p)+\Big(D-\frac{Bp}{2}\Big)}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^m} +$$
$$+\Big(D-\frac{Bp}{2}\Big)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \Big(D-\frac{Bp}{2}\Big)I_m, \quad m \geqslant 2.$$

Рассмотрим интеграл $I_m = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m}$, где $q-\frac{p^2}{4} > 0$. Выделением полного квадрата $x^2+px+q = \Big(x+\frac{p}{2}\Big)^2 + q - \frac{p^2}{4}$ и заменой $x+\frac{p}{2} = z$ он приводится к виду $\int \frac{dz}{(b^2+z^2)^m}$. Для нахождения такого интеграла используется подстановка $z = b\operatorname{tg}u$ или выводится рекуррентное соотношение, позволяющее понизить показатель степени m в знаменателе интегрированием по частям. Действительно, представляя I_m в виде комбинации I_{m-1} и $\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+b^2)^m}$ и находя последний интегрированием по частям, получим

$$I_m = \int \frac{dz}{(z^2+b^2)^m} = \frac{1}{b^2}\int \frac{(b^2+z^2)-z^2}{(z^2+b^2)^m}\,dz = \frac{1}{b^2}I_{m-1} - \frac{1}{b^2}\int z\frac{z\,dz}{(z^2+b^2)^m} =$$
$$= \frac{1}{b^2}I_{m-1} - \frac{1}{b^2}\int z d\Big(\frac{1}{2(1-m)}\cdot\frac{1}{(z^2+b^2)^{m-1}}\Big) =$$
$$= \frac{1}{b^2}I_{m-1} + \frac{z}{2b^2(m-1)(z^2+b^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(m-1)b^2}\int \frac{dz}{(z^2+b^2)^{m-1}} =$$
$$= \frac{z}{2b^2(m-1)(z^2+b^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2b^2(m-1)}I_{m-1}.$$

Для отыскания неопределённых коэффициентов при разложении правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей правую часть искомого разложения (1) приводят к общему знаменателю (многочлену $Q(x)$) и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x у получившегося в числителе многочлена и у многочлена $P(x)$. Таким образом, получается система линейных уравнений, из которой находятся неопределённые коэффициенты (в курсе высшей алгебры доказывается её однозначная разрешимость).

Пример 6.36. Найдём $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x-2)^2}$.

Решение. Разложим дробь $\frac{x}{(x+1)(x-2)^2}$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, имеем

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + D(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Приравнивая числители дробей, получаем тождество

$$x = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + D(x+1). \tag{2}$$

Перепишем его в виде $x = (A+B)x^2 + (D-B-4A)x + (4A-2B+D)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ D-B-4A=1, \\ 4A-2B+D=0, \end{cases}$$

откуда $A=-\frac{1}{9}$, $B=\frac{1}{9}$, $D=\frac{2}{3}$. Следовательно,

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x-2)^2} = -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2} + C. \ \square$$

Иногда полезно в равенство, полученное приравниванием многочлена $P(x)$ к числителю дроби, полученной после приведения к общему знаменателю простейших дробей, подставлять вместо x некоторые специально подобранные числа (например, действительные корни знаменателя данной рациональной дроби). В результате получаются линейные уравнения относительно искомых коэффициентов, хотя следует помнить, что при подстановке произвольных чисел полученные уравнения могут оказаться зависимыми.

Применим этот метод к предыдущему примеру: полагая в тождестве (2) $x=2$, имеем $2=3D$, откуда $D=2/3$. Полагая $x=-1$, получаем $-1=9A$, откуда $A=-1/9$. Полагая $x=0$, имеем $0=4A-2B+D$, откуда с учётом найденных $A=-1/9$ и $D=2/3$ получаем $B=4A+D/2=1/9$.

Пример 6.37. Найдём $\int \frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)^2(x-1)}\,dx$.

Решение. Разложим дробь $\frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)^2(x-1)}$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+D}{1+x^2} + \frac{Ex+F}{(1+x^2)^2}.$$

Коэффициенты A, B, D, E и F определим исходя из тождества

$$3x^2 - x + 2 = A(1+x^2)^2 + (Bx+D)(x-1)(1+x^2) + (Ex+F)(x-1).$$

Полагая $x=1$, находим $A=1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \quad -B+D=0, \\ 2A-D+E+B=3, \\ D-B+F-E=-1, \\ A-D-F=2, \end{cases}$$

откуда, учитывая, что $A=1$, находим остальные коэффициенты: $B=-1$, $D=-1$, $E=1$, $F=0$. Следовательно,

$$\int \frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)^2(x-1)}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} =$$
$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} + C. \quad \square$$

Разложение на простейшие дроби нередко требует громоздких выкладок, поэтому иногда для нахождении интегралов от рациональной функции полезно производить некоторые преобразования и делать замены переменных, позволяющие упростить ход решения.

Пример 6.38. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2} = \int\Big(\frac{1}{5}\Big(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\Big)\Big)^2 dx =$

$$= \frac{1}{25}\int\frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{25}\int\frac{dx}{(x+2)^2} - \frac{2}{25}\int\frac{dx}{(x-3)(x+2)} =$$
$$= -\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{x+2} - \frac{2}{125}\int\Big(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\Big)dx =$$
$$= -\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{x+2} - \frac{2}{125}\ln|x-3| + \frac{2}{125}\ln|x+2| + C. \quad \square$$

Пример 6.39. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{x^2+2-x^2}{x^2(x^2+2)^2}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2(x^2+2)} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{4}\int\Big(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+2}\Big)dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+2)^2} =$$
$$= -\frac{1}{4x} - \frac{x}{8(x^2+2)} - \frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C. \quad \square$$

Пример 6.40. $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{(x+2)^6}\,dx = \int\frac{(x+2)^3-6(x+2)^2+12(x+2)-9}{(x+2)^6}\,dx =$

$$= \int\frac{dx}{(x+2)^3} - 6\int\frac{dx}{(x+2)^4} + 12\int\frac{dx}{(x+2)^5} - 9\int\frac{dx}{(x+2)^6} =$$
$$= -\frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{3}{(x+2)^4} + \frac{9}{5(x+2)^5} + C. \quad \square$$

Пример 6.41. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3(x-1)^6} = \int\frac{dx}{x^9\Big(\dfrac{x-1}{x}\Big)^6} = \int\frac{(1-z)^7\,dz}{z^6} =$

$$= \int\frac{1-7z+21z^2-35z^3+35z^4-21z^5+7z^6-z^7}{z^6}\,dz =$$
$$= \int\frac{dz}{z^6} - 7\int\frac{dz}{z^5} + 21\int\frac{dz}{z^4} - 35\int\frac{dz}{z^3} + 35\int\frac{dz}{z^2} - 21\int\frac{dz}{z} + 7\int dz - \int z\,dz =$$
$$= -\frac{1}{5z^5} + \frac{7}{4z^4} - \frac{7}{z^3} + \frac{35}{2z^2} - \frac{35}{z} - 21\ln|z| + 7z - \frac{z^2}{2} + C, \quad z = \frac{x-1}{x}. \quad \square$$

Пример 6.42. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(1-x^3)^2} = \int\frac{x^2\,dx}{x^3(1-x^3)^2} = \frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{x^3(1-x^3)^2} =$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{du}{u(1-u)^2} = \frac{1}{3}\int\frac{1}{1-u}\Big(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\Big)du = \frac{1}{3}\int\frac{du}{(1-u)^2} + \frac{1}{3}\int\Big(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\Big)du =$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-u} + \frac{1}{3}\ln\Big|\frac{u}{1-u}\Big| + C = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3-1} + \frac{1}{3}\ln\Big|\frac{x^3}{x^3-1}\Big| + C. \quad \square$$

Пример 6.43. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3(x^2-2)}=\int\frac{x\,dx}{x^4(x^2-2)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^4(x^2-2)}=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2(u-2)}=-\frac{1}{4}\int\frac{u-2-u}{u^2(u-2)}\,du=-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2}+\frac{1}{4}\int\frac{du}{u(u-2)}=$$

$$=\frac{1}{4u}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|+C=\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{8}\ln\frac{|x^2-2|}{x^2}+C. \qquad \square$$

Пример 6.44. $\displaystyle\int\frac{3x^7+5x^3}{(x^8+4)^2}\,dx=\frac{3}{8}\int\frac{d(x^8+4)}{(x^8+4)^2}+\frac{5}{4}\int\frac{dx^4}{((x^4)^2+4)^2}=$

$$=\frac{3}{8}\int\frac{dt}{t^2}+\frac{5}{4}\int\frac{du}{(u^2+4)^2}=-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x^8+4}+\frac{5}{32}\cdot\frac{x^4}{x^8+4}+\frac{5}{64}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{2}+C. \qquad \square$$

Пример 6.45. $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}\,dx=\int\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2}\,dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2}=$

$$=\int\frac{du}{(u+1)^2}=-\frac{1}{u+1}+C=-\frac{x}{x^2+x+1}+C.$$

При интегрировании мы считали, что $x\neq 0$, т. е. искали первообразную на лучах $x>0$ и $x<0$, но, поскольку полученная функция непрерывна в нуле, она будет первообразной и на всей числовой прямой. $\square$

Аналогичная ситуация возникает в следующем примере.

Пример 6.46. $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x^6-1}\,dx=\int\frac{x^4+1-2x^2}{x^6-1}\,dx+2\int\frac{x^2}{x^6-1}\,dx=$

$$=\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx+\frac{2}{3}\int\frac{dx^3}{x^6-1}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right|+\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+C. \qquad \square$$

Пример 6.47. Найдём интеграл $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}\,dx$.

Решение. Сначала будем считать, что $x\neq 0$. Тогда

$$\int\frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}\,dx=\int\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+3+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+5}=$$

$$=\int\frac{du}{u^2+5}=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{5}}+C.$$

Равенства $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{5}}=\frac{\pi}{2}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{5}}=-\frac{\pi}{2}$ показывают, что в точке $x=0$ функция $y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{5}}$ имеет неустранимый разрыв, следовательно, эта функция, будучи первообразной на каждом из лучей $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$, при любом доопределении в нуле не будет являться таковой на любом промежутке, содержащем точку $x=0$. Чтобы получить искомую первообразную на всей числовой прямой, фиксируем одну из первообразных на луче

$(-\infty; 0)$, именно, $F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{5}}$, а на луче $(0; +\infty)$ выберем ту из первообразных $F_2(x)$, которая удовлетворяет условию $\lim\limits_{x\to 0+} F_2(x) = \lim\limits_{x\to 0-} F_1(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$, именно, $F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{5}} + \frac{\pi}{\sqrt{5}}$. Тогда

$$F(x) = \begin{cases} F_2(x), & x > 0, \\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{5}}, & x = 0, \\ F_1(x), & x < 0, \end{cases}$$

будет первообразной подынтегральной функции уже на всей числовой прямой и, следовательно, $\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1} dx = F(x) + C$. □

Отметим, что если найти данный интеграл методом разложения на простейшие дроби, то первообразная $\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}+1}{2} x + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}-1}{2} x\Big)$ будет определена на всей числовой прямой. Однако в тех случаях, когда разложение на простейшие дроби технически сложно, а первообразную достаточно найти на некотором промежутке, эффективен указанный метод.

Пример 6.48. Найдём $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-3)^3}$.

Решение. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-3)^3} = \int x \cdot \frac{x\,dx}{(x^2-3)^3} = \frac{1}{2} \int \frac{x\,d(x^2-3)}{(x^2-3)^3} =$

$$= \frac{1}{2} \int x\Big(-\frac{1}{2} d(x^2-3)^{-2}\Big) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2-3)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x^2-3)^2};$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-3)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{3-x^2+x^2}{(x^2-3)^2} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2-3} + \frac{1}{3} \int x \frac{x\,dx}{(x^2-3)^2} =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| + \frac{1}{3} \int x \frac{d(x^2-3)/2}{(x^2-3)^2} = \frac{1}{6\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| + \frac{1}{6} \int x\, d\Big(\frac{-1}{x^2-3}\Big) =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| - \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{x^2-3} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x^2-3} =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| - \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{x^2-3} - \frac{1}{12\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| + C.$$

Поэтому $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-3)^3} = -\frac{1}{24} \cdot \frac{x}{x^2-3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2-3)^2} + \frac{1}{48\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| + C$. □

Метод Остроградского

Иногда при интегрировании правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ используют метод, суть которого состоит в выделении рациональной части первообразной. Пусть $Q(x)$ имеет хотя бы один кратный корень (рассматриваются корни над полем комплексных чисел). Тогда $Q(x)$ можно представить в виде произведения многочленов: $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$, где многочлен $Q_2(x)$ имеет все те же корни, что и $Q(x)$, и их кратности равны 1 (т. е. эти корни простые). В частности, все простые корни $Q(x)$ будут корнями $Q_2(x)$ и не будут корнями $Q_1(x)$. Тогда справедливо равенство

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx, \tag{3}$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены с неопределёнными коэффициентами, степени которых как минимум на единицу меньше степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ соответственно. Неопределённые коэффициенты многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ вычисляются при помощи дифференцирования равенства (3). Метод Остроградского особенно эффективен, если многочлен $Q(x)$ имеет несколько корней большой кратности.

Для нахождения знаменателя рациональной части можно воспользоваться соотношением $Q_1(x) = \text{НОД}(Q(x), Q'(x))$.

Пример 6.49. Найдём $\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}\,dx$.

Решение. Полагаем $\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}\,dx = \frac{ax+b}{x^2+4x+8} + \int \frac{cx+d}{x^2+4x+8}\,dx$. Дифференцируя это равенство, получаем

$$\frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2} = \frac{a(x^2+4x+8)-(2x+4)(ax+b)}{(x^2+4x+8)^2} + \frac{cx+d}{x^2+4x+8},$$

откуда $2x+12 = a(x^2+4x+8)-(2x+4)(ax+b)+(cx+d)(x^2+4x+8)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях этого равенства, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = c, \\ 0 = a - 2a + d + 4c, \\ 2 = 4a - 4a - 2b + 4d + 8c, \\ 12 = 8a - 4b + 8d, \end{cases}$$

откуда $c=0$, $a=d=b=1$. Следовательно,

$$\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}\,dx = \frac{x+1}{x^2+4x+8} + \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \frac{x+1}{x^2+4x+8} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C. \quad \square$$

§ 6.4. Методы рационализации подынтегрального выражения

Интегрирование функций из некоторых классов сводится к нахождению интеграла от рациональных функций.

6.4.1. Интегрирование функций вида $R(e^x)$, где R — рациональная функция

Полагая $e^x = z$, имеем $R(e^x) = R(z)$ и $dx = \frac{dz}{z}$.

Пример 6.50. Найдём $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx$.

Решение. Полагая $e^x = z$, имеем $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx = \int \frac{z+1}{z-1}\cdot\frac{dz}{z} = \int \frac{2dz}{z-1} - \int \frac{dz}{z} =$ $= 2\ln|z-1| - \ln|z| + C = 2\ln|e^x-1| - \ln e^x + C = \ln(e^x-1)^2 - x + C$. $\square$

6.4.2. Интегрирование функций вида $R(\sin x, \cos x)$, где R — рациональная функция двух аргументов

Методы интегрирования тригонометрических функций в простейших случаях были рассмотрены ранее в п. 6.2.3. Рассмотрим ещё несколько подходов, позволяющих находить интегралы в более сложных ситуациях. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R — рациональная функция, приводятся к интегрированию рациональных функций с помощью универсальной подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, при этом

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Внимание! Применение подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ возможно только на промежутках, не содержащих точек вида $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Далее это подразумевается.

Пример 6.51. $\displaystyle\int\frac{dx}{3\sin x + \cos x} = \int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = -2\int\frac{dt}{t^2-6t-1} =$

$$= -2\int\frac{dt}{(t-3)^2-10} = -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t-3-\sqrt{10}}{t-3+\sqrt{10}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3+\sqrt{10}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3-\sqrt{10}}\right| + C. \ \square$$

Подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, являющаяся универсальной для интегралов от рациональных выражений, содержащих функции $\sin x$ и $\cos x$, нередко приводит к сложным выкладкам. Рассмотрим некоторые случаи, когда подынтегральная функция приводится к рациональной более простым способом.

I. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагают $t = \cos x$.

II. Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагают $t = \sin x$.

III. Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то полагают $t = \operatorname{tg} x$.

Замечание. Любое рациональное выражение $R(u, v)$ всегда можно представить в виде суммы трёх выражений, приведённых в пунктах I, II, III:

$$R(u,v) = \frac{R(u,v)-R(-u,v)}{2} + \frac{R(-u,v)-R(-u,-v)}{2} + \frac{R(-u,-v)+R(u,v)}{2}.$$

Пример 6.52. Найдём $\displaystyle\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x(\sin x + \cos x)}$.

Решение. Поскольку $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, полагаем $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x(\sin x+\cos x)} = \int\frac{\operatorname{tg} x\,d\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = -\ln|1+\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x + C. \qquad \square$$

Пример 6.53. Найдём $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{4\cos^2 x + 12\cos x - 7}\,dx$.

Решение. Поскольку

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

полагаем $t=\cos x$:

$$\int \frac{\sin 2x}{4\cos^2 x+12\cos x-7}\,dx = \int \frac{-2t\,dt}{4\left(t^2+3t+\frac{9}{4}\right)-16} = -\frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-4} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{u\,du}{u^2-4} + \frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2-4} = -\frac{1}{4}\ln|u^2-4| + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\left(\cos x+\frac{3}{2}\right)^2-4\right| + \frac{3}{16}\ln\frac{\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|}{\cos x+\frac{7}{2}} + C. \qquad \square$$

Пример 6.54. Найдём $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x+1}$.

Решение. Поскольку $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, полагаем $t=\sin x$:

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x+1} = \int \frac{d\sin x}{1+\sin^4 x+(1-\sin^2 x)^2+2\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^4+1} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}\,dt - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}\,dt = \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\frac{\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x+1}{\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x+1} +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\sin x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\sin x-1)) + C. \qquad \square$$

Если это не нарушает рациональности подынтегрального выражения, полезно понизить степени $\sin x$ и $\cos x$, используя переход к кратным углам.

Пример 6.55. Найдём $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^6 x+\sin^6 x}$.

Решение. Применяя формулы $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, имеем $\cos^6 x+\sin^6 x = \dfrac{1}{4}(1+3\cos^2 2x)$. Полагая $t=\operatorname{tg} 2x$, находим

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x+\sin^6 x} = \int \frac{4\,dx}{1+3\cos^2 2x} = 2\int \frac{dt}{t^2+4} = \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2} + C. \qquad \square$$

Рассмотрим некоторые специальные методы.

Пример 6.56. Найдём $\displaystyle\int \frac{\sin x-3\cos x}{4\sin x+5\cos x}\,dx$.

Решение. Представим числитель $\sin x-3\cos x$ в виде линейной комбинации знаменателя $4\sin x+5\cos x$ и его производной, т. е.

$$\sin x-3\cos x = A(4\sin x+5\cos x)+B(4\cos x-5\sin x).$$

Для нахождения коэффициентов A и B составим систему

$$\begin{cases} 1 = 4A-5B, \\ -3 = 5A+4B, \end{cases} \quad \text{откуда } A = -\frac{11}{41},\ B = -\frac{17}{41}, \quad \text{поэтому}$$

$$\int \frac{\sin x-3\cos x}{4\sin x+5\cos x}\,dx = -\frac{11}{41}\int \frac{4\sin x+5\cos x}{4\sin x+5\cos x}\,dx - \frac{17}{41}\int \frac{d(4\sin x+5\cos x)}{4\sin x+5\cos x} =$$

$$= -\frac{11}{41}x - \frac{17}{41}\ln|4\sin x+5\cos x| + C. \qquad \square$$

Пример 6.57. Найдём $\int \frac{2\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 2}\,dx$.

Решение. Представим числитель $2\sin x + \cos x - 1$ в виде линейной комбинации знаменателя $\sin x - \cos x + 2$, его производной и константы, т. е.

$$2\sin x + \cos x - 1 = A(\sin x - \cos x + 2) + B(\cos x + \sin x) + D.$$

Для нахождения коэффициентов A, B и D получаем систему

$$\begin{cases} 2 = A + B, \\ 1 = -A + B, \\ -1 = 2A + D, \end{cases} \qquad \text{откуда } B = \frac{3}{2},\ A = \frac{1}{2},\ D = -2. \text{ Поэтому}$$

$$\int \frac{2\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin x - \cos x + 2}{\sin x - \cos x + 2}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x + 2}\,dx - 2\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2} =$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\ln(\sin x - \cos x + 2) - 4\int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 1} =$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\ln(\sin x - \cos x + 2) - 2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} + C. \qquad \square$$

Пример 6.58. Найдём $\int \frac{2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x}{\sin x - 2\cos x}\,dx$.

Решение. Представим выражение $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x$ в виде

$$(A\sin x + B\cos x)(\sin x - 2\cos x) + D(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Для нахождения коэффициентов A, B и D составим систему

$$\begin{cases} 2 = A + D, \\ 3 = B - 2A, \\ 5 = -2B + D, \end{cases} \qquad \text{откуда } A = -\frac{9}{5},\ B = -\frac{3}{5},\ D = \frac{19}{5}. \quad \text{Поэтому}$$

$$\int \frac{2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x}{\sin x - 2\cos x}\,dx = \frac{9}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x + \frac{19}{5}\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x} =$$
$$= \frac{9}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x + \frac{19}{5}\int \frac{2\,d\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 2} =$$
$$= \frac{9}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x + \frac{19}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + C. \qquad \square$$

6.4.3. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Биномиальными называют дифференциалы вида $x^m(a + bx^n)^p\,dx$, где a, b — отличные от нуля постоянные, m, n, p — рациональные числа.

Первообразная функции $x^m(a + bx^n)^p$ элементарна лишь в следующих трёх случаях: 1) p — целое, 2) $\frac{m+1}{n}$ — целое, 3) $\frac{m+1}{n} + p$ — целое.

1) Если p — целое, то полагают $x = z^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n.

Пример 6.59. Найдём $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$.

Решение. Положим $x = z^6$, $z \geqslant 0$, поскольку $p = -2$ — целое. Тогда $\sqrt{x} = z^3$, $\sqrt[3]{x} = z^2$, $dx = 6z^5\,dz$, поэтому

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx = 6\int \frac{z^8\,dz}{(1+z^2)^2} = 6\int\Bigl(z^4 - 2z^2 + 3 - \frac{4z^2+3}{(1+z^2)^2}\Bigr)dz =$$
$$= \frac{6}{5}z^5 - 4z^3 + 18z - 18\operatorname{arctg} z - 6\int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^2},$$
$$\int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2}\int z\,d\frac{1}{1+z^2} = -\frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx = \frac{6}{5}z^5 - 4z^3 + 18z + \frac{3z}{1+z^2} - 21\operatorname{arctg} z + C, \quad z = \sqrt[6]{x}. \qquad \square$$

2) Если $\dfrac{m+1}{n}$ — целое, то полагают $a + bx^n = z^N$, где N — знаменатель дроби p.

Пример 6.60. Найдём $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^{2/3}}}$.

Решение. Положим $1 + x^{2/3} = z^2$, поскольку $\dfrac{m+1}{n} = 3$ — целое. Тогда

$$x = (z^2-1)^{3/2}, \quad dx = \frac{3}{2}(z^2-1)^{1/2}\cdot 2z\,dz.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^{2/3}}} = 3\int (z^2-1)^2\,dz = \frac{3}{5}z^5 - 2z^3 + 3z + C, \quad z = \sqrt{1+x^{2/3}}. \qquad \square$$

3) Если $\dfrac{m+1}{n} + p$ — целое, полагают $ax^{-n} + b = z^N$, где N — знаменатель дроби p.

Пример 6.61. Найдём $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. Положим $z^4 = 1 + x^{-4}$, поскольку $\dfrac{m+1}{n} + p = 0$ — целое. Тогда

$$x = (z^4-1)^{-1/4}, \quad dx = -z^3(z^4-1)^{-5/4}\,dz, \quad \sqrt[4]{1+x^4} = z(z^4-1)^{-1/4}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{z^2\,dz}{z^4-1} = \frac{1}{4}\int\Bigl(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1}\Bigr)dz - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1} =$$
$$= \frac{1}{4}\ln\Bigl|\frac{z+1}{z-1}\Bigr| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C, \quad z = (1+x^{-4})^{1/4}. \qquad \square$$

6.4.4. Интегрирование некоторых алгебраических функций

А. Интегрирование функций вида $R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$, где R — рациональная функция двух аргументов, m — натуральное число, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — константы.

При интегрировании таких функций полагают $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^m$, тогда x будет некоторой рациональной функцией $\varphi(t)$ и интеграл запишется в виде

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)\,dt,$$

где подынтегральная функция есть рациональная функция t.

Пример 6.62. Найдём $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Положим $\sqrt{x}=t$, тогда $\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}=dt$, т. е. $dx=2t\,dt$,

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{t+1}{t^4-t}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t+1}{t^3-1}\,dt.$$

Разлагая рациональную функцию $\dfrac{t+1}{t^3-1}$ в сумму простейших дробей, имеем

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{2}{3}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt = \frac{4}{3}\ln|t-1| - \frac{2}{3}\ln|t^2+t+1| + C =$$

$$= \frac{2}{3}\ln\frac{t^2-2t+1}{t^2+t+1} + C = \frac{2}{3}\ln\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + C. \quad \square$$

Пример 6.63. Найдём $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

Решение. Положим $\sqrt[4]{x}=t$, тогда $\dfrac{x^{-3/4}}{4}\,dx=dt$, т. е. $dx=4t^3\,dt$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = 4\int \frac{t^3\,dt}{t^2+t} = 4\int \frac{t^2\,dt}{t+1} = 4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 4\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x}+1) + C. \quad \square$$

Пример 6.64. Найдём $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию к виду

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \frac{1}{(x+2)^2}\sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3}.$$

Полагая $\dfrac{x+2}{x-1}=t^4$, имеем $x=\dfrac{2+t^4}{t^4-1}$, $x+2=\dfrac{3t^4}{t^4-1}$, $dx=\dfrac{-12t^3}{(t^4-1)^2}\,dt$, тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \int \sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3}\cdot\frac{dx}{(x+2)^2} = \int t^3\cdot\frac{(t^4-1)^2}{9t^8}\cdot\frac{(-12t^3)}{(t^4-1)^2}\,dt =$$

$$= \int -\frac{4}{3}\cdot\frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{t} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C. \quad \square$$

В. Интегрирование функций вида $\dfrac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где R — рациональная функция.

Выделяя из рациональной дроби $R(x)$ целую часть — многочлен $\Phi(x)$: $R(x)=\Phi(x)+\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — и раскладывая правильную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей, видим, что интегрирование функций $\dfrac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводится к нахождению интегралов следующих типов:

I. $\displaystyle\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, $P(x)$ — многочлен;

II. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-x_0)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, A — константа;

III. $\displaystyle\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, B, D — константы и трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Укажем методы, позволяющие найти эти интегралы.

I. Можно показать, что первообразную функции $\dfrac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P(x)$ — многочлен степени n, следует искать в виде

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{4}$$

где $Q(x)$ — многочлен степени $n-1$, λ — некоторая константа. Коэффициенты многочлена $Q(x)$ и λ находятся дифференцированием тождества (4).

Пример 6.65. Найдём $\displaystyle\int \frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

Решение. Полагаем

$$\int \frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{x^2+x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Дифференцируя это тождество, имеем

$$\frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}} = (2\alpha x+\beta)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

откуда $2(x^3-2)=(4\alpha x+2\beta)(x^2+x+1)+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)(2x+1)+2\lambda$. Для нахождения неопределённых коэффициентов α, β, γ и λ получаем систему

$$\begin{cases} 2 = 4\alpha+2\alpha,\\ 0 = 4\alpha+2\beta+\alpha+2\beta,\\ 0 = 4\alpha+2\beta+\beta+2\gamma,\\ -4 = 2\beta+\gamma+2\lambda,\end{cases}$$

откуда $\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\beta=-\dfrac{5}{12}$, $\gamma=-\dfrac{1}{24}$, $\lambda=-\dfrac{25}{16}$. Следовательно,

$$\int \frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{12}x-\frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{25}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{12}x-\frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{25}{16}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C. \quad \square$$

II. Интеграл вида $\int \frac{A\,dx}{(x-x_0)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ подстановкой $x-x_0=\frac{1}{t}$ приводится к виду, рассмотренному выше.

Пример 6.66. Найдём $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. Положим $x=\frac{1}{t}$, тогда $dx=-\frac{1}{t^2}\,dt$ и при $t>0$ имеем

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{t^3\,dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\int \frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt =$$

$$= -\int \sqrt{t^2+1}\,dt + \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + C =$$

$$= -\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + C, \quad t=\frac{1}{x}. \qquad \square$$

III. Рассмотрим интеграл $\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. Предположим вначале, что $ax^2+bx+c=a(x^2+px+q)$. Тогда

$$\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{B_1x+D_1}{(x^2+px+q)^{m+1/2}}\,dx.$$

Поскольку $B_1x+D_1=\frac{B_1}{2}(2x+p)+D_1-\frac{B_1p}{2}$, получаем

$$\int \frac{B_1x+D_1}{(x^2+px+q)^{m+1/2}}\,dx = \frac{B_1}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^{m+1/2}} + \left(D_1-\frac{B_1p}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m+1/2}}.$$

Первый из полученных интегралов табличный.

Для нахождения интеграла $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m+1/2}}$ применяется *подстановка Абеля*: $t=\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'$.

В общем случае, т. е. если отношение трёхчленов ax^2+bx+c и x^2+px+q непостоянно, в интеграле делают замену переменной так, чтобы во вновь полученных трёхчленах одновременно исчезли члены с первой степенью. Это достигается, например, с помощью дробно-линейной подстановки $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$, если $p\neq\frac{b}{a}$, и $x=t-\frac{p}{2}$, если $p=\frac{b}{a}$.

В результате получаем интеграл $\int \frac{Bt+D}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\delta t^2+r}}\,dt$. Для нахождения этого интеграла представим его в виде

$$\int \frac{Bt\,dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\delta t^2+r}} + D\int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\delta t^2+r}}.$$

К первому из этих интегралов применяем подстановку $u=\sqrt{\delta t^2+r}$, а ко второму — подстановку $v=\left(\sqrt{\delta t^2+r}\right)'$.

Пример 6.67. Найдём $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+x+2)^5}}$.

Решение. Полагаем $t=\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$, тогда $4t^2(x^2+x+2)=$ $=4x^2+4x+1=4(x^2+x+2)-7$, откуда $x^2+x+2=\frac{-7}{4t^2-4}$. Дифференцируя равенство $t\sqrt{x^2+x+2}=x+\frac{1}{2}$, получаем $dt\sqrt{x^2+x+2}+\frac{(2x+1)t\,dx}{2\sqrt{x^2+x+2}}=dx$, откуда $dt\sqrt{x^2+x+2}+t^2\,dx=dx$. Итак, $\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{dt}{1-t^2}$, поэтому

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+2)^{5/2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}\cdot\frac{1}{(x^2+x+2)^2}=\int\frac{dt}{1-t^2}\cdot\frac{(4t^2-4)^2}{49}=$$
$$=\frac{16}{49}\int(1-t^2)\,dt=\frac{16}{49}\Big(t-\frac{t^3}{3}\Big)+C=\frac{16}{49}\bigg(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}-\frac{1}{24}\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\Big)^3\bigg)+C. \quad\square$$

Пример 6.68. Найдём $\int\frac{(x+2)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. Имеем

$$\int\frac{x+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\,dx=\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}+\int\frac{2\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}};$$
$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{(u+1)\sqrt{u+2}}=\frac{1}{2}\int\frac{2z\,dz}{(z^2-1)z}=$$
$$=\int\frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{z-1}{z+1}\Big|+C=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}+C.$$

Для нахождения интеграла $\int\frac{2\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$ положим $t=(\sqrt{x^2+2})'=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Тогда $t^2=\frac{x^2}{x^2+2}$, т.е. $x^2=\frac{2t^2}{1-t^2}$, $t\sqrt{x^2+2}=x$, $dt\cdot\sqrt{x^2+2}+\frac{xt\,dx}{\sqrt{x^2+2}}=dx$, $\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{dt}{1-t^2}$. Следовательно,

$$\int\frac{2\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int\frac{2\,dt}{1-t^2}\cdot\frac{1}{\frac{2t^2}{1-t^2}+1}=\int\frac{2\,dt}{1+t^2}=2\operatorname{arctg}t+C=2\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+C,$$
$$\int\frac{x+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}+2\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+C. \quad\square$$

Замечание. Интеграл $\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$ на каждом из лучей $x>0$ и $x<0$ заменой $u=\frac{1}{x^2}$ сводится к интегралу вида $\int\frac{-du}{(u+1)\sqrt{1+2u}}$.

Пример 6.69. Найдём $\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Решение. Поскольку отношение трёхчленов x^2-x+1 и x^2+1 не константа, полагаем $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$. Тогда

$$x^2-x+1=\frac{\alpha^2t^2+2\alpha t\beta+\beta^2-(\alpha t+\beta)(t+1)+t^2+2t+1}{(t+1)^2}.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при t в числителе полученной дроби, получаем соотношение между α и β: $2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0$. Поскольку

$$x^2+1=\frac{\alpha^2t^2+2\alpha t\beta+\beta^2+t^2+2t+1}{(t+1)^2},$$

то, приравнивая к нулю коэффициент при t в числителе этой дроби, находим ещё одно соотношение между α и β: $2\alpha\beta+2=0$. Из системы

$$\begin{cases} 2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0, \\ 2\alpha\beta+2=0 \end{cases}$$

получаем $-\alpha=\beta=-1$. Следовательно, в данном интеграле следует сделать замену $x=\dfrac{t-1}{t+1}$. Тогда имеем $x^2-x+1=\dfrac{t^2+3}{(t+1)^2}$, $x^2+1=\dfrac{2t^2+2}{(t+1)^2}$, поэтому

$$11x-13=\frac{-2t-24}{t+1}, \quad dx=\frac{2}{(t+1)^2}\,dt,$$

$$\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx=-2\sqrt{2}\int\frac{t+12}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}\,dt.$$

Далее, имеем

$$\int\frac{t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}=\int\frac{d\sqrt{t^2+1}}{t^2+3}=\int\frac{du}{u^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}}+C.$$

В интеграле $\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}$ сделаем подстановку $z=\left(\sqrt{t^2+1}\right)'$. Получим $\dfrac{dz}{1-z^2}=\dfrac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$, $t^2+3=\dfrac{3-2z^2}{1-z^2}$,

$$\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}=\int\frac{dz}{3-2z^2}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+z\sqrt{2}}{\sqrt{3}-z\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right|+C.$$

Следовательно,

$$\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx=-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}}-4\sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right|+C,$$

где $t=\dfrac{1+x}{1-x}$. □

Пример 6.70. Найдём $\displaystyle\int\frac{x^4+x^3+4x-7}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Решение. Выделяя из дроби $\dfrac{x^4+x^3+4x-7}{x^3+1}$ правильную часть, получаем

$$\frac{x^4+x^3+4x-7}{x^3+1}=x+1+\frac{3x-8}{x^3+1}.$$

Разложим дробь $\dfrac{3x-8}{x^3+1}$ в сумму простейших дробей: $\dfrac{3x-8}{x^3+1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+D}{x^2-x+1}$, откуда $3x-8=A(x^2-x+1)+(Bx+D)(x+1)$. Полагая в этом равенстве

$x=-1$, находим $A=-11/3$. Из равенств $A+B=0$ и $A+D=-8$ находим $A=-B=-\frac{11}{3}$, $D=-\frac{13}{3}$. Следовательно,

$$\int\frac{x^4+x^3+4x-7}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx-\frac{11}{3}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{3}\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx;$$

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\sqrt{x^2+1}+\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\,\big)+C.$$

При $x+1>0$ имеем

$$-\frac{11}{3}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=-\frac{11}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{1-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}}}=$$

$$=\frac{11}{3}\int\frac{du}{\sqrt{1-2u+2u^2}}=\frac{11}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}}\right|+C.$$

Таким образом,

$$\int\frac{x^4+x^3+4x-7}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx=\sqrt{x^2+1}+\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\,\big)+$$

$$+\frac{11}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}\right|+\frac{1}{3}\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx=$$

$$=\sqrt{x^2+1}+\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\,\big)+\frac{11}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}\right|-$$

$$-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}-\frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{6(x^2+1)}+\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{6(x^2+1)}-\sqrt{2}(x+1)}\right|+C.$$

Нахождение последнего интеграла разобрано в предыдущем примере. □

Задачи

Используя таблицу простейших интегралов, найти интеграл (6.1—6.32).

✓**6.1°.** $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)dx.$ **6.2°.** $\int(2-3\sqrt{x})^2\,dx.$

✓**6.3°.** $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$ **6.4°.** $\int\left(\frac{x+1}{x}\right)^2dx.$ **6.5°.** $\int\frac{(x+1)^3}{x^2}\,dx.$

✓**6.6°.** $\int\frac{x^2}{1-x^2}\,dx.$ **6.7°.** $\int\frac{4-x^2}{3+x^2}\,dx.$ ✓**6.8.** $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2-3)}.$

6.9. $\int\frac{dx}{x^4-1}.$ **6.10.** $\int\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}\,dx.$ **6.11.** $\int\frac{(x+1)^2}{x(x^2+1)}\,dx.$

✓**6.12.** $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$ **6.13.** $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$

✓**6.14°.** $\int\frac{dx}{2x^2+3}.$ **6.15°.** $\int\frac{dx}{3x^2-7}.$ **6.16°.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}.$

✓**6.17°.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+5}}.$ **6.18°.** $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-7}}.$ ✓**6.19°.** $\int(5^x-2^x)^2\,dx.$

6.20°. $\int\frac{2^{2x-1}-3^{2x+3}}{6^{2x}}\,dx.$ **6.21°.** $\int 2^x\cdot3^x\cdot5^x\,dx.$ **6.22°.** $\int\frac{2^x\cdot3^{2x}\cdot4^{3x}}{5^x\cdot6^{2x}}\,dx.$

✓**6.23°.** $\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}\,dx.$ **6.24°.** $\int \frac{2^{2x}-1}{\sqrt{2^x}}\,dx.$ ✓**6.25°.** $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx.$

6.26°. $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx.$ ✓**6.27°.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}.$ **6.28.** $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^2 2x}.$

✓**6.29.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$ **6.30.** $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx.$

6.31°. $\int (2\operatorname{ch} x-3\operatorname{sh} x)\,dx.$ **6.32.** $\int \operatorname{th}^2 x\,dx.$

Используя таблицу простейших интегралов и свойства на с. 219, найти интеграл (6.33—6.103).

✓**6.33°.** $\int \frac{dx}{x-1}.$ ✓**6.34°.** $\int \frac{dx}{2x+3}.$ **6.35°.** $\int \frac{x+2}{x+1}\,dx.$

6.36°. $\int \frac{x\,dx}{2x+1}.$ **6.37°.** $\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}.$ **6.38.** $\int \frac{x+3}{(x+2)(x-1)}\,dx.$

✓**6.39°.** $\int (x-1)^{10}\,dx.$ ✓**6.40°.** $\int (2x+5)^{17}\,dx.$ **6.41°.** $\int \frac{dx}{(1-3x)^{30}}.$

✓**6.42°.** $\int \sqrt{4x+1}\,dx.$ **6.43°.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}.$ **6.44°.** $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(3x+1)^4}}.$

✓**6.45°.** $\int \sin 5x\,dx.$ **6.46°.** $\int \cos\frac{x}{7}\,dx.$ ✓**6.47°.** $\int \frac{dx}{\sin^2 7x}.$

6.48°. $\int \frac{dx}{\cos^2 8x}.$ ✓**6.49.** $\int \sin^2 x\,dx.$ **6.50.** $\int \cos^2 x\,dx.$

6.51. $\int (\sin x+2\cos x)^2\,dx.$ ✓**6.52°.** $\int \cos\alpha x\sin\beta x\,dx,\ \alpha\neq\beta,\ \alpha\neq-\beta.$

6.53°. $\int \cos\alpha x\cos\beta x\,dx,\ \alpha\neq\beta,\ \alpha\neq-\beta.$

6.54°. $\int \sin\alpha x\sin\beta x\,dx,\ \alpha\neq\beta,\ \alpha\neq-\beta.$

6.55. $\int \sin^2 x\cos\alpha x\,dx,\ \alpha\neq\pm2,\ \alpha\neq0.$

6.56. $\int \cos^3 x\sin\beta x\,dx,\ \beta\neq\pm1,\ \beta\neq\pm3.$

✓**6.57°.** $\int x(x-2)^5\,dx.$ **6.58.** $\int (2x+3)^2(1-x)^8\,dx.$

6.59. $\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx.$ **6.60.** $\int \frac{x^2+1}{2x-1}\,dx.$ ✓**6.61.** $\int x\sqrt{1-2x}\,dx.$

6.62. $\int (x+2)\sqrt{x-2}\,dx.$ ✓**6.63.** $\int \frac{2x-7}{\sqrt{3x+1}}\,dx.$

✓**6.64°.** $\int x(1-x^2)^5\,dx.$ **6.65°.** $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}.$ **6.66°.** $\int \frac{x^2\,dx}{x^6-5}.$

6.67. $\int \frac{x^3\,dx}{x^2-4}.$ **6.68°.** $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx.$ **6.69°.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

✓**6.70.** $\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}}\,dx.$ **6.71.** $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx.$ **6.72.** $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-10}}\,dx.$

6.73. $\int \frac{1-4x}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx.$ **6.74°.** $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^5+3}}.$ ✓**6.75°.** $\int \frac{dx}{x\ln^5 x}.$

6.76°. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ **6.77°.** $\int \frac{dx}{x(\ln x+3)}.$ **6.78°.** $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+2)}.$

6.79°. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}\,dx.$ ✓**6.80°.** $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+1}.$ **6.81.** $\int \frac{e^x+e^{2x}}{1-e^x}\,dx.$

6.82. $\int \sqrt{e^{3x}+e^{2x}}\,dx.$ **6.83°.** $\int x\sin x^2\,dx.$ **6.84°.** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,dx.$

6.85°. $\int e^x\cos e^x\,dx.$ ✓**6.86°.** $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$ ✓**6.87.** $\int \frac{dx}{\cos x}.$

✓**6.88°.** $\int \operatorname{tg} x\,dx.$ **6.89°.** $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$ **6.90°.** $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}.$

6.91°. $\int \frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^3}\,dx.$ **6.92.** $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1-4\sin^2 x}}.$ **6.93°.** $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2-\sin^2 x}}.$

6.94°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)}.$ **6.95°.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1+\operatorname{tg} x)}.$ ✓**6.96.** $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^4 x}}\,dx.$

6.97°. $\int \frac{\operatorname{arcctg} 3x}{9x^2+1}\,dx.$ ✓**6.98.** $\int \frac{x+\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{4x^2+1}\,dx.$

6.99. $\int \frac{\arcsin x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ **6.100.** $\int \frac{x+\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$

6.101. $\int \frac{x+\arccos^{3/2} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ ✓**6.102.** $\int (\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x)^2\,dx.$

6.103. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}^2 x}.$

Применяя интегрирование по частям, найти интеграл (6.104—6.125).

✓**6.104°.** $\int x\sin x\,dx.$ **6.105.** $\int x\cos^2 x\,dx.$ **6.106.** $\int x\sin^3 x\,dx.$

6.107. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx.$ ✓**6.108.** $\int x\operatorname{ctg}^2 x\,dx.$ **6.109.** $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

✓**6.110°.** $\int \ln^2 x\,dx.$ **6.111°.** $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$ **6.112.** $\int x^2\ln(1+x)\,dx.$

✓**6.113.** $\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx.$ **6.114.** $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,dx.$ ✓**6.115°.** $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$

6.116°. $\int \arccos x\,dx.$ **6.117.** $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx.$

6.118. $\int x\arcsin x\,dx.$ ✓**6.119.** $\int \frac{3+2x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x\,dx.$

✓**6.120.** $\int x\arccos\frac{1}{x}\,dx.$ ✓**6.121.** $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx \quad (\alpha^2+\beta^2\neq 0).$

6.122. $\int \cos^2(\ln x)\,dx.$ ✓**6.123.** $\int \sqrt{2-x^2}\,dx.$

6.124. $\int \sqrt{x^2+3}\,dx.$ **6.125.** $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx.$

Применяя различные замены и подстановки, найти интеграл (6.126—6.149).

✓**6.126.** $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx.$ **6.127.** $\int \sin^7 x\,dx.$

6.128. $\int \sin^5 x\cos^2 x\,dx.$ **6.129.** $\int \sin^4 x\,dx.$

✓**6.130.** $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx.$ **6.131.** $\int \cos^6 x\,dx.$

6.132. $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^2 x}\,dx.$ **6.133.** $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx.$ **6.134.** $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x}\,dx.$

6.135. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx.$ ✓**6.136.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}.$ **6.137.** $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx.$

6.138. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx.$ ✓**6.139.** $\int \frac{dx}{\sin^5 x}.$ ✓**6.140.** $\int \operatorname{ctg}^5 x\,dx.$

6.141. $\int \frac{\cos^7 x}{\sin^3 x}\,dx.$ **6.142.** $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\,dx.$ **✓6.143.** $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^3 x}.$

✓6.144.[1] $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$ **6.145.** $\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx.$

✓6.146. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx.$ **✓6.147.** $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx.$

✓6.148. $\int \frac{x^4}{(x^2+a^2)^2}\,dx.$ **6.149.** $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}.$

Найти интеграл от трансцендентной функции (6.150—6.155).

✓6.150. $\int 5^{\sqrt{x}}\,dx.$ **6.151.** $\int x\cos\sqrt{x}\,dx.$

6.152*. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,dx.$ **6.153*.** $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx.$

✓6.154*. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx.$ **6.155*.** $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Применяя методы интегрирования простейших выражений, содержащих квадратный трёхчлен, найти интеграл (6.156—6.177).

✓6.156. $\int \frac{2x-5}{x^2+x+3}\,dx.$ **6.157.** $\int \frac{1-2x}{2x^2-4x-6}\,dx.$

✓6.158. $\int \frac{7-3x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$ **6.159.** $\int \frac{4x-11}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx.$

✓6.160. $\int \frac{\ln x+2}{x\sqrt{1-\ln x-\ln^2 x}}\,dx.$ **6.161.** $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-4\sin x+\cos^2 x}}\,dx.$

6.162. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+4}\,dx.$ **6.163.** $\int \frac{e^{2x}+3e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}\,dx.$

6.164. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-5e^x+6}}.$ **✓6.165.** $\int (x+2)\sqrt{x^2+x+1}\,dx.$

6.166. $\int (1-3x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx.$ **✓6.167.** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$

6.168. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{4x^2-10x+7}}.$ **6.169.** $\int \frac{x^3+x}{x^4-x^2-1}\,dx.$

6.170. $\int \frac{x^3}{x^4-x^2+5}\,dx.$ **✓6.171.** $\int \frac{x-x^3}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx.$

6.172. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}.$ **6.173.** $\int \frac{(x+1)^2}{x\sqrt{x^2+3x+1}}\,dx,\ x>0.$

6.174. $\int (x^3+x)\sqrt{x^4+1}\,dx.$ **6.175.** $\int \sqrt{\cos 2x}\cos x\,dx.$

6.176. $\int \sqrt{\cos 2x}\sin x\,dx.$ **6.177.** $\int \frac{1+\sin x}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}\,dx.$

Найти интеграл от рациональной функции (6.178—6.197).

✓6.178°. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}.$ **✓6.179.** $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}.$

6.180. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}.$ **✓6.181°.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$

6.182. $\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx.$ **✓6.183.** $\int \frac{dx}{x^3+1}.$ **✓6.184.** $\int \frac{dx}{x^4+1}.$

[1] В задачах 6.144—6.149 считать $a>0$.

6.185. $\int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx.$ ✓**6.186.** $\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$

6.187. $\int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2}.$ ✓**6.188.** $\int \frac{dx}{x^4(x-2)^3}.$

6.189. $\int \frac{2x^2-x^5}{x^6+1}\,dx.$ ✓**6.190.** $\int \frac{x^7}{(x^4+1)^2}\,dx.$ **6.191.** $\int \frac{x^{11}}{(x^6+1)^3}\,dx.$

✓**6.192.** $\int \frac{dx}{x(x^3+1)^2}.$ **6.193.** $\int \frac{dx}{x^4(x^6+1)}.$ ✓**6.194.** $\int \frac{x^2+1}{x^4+5x^2+1}\,dx.$

6.195. $\int \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\,dx.$ **6.196.** $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx.$ **6.197*.** $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx.$

Применяя подходящие методы рационализации подынтегральной функции, найти интеграл (6.198—6.254).

✓**6.198.** $\int \frac{dx}{e^x(e^{4x}-1)}.$ **6.199.** $\int \frac{e^x-4}{e^x+4}\,dx.$ **6.200.**[1] $\int \frac{dx}{3+\sin x}.$

✓**6.201.** $\int \frac{dx}{1+5\cos x}.$ ✓**6.202.** $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+6}.$ **6.203.** $\int \frac{\cos x\,dx}{2-\cos x}.$

✓**6.204.** $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$ **6.205.** $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$ **6.206.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x-\sin 2x}.$

6.207. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x+1)^2}.$ **6.208°.** $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x-3\cos x+2}.$

6.209. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x-3\sin x+2}.$ **6.210.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x-5\cos x+6}.$

✓**6.211.** $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$ ✓**6.212.** $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx.$

6.213. $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx.$ ✓**6.214.** $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}.$ **6.215.** $\int \frac{dx}{1+\operatorname{ctg} x}.$

6.216. $\int \frac{\sin x}{2\sin x+3\cos x}\,dx.$ **6.217°.** $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx.$

6.218. $\int \frac{\cos 2x}{1+\cos^2 x}\,dx.$ **6.219.** $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^5 x\cos x+\cos^5 x\sin x}.$

6.220. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x+3\cos x}\,dx.$ **6.221.** $\int \frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx.$

6.222°. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}\,dx.$ **6.223.** $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$

6.224. $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(4+\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg}^3 x}\,dx.$ ✓**6.225.** $\int \frac{\sin x+\cos x+1}{2\sin x+\cos x+2}\,dx.$

6.226. $\int \frac{2\sin x+\cos x}{(2\cos x-3\sin x)^2}\,dx.$ **6.227.** $\int \frac{1+3\sin^2 x+2\sin x\cos x}{\sin x-2\cos x}\,dx.$

✓**6.228.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}.$ ✓**6.229.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ ✓**6.230.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}.$

6.231. $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^7}}.$ **6.232.** $\int \frac{dx}{x^2(x^3+2)^{5/3}}.$ ✓**6.233.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

6.234. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x^3}}\,dx.$ **6.235.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x+1)^2}}.$ ✓**6.236.** $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx.$

6.237. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^7}}.$ **6.238.** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{x}}.$ **6.239.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}.$

[1] В задачах 6.200—6.227 при необходимости можно считать, что интеграл рассматривается на промежутке, не содержащем точек вида $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

6.240. $\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x}}$. **6.241.** $\int x\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}\,dx$, $x>3$. ✓**6.242.** $\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

✓**6.243.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$. **6.244.** $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **6.245.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$.

✓**6.246.** $\int \frac{x-1}{(x^2+1)\sqrt{3-x^2}}\,dx$. **6.247.** $\int \frac{x^4-5x^3+6x-7}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$.

✓**6.248.** $\int \frac{dx}{(x^2+x)^{3/2}}$. **6.249.** $\int \frac{x^2+3x+1}{(x^2+2x-1)^{5/2}}\,dx$.

6.250. $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2+2}\,dx$. **6.251.** $\int (x+1)\sqrt{x^2+4x+1}\,dx$.

6.252. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x-2}}$, $x>2$. ✓**6.253.** $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}\,dx$, $x>0$.

6.254. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2x-1}}\,dx$, $x>1+\sqrt{2}$.

Применяя различные методы, найти интегралы (6.255—6.412).

6.255. $\int \sqrt[15]{1+4x}\,dx$. **6.256.** $\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$, $x\in\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$.

6.257. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}$. ✓**6.258.** $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos^2 x}$. **6.259.** $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

6.260. $\int \frac{dx}{x\ln x-x}$. **6.261.** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2\ln x+x^3}}\,dx$.

6.262. $\int x^x(1+\ln x)\,dx$. ✓**6.263.** $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ $(a>0)$.

✓**6.264.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a>0)$. **6.265.** $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+4}\,dx$.

6.266. $\int \frac{dx}{e^{2x}+6}$. **6.267.** $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$.

6.268. $\int \frac{x-1}{x^3+1}\,dx$. **6.269.** $\int \frac{x^3+1}{x^2(1-x)}\,dx$. **6.270.** $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x)^2(2+x)^2}$.

6.271. $\int \frac{dx}{(1+x)^3(1-x)^2}$. **6.272.** $\int \frac{dx}{(x+1)(1+x^2)^2}$.

6.273. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2(2+x^2)^2}$. **6.274.** $\int \frac{x^2+4}{(x-2)^4}\,dx$.

✓**6.275.** $\int \frac{2x^3-1}{(2x+1)^5}\,dx$. **6.276.** $\int \frac{2x^3-1}{x(x^3+1)}\,dx$. **6.277.** $\int \frac{dx}{x(1+x^4)^2}$.

6.278. $\int \frac{dx}{x^3(x^2+1)^2}$. **6.279.** $\int \frac{dx}{x^5(1+x^8)}$. **6.280.** $\int \frac{x(1+2x^2)}{1+x^4}\,dx$.

6.281. $\int \frac{x^5\,dx}{2-x^3-x^6}$. **6.282.** $\int \frac{x^3\,dx}{x^6+1}$. **6.283.** $\int \frac{dx}{x^3(x^2-4)}$.

6.284. $\int \frac{x^2-1}{(2x^2-1)^2}\,dx$. **6.285.** $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2+1)^2}$. ✓**6.286.** $\int \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^3}\,dx$.

6.287. $\int \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^3}\,dx$. **6.288.** $\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx$.

6.289. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^3}$. **6.290.** $\int \frac{x^4}{(x^4-1)^2}\,dx$. **6.291*.** $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$.

6.292*. $\int \frac{x^4+1}{x^6-5x^4-5x^2+1}\,dx$. **6.293.** $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$.

6.294. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx.$ **6.295.** $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}.$ **6.296.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

6.297. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$ **6.298.** $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx.$ **6.299.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})}.$

6.300. $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}{(x+1)(4-\sqrt[3]{x+1})}\,dx.$ **6.301.** $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx.$

6.302. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}.$ **6.303.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}.$ **6.304.** $\int \frac{1-2x}{(1-3\sqrt{x})^2}\,dx.$

6.305. $\int \frac{\sqrt{x}+3}{x^2-\sqrt{x}}\,dx.$ **6.306.** $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x+1}}.$ **6.307.** $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}+3\sqrt{(x+1)^3}}\,dx.$

6.308. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx.$ ✓**6.309.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$

6.310. $\int \sqrt[4]{\frac{2-x}{1-x}}\,dx.$ **6.311.** $\int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{3/2}dx.$ **6.312*.** $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{(x-1)^2}}\,dx.$

6.313. $\int \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1\right)^2 \sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}\,dx.$ **6.314.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}.$

✓**6.315.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(x+1)^5}}.$ **6.316.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-2)^3(x+1)^5}}.$

6.317. $\int \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ **6.318.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^2}\,dx.$

6.319. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})(\sqrt[4]{x}+2\sqrt[6]{x})^2}.$ **6.320.** $\int \frac{4\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}(2\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x})^3}\,dx.$

✓**6.321.** $\int \frac{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x})^2}\,dx.$ **6.322.** $\int \frac{x(\sqrt[3]{x}-2\sqrt[6]{x})}{(x+4\sqrt[3]{x^2})^3}\,dx.$

6.323. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$ **6.324.** $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$

6.325. $\int \frac{5x-1}{\sqrt{3-4x^2+8x}}\,dx.$ **6.326.** $\int \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2-6x+13}}\,dx.$

6.327. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{4x^2-10x+7}}.$ ✓**6.328.** $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}}.$

✓**6.329.** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{3x^2+4x}}.$ **6.330.** $\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}},\ x>3.$

6.331. $\int \frac{dx}{(x^2+3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}},\ x<-2.$ **6.332.** $\int \frac{x+2}{(x^2-1)\sqrt{1+x^2}}\,dx,\ x>1.$

6.333. $\int \frac{dx}{(x-1)^5\sqrt{2-x^2}},\ x<1.$ **6.334.** $\int \frac{dx}{(x^4-1)\sqrt{1-x^2}}.$

6.335. $\int x^4\sqrt{1+x^2}\,dx.$ **6.336.** $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}},\ 0<x<1.$

6.337. $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx,\ x>1.$ **6.338.** $\int \frac{x^2+3x+1}{(x^2+2x-1)^{5/2}}\,dx.$

6.339. $\int \frac{dx}{(x^2+3)^{5/2}}.$ **6.340.** $\int \frac{dx}{(x+1)^4\sqrt{x^2-2x}},\ x>2.$

6.341. $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx.$ **6.342.** $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\,dx,\ x>0.$

6.343. $\int x^2\sqrt{x^2+4x}\,dx$. **6.344.** $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{7/2}}$.

6.345. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$. **6.346.** $\int \frac{dx}{x(\sqrt{3}a+\sqrt{x^2-a^2})}$, $x>0$ $(a\neq0)$.

6.347. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx$. **6.348.** $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$. **6.349.** $\int \frac{dx}{\sin x\cdot\sin 2x}$.

6.350. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx$. ✓**6.351.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$. **6.352.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^2 x}$.

6.353. $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^2 x}$. **6.354.** $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$. **6.355.** $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

✓**6.356.** $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$. **6.357.** $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$. **6.358.** $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

6.359. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$. **6.360.** $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\,dx$. ✓**6.361.** $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

6.362. $\int \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$. **6.363.** $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+5}$.

6.364. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x+6}$. **6.365.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x-3\cos x+2}$.

✓**6.366.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x-5\cos x}$. **6.367.** $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^4 x-\cos^4 x}$. ✓**6.368.** $\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x}$.

6.369. $\int \frac{dx}{\cos x+\operatorname{tg} x}$. **6.370.** $\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{ctg} x}$. **6.371.** $\int \frac{dx}{\cos x+\operatorname{ctg} x}$.

6.372. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$. ✓**6.373.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x-\cos^3 x}$. **6.374*.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$.

6.375. $\int \frac{dx}{\sin^6 x-\cos^6 x}$. **6.376.** $\int \frac{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{(\sin^3 x+\cos^3 x)^2}\,dx$.

✓**6.377.** $\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos x(\sin^3 x+\cos^3 x)^2}$. **6.378.** $\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\sin x(\sin^5 x+\cos^5 x)}$.

6.379. $\int \frac{dx}{3\operatorname{ctg} x+2\sin x}$. **6.380.** $\int \frac{2\sin x-\cos x+3}{3\sin x+\cos x+1}\,dx$.

6.381. $\int \frac{2\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$. **6.382.** $\int \frac{\cos x\sin x-\sin^2 x}{2\sin x+3\cos x}\,dx$.

6.383*. $\int \frac{dx}{(2\sin x-3\cos x-5)^2}$. **6.384.** $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx$.

6.385. $\int \frac{dx}{\cos^2 x+\cos x\sqrt{\sin x\cos x}}$, $x\in\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$.

6.386. $\int \frac{(\sin x-\cos x)\,dx}{(\sin x+\cos x)\sqrt{\sin x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x}}$, $x\in\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$.

6.387. $\int x^2\cos x\,dx$. **6.388.** $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$. **6.389.** $\int \frac{x}{\sin^4 x}\,dx$.

6.390. $\int \frac{x}{\cos^4 x}\,dx$. **6.391.** $\int \ln(\sqrt{1+x^2}-x)\,dx$.

✓**6.392.** $\int x\ln\frac{x}{1+x^2}\,dx$. **6.393.** $\int x\operatorname{arcctg} x\,dx$. **6.394.** $\int x^2\arcsin x\,dx$.

6.395. $\int x^3\operatorname{arctg}^2 x\,dx$. **6.396.** $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$.

6.397. $\int \arccos^2 x\,dx$. ✓**6.398.** $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx$.

6.399. $\int \frac{x-2}{(x-1)^2}e^x\,dx$. **6.400.** $\int \frac{x+2}{(x+3)^2}e^x\,dx$. **6.401.** $\int (e^x-\sin x)^2\,dx$.

6.402. $\int \frac{x\sin x+\cos x}{x^2}\,dx$. **6.403.** $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

6.404. $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,dx$. **6.405.** $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

6.406. $\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. **6.407.** $\int x|x-1|\,dx$.

6.408. $\int |1-4x^2|\,dx$. ✓**6.409.** $\int \min\{\sqrt{x},2\}\,dx$. **6.410.** $\int \max\{|x|,4\}\,dx$.

6.411. $\int \max\{4-x^2,2\}\,dx$. **6.412.** $\int \min\{5-x^2,1,x^2\}\,dx$.

Ответы и указания[1]

6.1. $\ln|x|-\frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}$. **6.2.** $\frac{9}{2}x^2-8x^{3/2}+4x$. **6.3.** $\frac{12}{13}x^{13/12}+\frac{4}{5}x^{5/4}$.

6.4. $x-\frac{1}{x}+2\ln|x|$. **6.5.** $\frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{x}+3\ln|x|$. **6.6.** $-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

6.7. $-x+\frac{7}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt3}$. **6.8.** $\frac{1}{8\sqrt3}\ln\left|\frac{x-\sqrt3}{x+\sqrt3}\right|-\frac{\operatorname{arctg}x}{4}$. **6.9.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{\operatorname{arctg}x}{2}$.

6.10. $\operatorname{arctg}x-\frac{1}{x}$. **6.11.** $2\operatorname{arctg}x+\ln|x|$. **6.12.** $\arcsin x+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

6.13. $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. **6.14.** $\frac{1}{\sqrt6}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}x$.

6.15. $\frac{1}{2\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt3x-\sqrt7}{\sqrt3x+\sqrt7}\right|$. **6.16.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt2}$. **6.17.** $\frac{1}{\sqrt2}\ln\left(\sqrt2x+\sqrt{2x^2+5}\right)$.

6.18. $\frac{1}{\sqrt3}\ln|\sqrt3x+\sqrt{3x^2-7}|$. **6.19.** $\frac{25^x}{\ln 25}-\frac{2\cdot10^x}{\ln10}+\frac{4^x}{\ln4}$. **6.20.** $\frac{27}{\ln4}4^{-x}-\frac{1}{2\ln9}9^{-x}$.

6.21. $\frac{30^x}{\ln30}$. **6.22.** $\frac{1}{\ln\frac{32}{5}}\left(\frac{32}{5}\right)^x$. **6.23.** $\frac{e^{2x}}{2}+e^x+x$. **6.24.** $\frac{2}{\ln2}\left(\frac{2^{3x/2}}{3}+2^{-x/2}\right)$.

6.25. $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}$. **6.26.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}$. **6.27.** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$. **6.28.** $-\frac{\operatorname{tg}x}{4}-\frac{\operatorname{ctg}x}{4}$.
6.29. $\operatorname{tg}x-x$. **6.30.** $-x-\operatorname{ctg}x$. **6.31.** $2\operatorname{sh}x-3\operatorname{ch}x$.

6.32. $x-\operatorname{th}x$. **6.33.** $\ln|x-1|$. **6.34.** $\frac{1}{2}\ln|2x+3|$. **6.35.** $x+\ln|x+1|$.

6.36. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ln|2x+1|$. **6.37.** $\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|$. **6.38.** $\frac{1}{3}\ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|}$. **6.39.** $\frac{(x-1)^{11}}{11}$.

6.40. $\frac{(2x+5)^{18}}{36}$. **6.41.** $\frac{(1-3x)^{-29}}{87}$. **6.42.** $\frac{1}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}}$. **6.43.** $-\sqrt{1-2x}$.

6.44. $\frac{5}{3}(3x+1)^{1/5}$. **6.45.** $-\frac{\cos5x}{5}$. **6.46.** $7\sin\frac{x}{7}$. **6.47.** $-\frac{\operatorname{ctg}7x}{7}$. **6.48.** $\frac{\operatorname{tg}8x}{8}$.

6.49. $\frac{x}{2}-\frac{\sin2x}{4}$. **6.50.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin2x}{4}$. **6.51.** $\frac{5}{2}x-\cos2x+\frac{3}{4}\sin2x$.

6.52. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\cos(\alpha-\beta)x-\frac{1}{\alpha+\beta}\cos(\alpha+\beta)x\right)$.

6.53. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\sin(\alpha-\beta)x+\frac{1}{\alpha+\beta}\sin(\alpha+\beta)x\right)$.

6.54. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\sin(\alpha-\beta)x-\frac{1}{\alpha+\beta}\sin(\alpha+\beta)x\right)$.

6.55. $\frac{1}{2\alpha}\sin\alpha x-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha-2}\sin(\alpha-2)x+\frac{1}{\alpha+2}\sin(\alpha+2)x\right)$.

[1] В ответах этой главы ради краткости произвольная аддитивная постоянная C опущена.

6.56. $-\frac{1}{8}\Big(\frac{3}{\beta-1}\cos(\beta-1)x+\frac{3}{\beta+1}\cos(\beta+1)x+\frac{1}{\beta+3}\cos(\beta+3)x+\frac{1}{\beta-3}\cos(\beta-3)x\Big)$.

6.57. $\frac{(x-2)^7}{7}+\frac{(x-2)^6}{3}$. **6.58.** $-\frac{4}{11}(1-x)^{11}+2(1-x)^{10}-\frac{25}{9}(1-x)^9$.

6.59. $\frac{(x+1)^2}{2}-2x+2\ln|x+1|$. **6.60.** $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}+\frac{5}{8}\ln|2x-1|$.

6.61. $\frac{(1-2x)^{5/2}}{10}-\frac{(1-2x)^{3/2}}{6}$. **6.62.** $\frac{2}{5}(x-2)^{5/2}+\frac{8}{3}(x-2)^{3/2}$.

6.63. $\frac{4}{27}(3x+1)^{3/2}-\frac{46}{9}(3x+1)^{1/2}$. **6.64.** $-\frac{1}{12}(1-x^2)^6$. **6.65.** $\frac{\operatorname{arctg}x^2}{2}$.

6.66. $\frac{1}{6\sqrt5}\ln\left|\frac{x^3-\sqrt5}{x^3+\sqrt5}\right|$. **6.67.** $\frac{x^2}{2}+2\ln|x^2-4|$. **6.68.** $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$.

6.69. $\frac{1}{2}\arcsin x^2$. **6.70.** $\sqrt{x^2-2}-4\ln|x+\sqrt{x^2-2}|$.

6.71. $3\sqrt{x^2+4}-\ln\big(x+\sqrt{x^2+4}\big)$. **6.72.** $\sqrt{x^2-10}+2\ln|x+\sqrt{x^2-10}|$.

6.73. $\frac{1}{\sqrt2}\arcsin(\sqrt2x)+2\sqrt{1-2x^2}$. **6.74.** $\frac{2}{5}\sqrt{x^5+3}$. **6.75.** $-\frac{1}{4\ln^4x}$. **6.76.** $2\sqrt{\ln x}$.

6.77. $\ln|\ln x+3|$. **6.78.** $\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{\sqrt2}$. **6.79.** $\frac{3}{5}\ln^{5/3}x$. **6.80.** $\ln(1+e^x)$.

6.81. $-e^x-2\ln|e^x-1|$. **6.82.** $\frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2}$. **6.83.** $-\frac{\cos x^2}{2}$. **6.84.** $2\sin\sqrt{x}$.

6.85. $\sin e^x$. **6.86.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **6.87.** $\ln\left|\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\right|$. **6.88.** $-\ln|\cos x|$. **6.89.** $\ln|\sin x|$.

6.90. $\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\Big)\right|$. **6.91.** $-\frac{1}{2(x+\sin x)^2}$. **6.92.** $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\sin^2x}$.

6.93. $-\ln\big(\cos x+\sqrt{1+\cos^2x}\big)$. **6.94.** $\ln|1+\operatorname{tg}x|$. **6.95.** $-\operatorname{ctg}x+\ln|1+\operatorname{ctg}x|$.

6.96. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin^2x}{\sqrt3}$. **6.97.** $-\frac{1}{6}\operatorname{arcctg}^2 3x$. **6.98.** $\frac{1}{8}\ln(4x^2+1)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^{3/2}2x$.

6.99. $\frac{1}{2}(\arcsin^2x+\arccos^2x)$. **6.100.** $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{8}\arcsin^4 2x$.

6.101. $-\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{5}\arccos^{5/2}x$. **6.102.** $\frac{1}{2}(\operatorname{sh}2x-\operatorname{ch}2x)$. **6.103.** $-2\operatorname{cth}2x$.

6.104. $-x\cos x+\sin x$. **6.105.** $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin2x+\frac{1}{8}\cos2x$.

6.106. $\frac{3}{4}\sin x-\frac{3}{4}x\cos x-\frac{1}{36}\sin3x+\frac{1}{12}x\cos3x$. **6.107.** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|$.

6.108. $-\frac{x^2}{2}-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|$. **6.109.** $\frac{x}{\cos x}-\ln\left|\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\right|$.

6.110. $x\ln^2x-2x\ln x+2x$. **6.111.** $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.

6.112. $\frac{x^3}{3}\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+\frac{\ln(1+x)}{3}$. **6.113.** $\frac{x^2}{2}\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)+\frac{x}{2}-\frac{\ln|1+x|}{2}$.

6.114. $\operatorname{tg}x\cdot\ln\cos x+\operatorname{tg}x-x$. **6.115.** $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

6.116. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$. **6.117.** $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(x^2+1)$.

6.118. $\Big(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\Big)\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$. **6.119.** $2x\operatorname{arctg}x-\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2x$.

6.120. $\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}-\frac{\operatorname{sgn}x}{2}\sqrt{x^2-1}$. **6.121.** $\frac{\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}$.

6.122. $\frac{x}{2}+\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)}{10}$. **6.123.** $\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x}{\sqrt2}$.

6.124. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+3}+\frac{3}{2}\ln\big(x+\sqrt{x^2+3}\big)$. **6.125.** $\frac{\operatorname{arctg}x}{2}-\frac{x}{2(1+x^2)}$.

6.126. $\frac{\sin^3x}{3}-\frac{\sin^5x}{5}$. **6.127.** $-\cos x+\cos^3x-\frac{3}{5}\cos^5x+\frac{\cos^7x}{7}$.

6.128. $-\frac{\cos^3x}{3}+\frac{2\cos^5x}{5}-\frac{\cos^7x}{7}$. **6.129.** $\frac{3}{8}x-\frac{\sin2x}{4}+\frac{\sin4x}{32}$.

6.130. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}$. **6.131.** $\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+\frac{3}{64}\sin 4x$.

6.132. $\frac{1}{\cos x}+3\cos x-\cos^3 x+\frac{\cos^5 x}{5}$. **6.133.** $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

6.134. $\frac{\sin x}{4\cos^4 x}-\frac{5}{8}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **6.135.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x$.

6.136. $-\operatorname{ctg} x+2\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$. **6.137.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+x$. **6.138.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$.

6.139. $\frac{1}{64}\left(\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}^4\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{8}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}\right)+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3}{8}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

6.140. $-\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}+\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}+\ln|\sin x|$. **6.141.** $-\frac{1}{2\sin^2 x}-3\ln|\sin x|+\frac{3}{2}\sin^2 x-\frac{1}{4}\sin^4 x$.

6.142. $-\frac{\sin^3 x}{3}-\sin x+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

6.143. $-\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{2}{\sin x}+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{5}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

6.144. $-\frac{x}{4}(a^2-x^2)^{3/2}+\frac{a^2}{8}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}$. **6.145.** $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}$.

6.146. $\frac{x}{4}(x^2-a^2)^{3/2}+\frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$.

6.147. $\frac{x}{4}(x^2+a^2)^{3/2}-\frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

6.148. $x+\frac{a^2x}{2(x^2+a^2)}-\frac{3a}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. **6.149.** $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$. **6.150.** $\frac{2}{\ln 5}\left(5^{\sqrt{x}}\sqrt{x}-\frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5}\right)$.

6.151. $6(x-2)\cos\sqrt{x}+2\sqrt{x}(x-6)\sin\sqrt{x}$. **6.152.** $e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

6.153. $-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1}+\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{6}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}$.

6.154. $\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{\arcsin x}{2}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

6.155. $-\frac{6x+x^3}{9}-\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x$. **6.156.** $\ln(x^2+x+3)-\frac{12}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}$.

6.157. $-\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-3|-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|$.

6.158. $-3\sqrt{x^2+x+1}+\frac{17}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

6.159. $-4\sqrt{1+x-x^2}-9\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$. **6.160.** $-\sqrt{1-\ln x-\ln^2 x}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{2\ln x+1}{\sqrt{5}}$.

6.161. $\arcsin\frac{\sin x+2}{\sqrt{6}}$. **6.162.** $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+2e^x+4)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{e^x+1}{\sqrt{3}}$.

6.163. $\sqrt{e^{2x}+e^x+1}+\frac{5}{2}\ln\left(e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)$.

6.164. $-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|e^{-x}-\frac{5}{12}+\sqrt{e^{-2x}-\frac{5}{6}e^{-x}+\frac{1}{6}}\right|$.

6.165. $\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{3/2}+\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{9}{16}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

6.166. $(1+x-x^2)^{3/2}-\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x-x^2}-\frac{5}{16}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$.

6.167. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2x^2+2}}{x+1}\right|$. **6.168.** $-\ln\left|\frac{2-x+\sqrt{4x^2-10x+7}}{x-1}\right|$.

6.169. $\frac{1}{4}\ln|x^4-x^2-1|+\frac{3}{4\sqrt{5}}\ln\frac{|2x^2-1-\sqrt{5}|}{2x^2-1+\sqrt{5}}$. **6.170.** $\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+5)+\frac{1}{2\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{19}}$.

6.171. $-\frac{1}{2}\sqrt{x^4+x^2+1}+\frac{3}{4}\ln\left(x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+1}\right)$.

6.172. $-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2}$.

6.173. $\sqrt{x^2+3x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+1}\right|-\ln\left|\frac{3x+2+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x}\right|$.

6.174. $\frac{1}{6}(x^4+1)^{3/2}+\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+1}+\frac{1}{4}\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$.

6.175. $\frac{1}{2}\sin x\sqrt{\cos 2x}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)$.

6.176. $-\frac{1}{2}\cos x\sqrt{\cos 2x}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}|$. **6.177.** $\arcsin\frac{2\sin x-1}{\sqrt{2}(1-\sin x)}$.

6.178. $\frac{1}{2}\ln\frac{|x(x+2)|}{(x+1)^2}$. **6.179.** $\frac{x}{2(1-x^2)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. **6.180.** $-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(x^2+1)}$.

6.181. $\operatorname{arctg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **6.182.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{\operatorname{arctg}x}{2}$.

6.183. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

6.184.[1] $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1))$, или
$F(x)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\operatorname{sgn}x$ при $x\neq 0$, $F(0)=0$.

6.185.[1] $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1))$, или
$F(x)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\operatorname{sgn}x$ при $x\neq 0$, $F(0)=0$.

6.186. $-\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **6.187.** $-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}-2\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$.

6.188. $\frac{1}{64}\left(-\frac{1}{2z^2}+\frac{5}{z}+10\ln|z|-10z+\frac{5}{2}z^2-\frac{z^3}{3}\right)$, $z=\frac{x-2}{x}$.

6.189. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x^3-\frac{1}{6}\ln(x^6+1)$. **6.190.** $\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4+1}$. **6.191.** $-\frac{2x^6+1}{12(x^6+1)^2}$.

6.192. $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3+1}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+1}\right|$. **6.193.** $-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^3}$.

6.194.[1] $\frac{1}{\sqrt{7}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}x+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}x\right)$, или $F(x)=\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{7}}-\frac{\pi}{2\sqrt{7}}\operatorname{sgn}x$
при $x\neq 0$, $F(0)=0$.

6.195. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{3}+1}{x^2+x\sqrt{3}+1}$. **6.196.** $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. **6.197.** $\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3$.

6.198. $e^{-x}+\frac{1}{4}\ln\frac{|e^x-1|}{e^x+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x$. **6.199.** $2\ln(e^x+4)-x$.

6.200. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}}$. **6.201.** $-\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{3}}\right|$. **6.202.** $\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{31}}$.

6.203. $-x+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. **6.204.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)$. **6.205.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}$.

6.206. $\frac{1}{2}\ln|2\operatorname{ctg}x-1|$. **6.207.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. **6.208.** $\ln\frac{1-\cos x}{2-\cos x}$.

6.209. $-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. **6.210.** $-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

6.211. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}$. **6.212.** $-\operatorname{arctg}(\cos 2x)$.

6.213. $\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x$. **6.214.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|$.

6.215. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|$. **6.216.** $\frac{2}{13}x-\frac{3}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|$.

[1] См. пример 6.47 на с. 233.

6.217. $\ln(1+\sin^2 x)$. **6.218.** $2x-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}$. **6.219.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\sin^2 2x}{2-\sin^2 2x}$.

6.220. $\frac{1}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x-\frac{1}{10\sqrt{10}}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{10}}{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{10}}\right|$. **6.221.** $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}$.

6.222. $-\operatorname{arctg}(\cos^2 x)$. **6.223.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}$.

6.224. $\frac{1}{32}\ln(4+\operatorname{tg}^2 x)-\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{16}\ln|\operatorname{tg}x|$.

6.225. $\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\ln|2\sin x+\cos x+2|-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}\right|$.

6.226. $\frac{7}{13(2\cos x-3\sin x)}+\frac{4}{13\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3+\sqrt{13}}\right|$.

6.227. $\frac{1}{5}\cos x+\frac{8}{5}\sin x+\frac{21}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{5}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{5}}\right|$.

6.228. $6(\sqrt[6]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x})$. **6.229.** $\frac{12}{7}z^7-3z^4$, $z=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$. **6.230.** $-2\sqrt[3]{(x^{-3/4}+1)^2}$.

6.231. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+\frac{2}{7}\operatorname{arctg}z$, $z=\sqrt[4]{1+x^7}$. **6.232.** $-\frac{3x^3+4}{8x(x^3+2)^{2/3}}$.

6.233. $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})$. **6.234.** $12\left(\sqrt[12]{x}+2\ln|\sqrt[12]{x}-1|-\ln\sqrt[12]{x}\right)$.

6.235. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+t+t^2}{(1-t)^2}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$, $t=\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$.

6.236. $\frac{1}{3}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{2t}{t^3-1}$, $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

6.237. $\frac{3}{16}(3x-5)\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^4}}$. **6.238.** $-\frac{1}{2}\ln\frac{1+t+t^2}{(1-t)^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$, $t=\sqrt[3]{x}$.

6.239. $(1+\sqrt[4]{2x-1})^2+\ln(\sqrt[4]{2x-1}-1)^2$. **6.240.** $-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}$.

6.241. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x^2-x-6}+\frac{35}{8}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-6}\right)+3\sqrt{x^2-x-6}$.

6.242. $\frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{15}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$. **6.243.** $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}$.

6.244. $-\left(\frac{x^3}{4}+\frac{3}{8}x\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{8}\arcsin x$. **6.245.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6.246. $\frac{1}{4}\ln\frac{|\sqrt{3-x^2}-2|}{\sqrt{3-x^2}+2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{3-x^2}}$.

6.247. $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{2}x+6\right)\sqrt{x^2+2x+3}-\frac{53}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)$.

6.248. $-\frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x}}$. **6.249.** $-\frac{1}{3}(x^2+2x-1)^{-3/2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}-\frac{(x+1)^3}{12(x^2+2x-1)^{3/2}}$.

6.250. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)+\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\right)$.

6.251. $\frac{1}{3}(x^2+4x+1)^{3/2}-\frac{(x+2)\sqrt{x^2+4x+1}}{2}+\frac{3}{2}\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}|$.

6.252. $x+\sqrt{x^2-x-2}-\frac{5}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\right)-2\ln(5x+2-4\sqrt{x^2-x-2})$.

6.253. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\frac{3}{2}+\sqrt{x^4+3x^2+1}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^2}+1}\right)$.

6.254. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{2x-\sqrt{2x^2-4x-2}}{x+1}$.

6.255. $\frac{15}{64}(1+4x)^{16/15}$. **6.256.** $\sin x-\cos x$. **6.257.** $\ln(1+\sin x)$.

6.258. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x}$. **6.259.** $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$. **6.260.** $\ln|\ln x-1|$. **6.261.** $2\sqrt{\ln x+x}$.

6.262. x^x. **6.263.** $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$. **6.264.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$.

6.265. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{2}$. **6.266.** $\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}\ln(e^{2x}+6)$. **6.267.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|$.

6.268. $-\frac{2}{3}\ln|1+x|+\frac{1}{3}\ln(x^2-x+1)$. **6.269.** $-x-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+\ln|x|$.

6.270. $-\frac{1}{1+x}-\frac{4}{2+x}+4\ln\left|\frac{2+x}{1+x}\right|$. **6.271.** $\frac{3(x-1)}{16(x+1)}-\frac{x+1}{16(x-1)}-\frac{(x-1)^2}{32(x+1)^2}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

6.272. $\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{1+x^2}+\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{1+x^2}}+2\operatorname{arctg}x\right)$.

6.273. $\frac{1}{8}\left(\frac{4x}{1+x^2}-12\operatorname{arctg}x+\frac{2x}{2+x^2}+9\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

6.274. $-\frac{1}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)^3}$.

6.275. $-\frac{1}{8(2x+1)}+\frac{3}{16(2x+1)^2}-\frac{1}{8(2x+1)^3}+\frac{5}{32(2x+1)^4}$. **6.276.** $\ln\left|\frac{1+x^3}{x}\right|$.

6.277. $\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+\frac{1}{4(1+x^4)}$. **6.278.** $-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}+\ln\frac{x^2+1}{x^2}$.

6.279. $-\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^4$. **6.280.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+\frac{1}{2}\ln(1+x^4)$.

6.281. $-\frac{1}{9}\ln|(x^3-1)(x^3+2)^2|$. **6.282.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{12}\ln\frac{(1+x^2)^2}{x^4-x^2+1}$.

6.283. $\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{32}\ln\frac{|x^2-4|}{x^2}$. **6.284.** $\frac{3}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{2x^2-1}$.

6.285. $x+\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x$. **6.286.** $\frac{x(1+3x^2)}{4(1+x^2)^2}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x$.

6.287. $-\frac{2x^3+3x^2+6x+1}{6(x^2+x+1)^2}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=-\frac{2}{9}\sqrt{3}t-\frac{1}{18}\sqrt{3}\sin 4t+\frac{4}{9}\cos^4 t-\frac{2\sqrt{3}}{9}\sin 2t$, $t=\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

6.288. $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{5}{2(x-1)}-\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{4}\ln(1+x^2)-\operatorname{arctg}x$.

6.289. $\frac{3}{16(x-1)}+\frac{3}{16(x+1)}-\frac{1}{16(x-1)^2}+\frac{1}{16(x+1)^2}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

6.290. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^4-1}$. **6.291.** $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg}x$.

6.292. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right|$. **6.293.** $2\sqrt{x}-4\ln(2+\sqrt{x})$.

6.294. $-x-4\sqrt{x}-4\ln|\sqrt{x}-1|$. **6.295.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}$.

6.296. $\frac{2}{7}(x+1)^{7/2}-\frac{6}{5}(x+1)^{5/2}+2(x+1)^{3/2}-2(x+1)^{1/2}$.

6.297. $6\sqrt[6]{x}+\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\ln(1+\sqrt[6]{x})+\ln(1-\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x})-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}}$.

6.298. $-\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}$.

6.299. $2\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}+4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, $t=\sqrt[12]{x}$.

6.300. $-6t-3\ln|4-t^2|-6\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|$, $t=\sqrt[6]{x+1}$.

6.301. $3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-x+6\ln|1+\sqrt[3]{x}|$. **6.302.** $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|$.
6.303. $-\frac{2}{5}(x+2)^{5/2}+\frac{4}{3}(x+2)^{3/2}+\frac{2}{5}(x+3)^{5/2}-2(x+3)^{3/2}$.
6.304. $-\frac{2}{27}\Big(3x+4\sqrt{x}-\ln|3\sqrt{x}-1|+\frac{7}{3(3\sqrt{x}-1)}\Big)$.
6.305. $-\frac{4}{3}\ln\frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}$.
6.306. $\ln|x|-\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{3}}$.
6.307. $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}-\frac{14}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3x+3}$. **6.308.** $\ln\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}$.
6.309. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. **6.310.** $-\frac{t}{t^4-1}+\frac{1}{4}\ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t,\ t=\sqrt[4]{\frac{2-x}{1-x}}$.
6.311. $-4\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-3\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$.
6.312. $\frac{2t^5}{(t^3-1)^2}+\frac{10t^2}{3(t^3-1)}+\frac{10}{9}\ln(t^2+t+1)-\frac{20}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}-\frac{20}{9}\ln|t-1|,\ t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.
6.313. $\frac{2t^3}{1-t^2}+6t+3\ln\frac{|1-t|}{1+t},\ t=\sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}$.
6.314. $\ln\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{|t-1|}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}},\ t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.
6.315. $4\sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}$. **6.316.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+1}}$. **6.317.** $\frac{12}{7}(1-t)^{7/3}-3(1-t)^{4/3},\ t=\sqrt[4]{x}$.
6.318. $\frac{6(2\sqrt[12]{x}-1)}{\sqrt[6]{x}+1}+12\operatorname{arctg}\sqrt[12]{x}$.
6.319. $12\Big(\frac{t^2}{2}-3t+\frac{1}{9}\ln|t-1|+\frac{80}{9}\ln|t+2|+\frac{16}{3(t+2)}\Big),\ t=\sqrt[12]{x}$.
6.320. $-\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{(2t^2+1)^2}+\frac{45\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(t\sqrt{2})+\frac{30t}{1+2t^2}+\frac{15}{2}\cdot\frac{t(1-2t^2)}{(1+2t^2)^2},\ t=\sqrt[15]{x}$.
6.321. $-\frac{3}{4}\cdot\frac{3t+4}{t^2+4}-\frac{9}{8}\operatorname{arctg}\frac{t}{2},\ t=\sqrt[6]{x}$.
6.322. $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(t^2+4)^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{t}{(t^2+4)^2}-\frac{9}{32}\cdot\frac{t}{t^2+4}-\frac{9}{64}\operatorname{arctg}\frac{t}{2},\ t=\sqrt[6]{x}$.
6.323. $\frac{1}{15}(3x^4-4x^2+8)\sqrt{1+x^2}$. **6.324.** $\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
6.325. $-\frac{5}{4}\sqrt{3-4x^2+8x}+2\arcsin\frac{2x-2}{\sqrt{7}}$.
6.326. $\sqrt{3x^2-6x+13}+\frac{5}{\sqrt{3}}\ln\Big(x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{13}{3}}\Big)$.
6.327. $\operatorname{sgn}(1-x)\ln\Big|\frac{2-x+\sqrt{4x^2-10x+7}}{x-1}\Big|$.
6.328. $-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\Big|\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}\Big|$. **6.329.** $-\arcsin\frac{x+2}{2|x+1|}$.
6.330. $-2\arcsin\frac{1}{x-2}-\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}$.
6.331. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\Big|\frac{1}{x+1}-\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{4(x+1)}+\frac{1}{8}}\Big|-$

$$-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\Big|\frac{1}{x+2}-\frac{4}{15}+\sqrt{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{8}{15(x+2)}+\frac{1}{15}}\Big|.$$

6.332. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\Big(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}}\Big)-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\Big(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}}\Big)$.
6.333. $\Big(\frac{1}{4}u^3+\frac{7}{12}u^2+\frac{11}{6}u+\frac{20}{3}\Big)\sqrt{u^2-2u-1}+\frac{17}{2}\ln|u-1+\sqrt{u^2-2u-1}|,\ u=\frac{1}{x-1}$.

6.334. $-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6.335. $\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{24}x^3-\frac{1}{16}x\right)\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{16}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. **6.336.** $-\frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{1-x^2}$.

6.337. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4-1}\right)+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x^2}$.

6.338. $-\frac{1}{3}(x^2+2x-1)^{-3/2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}-\frac{1}{12}\cdot\frac{(x+1)^3}{(x^2+2x-1)^{3/2}}$.

6.339. $\frac{1}{9}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{x^3}{3(x^2+3)^{3/2}}\right)$.

6.340. $-\left(\frac{1}{9}u^2+\frac{5}{27}u+\frac{8}{27}\right)\sqrt{3u^2-4u+1}-\frac{11}{27\sqrt{3}}\ln\left|u-\frac{2}{3}+\sqrt{u^2-\frac{4}{3}u+\frac{1}{3}}\right|$, $u=\frac{1}{x+1}$.

6.341. $\frac{1}{6}(2x^2+x+7)\sqrt{x^2+2x-1}-2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}|$.

6.342. $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)-\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\right)$.

6.343. $\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{6}x+5\right)\sqrt{x^2+4x}-10\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x}|$.

6.344. $\frac{64}{27}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2}{3}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right)^5\right)$.

6.345. $\frac{2}{3}\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)$. **6.346.** $\frac{1}{4a}\arccos\frac{a}{x}-\frac{\sqrt{3}}{4a}\ln\left(\frac{\sqrt{3}a}{x}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)$.

6.347. $\frac{1}{2}\cos^2 x+\ln|\sin x|$. **6.348.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$. **6.349.** $-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$.

6.350. $-\cos x-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **6.351.** $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}$.

6.352. $\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **6.353.** $\frac{1}{\cos x}-\frac{7\cos x}{8\sin^2 x}-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}+\frac{15}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

6.354. $\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\operatorname{tg} x|$. **6.355.** $\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}$. **6.356.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|$.

6.357. $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|$. **6.358.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}$. **6.359.** $-\operatorname{ctg} x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x$.

6.360. $\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **6.361.** $-8\operatorname{ctg} 2x-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x$. **6.362.** $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}$.

6.363. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$. **6.364.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$.

6.365. $-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. **6.366.** $-\frac{5}{26}x+\frac{1}{26}\ln|\sin x-5\cos x|$.

6.367. $\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|$. **6.368.** $-\frac{1}{2(1+\cos x)}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **6.369.** $-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{1+\sqrt{5}-2\sin x}{|1-\sqrt{5}-2\sin x|}$.

6.370. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{1+\sqrt{5}-2\cos x}{|1-\sqrt{5}-2\cos x|}$. **6.371.** $\frac{1}{2(1+\sin x)}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

6.372. $\frac{1}{6}\ln\frac{(\operatorname{tg} x+1)^2}{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x-1}{\sqrt{3}}$.

6.373. $\frac{1}{6}\ln\frac{(\operatorname{tg} x-1)^2}{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{3}}$.

6.374. $\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\sin x-\cos x)$. *Указание.* Положить $t=x-\frac{\pi}{4}$.

6.375. $\frac{1}{3}\ln\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}-\frac{1}{6}\ln\frac{2-\sin 2x}{2+\sin 2x}$. **6.376.** $-\frac{1}{3(\operatorname{tg}^3 x+1)}$.

6.377. $\frac{1}{3}\ln|1+z|+\frac{1}{3(1+z)}$, $z=\operatorname{tg}^3 x$. **6.378.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}^5 x}{1+\operatorname{tg}^5 x}\right|$. **6.379.** $\frac{1}{5}\ln\frac{2-\cos x}{|2\cos x+1|}$.

6.380. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln|3\sin x+\cos x+1|+\frac{5}{6}\ln\left|3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|$.

6.381. $\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$.

6.382. $\frac{5}{13}\sin x-\frac{1}{13}\cos x+\frac{15}{13\sqrt{13}}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}}\right|$.

6.383. $\frac{5}{12\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{12}\cdot\frac{z+5}{z^2-2z+4}$, $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **6.384.** $-\ln\left(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}\right)$.

6.385. $2\sqrt{\operatorname{tg} x}-2\ln|1+\sqrt{\operatorname{tg} x}|$. **6.386.** $\arcsin\frac{1}{1+\sin 2x}$.

6.387. $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$. **6.388.** $-x\operatorname{ctg} x+\ln|\sin x|$.

6.389. $\frac{1}{3}\left(-\frac{x\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2x\operatorname{ctg} x+2\ln|\sin x|\right)$.

6.390. $x\left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\operatorname{tg} x\right)+\frac{2}{3}\ln|\cos x|-\frac{1}{6\cos^2 x}$. **6.391.** $x\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+\sqrt{1+x^2}$.

6.392. $\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{2}\ln\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **6.393.** $\frac{x}{2}+\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arcctg} x$.

6.394. $\frac{x^3}{3}\arcsin x+\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}$.

6.395. $\frac{1}{4}(x^4-1)\operatorname{arctg}^2 x-\frac{1}{6}(x^3-3x)\operatorname{arctg} x+\frac{x^2}{12}-\frac{1}{3}\ln(1+x^2)$.

6.396. $z\operatorname{tg}^2 z-\operatorname{tg} z+z$, $z=\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$. **6.397.** $x\arccos^2 x-2\sqrt{1-x^2}\arccos x-2x$.

6.398. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$. **6.399.** $\frac{e^x}{x-1}$. **6.400.** $\frac{e^x}{x+3}$.

6.401. $\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x-e^x\sin x+e^x\cos x$. **6.402.** $-\frac{\cos x}{x}$.

6.403. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\frac{1}{2}\arcsin^2 x+\ln|x|$.

6.404. $ax\operatorname{arctg} x-\frac{a}{2}\ln(x^2+1)+\frac{b-a}{2}\operatorname{arctg}^2 x$. **6.405.** $-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}$.

6.406. $\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$. **6.407.** $\begin{cases}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}, & x<1,\\ \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{3}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

6.408. $\begin{cases}-x+\frac{4}{3}x^3-\frac{2}{3}, & x<-\frac{1}{2},\\ x-\frac{4}{3}x^3, & |x|\leqslant\frac{1}{2},\\ -x+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}, & x>\frac{1}{2}.\end{cases}$ **6.409.** $\begin{cases}\frac{2}{3}x^{3/2}, & 0\leqslant x\leqslant 4,\\ 2x-\frac{8}{3}, & x>4.\end{cases}$ **6.410.** $\begin{cases}-\frac{x^2}{2}-8, & x<-4,\\ 4x, & |x|\leqslant 4,\\ \frac{x^2}{2}+8, & x>4.\end{cases}$

6.411. $\begin{cases}2x-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}, & x<-\sqrt{2},\\ 4x-\dfrac{x^3}{3}, & |x|\leqslant\sqrt{2},\\ 2x+\dfrac{4\sqrt{2}}{3}, & x>\sqrt{2}.\end{cases}$ **6.412.** $\begin{cases}5x-\dfrac{x^3}{3}+6, & x<-2,\\ x+\dfrac{2}{3}, & -2\leqslant x<-1,\\ \dfrac{x^3}{3}, & |x|\leqslant 1,\\ x-\dfrac{2}{3}, & 1<x\leqslant 2,\\ 5x-\dfrac{x^3}{3}-6, & x>2.\end{cases}$

Глава 7

Определённый интеграл Римана

§ 7.1. Вычисление определённого интеграла. Понятие несобственного интеграла

Определение. Конечную совокупность точек $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a; b]$, где $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, назовём *разбиением отрезка* $[a; b]$ и обозначим T. *Диаметром разбиения* T назовём величину $d_T = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (x_k - x_{k-1})$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, T — разбиение $[a; b]$, а $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ — совокупность таких точек, что $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда *интегральной суммой* называется

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Определение. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и существует (конечный) предел интегральных сумм

$$I = \lim_{d_T \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{1}$$

(не зависящий от выбора точек $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ и разбиений T), то функция $f(x)$ называется *интегрируемой в смысле Римана* на $[a; b]$ и число I называется *определённым интегралом* от f по $[a; b]$. Обозначение: $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Если функция f интегрируема в смысле Римана на $[a; b]$, то она ограничена на $[a; b]$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a; b]$, $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение $[a; b]$.

Положим $M_k = \sup\limits_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x)$, $\quad m_k = \inf\limits_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x)$, $\quad 1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда

$$S(f, T) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \text{ — \textit{верхняя сумма Дарбу},}$$

$$s(f, T) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \text{ — \textit{нижняя сумма Дарбу},}$$

$$\overline{I}(f, [a; b]) = \inf_T S(f, T) \text{ — \textit{верхний интеграл Дарбу},}$$

$$\underline{I}(f, [a; b]) = \sup_T s(f, T) \text{ — \textit{нижний интеграл Дарбу}.}$$

Функция f интегрируема в смысле Римана тогда и только тогда, когда $\underline{I} = \overline{I} = I$.

В дальнейшем вместо слов «функция, интегрируемая в смысле Римана на $[a;b]$» будем говорить короче: «интегрируемая на $[a;b]$ функция». Множество таких функций обозначается $R[a;b]$.

Если функция f интегрируема на $[a;b]$, то по определению

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если функция f непрерывна на $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$ ($C[a;b]\subset R[a;b]$).

Пример 7.1. Вычислим $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^2}\sin^5 x\,dx$.

Решение. Поскольку функция $\sqrt[3]{x^2}\sin^5 x$ непрерывна на $[-1;1]$, она интегрируема, т. е. можно найти величину предела (1), выбирая некоторую удобную последовательность разбиений T_m и точек ξ_k, соответствующих данному разбиению T_m. Пусть T_m — совокупность точек $x_k=\dfrac{k-m}{m}$, $0\leqslant k\leqslant 2m$, $m\in\mathbb{N}$. В качестве точек ξ_k выберем середины отрезков $[x_{k-1};x_k]$, $1\leqslant k\leqslant 2m$, тогда

$$S_m=\sum_{k=1}^{2m} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),\quad \xi_k=-\xi_{2m-k+1},\quad 1\leqslant k\leqslant m,$$

и $x_k-x_{k-1}=\dfrac{1}{m}$, $1\leqslant k\leqslant 2m$.

Следовательно, в силу нечётности функции f получаем

$$S_m=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\bigl(f(\xi_k)+f(\xi_{2m-k+1})\bigr)=0.$$

При таком разбиении условие $\max(x_k-x_{k-1})\to 0$ эквивалентно условию $m\to\infty$. Итак, $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt[3]{x^2}\sin^5 x\,dx=\lim\limits_{m\to\infty} S_m=0$. □

Пример 7.2. Вычислим $\int\limits_1^2 x^p\,dx$, где $p>0$.

Решение. Пусть $f(x)=x^p$. Для любого натурального числа n положим $q=2^{1/n}$ и рассмотрим верхнюю и нижнюю суммы Дарбу для f и разбиения $T_n=\{x_k=q^k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a;b]=[1;2]$. Так как $x_k-x_{k-1}=q^k-q^{k-1}=q^{k-1}(q-1)$, $M_k=f(x_k)=q^{pk}$, $m_k=f(x_{k-1})=q^{p(k-1)}$, справедливы равенства:

$$S_n=S(f,T_n)=\sum_{k=1}^{n} q^{pk}q^{k-1}(q-1)=q^{-1}(q-1)\sum_{k=1}^{n}(q^{p+1})^k=$$
$$=q^p(q-1)\frac{q^{n(p+1)}-1}{q^{p+1}-1}=2^{\frac{p}{n}}(2^{p+1}-1)\frac{2^{1/n}-1}{2^{(p+1)/n}-1};$$
$$s_n=s(f,T_n)=\sum_{k=1}^{n} q^{p(k-1)}q^{k-1}(q-1)=\frac{S_n}{q^p}=\frac{S_n}{2^{p/n}}.$$

Отсюда получаем:

$$\overline{I}=\inf_T S(f,T)\leqslant\inf_n S_n\leqslant\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2^{p+1}-1}{p+1}=\lim_{n\to\infty}s_n\leqslant\sup_n s_n\leqslant\sup_T s(f,T)=\underline{I}.$$

С другой стороны, $\underline{I}\leqslant\overline{I}$, поэтому интегралы Дарбу совпадают, а значит, функция $f(x)=x^p$ интегрируема на $[1;2]$ и $\int\limits_1^2 x^p dx=\dfrac{2^{p+1}-1}{p+1}$, $p>0$. □

Аналогичным способом вычисления, основанном на оценках сверху и снизу, фактически пользовался Архимед для нахождения площадей некоторых фигур и объёмов некоторых тел; тот же метод лежит в основе приближённых формул вычисления определённого интеграла. Основную формулу для точного вычисления определённого интеграла даёт *теорема Ньютона—Лейбница*: если f интегрируема на $[a;b]$ и имеет на этом отрезке первообразную F, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b.$$

Отметим, что если f непрерывна на отрезке, то условие существования первообразной излишне: оно следует из непрерывности.

Пример 7.3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$ □

Основные свойства определённого интеграла Римана

1 (*Линейность*). Если $f \in R[a;b]$ и $g \in R[a;b]$, то для любых чисел λ, μ функция $h = (\lambda f + \mu g) \in R[a;b]$ и

$$\int_a^b h(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx.$$

2 (*Аддитивность*). Если $f \in R[a;b]$ и $f \in R[b;c]$, то $f \in R[a;c]$ и

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

3 (*Монотонность*). Если $f, g \in R[a;b]$ и $f(x) \geqslant g(x)$ при всех $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx,$$

в частности, если $m \leqslant f(x) \leqslant M$ при всех $x \in [a;b]$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

4 (*Интегрируемость модуля*). Если $f \in R[a;b]$, то $|f| \in R[a;b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

5 (*Интегрируемость произведения*). Если $f, g \in R[a;b]$, то $fg \in R[a;b]$.

6 (*Теорема о среднем*). Если $f \in C[a;b]$, а $g \in R[a;b]$, причём функция g не меняет знака на отрезке $[a;b]$, то существует такая точка $c \in [a;b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

7. Если функции f и g отличаются друг от друга только в конечном числе точек, тогда они одновременно интегрируемы или нет в смысле Римана на $[a; b]$ и если интегрируемы, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Пример 7.4. Интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx$ имеет смысл, так как при любом доопределении подынтегральной функции в нуле получаем или непрерывную на $[-1; 1]$ функцию, или функцию, отличную от непрерывной только в нуле. □

Критерий интегрируемости Лебега: функция f интегрируема в смысле Римана на $[a; b]$ тогда и только тогда, когда f ограничена на $[a; b]$ и множество E точек разрыва f на $[a; b]$ есть множество меры нуль в смысле Лебега (короче — множество меры нуль), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая не более чем счётная система интервалов $\{(a_i; b_i)\}$, что

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i; b_i), \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

Можно показать, что любое не более чем счётное подмножество числовой оси имеет меру нуль, а любой отрезок не является множеством меры нуль (см. задачи T7.1 и T7.3).

Из критерия Лебега, в частности, следует, что ограниченная функция, имеющая конечное число точек разрыва на $[a; b]$, интегрируема на $[a; b]$. Для вычисления определённого интеграла такой функции отрезок $[a; b]$ разбивается на конечное число отрезков $[a_k; b_k]$ так, что на каждом интервале $(a_k; b_k)$ функция f совпадает с функцией, непрерывной на отрезке $[a_k; b_k]$.

Пример 7.5. $\int\limits_0^{4\pi} x \operatorname{sgn}(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi} x\,dx - \int\limits_{\pi}^{2\pi} x\,dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} x\,dx - \int\limits_{3\pi}^{4\pi} x\,dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} - \frac{x^2}{2}\bigg|_{\pi}^{2\pi} + \frac{x^2}{2}\bigg|_{2\pi}^{3\pi} - \frac{x^2}{2}\bigg|_{3\pi}^{4\pi} = -2\pi^2. \quad □$$

Из формулы Ньютона — Лейбница выводятся следующие формулы.

1 (*Интегрирование по частям определённого интеграла*). Если функции u и v непрерывно дифференцируемы на $[a; b]$, то

$$\int\limits_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\,du(x).$$

Пример 7.6. $\int\limits_0^{2\pi} x \sin x\,dx = -x\cos x\big|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} \cos x\,dx = -2\pi + \sin x\big|_0^{2\pi} = -2\pi.$ □

2 (*Замена переменной в определённом интеграле*). Пусть x — непрерывно дифференцируемая функция на $[\alpha; \beta]$ и функция f непрерывна на отрезке $[c; d] = x([\alpha; \beta])$. Тогда

$$\int\limits_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t))x'(t)\,dt.$$

Заметим, что в этом утверждении не предполагается монотонности функции x, более того, не предполагается, что $[x(\alpha); x(\beta)] = x([\alpha; \beta])$, а только требуется, чтобы отрезок $[c; d]$ был образом отрезка $[\alpha; \beta]$ при отображении $x(t)$. Если $x(\alpha) = x(\beta)$, то рассматриваемый интеграл равен нулю. Если же x — непрерывно дифференцируемое строго монотонное отображение отрезка $[\alpha; \beta]$, то формула замены переменной справедлива для любой интегрируемой на $x([\alpha; \beta])$ функции f.

Пример 7.7. $\int\limits_{-1}^{2} x(3x^4 - 4x^2 + 1)\,dx = \left(\frac{3x^6}{6} - x^4 + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2} = 18$. Вычисляя по-другому, получим $\int\limits_{-1}^{2} x(3x^4 - 4x^2 + 1)\,dx = \int\limits_{-1}^{2} (x^3 - x)(3x^2 - 1)\,dx = \int\limits_{0}^{6} z\,dz = 18$. Обратите внимание, что замена произведена в интеграле $\int\limits_{0}^{6} z\,dz$ и функция $z = x^3 - x$ непрерывно дифференцируема, но не монотонна на $[-1; 2]$. □

При замене переменной в определённом интеграле в отличие от вычисления первообразной не нужно возвращаться к исходному аргументу, так как преобразованный интеграл берётся по тому отрезку, по которому изменяется новый аргумент. Однако при вычислении определённого интеграла первообразная ищется на заданном отрезке, поэтому здесь особенно важно следить за тем, чтобы преобразование было тождественным на промежутке интегрирования.

Пример 7.8. Вычислим $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-2)^2\sqrt{x^2 - 10x + 13}}$.

Решение. Делаем замену $\frac{1}{x-2} = z$, тогда

$$\frac{dx}{(x-2)^2\sqrt{x^2-10x+13}} = -\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z^2} - \frac{6}{z} - 3}} = \frac{-|z|\,dz}{\sqrt{1-6z-3z^2}}.$$

Поскольку $x < 2$, получаем $z < 0$ и $|z| = -z$. Искомый интеграл равен

$$\int\limits_{-1/3}^{-1} \frac{z\,dz}{\sqrt{1-6z-3z^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int\limits_{-1}^{-1/3} \frac{(z+1)\,dz}{\sqrt{\frac{4}{3} - (z+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int\limits_{-1}^{-1/3} \frac{dz}{\sqrt{\frac{4}{3} - (z+1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{3} - 2z - z^2}\,\Big|_{-1}^{-1/3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{(z+1)\sqrt{3}}{2}\Big|_{-1}^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right). \quad □$$

Отметим некоторые *частные случаи замены переменной в определённом интеграле*, позволяющие упростить вычисление.

а) Если f — чётная и непрерывная на $[-a; a]$ функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

б) Если f — нечётная и непрерывная на $[-a; a]$ функция, то

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

В частности, для любого натурального нечётного k имеем $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^k x\,dx = 0$.

в) Если f — периодическая функция с периодом T, непрерывная на $[0; T]$, то f интегрируема на любом отрезке $[a; b]$ и

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

В частности, если k — нечётное натуральное число, n — натуральное число и a — любое действительное число, то $\int\limits_{a}^{a+2\pi n} \sin^k x\,dx = \int\limits_{a}^{a+2\pi n} \cos^k x\,dx = 0$.

Отметим, что условие непрерывности функции f можно ослабить (см. задачи T7.31 и T7.37).

Большая часть подстановок, используемых при нахождении неопределённых интегралов являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Однако, скажем, универсальная подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ уже функция, не являющаяся непрерывной на отрезке, включающем точки $\pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 7.9. Вычислим $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$.

Решение. Найдём неопределённый интеграл, полагая $t = \operatorname{tg}(x/2)$:

$$\int \frac{dx}{3+\cos x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(3+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{2+t^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}} + C.$$

Если формально сделать универсальную подстановку $\operatorname{tg}(x/2) = t$ в определённом интеграле, то, так как $\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg}\pi = 0$, получим $\int\limits_{0}^{0} \frac{dt}{2+t^2} = 0$, с другой стороны, $\frac{1}{3+\cos x} \geqslant \frac{1}{4}$, и, следовательно, $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{2x}{3+\cos x} \geqslant 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$. Подстановка сделана неправильно, так как нарушено условие непрерывности функции $t = \operatorname{tg}(x/2)$ на $[0; 2\pi]$. Функция $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}$ не является первообразной функции $f = \frac{1}{3+\cos x}$ на $[0; 2\pi]$, поскольку $F \notin C[0; 2\pi]$. Чтобы получить первообразную для f на $[0; 2\pi]$, заметим, что функция

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}, & 0 \leqslant x < \pi, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}} + C, & \pi < x \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

имеет производную, равную f, для всех $x \in [0; \pi) \cup (\pi; 2\pi]$. Функция $G(x)$ — первообразная функции f на $[0; 2\pi]$, если она непрерывна в точке $x = \pi$. Для этого постоянная C должна удовлетворять соотношению

$$\lim_{x \to \pi-} F(x) = \lim_{x \to \pi+} F(x) + C, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C,$$

откуда $C = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. Теперь, применяя формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} = G(2\pi) - G(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 0}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \square$$

Более простым и общим является следующий метод вычисления этого интеграла. Функция

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}, & 0 \leqslant x < \pi, \\ \lim\limits_{x \to \pi-} F(x) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x = \pi, \end{cases}$$

есть первообразная функции $1/(3 + \cos x)$ на отрезке $[0; \pi]$. Функция

$$F_2(x) = \begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}, & \pi < x \leqslant 2\pi, \\ \lim\limits_{x \to \pi+} F(x) = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x = \pi, \end{cases}$$

есть первообразная функции $1/(3 + \cos x)$ на отрезке $[\pi; 2\pi]$. Используя свойство аддитивности и формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} = F_1(\pi) - F_1(0) + F_2(2\pi) - F_2(\pi) =$$
$$= \lim_{x \to \pi-} F(x) - F(0) + F(2\pi) - \lim_{x \to \pi+} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Этот метод вычисления является примером применения *общего утверждения*: пусть f непрерывна на $[a; b]$ и выражение $f(x)\,dx$ можно представить в виде $g(t(x))\,dt(x)$, где функция t непрерывно дифференцируема на $[a; b)$, $t(a) = \alpha$ и $\lim\limits_{x \to b-} t(x) = +\infty$, тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_\alpha^\beta g(t)\,dt = \lim_{\beta \to +\infty} (G(\beta) - G(\alpha)),$$

где G — первообразная функции g на луче $t \geqslant \inf\limits_{[a;b]} t(x)$.

Определение. Пусть f непрерывна на луче $x \geqslant \alpha$ и $F(x)$ — первообразная функции f на луче $x \geqslant \alpha$. Если существует

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} (F(\beta) - F(\alpha)),$$

то этот предел обозначается $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} f(x)\,dx$ и называется *сходящимся несобственным интегралом*.

Свойства несобственных интегралов подробно рассматриваются в гл. 11, здесь ограничимся только теми вопросами, которые возникают при замене переменной в интеграле Римана. Будем считать, что первообразную функции f можно найти, поэтому вычисление предела производится непосредственно. Несобственный интеграл вида $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} g(t)\,dt$ и аналогичный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\alpha} g(t)\,dt$ получаются при замене в интеграле Римана с помощью функции $t=t(x)$, непрерывно дифференцируемой на полуинтервале $[a;b)$ (или $(a;b]$) и являющейся бесконечно большой определённого знака при $x\to b-$ (или $x\to a+$). Здесь существенно, что особой точкой функции t является именно конец (левый или правый) отрезка $[a;b]$. Если особой точкой $t(x)$ (как в примере 7.9) является внутренняя точка c интервала $(a;b)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ разбивается в сумму $\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx$ и переход к аргументу t делается раздельно в каждом из слагаемых.

Пример 7.10. Вычислим $\displaystyle\int\limits_{-1/\sqrt[3]{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

Решение. Применяя метод интегрирования биномиального дифференциала (см. п. 6.4.3), сделаем замену $t=\sqrt[3]{1+x^{-3}}$. Функция $t(x)$ непрерывно дифференцируема на полуинтервалах $\Big[-\frac{1}{\sqrt[3]{2}};0\Big)$ и $(0;1]$, точка $x=0$ является особой точкой $t(x)$, причём $\lim\limits_{x\to 0-}t(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+}t(x)=+\infty$. Поэтому, в соответствии с изложенным выше, интеграл вычисляется следующим образом:

$$\int\limits_{-1/\sqrt[3]{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=\int\limits_{-1/\sqrt[3]{2}}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=-\int\limits_{-1}^{-\infty}\frac{t\,dt}{t^3-1}-\int\limits_{+\infty}^{\sqrt[3]{2}}\frac{t\,dt}{t^3-1}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{t\,dt}{t^3-1}+\int\limits_{\sqrt[3]{2}}^{+\infty}\frac{t\,dt}{t^3-1}=\lim_{a\to-\infty}\Big(\frac{1}{6}\ln\Big|\frac{(t-1)^3}{t^3-1}\Big|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Big)\Big|_a^{-1}+$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\Big(\frac{1}{6}\ln\Big|\frac{(t-1)^3}{t^3-1}\Big|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Big)\Big|_{\sqrt[3]{2}}^{b}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln 4-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\ln(\sqrt[3]{2}-1)^3-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{5\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{2}-1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}}.\qquad\square$$

Другим видом несобственного интеграла является интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, если функция f не ограничена на $[a;b]$, но непрерывна на $[a+\varepsilon;b]$ при любом ε, $0<\varepsilon<b-a$ (или на $[a;b-\varepsilon]$), т. е. неограничена в окрестности точ-

ки a (точки b). Такой интеграл называется *сходящимся*, если существует

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad \left(\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx\right),$$

а сам интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ полагают равным значению этого предела.

Такого вида интеграл также может получиться при замене переменной в интеграле Римана.

Пример 7.11. Вычислим $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, если $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}, & x\neq 0,\\ \sqrt{2}, & x=0.\end{cases}$

Решение. Функция $f(x)\in C[0;1]$. Делая замену $t=\sqrt{1-x^2}$, получаем

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx=-\int\limits_1^0\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t}}=\int\limits_0^1\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t}}.$$

В последнем интеграле подынтегральная функция $t/\sqrt{1-t}$ не ограничена на $[0;1)$. Поскольку первообразная функции $t/\sqrt{1-t}$ на отрезке $[0;1-\varepsilon]$ при любом ε, $0<\varepsilon<1$, равна $\frac{2}{3}(1-t)^{3/2}-2\sqrt{1-t}$, получаем

$$\int\limits_0^1\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}-2\varepsilon^{1/2}+2-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}. \qquad \square$$

Несобственный интеграл может появиться и при интегрировании по частям.

Пример 7.12. Вычислим $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$.

Решение. Функция $\arcsin x$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0;1-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$, но не является такой на отрезке $[0;1]$. Поэтому интегрирование по частям допустимо только на отрезках вида $[0;1-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$. Но так как интеграл $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$ существует, получаем

$$\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\arcsin x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(x\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}-\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left((1-\varepsilon)\arcsin(1-\varepsilon)+\sqrt{1-x^2}\,\Big|_0^{1-\varepsilon}\right)=\frac{\pi}{2}-1. \qquad \square$$

Символом $F(x)\Big|_a^b$ обозначается как величина $F(b)-F(a)$, так и величины $\lim\limits_{x\to b-}(F(x)-F(a))$, $\lim\limits_{x\to a+}(F(b)-F(x))$, $\lim\limits_{x\to a+,\,y\to b-}(F(y)-F(x))$, если эти пределы существуют. Так, запись решения примера 7.12 имеет вид:

$$\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx=x\arcsin x\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}+\sqrt{1-x^2}\,\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1.$$

§ 7.2. Площадь плоской фигуры

Пусть xOy — декартова система координат на плоскости. *Стандартной относительно оси Ox фигурой D* называется множество всех точек $M(x, y)$, для которых $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные функции на $[a; b]$. Геометрически это означает, что слева и справа фигура ограничена отрезками прямых $x = a$, $x = b$ соответственно (может быть, вырождающимися в точку); а графики функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ являются нижней и верхней границами фигуры D (см. рис. 34).

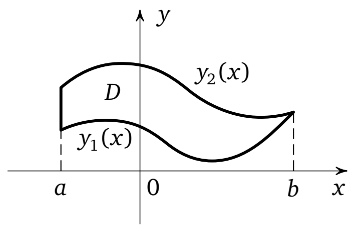


Рис. 34

Аналогично *стандартная относительно оси Oy фигура D* есть множество точек $M(x, y)$, для которых $c \leqslant y \leqslant d$, $x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)$, где $x_1(y)$ и $x_2(y)$ — непрерывные функции на $[c; d]$. В этом случае фигура D сверху и снизу ограничена отрезками прямых $y = d$ и $y = c$, слева и справа — графиками функций $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ соответственно.

Рассмотрим частный случай стандартной относительно оси Ox фигуры D, когда $y_1(x) \equiv 0$, а график функции $y_2(x) = f(x)$ — верхняя граница. Такую фигуру назовём *криволинейной трапецией* (см. рис. 35 *а*).

Пусть $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b$ — разбиение отрезка $[a; b]$.

Обозначим

$$m_k = \min_{[x_{k-1}; x_k]} f(x), \qquad M_k = \max_{[x_{k-1}; x_k]} f(x),$$

$$s_T = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}), \qquad S_T = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

Тогда суммы Дарбу s_T и S_T представляют собой площади фигур, составленных из прямоугольников, основаниями которых являются отрезки $[x_{k-1}; x_k]$, а высоты равны соответственно наименьшему и наибольшему значению функции $y = f(x)$ на этом отрезке. Первая из этих фигур содержится внутри рассматриваемой криволинейной трапеции D, а вторая содержит её внутри себя (см. рис. 35 *б*). Естественно требовать, чтобы площадь $|D|$ криволинейной трапеции D удовлетворяла соотношению $s_T \leqslant |D| \leqslant S_T$ при любом разбиении T.

Функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, поэтому $\sup\limits_T s_T = \inf\limits_T S_T = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

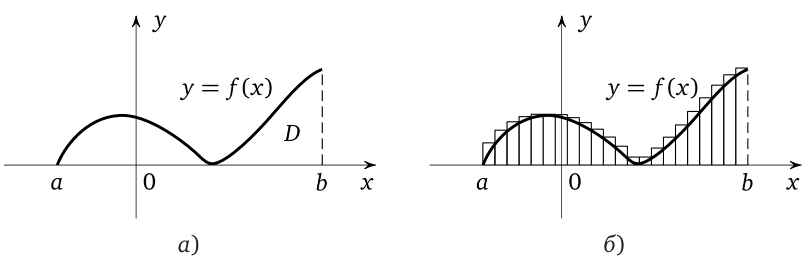


Рис. 35

Определение. *Площадью* $|D|$ *криволинейной трапеции* D называется величина $|D| = \sup\limits_T s_T = \inf\limits_T S_T$.

Из определения следует, что

$$|D| = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Площадь $|D|$ стандартной относительно оси Ox фигуры

$$D = \{(x, y): a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$$

вычисляется по формуле

$$|D| = \int\limits_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx.$$

Площадь $|D|$ стандартной относительно оси Oy фигуры

$$D = \{(x, y): c \leqslant y \leqslant d,\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\}$$

вычисляется по формуле

$$|D| = \int\limits_c^d (x_2(y) - x_1(y))\,dy.$$

Фигуру, являющуюся стандартной относительно одной из осей координат, будем кратко называть *стандартной*. *Плоской фигурой* (далее — *фигурой*) будем называть множество $E \subset \mathbb{R}^2$, являющееся связным конечным объединением стандартных фигур. Например, фигура, ограниченная лемнискатой $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $a > 0$, есть множество E:

$$E = \left\{(r, \varphi): \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right],\ 0 \leqslant r \leqslant a\sqrt{\cos 2\varphi}\right\}, \quad \text{см. рис. } 36\,a;$$

фигура, ограниченная линией $y = \sin x$ и отрезком $[-\pi; \pi]$ оси Ox, есть множество E (см. рис. 36 *б*):

$$E = \{(x, y): -\pi \leqslant x \leqslant 0,\ \sin x \leqslant y \leqslant 0\} \cup \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}.$$

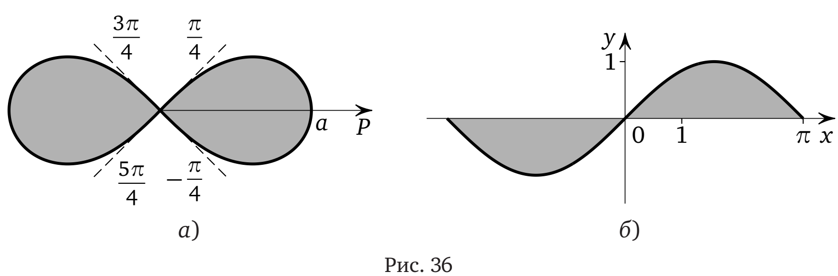


Рис. 36

Если фигуру D можно разбить на конечное число стандартных фигур D_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, $D = \bigcup\limits_{i=1}^{s} D_i$, без общих внутренних точек, то $|D|$ равна сумме площадей D_i: $|D| = \sum\limits_{i=1}^{s} |D_i|$.

Пример 7.13. Найдём площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x-1$ и $y^2=x+1$.

Решение. Данная фигура (см. рис. 37) — стандартная относительно как оси Ox:

$$D=\left\{(x,y)\colon -1\leqslant x\leqslant 3,\ y_1(x)\leqslant y\leqslant \sqrt{x+1}\right\},$$

где $$y_1(x)=\begin{cases}-\sqrt{x+1}, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x-1, & 0<x\leqslant 3,\end{cases}$$

так и относительно оси Oy:

$$D=\{(x,y)\colon -1\leqslant y\leqslant 2,\ y^2-1\leqslant x\leqslant y+1\}.$$

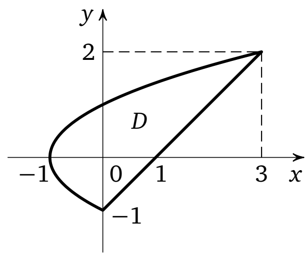


Рис. 37

Поэтому площадь $|D|$ данной фигуры можно вычислить двумя способами.

1. $$|D|=\int\limits_{-1}^{3}\left(\sqrt{x+1}-y_1(x)\right)dx=\int\limits_{-1}^{0}2\sqrt{x+1}\,dx+\int\limits_{0}^{3}\left(\sqrt{x+1}-x+1\right)dx=$$
$$=\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{3}-\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_{0}^{3}=\frac{9}{2}.$$

2. $$|D|=\int\limits_{-1}^{2}(y+1-y^2+1)\,dy=\left(-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$$ □

Пример 7.14. Найдём площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2+2ax-y^2=0$ и $ax-y^2+2a^2=0$, $a>0$.

Решение. Данная фигура (см. рис. 38) не является стандартной относительно оси Ox. Её можно разбить на 3 стандартные относительно оси Ox фигуры:

$$D_1=\left\{(x,y)\colon -2a\leqslant x\leqslant 0,\ -\sqrt{2a^2+ax}\leqslant y\leqslant\sqrt{2a^2+ax}\right\},$$
$$D_2=\left\{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant a,\ \sqrt{x^2+2ax}\leqslant y\leqslant\sqrt{2a^2+ax}\right\},$$
$$D_3=\left\{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant a,\ -\sqrt{2a^2+ax}\leqslant y\leqslant-\sqrt{x^2+2ax}\right\}.$$

Из симметрии фигуры D относительно оси Ox следует, что её площадь $|D|$ есть удвоенная площадь фигуры, являющейся объединением двух стандартных относительно оси Ox фигур $\widetilde{D}_1=\left\{(x,y)\colon -2a\leqslant x\leqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{2a^2+ax}\right\}$

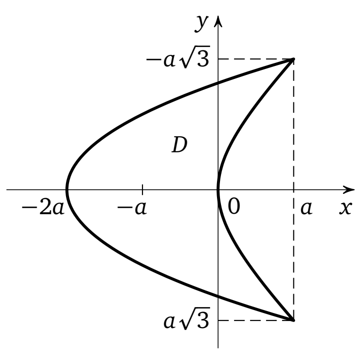


Рис. 38

и D_2. Отсюда

$$|D| = 2\Big(\int\limits_{-2a}^{0}\sqrt{2a^2+ax}\,dx+\int\limits_{0}^{a}\big(\sqrt{2a^2+ax}-\sqrt{x^2+2ax}\big)\,dx\Big)=$$
$$=2\Big(\frac{2}{3a}(ax+2a^2)^{3/2}\big|_{-2a}^{a}-\frac{x+a}{2}\sqrt{x^2+2ax}\,\Big|_0^a+$$
$$+\frac{a^2}{2}\ln\big(x+a+\sqrt{x^2+2ax}\big)\Big|_0^a\Big)=(2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3}))a^2.$$

Относительно оси Oy данная фигура является стандартной:

$$D=\Big\{(x,y)\colon -a\sqrt{3}\leqslant y\leqslant a\sqrt{3},\ \frac{y^2-2a^2}{a}\leqslant x\leqslant -a+\sqrt{y^2+a^2}\Big\}.$$

Снова используя симметрию фигуры, получаем

$$|D|=2\int\limits_0^{a\sqrt{3}}\Big(\sqrt{y^2+a^2}-a-\frac{y^2}{a}+2a\Big)\,dy=$$
$$=2a^2\sqrt{3}+\Big(y\sqrt{y^2+a^2}+a^2\ln(y+\sqrt{y^2+a^2})-\frac{2y^3}{3a}\Big)\Big|_0^{a\sqrt{3}}=(2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3}))a^2.$$

Заметим, что при втором способе решения вычисления проще. □

Перейдём к вычислению площади фигуры, ограниченной кривой, которая задана параметрически.

Пусть фигура D ограничена непрерывной замкнутой кривой

$$\Gamma\colon x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[T_0;T_1],\ x(T_0)=x(T_1),\ y(T_0)=y(T_1).$$

Рассмотрим подробно простейший случай: отрезок $[T_0;T_1]$ делится точкой $\tau\in(T_0;T_1)$ так, что на каждом из отрезков $[T_0;\tau]$ и $[\tau;T_1]$ функция x строго монотонна и непрерывно дифференцируема. Тогда кривая Γ состоит из двух ветвей, каждая из которых есть график непрерывной функции $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ соответственно (см. рис. 39). Предположим ещё, что для любого x выполнено неравенство $y_1(x)\leqslant y_2(x)$, тогда кривая $y=y_2(x)$ есть верхняя, а кривая $y=y_1(x)$ — нижняя граница фигуры D. Если при возрастании t кривая Γ проходится так, что фигура D остаётся слева (положительное направление обхода), то верхняя граница фигуры D проходится справа налево

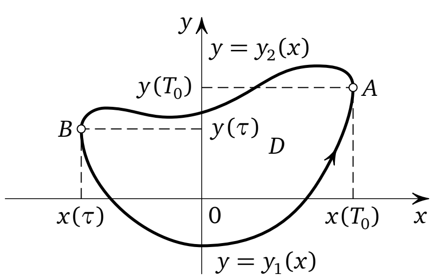


Рис. 39

(значение x убывает), а нижняя граница фигуры D проходится слева направо (значение x возрастает). Если $|D|$ — площадь фигуры D, то получаем

$$|D| = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx = \int_a^b y_2(x)\,dx - \int_a^b y_1(x)\,dx, \quad \text{где } a = x(\tau),\ b = x(T_0).$$

Сделав в первом интеграле замену $x = x(t)$, $t \in [T_0; \tau)$, а во втором $x = x(t)$, $t \in [\tau; T_1)$, имеем (так как $y_2(x(t)) = y(t)$, $t \in [T_0; \tau)$; $y_1(x(t)) = y(t)$, $t \in [\tau; T_1)$):

$$|D| = -\int_{T_0}^{\tau} y(t)x'(t)\,dt - \int_{\tau}^{T_1} y(t)x'(t)\,dt = -\int_{T_0}^{T_1} y(t)x'(t)\,dt.$$

Таким же образом получаем, что если отрезок $[T_0; T_1]$ делится точкой $\tau \in (T_0; T_1)$ так, что на каждом из отрезков $[T_0; \tau]$ и $[\tau; T_1]$ функция y строго монотонна и непрерывно дифференцируема, то $|D| = \int\limits_{T_0}^{T_1} x(t)y'(t)\,dt$. Если кривая Γ удовлетворяет обоим условиям, то имеем симметричную формулу:

$$|D| = \frac{1}{2}\int_{T_0}^{T_1} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt.$$

Можно доказать, что эти три формулы справедливы всегда, когда непрерывная замкнутая кривая Γ: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0; T_1]$, проходится при изменении t от T_0 до T_1 таким образом, что ограничиваемая этой кривой фигура D остаётся слева. Какую из них удобнее применять, зависит от конкретного вида функций $x(t)$ и $y(t)$.

Пример 7.15. Найдём площадь фигуры, ограниченной петлёй кривой $x = a(t^2 - 2t)$, $y = a(t^2 - 1)(t - 3)$, $a > 0$.

Решение. Петля кривой проходится в положительном направлении при изменении t от -1 до 3 (см. рис. 40). Для вычисления площади можно применить любую из трёх формул:

$$|D| = -\int_{T_0}^{T_1} y(t)x'(t)\,dt =$$

$$= -\int_{-1}^{3} a^2(t^2 - 1)(t - 3)(2t - 2)\,dt =$$

$$= -2a^2 \int_{-1}^{3} (t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t - 3)\,dt =$$

$$= -2a^2\Big(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - 3t\Big)\Big|_{-1}^{3} = \frac{256}{15}a^2,$$

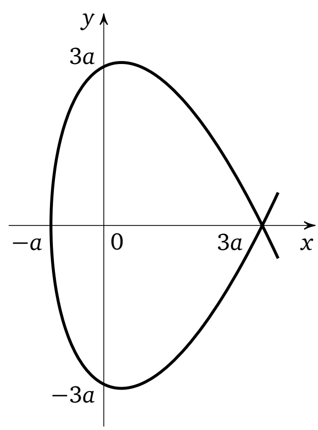


Рис. 40

или

$$|D| = \int_{T_0}^{T_1} x(t)y'(t)\,dt = \int_{-1}^{3} a^2(t^2-2t)(3t^2-6t-1)\,dt =$$
$$= a^2\Big(\frac{3}{5}t^5 - 3t^4 + \frac{11}{3}t^3 + t^2\Big)\Big|_{-1}^{3} = \frac{256}{15}a^2,$$

или

$$|D| = \frac{1}{2}\int_{T_0}^{T_1}(x(t)y'(t)-y(t)x'(t))\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} a^2(t^4-4t^3+7t^2-6t+6)\,dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\Big(\frac{1}{5}t^5 - t^4 + \frac{7}{3}t^3 - 3t^2 + 6t\Big)\Big|_{-1}^{3} = \frac{256}{15}a^2. \qquad \square$$

Пример 7.16. Найдём площадь фигуры, ограниченной кривой $x=\dfrac{at^2}{1+t^4}$, $y=\dfrac{at^3}{1+t^4}$, $a>0$.

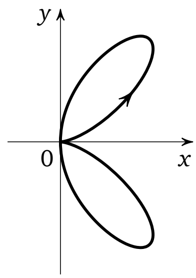


Рис. 41

Решение. Кривая образует две симметричные петли (см. рис. 41). Верхняя из них проходится в положительном направлении при изменении t от 0 до $+\infty$. Поэтому при вычислении площади получим несобственный интеграл (об интегралах такого вида см. с. 268). В данном случае для вычисления удобно применить симметричную формулу

$$|D| = \frac{1}{2}\int_{T_0}^{T_1}(x(t)y'(t)-y(t)x'(t))\,dt.$$

Поскольку $y=tx$, получаем $xy'-yx'=x(x+tx')-tx\cdot x'=x^2$, поэтому

$$|D| = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{a^2t^4}{(1+t^4)^2}\,dt = \frac{-a^2t}{8(1+t^4)}\Big|_{0}^{+\infty} + \frac{a^2}{8}\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi a^2}{16\sqrt{2}}$$

(см. задачу 6.146). Следовательно, площадь всей фигуры равна $\dfrac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$. $\square$

Рассмотрим на плоскости полярную систему координат. Аналогом криволинейной трапеции в этом случае является *криволинейный сектор*: множество точек $D=\big\{(r,\varphi)\colon \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta,\ 0\leqslant r\leqslant r(\varphi),\ \beta-\alpha\leqslant 2\pi,\ r(\varphi)\in C[\alpha;\beta]\big\}$.

Понятие площади криволинейного сектора и формулу её вычисления выведем аналогично рассмотрению криволинейной трапеции.

Пусть $\tau=\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$ — разбиение $[\alpha;\beta]$, $m_i=\min\limits_{[\varphi_{i-1};\varphi_i]} r(\varphi)$, $M_i=\max\limits_{[\varphi_{i-1};\varphi_i]} r(\varphi)$;

$$k_i = \{(r,\varphi)\colon \varphi\in[\varphi_{i-1};\varphi_i],\ r\leqslant m_i\},\quad K_i = \{(r,\varphi)\colon \varphi\in[\varphi_{i-1};\varphi_i],\ r\leqslant M_i\}.$$

Площади круговых секторов k_i и K_i равны:

$$|k_i| = \frac{1}{2}m_i^2(\varphi_i-\varphi_{i-1}),\quad |K_i| = \frac{1}{2}M_i^2(\varphi_i-\varphi_{i-1}).$$

При любом разбиении τ фигура k_τ, составленная из секторов k_i, содержится внутри криволинейного сектора D (см. рис. 42), а фигура K_τ, составленная из секторов K_i, содержит D, следовательно, $|D|$ — площадь D — должна

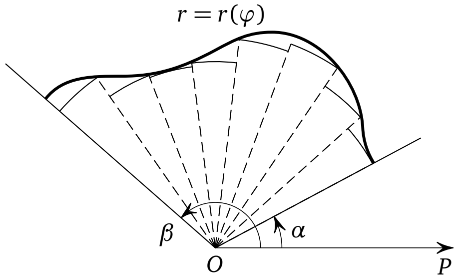


Рис. 42

удовлетворять неравенству:

$$|k_\tau| = \sum_{i=1}^{n} |k_i| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2(\varphi_i - \varphi_{i-1}) \leqslant |D| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2(\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} |K_i| = |K_\tau|.$$

Суммы в этом неравенстве — нижняя и верхняя суммы Дарбу для интеграла от непрерывной функции $\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$. Поэтому площадь криволинейного сектора D определяется как $\sup\limits_\tau |k_\tau|$ и вычисляется по формуле $|D| = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.

Пример 7.17. Найдём площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a\sin 3\varphi$, $a > 0$.

Решение. Кривая образует три симметричные петли, каждая из которых ограничивает криволинейный сектор (см. рис. 43).

Рассмотрим первый из них:

$D_1 = \{(r, \varphi)\colon 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3,\ 0 \leqslant r \leqslant a\sin 3\varphi\}$.

Площадь его равна 1/3 площади всей фигуры, ограниченной данной кривой. Следовательно,

$$|D| = 3|D_1| = \frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi/3} a^2 \sin^2 3\varphi\, d\varphi = \frac{\pi a^2}{4}. \qquad \square$$

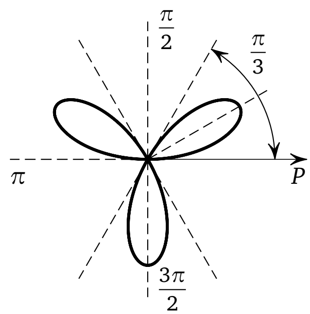


Рис. 43

Пример 7.18. Найдём площадь фигуры, лежащей внутри петли кривой $x = a(t^2 - 2t)$, $y = a(t^2 - 1)(t - 3)$ и вне кривой $r = a(3 - 2\cos\varphi)$, $a > 0$ (системы координат совмещены).

Решение. Построим эскизы данных кривых (см. рис. 44). Заметим, что эти кривые пересекаются в точках $(0, \pm 3a)$. Рассмотрим окружность S с центром в точке $(-a, 0)$, проходящую через точки $(0, \pm 3a)$: $S = \{(x, y)\colon x^2 + 2ax + y^2 - 9a^2 = 0\}$. Чтобы выяснить взаимное расположение данных кривых, сравним их с окружностью. Для точек первой кривой имеем

$$\begin{gathered} x^2 + 2ax + y^2 - 9a^2 = \\ = a^2t^2(t-2)^2 + 2a^2t(t-2) + a^2((t^2-1)(t-3)-3)((t^2-1)(t-3)+3) = \\ = a^2t(t-2)(t(t-2) + 2 + (t^2-3t-1)(t^2-t-3)) = a^2t(t-2)(t^4-4t^3+8t+5). \end{gathered}$$

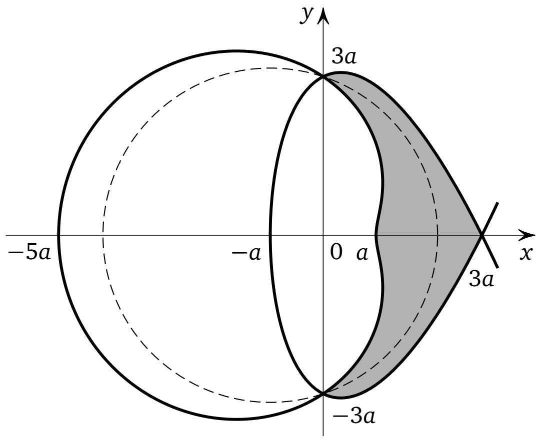


Рис. 44

Рассмотрим функцию $f(t)=t^4-4t^3+8t+5$. Тогда $f'(t)=4t^3-12t^2+8=$ $=4(t-1)(t^2-2t-2)=2(t^2-2t-2)'(t^2-2t-2)=((t^2-2t-2)^2)'$, поэтому $f(t)=(t^2-2t-2)^2+C$. Имеем $5=f(0)=(-2)^2+C$, откуда $C=1$.

Таким образом,

$$x^2+2ax+y^2-9a^2=a^2t(t-2)((t^2-2t-2)^2+1)=ax((t^2-2t-2)^2+1).$$

Следовательно, для части первой кривой, находящейся слева от оси Oy ($x<0$), имеем $(x+a)^2+y^2<10a^2$, поэтому она лежит внутри окружности S, а часть кривой, находящаяся справа от оси Oy ($x>0$), лежит вне этой окружности. Для точек второй кривой, лежащих слева от оси Oy, имеем $\pi/2<\varphi<3\pi/2$, следовательно, $r>3a$ и $r^2=3ar-2ar\cos\varphi>9a^2-2ar\cos\varphi$. Переходя к декартовой системе координат, получим, что для всех точек второй кривой, лежащих слева от оси Oy, имеем $x^2+y^2+2ax-9a^2>0$, т. е. слева от оси Oy часть этой кривой лежит вне окружности S. Если же $-\pi/2<\varphi<\pi/2$, то $r<3a$ и $r^2=3ar-2ar\cos\varphi<9a^2-2ar\cos\varphi$, т. е. $x^2+y^2+2ax-9a^2<0$, значит, справа от оси Oy часть этой кривой лежит внутри окружности. Итак, данная фигура лежит справа от оси Oy (см. рис. 44). Поскольку она симметрична относительно оси Ox, её площадь $|D|$ равна удвоенной разности площади криволинейной трапеции $D_1=\{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant 3a,\ 0\leqslant y\leqslant y(t(x)),$ $-1\leqslant t\leqslant 0\}$ и площади криволинейного сектора

$$D_2=\{(r,\varphi)\colon 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2,\ 0\leqslant r\leqslant a(3-2\cos\varphi)\}.$$

Следовательно,

$$|D|=2\left(\int\limits_{-1}^{0}a^2(3t^4-12t^3+11t^2+2t)\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}a^2(3-2\cos\varphi)^2\,d\varphi\right)=$$
$$=2a^2\left(\frac{3}{5}t^5-3t^4+\frac{11}{3}t^3+t^2\right)\Big|_{-1}^{0}-a^2\int\limits_0^{\pi/2}(9-12\cos\varphi+4\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$
$$=a^2\left(\frac{368}{15}-\frac{11\pi}{2}\right).$$

□

§ 7.3. Объём тела вращения

Пусть D — криволинейная трапеция:

$$D = \{(x, y)\colon 0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant y(x),\ y \in C[a; b]\};$$

V^{Ox} — тело, полученное вращением D вокруг оси Ox. Для разбиения T: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a; b]$ обозначим через D_T фигуру, составленную из прямоугольников, основаниями которых являются отрезки $[x_{k-1}; x_k]$, а высотами — наименьшие значения y на $[x_{k-1}; x_k]$. Фигура D_T содержится в криволинейной трапеции D (см. рис. 45).

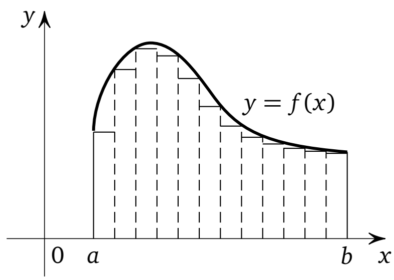


Рис. 45

При вращении D_T вокруг оси Ox получим тело V_T^{Ox}, содержащееся внутри тела V^{Ox}. Тело V_T^{Ox} составлено из прямых круговых цилиндров, образованных вращением прямоугольников, составляющих фигуру D_T. Высота каждого такого цилиндра есть $(x_k - x_{k-1})$, радиус основания $m_k = \min\limits_{[x_{k-1}; x_k]} y(x)$, поэтому $|V_T^{Ox}|$ — объём тела V_T^{Ox} — равен $\sum\limits_{k=1}^{n} \pi m_k^2 (x_k - x_{k-1})$. Объёмом $|V^{Ox}|$ тела V^{Ox} назовём $\sup\limits_T |V_T^{Ox}|$. Поскольку $|V_T^{Ox}|$ есть нижняя сумма Дарбу непрерывной функции $\pi y^2(x)$, получаем

$$|V^{Ox}| = \sup_T |V_T^{Ox}| = \pi \int\limits_a^b y^2(x)\,dx.$$

При вращении D_T вокруг оси Oy каждый из прямоугольников, составляющих D_T, образует цилиндрическое кольцо, высота которого равна m_k, а основанием является кольцо с внешним радиусом x_k и внутренним x_{k-1}. Объём такого цилиндрического кольца равен $\pi m_k (x_k^2 - x_{k-1}^2)$.

Тело V_T^{Oy}, полученное вращением D_T вокруг оси Oy, содержится внутри тела V^{Oy}, полученного вращением вокруг этой оси фигуры D. Объём $|V_T^{Oy}|$ тела V_T^{Oy} при любом разбиении T не превосходит $\pi(b^2 - a^2) \max\limits_{[a;b]} y(x)$, следовательно, $\sup\limits_T |V_T^{Oy}| < \infty$. Эта верхняя грань и принимается за величину $|V^{Oy}|$ — объёма тела V^{Oy}. Для вывода формулы вычисления $|V^{Oy}|$ рассмотрим функцию $V(x)$ — объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $D = \big\{(t, y)\colon a \leqslant t \leqslant x,\ 0 \leqslant y \leqslant y(t)\big\}$.

Если x и $x + \Delta x$ лежат на $[a; b]$ и $\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)$, то

$$\pi|(x + \Delta x)^2 - x^2| \min_{[x;\ x+\Delta x]} y(t) \leqslant |\Delta V| \leqslant \pi|(x + \Delta x)^2 - x^2| \max_{[x; x+\Delta x]} y(t),$$

откуда в силу непрерывности функции y получаем для некоторого $\theta \in (0; 1)$:

$$\Delta V = \pi(2x\Delta x + (\Delta x)^2) y(x + \theta\Delta x),$$

или $\Delta V = \pi(2x\Delta x + o(\Delta x))(y(x) + o(1))$.

Полученное соотношение показывает, что $dV(x) = 2\pi xy(x)\,dx$ и поэтому

$$|V^{Oy}| = V(b) = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.$$

Образно говоря, в этом выводе мы пользовались не «методом Архимеда» — оценкой сверху и снизу искомой величины, а «методом Ньютона» — нахождением дифференциала этой величины как функции параметра.

Пусть функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим фигуры

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant y(x)\},\\
D_2 &= \{(x, y)\colon 0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b,\ y(x) \leqslant y \leqslant 0\},\\
D_3 &= \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b \leqslant 0,\ y(x) \leqslant y \leqslant 0\}
\end{aligned}$$

и тела $V_1^{Ox}, V_2^{Ox}, V_3^{Ox}, V_1^{Oy}, V_2^{Oy}, V_3^{Oy}$, полученные вращением фигур D_1, D_2, D_3 вокруг осей Ox и Oy соответственно. Повторяя вышеприведённые рассуждения, получаем, что объёмы этих тел соответственно равны:

$$|V_i^{Ox}| = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx, \quad |V_i^{Oy}| = 2\pi \int_a^b |xy(x)|\,dx, \quad i = 1, 2, 3.$$

Пусть D — стандартная относительно оси Ox фигура:

$$D = \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),\ y_1(x) \in C[a;b],\ y_2(x) \in C[a;b]\}.$$

Если ось Ox не пересекает D, то через V^{Ox} обозначим тело, образованное вращением D вокруг оси Ox; если ось Oy не пересекает D, то через V^{Oy} обозначим тело, образованное вращением D вокруг оси Oy. Объёмы этих тел вычисляются как разность или сумма объёмов тел, полученных при вращении соответствующих фигур вида D_1, D_2 и D_3, рассмотренных выше, в зависимости от знаков чисел a, b и знаков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Например, если $a < b \leqslant 0$, $y_1(x) \leqslant 0$ и $y_2(x) \geqslant 0$ для $x \in [a;b]$, то $|V^{Oy}|$ есть сумма объёмов $|V_1^{Oy}|$ и $|V_3^{Oy}|$ тел V_1^{Oy} и V_3^{Oy}, полученных при вращении фигур $D_1 = \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$ и $D_3 = \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant 0\}$ вокруг оси Oy. Из этих соображений получаем формулы

$$|V^{Ox}| = \pi \int_a^b |y_2^2(x) - y_1^2(x)|\,dx, \quad |V^{Oy}| = 2\pi \int_a^b |x|(y_2(x) - y_1(x))\,dx.$$

Пусть теперь D — фигура, ограниченная непрерывной замкнутой кривой

$$\Gamma = \Big\{(x, y)\colon x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [T_0; T_1],\ x(T_0) = x(T_1),\ y(T_0) = y(T_1)\Big\}$$

без самопересечений, т. е. при изменении t от T_0 до T_1 фигура остаётся по одну сторону (слева или справа) от Γ. Так же как и при вычислении площадей выводится, что если соответствующая ось координат не проходит внутри D

и функции x и y непрерывно дифференцируемы на $[T_0; T_1]$, то

$$|V^{Ox}| = \pi\left|\int\limits_{T_0}^{T_1} y^2(t)x'(t)\,dt\right| = 2\pi\left|\int\limits_{T_0}^{T_1} x(t)\,y(t)y'(t)\,dt\right|, \tag{2}$$

$$|V^{Oy}| = 2\pi\left|\int\limits_{T_0}^{T_1} x(t)y(t)x'(t)\,dt\right| = \pi\left|\int\limits_{T_0}^{T_1} x^2(t)y'(t)\,dt\right|. \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) применимы и тогда, когда гладкость кривой Γ нарушается в конечном множестве точек или параметр t пробегает неограниченный промежуток, интеграл в таком случае рассматривается как несобственный (см. с. 269). Знак каждого из интегралов в этих формулах зависит от взаимного расположения кривой Γ, фигуры D и осей вращения, а объём, разумеется, должен быть числом положительным.

Если кривая $\Gamma=\{(x, y)\colon x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[T_0; T_1]\}$ не замкнута, но

$$y(t) \geqslant 0 \quad \text{при всех } t \in [T_0; T_1],\ y(T_0) = y(T_1) = 0,\ x(T_0) = a < b = x(T_1)$$

и фигура D ограничена кривой Γ и отрезком $[a; b]$ оси Ox, то D можно рассматривать как фигуру, ограниченную непрерывной замкнутой кривой Γ_1 без самопересечений: $\Gamma_1=\big\{(x, y)\colon x=x_1(t),\ y=y_1(t),\ t\in[T_0; T_2],\ T_1<T_2\big\}$, где

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [T_0; T_1],\\ b - \dfrac{b-a}{T_2-T_1}(t-T_1), & t \in [T_1; T_2], \end{cases} \qquad y_1(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [T_0; T_1],\\ 0, & t \in [T_1; T_2]. \end{cases}$$

Для вычисления объёмов тел, полученных вращением такой фигуры вокруг осей координат уже применимы формулы (2), (3) с заменой верхних пределов в интегралах на T_2, но заметим, что подынтегральные выражения во всех четырёх интегралах на отрезке $[T_1; T_2]$ обращаются в нуль и поэтому вычисление проводится без изменения пределов интегрирования. Точно так же по формулам (2), (3) вычисляются объёмы тел, полученных вращением вокруг осей координат фигуры, ограниченной отрезком $[c; d]$ оси Oy и кривой

$$\Gamma = \big\{(x, y)\colon x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [T_0; T_1],\ x(t) \geqslant 0,\ t \in [T_0; T_1],\\ x(T_0) = x(T_1) = 0,\ y(T_0) = c,\ y(T_1) = d,\ d > c\big\}.$$

Обращаем внимание, что формулы (2), (3) справедливы и для фигур, не являющихся стандартными относительно любой из осей координат.

Если тело образовано вращением фигуры D вокруг оси, не пересекающей фигуру D и не являющейся одной из осей координат, то для вычисления объёма полученного тела делают замену системы координат так, чтобы в новой системе одна из координатных осей совпала с осью вращения. В частности:

а) если осью вращения является прямая $y=l$, не пересекающая фигуру

$$D = \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\},$$

то объём $|V^l|$ тела V^l, полученного вращением D вокруг этой оси, вычисляется по формуле

$$|V^l| = \pi \int_a^b |(y_2 - l)^2 - (y_1 - l)^2|\,dx;$$

б) если осью вращения является прямая $x = l$, не пересекающая фигуру $D = \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$, то объём $|V^l|$ тела V^l, полученного вращением D вокруг этой оси, вычисляется по формуле

$$|V^l| = 2\pi \int_a^b (y_2 - y_1)|x - l|\,dx.$$

Обе эти формулы получаются переносом осей координат так, чтобы в первом случае ось l стала новой осью абсцисс, а во втором — ось l стала новой осью ординат.

Пример 7.19. Фигура D расположена в правой полуплоскости ($x \geqslant 0$) и ограничена линиями $y = x$ и $y = 2x - x^3$ (см. рис. 46). Найдём объёмы тел, полученных при вращении фигуры D вокруг:

а) оси Ox; б) оси Oy;

в) горизонтальной касательной к верхней границе D;

г) прямой $y = x$.

Решение. Фигура D является стандартной относительно оси Ox:

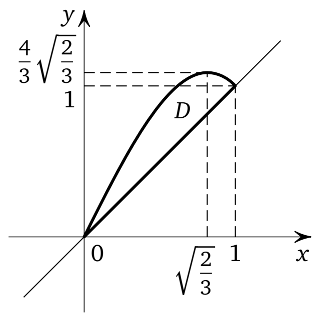


Рис. 46

$$D = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x \leqslant y \leqslant 2x - x^3\},$$

следовательно,

а) $|V^{Ox}| = \pi \int_0^1 ((2x - x^3)^2 - x^2)\,dx = \pi \int_0^1 (x^6 - 4x^4 + 3x^2)\,dx = \pi\left(\frac{1}{7} - \frac{4}{5} + 1\right) = \frac{12\pi}{35}$,

б) $|V^{Oy}| = 2\pi \int_0^1 x(2x - x^3 - x)\,dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4\pi}{15}$.

в) Горизонтальная касательная к графику функции $y = 2x - x^3$ проходит через точку $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, т. е. в этом случае осью вращения является прямая $y = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Сделаем перенос осей координат, т. е. перейдём к координатам u, v так, что $u = x$, $v = y - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, тогда ось Ou будет осью вращения и в новой системе координат фигура D будет стандартной относительно оси Ou:

$$D = \left\{(u, v)\colon 0 \leqslant u \leqslant 1,\ u - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \leqslant v \leqslant 2u - u^3 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}.$$

Следовательно, объём $|V^{Ou}|$ искомого тела вычисляется по формуле

$$|V^{Ou}| = \pi\int\limits_0^1 \Big(\Big(u-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\Big)^2 - \Big(2u-u^3-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\Big)^2\Big)du =$$

$$= \pi\int\limits_0^1 \Big(-u^6+4u^4-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}u^3-3u^2+\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}u\Big)du =$$

$$= \pi\Big(-\frac{1}{7}+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-1+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\Big) = \Big(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{12}{35}\Big)\pi.$$

г) Сделаем поворот осей координат на $\pi/4$, т. е. перейдём от переменных x, y к переменным u, v по формулам

$$u = x\cos\frac{\pi}{4} + y\sin\frac{\pi}{4}, \quad v = -x\sin\frac{\pi}{4} + y\cos\frac{\pi}{4}.$$

Тогда $u = \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}}$, $v = -\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}}$ и осью вращения станет ось Ou.

В новой системе координат uOv осью вращения является ось Ou, фигура D ограничена осью Ou и кривой

$$\Gamma\colon u = \frac{x+y}{\sqrt{2}} = \frac{3x-x^3}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{-x+y}{\sqrt{2}} = \frac{x-x^3}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Будем рассматривать эти соотношения как параметрическое задание Γ. Заменив t на x, x на u, y на v в формуле (2) на с. 281, получим

$$|V^{Ou}| = \pi\int\limits_0^1 v^2(x)u'(x)dx = \pi\int\limits_0^1 \frac{(x-x^3)^2}{2}\sqrt{2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 (x^6-2x^4+x^2)dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{7}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\Big) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{105}. \quad \square$$

Ещё раз обратим внимание на то, что формула (2) применима независимо от того, является ли фигура D криволинейной трапецией в рассматриваемой системе координат или нет, что существенно облегчает решение. Именно в данном примере можно доказать, что D есть криволинейная трапеция в системе uOv, но сам факт бесполезен, а доказательство громоздко, поэтому мы его не приводим.

Пример 7.20. Найдём объём тела, полученного при вращении фигуры D, ограниченной петлёй кривой $\Gamma\colon x = t^2-2t$, $y = (t^2-1)(t-3)$, вокруг а) оси Ox; б) вертикальной касательной к Γ.

Решение. Петля кривой Γ проходится при изменении t от $T_0 = -1$ до $T_1 = 3$ так, что фигура D остаётся слева и состоит из двух частей, симметричных относительно оси Ox, соответствующих изменению t от T_0 до $T_2 = 1$ и от T_2 до T_1 (см. рис. 47).

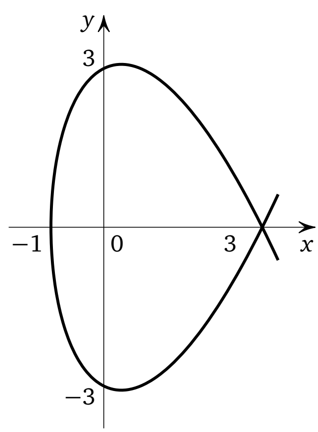


Рис. 47

Ранее специально оговаривалось, что ось вращения не пересекает фигуру D, иначе неясно, какое тело вращения рассматривается. Единственным исключением является тот случай, когда ось вращения есть ось симметрии фигуры D. Тогда ясно, что речь идёт о теле, полученном при вращении вокруг оси симметрии фигуры D одной из тех частей, на которые эта ось делит D.

а) Итак, надо вычислить объём $|V^{Ox}|$ тела V^{Ox}, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры D, ограниченной кривой

$$\Gamma_1: x = t^2 - 2t,\ \ y = (t^2-1)(t-3),\ \ t \in [-1; 1],$$

и отрезком $[-1; 3]$ оси Ox. Имеем

$$|V^{Ox}| = -\pi \int\limits_{-1}^{1} (t^2-1)^2(t-3)^2(2t-2)\,dt =$$

$$= -2\pi \int\limits_{-1}^{1} (t^7 - 7t^6 + 13t^5 + 5t^4 - 29t^3 + 11t^2 + 15t - 9)\,dt = \frac{64\pi}{3}.$$

б) Так как $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2(t-1)}{3t^2-6t-1}$ на кривой Γ, то $\dfrac{dx}{dy} = 0$ при $t=1$. Следовательно, вертикальной касательной к Γ является прямая $x = x(1)$, т. е. $x=-1$. Поэтому

$$|V| = -2\pi \int\limits_{-1}^{3} y(t)(x(t)+1)x'(t)\,dt = -2\pi \int\limits_{-1}^{3} (t-1)^2(t^2-1)(t-3)2(t-1)\,dt =$$

$$= -4\pi \int\limits_{-1}^{3} (t-1)^4(t^2-2t-3)\,dt = -4\pi \int\limits_{-1}^{3} ((t-1)^6 - 4(t-1)^4)\,dt =$$

$$= \frac{16}{5}\pi(t-1)^5\Big|_{-1}^{3} - \frac{4\pi}{7}(t-1)^7\Big|_{-1}^{3} = \frac{2048}{35}\pi. \qquad \square$$

Пример 7.21. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ делится прямой $Ax = By$ $(AB \neq 0)$ на две части, симметричные относительно $O(0, 0)$. Найдём объём тела, полученного при вращении одной из этих частей вокруг прямой $Ax = By$ (см. рис. 48).

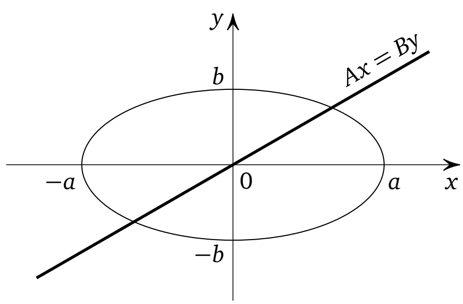


Рис. 48

Решение. Сделаем поворот осей координат, т. е. перейдём к координатам u, v так, чтобы ось Ou стала осью вращения. Угол поворота равен $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A}{B}$, и

$$u = \frac{Bx}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{Ay}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad v = \frac{-Ax}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Рассматриваемая фигура D не является стандартной относительно оси Ou, поэтому удобно рассматривать эллипс в параметрическом задании, поскольку тогда формула вычисления объёма тела вращения не зависит от того, стандартна или нет фигура D относительно оси вращения.

Положим $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Тогда фигура D ограничена кривой

$$\Gamma\colon u = \frac{aB\cos t + bA\sin t}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad v = \frac{-aA\cos t + bB\sin t}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad T_0 \leqslant t \leqslant T_1,$$

и отрезком оси Ou. Значения T_0 и T_1 получаем из условия $v(T_0) = v(T_1) = 0$: $T_0 = \operatorname{arctg} \frac{aA}{bB}$, $T_1 = T_0 + \pi$. Следовательно,

$$|V^{Ou}| = -\pi \int\limits_{T_0}^{T_1} v^2(t)u'(t)\,dt = -\frac{\pi}{(A^2+B^2)^{3/2}} \int\limits_{T_0}^{T_1} (a^2A^2\cos^2 t + b^2B^2\sin^2 t -$$
$$-2abAB\cos t\sin t)(bA\cos t - aB\sin t)\,dt =$$
$$= -\frac{\pi}{(A^2+B^2)^{3/2}} \int\limits_{T_0}^{T_1} \Big(a^2bA^3\cos t - ab^2B^3\sin t + \sin^2 t\cos t\cdot(b^3AB^2 - a^2bA^3 + 2a^2bAB^2) -$$
$$-\cos^2 t\sin t\cdot(a^3A^2B - ab^2B^3 + 2ab^2A^2B)\Big)\,dt =$$
$$= \frac{2\pi}{(A^2+B^2)^{3/2}}\Big(a^2bA^3\sin T_0 + ab^2B^3\cos T_0 + \frac{\sin^3 T_0}{3}(b^3AB^2 - a^2bA^3 + 2a^2bAB^2) +$$
$$+\frac{\cos^3 T_0}{3}(a^3A^2B - ab^2B^3 + 2ab^2A^2B)\Big) =$$
$$= \frac{2\pi}{(A^2+B^2)^{3/2}\cdot 3(A^2a^2+B^2b^2)^{3/2}}\Big((3a^3bA^4 + 3ab^3B^4)(A^2a^2+B^2b^2) +$$
$$+a^3A^3(b^3AB^2 - a^2bA^3 + 2a^2bAB^2) + b^3B^3(a^3A^2B - ab^2B^3 + 2ab^2A^2B)\Big) =$$
$$= \frac{4\pi}{3(A^2+B^2)^{3/2}}\cdot\frac{ab}{(A^2a^2+B^2b^2)^{3/2}}(A^2a^2+B^2b^2)^2(A^2+B^2) = \frac{4\pi ab\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}}{3\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad \square$$

Пример 7.22. Найдём объём тела, полученного при вращении фигуры D, ограниченной кривой

$$\Gamma\colon r = a\sin 3\varphi,\ a > 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3,$$

вокруг: а) полярной оси; б) оси $\varphi = \pi/2$ (см. рис. 49).

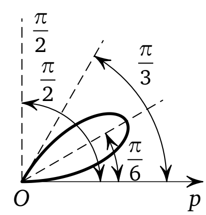


Рис. 49

Решение. Перейдём к декартовой системе координат, совмещённой с полярной. Кривая Γ в этой системе записывается в параметрическом виде:

$$x = a\sin 3\varphi\cos\varphi, \quad y = a\sin 3\varphi\sin\varphi,$$

и при изменении φ от 0 до $\pi/3$ проходится так, что фигура D остаётся слева. Осями вращения являются соответственно оси Ox и Oy. Следовательно,

а) $$|V^{Ox}|=-\pi\int\limits_0^{\pi/3} y^2(\varphi)x'(\varphi)\,d\varphi=$$

$$=-\frac{\pi a^3}{4}\int\limits_0^{\pi/3}(\cos 2\varphi-\cos 4\varphi)^2(2\cos 4\varphi+\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{\pi a^3}{8}\int\limits_0^{\pi/3}\Big(\frac{3}{2}\cos 2\varphi-3\cos 4\varphi+\frac{3}{2}\cos 6\varphi+\frac{3}{2}\cos 10\varphi-\cos 12\varphi\Big)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi a^3}{8}\Big(\frac{3}{4}\sin 2\varphi-\frac{3}{4}\sin 4\varphi+\frac{3}{20}\sin 10\varphi\Big)\Big|_0^{\pi/3}=\frac{27\sqrt{3}\pi a^3}{320};$$

б) $$|V^{Oy}|=\pi\int\limits_0^{\pi/3} x^2(\varphi)y'(\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{\pi a^3}{4}\int\limits_0^{\pi/3}(\sin 2\varphi+\sin 4\varphi)^2(2\sin 4\varphi-\sin 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{\pi a^3}{8}\int\limits_0^{\pi/3}\Big(\frac{3}{2}\sin 2\varphi+3\sin 4\varphi+2\sin 6\varphi-\frac{3}{2}\sin 10\varphi-\sin 12\varphi\Big)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi a^3}{8}\Big(-\frac{3}{4}\cos 2\varphi-\frac{3}{4}\cos 4\varphi+\frac{3}{20}\cos 10\varphi\Big)\Big|_0^{\pi/3}=\frac{81}{40}\pi a^3. \qquad \square$$

Замечание. Формула, выражающая объём тела, полученного вращением криволинейного сектора $D=\big\{(r,\varphi): 0\leqslant\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1\leqslant\pi,\ 0\leqslant r\leqslant r(\varphi)\big\}$ вокруг прямой, содержащей полярную ось, без перехода к декартовой системе координат, приведена в задаче 7.126.

§7.4. Длина дуги кривой

Определение. *Дугой кривой* назовём образ отрезка $[T_0;T_1]$ при непрерывной биекции $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t\in[T_0;T_1]$, и обозначим

$$\Gamma:\{(x,y,z): x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in[T_0;T_1]\}\quad\text{или}$$
$$\Gamma: x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad t\in[T_0;T_1].$$

Пусть $\tau: T_0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=T_1$ — разбиение отрезка $[T_0;T_1]$. Каждой точке разбиения τ соответствует точка $M_k(x(t_k),y(t_k),z(t_k))$, $0\leqslant k\leqslant n$, на кривой Γ. Через Γ_τ обозначим ломаную с вершинами $M_0, M_1, \ldots, M_n$, а её длину обозначим через $|\Gamma_\tau|$.

Определение. Кривая Γ называется *спрямляемой*, если $\sup\limits_\tau|\Gamma_\tau|$ конечен. В этом случае *длиной дуги* Γ называется число $|\Gamma|=\sup\limits_\tau|\Gamma_\tau|$.

Заметим, что одна и та же линия может быть образом разных отрезков при разных биективных отображениях, т. е. может быть разными способами параметризована. Так, например, возьмём на декартовой плоскости xOy полуокружность с центром в начале координат радиусом 1, лежащую в верхней полуплоскости. Эту линию можно представить как отображение $y=\sqrt{1-x^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, или как отображение $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$, или как отображение $x=1-t$, $y=\sqrt{2t-t^2}$, $0\leqslant t\leqslant 2$, и т. д. Вопрос о том, когда разные параметризации задают одну и ту же линию, здесь не рассматривается. Ограничиваясь наглядными соображениями, отметим только, что длина дуги кривой есть её внутренняя геометрическая характеристика, не зависящая от способа её параметризации.

Пусть задана дуга кривой Γ: $x(t), y(t), z(t)$, $t\in[T_0;T_1]$, и функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0;T_1]$. Можно показать, что тогда длина Γ вычисляется по формуле

$$|\Gamma|=\int\limits_{T_0}^{T_1}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

В этом случае длина части Γ от начальной точки $M_0(x(T_0), y(T_0), z(T_0))$ до точки $M(x(t),\ y(t), z(t))$ задаётся функцией

$$s(t)=\int\limits_{T_0}^{t}\sqrt{(x'(\tau))^2+(y'(\tau))^2+(z'(\tau))^2}\,d\tau.$$

Её дифференциал называют *дифференциалом дуги кривой* Γ и обозначают ds:

$$ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt,\qquad t\in[T_0;T_1].$$

Рассмотрим некоторые частные случаи задания плоской кривой.

1. Если кривая Γ лежит в плоскости xOy, т. е. $z(t)\equiv 0$, то

$$ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt\quad\text{и}\quad|\Gamma|=\int\limits_{T_0}^{T_1}ds.$$

2. Если лежащая в плоскости кривая Γ является графиком непрерывно дифференцируемой на $[a;b]$ функции $y=y(x)$, то

$$ds=\sqrt{1+(y')^2}dx\quad\text{и}\quad|\Gamma|=\int\limits_{a}^{b}ds.$$

3. Если плоская кривая Γ задана в полярной системе координат как график непрерывно дифференцируемой на отрезке $[\alpha;\beta]$ функции $r=r(\varphi)$, то

$$ds=\sqrt{(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2}d\varphi\quad\text{и}\quad|\Gamma|=\int\limits_{\alpha}^{\beta}ds.$$

Если хотя бы одна из функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ не является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[T_0;T_1]$, но все функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[T_0;T_1-\varepsilon]$ при любом ε, $0<\varepsilon<T_1-T_0$, и функ-

ция $\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}$ имеет первообразную на отрезке $[T_0; T_1]$, то пользуются той же формулой, понимая интеграл в ней как несобственный:

$$|\Gamma| = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{T_0}^{T_1-\varepsilon} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Пример 7.23. Рассмотрим полуокружность $\Gamma\colon x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$. Как известно, её длина равна π. Покажем, как для этой кривой работает приведённая формула. Выберем в качестве параметра переменную x. Тогда $y=\sqrt{1-x^2}$ и Γ есть биективный образ отрезка $[-1; 1]$. Функция $y=\sqrt{1-x^2}$ не является дифференцируемой в точках $x=1$ и $x=-1$, но для любого ε, $0<\varepsilon<1$, эта функция непрерывно дифференцируема на отрезке $[-1+\varepsilon; 1-\varepsilon]$, причём

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \sqrt{1+(y')^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Первообразная функции $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ — функция $\arcsin x$ — непрерывна на $[-1; 1]$, поэтому длина данной кривой Γ вычисляется следующим образом:

$$|\Gamma| = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\big|_{-1}^{1} = \pi.$$

Заметим, что можно рассмотреть такую параметризацию этой полуокружности $\Gamma\colon x(t)$, $y(t)$, $t\in[t_0; t_1]$, что функции $x(t)$ и $y(t)$ будут непрерывно дифференцируемы на $[t_0; t_1]$, например $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t\in[0; \pi]$. □

Пример 7.24. Найдём длину дуги кривой $\Gamma\colon y=\operatorname{ch} x$ от точки $A(0, 1)$ до точки $B(b, \operatorname{ch} b)$, где $b>0$.

Решение. Поскольку $y'=\operatorname{sh} x$, $1+(y')^2=1+\operatorname{sh}^2 x$ и дуга Γ является биективным отображением отрезка $[0; b]$, получаем

$$|\Gamma| = \int\limits_0^b \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \int\limits_0^b \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x\big|_0^b = \operatorname{sh} b. \qquad \square$$

Пример 7.25. Найдём длину дуги кривой $\Gamma\colon x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$, $1\leqslant y\leqslant e$.

Решение. Возьмём в качестве параметра переменную y. Тогда

$$x' = \frac{y}{2}-\frac{1}{2y}; \quad 1+(x')^2 = 1+\frac{1}{4}\Big(y^2-2+\frac{1}{y^2}\Big) = \frac{1}{4}\Big(y+\frac{1}{y}\Big)^2.$$

Поскольку $x'>0$ при $y>1$, заключаем, что отображение $y=y$, $x=x(y)$, $1\leqslant$ $\leqslant y\leqslant e$, биективно, поэтому $|\Gamma|=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_1^e\Big(y+\frac{1}{y}\Big)dy=\frac{1}{2}\Big(\frac{y^2}{2}+\ln y\Big)\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}$. □

Пример 7.26. Найдём длину дуги кривой $\Gamma\colon x=a\cos^4 t$, $y=a\sin^4 t$, $a>0$.

Решение. Дуга Γ является биективным отображением отрезка $[0; \pi/2]$,

$$x'(t) = -4a\cos^3 t\sin t, \quad y'(t) = 4a\sin^3 t\cos t,$$

$$(x'(t))^2+(y'(t))^2 = 16a^2\cos^6 t\sin^2 t+16a^2\sin^6 t\cos^2 t = 2a^2\sin^2 2t(1+\cos^2 2t),$$

поэтому

$$|\Gamma| = a\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 2t}\,\sin 2t\,dt = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1+z^2}\,dz =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\Bigl(z\sqrt{1+z^2}+\ln(z+\sqrt{1+z^2})\Bigr)\Big|_0^1 = a+\frac{a\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}. \quad \square$$

Пример 7.27. Найдём длину дуги кривой Γ: $x = t\sin t$, $y = t\cos t$, $z = \dfrac{2t\sqrt{2t}}{3}$ от точки $A(0, 0, 0)$ до точки $B(0, 2\pi, 8\pi\sqrt{\pi}/3)$.

Решение. Так как $x'(t) = \sin t + t\cos t$, $y'(t) = \cos t - t\sin t$, $z'(t) = \sqrt{2t}$, $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = (t+1)^2$ и дуга Γ является биективным образом отрезка $[0; 2\pi]$, находим $|\Gamma| = \int\limits_0^{2\pi}(t+1)\,dt = 2\pi^2 + 2\pi$. $\square$

Пример 7.28. Найдём длину дуги кривой Γ: $r = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$.

Решение. Поскольку Γ — замкнутая кривая, она является биективным образом полуинтервала $[0; 2\pi)$. Так как $r'(\varphi) = -a\sin\varphi$, $r^2 + (r'(\varphi))^2 = a^2(2+2\cos\varphi) = 4a^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$, получаем

$$|\Gamma| = \int\limits_0^{2\pi} 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi = 4a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a. \quad \square$$

Пример 7.29. Найдём длину дуги кривой Γ: $\varphi = \dfrac{1}{2}\Bigl(r+\dfrac{1}{r}\Bigr)$, $1 \leqslant r \leqslant 5$.

Решение. Здесь можно явно выразить зависимость $r = r(\varphi)$, однако в данном примере это приводит к громоздким вычислениям. Проще (в некоторых случаях единственно возможно) преобразовать подынтегральное выражение для вычисления $|\Gamma|$ так, чтобы оно непосредственно выражалось через функцию $\varphi(r)$, т. е. сделать замену $\varphi = \varphi(r)$. Тогда

$$\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi = \sqrt{r^2+\frac{1}{(\varphi'(r))^2}}\,\varphi'(r)\,dr = \sqrt{r^2\cdot(\varphi'(r))^2+1}\,(\operatorname{sgn}\varphi'(r))\,dr.$$

Для данной дуги кривой имеем $\varphi'(r) = \dfrac{1}{2}\Bigl(1-\dfrac{1}{r^2}\Bigr) \geqslant 0$, $r^2\cdot(\varphi'(r))^2+1 = \dfrac{1}{4}\Bigl(r+\dfrac{1}{r}\Bigr)^2$. Следовательно, $|\Gamma| = \int\limits_1^5\dfrac{1}{2}\Bigl(r+\dfrac{1}{r}\Bigr)dr = \Bigl(\dfrac{r^2}{4}+\dfrac{1}{2}\ln r\Bigr)\Big|_1^5 = 6+\dfrac{1}{2}\ln 5$. $\square$

Пример 7.30. Найдём длину дуги кривой Γ: $r = te^{2t}$, $\varphi = t^2+2t$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.

Решение. В этом примере связь между полярными координатами r и φ каждой точки кривой Γ задана посредством параметра t. Преобразуем выражение $\sqrt{r^2+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$ так, чтобы оно непосредственно выражалось через функции $r(t)$ и $\varphi(t)$, т. е. сделаем замену $\varphi = \varphi(t)$. Тогда

$$\sqrt{r^2+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi = \sqrt{r^2+\Bigl(\frac{\dot r}{\dot\varphi}\Bigr)^2}\cdot\dot\varphi\,dt = \sqrt{r^2\cdot\dot\varphi^2+\dot r^2}\,(\operatorname{sgn}\dot\varphi)\,dt.$$

Для данной кривой имеем $\dot r = e^{2t}(1+2t)$, $\dot\varphi = 2t+2$,

$$r^2\dot\varphi^2+\dot r^2 = e^{4t}\bigl(4t^2(t^2+2t+1)+(1+4t+4t^2)\bigr) = e^{4t}(2t^2+2t+1)^2.$$

Следовательно, $|\Gamma| = \int\limits_0^2 e^{2t}(2t^2+2t+1)\,dr = \dfrac{1}{2}(e^{2t}(2t^2+1))\Big|_0^2 = \dfrac{9e^4-1}{2}$. $\square$

§7.5. Площадь поверхности вращения

Пусть на плоскости xOy заданы кривая

$$\Gamma = \left\{(x, y)\colon x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [T_0; T_1],\ x, y \in C^1[T_0; T_1]\right\}$$

и прямая l. Обозначим через τ разбиение $\{t_k\}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, отрезка $[T_0; T_1]$ и введём обозначения: $\rho(M)$ — расстояние от точки M до прямой l; Γ_τ — ломаная с вершинами M_k, вписанная в Γ, соответствующая разбиению τ; γ_k — отрезок $[M_{k-1}; M_k]$ ломаной Γ_τ; $|\gamma_k|$ — его длина; S — поверхность, полученная вращением Γ вокруг оси l; S_τ — поверхность, полученная вращением Γ_τ вокруг оси l; S_k — поверхность, полученная вращением γ_k вокруг оси l.

В зависимости от угла между γ_k и l поверхность S_k является либо боковой поверхностью цилиндра или усечённого конуса, либо плоским кольцом. Из элементарной геометрии известно, что в любом из этих случаев площадь S_k равна $|S_k| = \pi|\gamma_k|(\rho(M_{k-1}) + \rho(M_k))$. Площадь поверхности S_τ есть сумма площадей поверхностей S_k:

$$\begin{aligned}|S_\tau| &= \pi \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|(\rho(M_{k-1}) + \rho(M_k)) = \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho(M_{k-1}) + \rho(M_k)}{2} \sqrt{(x(t_{k-1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k-1}) - y(t_k))^2}.\end{aligned}$$

Оценки, которые мы не приводим из-за их громоздкости, показывают, что если $d_\tau = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k - t_{k-1})$ «достаточно мало» (разбиение τ «достаточно мелкое»), то при наших предположениях о гладкости функций x и y полученная сумма мало отличается от сумм Дарбу для интеграла от непрерывной функции: $2\pi \int\limits_{T_0}^{T_1} \rho(t)\,ds$, где $\rho(t)$ есть расстояние от точки $M(x(t), y(t))$, лежащей на Γ, до прямой l, а ds — дифференциал дуги Γ, и $\lim\limits_{d_\tau\to 0} |S_\tau|$ равен величине этого интеграла. Площадь $|S|$ поверхности S определяется как величина полученного предела:

$$\lim_{d_\tau\to 0} |S_\tau| = |S| = 2\pi \int\limits_{T_0}^{T_1} \rho(t) ds.$$

Пример 7.31. Найдём площадь поверхности, полученной вращением кривой $\Gamma\colon y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, вокруг оси Ox.

Решение. Введём в качестве параметра переменную x. Тогда для точек кривой Γ получаем $\rho(t) = \rho(x) = y(x) = \sin x$, $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|S| &= 2\pi \int\limits_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx = \\ &= 2\pi\left(-\frac{\cos x}{2}\sqrt{1+\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left(\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi} = 2\pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})). \ \square\end{aligned}$$

Пример 7.32. Найдём площадь поверхности, полученной вращением ломаной ABC, где $A(1,5)$, $B(1,2)$, $C(6,2)$, вокруг оси Ox.

Решение. Запишем отрезки AB и BC в параметрическом виде:

$$AB\colon x=1,\ y=t,\ 2\leqslant t\leqslant 5,\quad BC\colon x=t,\ y=2,\ 1\leqslant t\leqslant 6.$$

Для отрезка AB имеем $\rho(t)=y(t)=t$, $ds=\sqrt{0+1^2}\,dt=dt$. Для отрезка BC получаем $\rho(t)=y(t)=2$, $ds=\sqrt{1^2+0}\,dt=dt$. Поэтому

$$|S|=|S_1|+|S_2|=2\pi\int\limits_2^5 t\,dt+2\pi\int\limits_1^6 2\,dt=2\pi\Big(\frac{25}{2}-2\Big)+2\pi\cdot 2(6-1)=41\pi.\quad\square$$

Пример 7.33. Хорда AB окружности Γ радиусом a находится на расстоянии b ($b<a$) от центра окружности. Найдём площадь поверхности, полученной вращением вокруг этой хорды каждой из частей Γ_1 и Γ_2, на которые хорда делит окружность.

Решение. Введём декартову систему координат так, что её начало совпадает с центром окружности, ось Ox параллельна хорде AB (см. рис. 50), и пусть хорда лежит в верхней полуплоскости. Запишем уравнение окружности в параметрическом виде: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leqslant t<2\pi$. Тогда точка B соответствует значению $T_0=\arcsin\dfrac{b}{a}$, точка A — значению $T_1=\pi-T_0$. Имеем:

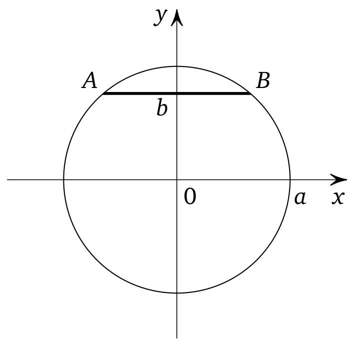


Рис. 50

$$\Gamma_1\colon x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ t\in[T_0;T_1],$$
$$\Gamma_2\colon x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ t\in[T_1;2\pi+T_0].$$

Для $\Gamma_1\colon \rho(t)=y-b=a\sin t-b$,

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt=a\,dt.$$

Поэтому

$$|S|=2\pi\int\limits_{T_0}^{\pi-T_0}(a\sin t-b)a\,dt=-2\pi a^2\cos t\Big|_{T_0}^{\pi-T_0}-2\pi ab(\pi-2T_0)=$$
$$=4\pi a^2\Big(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\Big)-2\pi^2ab+4\pi ab\arcsin\frac{b}{a}=$$
$$=4\pi a\sqrt{a^2-b^2}-2\pi^2ab+4\pi ab\arcsin\frac{b}{a}.$$

Для Γ_2 получаем $\rho(t)=b-y$, $ds=a\,dt$. Следовательно,

$$|S|=2\pi\int\limits_{\pi-T_0}^{2\pi+T_0}(b-a\sin t)a\,dt=2\pi ab(\pi+2T_0)+2\pi a^2\cos t\Big|_{\pi-T_0}^{2\pi+T_0}=$$
$$=2\pi^2ab+4\pi ab\arcsin\frac{b}{a}+4\pi a\sqrt{a^2-b^2}.\quad\square$$

Пример 7.34. Найдём площадь поверхности, полученной вращением кривой Γ: $r = a(1+\cos\varphi)$, $a>0$, относительно левой вертикальной касательной к этой кривой.

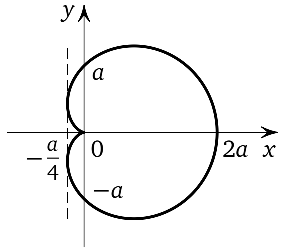


Рис. 51

Решение. В декартовой системе координат, совмещённой с полярной, x и y запишутся как функции параметра φ: $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$, т. е. $x(\varphi) = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi$, $y(\varphi) = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Имеем

$$x(\varphi) = a(\cos^2\varphi + \cos\varphi) = a\Big(\Big(\cos\varphi + \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4}\Big) \geqslant -\frac{a}{4},$$

причём $x(\varphi) = -\frac{a}{4}$ при $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$. Поскольку

$$x'(\varphi) = a(-\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi) = -2a\sin\varphi\Big(\cos\varphi + \frac{1}{2}\Big),$$

при найденных значениях φ получаем $x'(\varphi) = 0$. Кроме того, $y'(\varphi) = a(\cos\varphi + \cos 2\varphi)$ в этих точках отлична от нуля. Это означает, что левая вертикальная касательная к кривой Γ имеет уравнение $x = -\frac{a}{4}$ (см. рис. 51). Расстояние $\rho(\varphi)$ от точки $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$ до оси вращения (прямой $x = -\frac{a}{4}$) равно $x(\varphi) + \frac{a}{4}$. Дифференциал дуги Γ равен

$$ds = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi = a\sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\,d\varphi = 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\varphi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$|S| = 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\Big(a(1+\cos\varphi)\cos\varphi + \frac{a}{4}\Big)2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2\int_{0}^{\pi}\Big(\frac{5}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{3\varphi}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{5\varphi}{2}\Big)d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2\Big(5\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{3\varphi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\varphi}{2}\Big)\Big|_0^{\pi} = \frac{84}{5}\pi a^2. \qquad \square$$

Пример 7.35. Пусть Γ — часть кривой $y = 3x - x^3$, лежащая в правой полуплоскости ($x \geqslant 0$) выше прямой $y = x$. Найдём площадь поверхности, полученной вращением Γ вокруг прямой $y = x$.

Решение. Из условия задачи следует, что Γ: $y = 3x - x^3$, $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. Тогда

$$ds = \sqrt{1+9(1-x^2)^2}\,dx, \quad \rho(x) = \frac{|3x - x^3 - x|}{\sqrt{2}} = \frac{2x - x^3}{\sqrt{2}} \quad \text{и}$$

$$|S| = \sqrt{2}\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+9(1-x^2)^2}(2-x^2)x\,dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+9t^2}(1+t)\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\Big(\int_{-1}^{1}\sqrt{1+9t^2}\,dt + \int_{-1}^{1}t\sqrt{1+9t^2}\,dt\Big) = \sqrt{2}\pi\int_0^1\sqrt{1+9t^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\pi\Big(\frac{t}{2}\sqrt{1+9t^2} + \frac{1}{6}\ln\big(3t + \sqrt{1+9t^2}\big)\Big)\Big|_0^1 = \sqrt{5}\pi + \frac{\pi}{3\sqrt{2}}\ln(3+\sqrt{10}). \qquad \square$$

Пример 7.36. Фигура, ограниченная частью спирали $r = e^{\varphi}$, $\dfrac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{7\pi}{6}$, и прямой, проходящей через концевые точки спирали, вращается вокруг этой прямой. Найдём объём и площадь поверхности полученного тела (см. рис. 52).

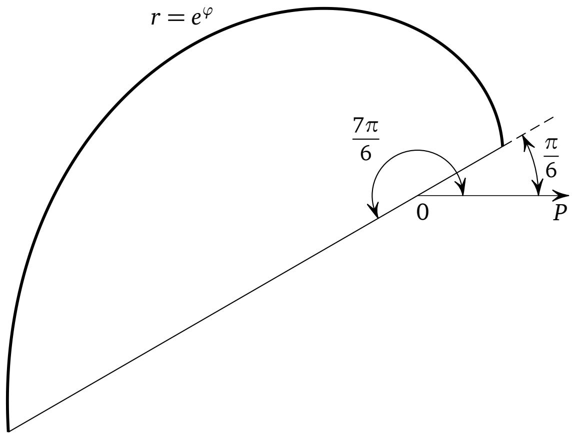


Рис. 52

Решение. Рассмотрим новую полярную систему координат (ρ, ψ), полюс которой совпадает с полюсом старой системы, а полярный луч — с лучом $\varphi = \pi/6$. Тогда если декартова система координат xOy совмещена с системой координат (ρ, ψ), то полученное тело является телом вращения вокруг оси Ox. Уравнение кривой принимает вид $\rho(\psi) = e^{\pi/6} e^{\psi}$, $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$, поэтому

$$ds = \sqrt{\rho^2(\psi) + (\rho'(\psi))^2}\,d\psi = \sqrt{2} e^{\pi/6} e^{\psi}\, d\psi,$$
$$x = x(\psi) = e^{\pi/6} e^{\psi} \cos\psi, \quad y = y(\psi) = e^{\pi/6} e^{\psi} \sin\psi.$$

Отсюда получаем:

$$|S| = 2\pi \int_0^{\pi} y(\psi) ds = 2\sqrt{2}\pi e^{\pi/3} \int_0^{\pi} e^{2\psi} \sin\psi\, d\psi =$$
$$= \frac{2\sqrt{2}\pi}{5} e^{\pi/3} e^{2\psi} (2\sin\psi - \cos\psi)\Big|_0^{\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{5} e^{\pi/3} (e^{2\pi} + 1);$$
$$|V^{Ox}| = -\pi \int_0^{\pi} y^2(\psi)\, dx(\psi) = \pi e^{\pi/2} \int_0^{\pi} e^{3\psi} (\sin^3\psi - \cos\psi \sin^2\psi)\, d\psi =$$
$$= \frac{\pi}{4} e^{\pi/2} \int_0^{\pi} e^{3\psi} (3\sin\psi - \cos\psi - \sin 3\psi + \cos 3\psi)\, d\psi =$$
$$= \frac{\pi}{4} e^{\pi/2} \bigg(e^{3\psi} \bigg(\frac{3(3\sin\psi - \cos\psi)}{10} - \frac{3\cos\psi + \sin\psi}{10} - \frac{3\sin 3\psi - 3\cos 3\psi}{18} +$$
$$+ \frac{3\sin 3\psi + 3\cos 3\psi}{18} \bigg) \bigg) \bigg|_0^{\pi} =$$
$$= \frac{\pi}{4} e^{\pi/2} e^{3\psi} \bigg(\frac{4\sin\psi - 3\cos\psi}{5} + \frac{\cos 3\psi}{3} \bigg) \bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{15} e^{\pi/2} (e^{3\pi} + 1). \qquad \square$$

Задачи

✓**7.1.** Вычислить по определению $\int\limits_a^b x\,dx$, рассматривая интегральные суммы, в которых $\xi_k=\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}$, $1\leqslant k\leqslant n$.

✓**7.2.** Вычислить по определению $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x}$, разбивая отрезок $[1;2]$ на n равных частей и рассматривая интегральные суммы, в которых $\xi_k=x_k$, $1\leqslant k\leqslant n$.

7.3. Вычислить по определению $\int\limits_0^1 e^x\,dx$, разбив отрезок $[0;1]$ на n равных частей и доказав равенство верхнего и нижнего интегралов Дарбу.

Составив интегральные суммы или суммы Дарбу, вычислить интеграл (7.4—7.7).

✓**7.4.** $\int\limits_0^1 x^2\,dx$. **7.5.** $\int\limits_a^b \dfrac{1}{x^2}\,dx$, $0<a<b$. ✓**7.6.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$. **7.7.** $\int\limits_0^a \cos x\,dx$.

Выразить пределы через определённый интеграл и вычислить их (7.8—7.16).

✓**7.8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{3n}\right)$. **7.9.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{k}{k^2+n^2}$.

✓**7.10.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{k(n-k)}$. **7.11*.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$.

7.12. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\dfrac{1}{n^3+1^3}+\dfrac{1}{n^3+2^3}+\ldots+\dfrac{1}{n^3+n^3}\right)$.

7.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n^2k}{(k^2+n^2)^2}$. ✓**7.14.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{\prod\limits_{k=1}^{2^n}\left(1+\dfrac{k}{2^n}\right)}$.

7.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)}$. **7.16.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{n}{n^2+k^2}$.

✓**7.17.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\sin\dfrac{\pi k}{n+1}=\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{x}\,dx$.

Вычислить[1] (7.18—7.35).

✓**7.18.** $\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2}\dfrac{dx}{(4+x^2)^2}$. ✓**7.19.** $\int\limits_{2}^{8/3}\dfrac{x\,dx}{(x-3)^2\sqrt{89-60x+10x^2}}$.

7.20*. $\int\limits_{2}^{5/2}\dfrac{dx}{(x^2-8x+15)\sqrt{6x-x^2-5}}$. **7.21.** $\int\limits_{1/2}^{13/5}\dfrac{dx}{\sqrt[4]{x^4-2x^2+1}}$.

7.22. $\int\limits_{0}^{5/4}\sqrt[4]{x^4-2x^2+1}\,dx$. **7.23.** $\int\limits_{-2a}^{-a}\dfrac{dx}{x(\sqrt{3}a+\sqrt{x^2-a^2})}$, $a>0$.

[1] Далее в этой главе буквенные параметры считаются положительными.

7.24. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 x\,dx.$ **7.25.** $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x}\,dx.$ ✓**7.26.** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx.$

7.27. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\sin x}.$ ✓**7.28.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\cos^2 x}.$ **7.29.** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}.$

7.30. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x\cdot\cos^4 x}{\sin^{10} x+6\cos^{10} x}\,dx.$ **7.31.** $\int\limits_0^{3} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$

7.32. $\int\limits_{-1}^{1} \arcsin^2 x\,dx.$ **7.33.** $\int\limits_0^{1} x\,\mathrm{arctg}^2\, x\,dx.$

✓**7.34.** $\int\limits_0^{1} \cos^2(\ln x)\,dx.$ **7.35.** $\int\limits_{-1}^{1} \cos x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$

✓**7.36.** Пусть $f\in C[0;\,1]$, $f(x)>0$. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx.$

7.37. Пусть $f\in C(\mathbb{R})$, $p+q\neq 0$ и $pf(x)+qf(-x)\equiv 1$ при $x\in\mathbb{R}$. Найти $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx.$

Вычислить (7.38—7.43).

✓**7.38.** $\int\limits_{0,1}^{10} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$ **7.39.** $\int\limits_{1/2}^{2} \frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^8}}\,dx.$

7.40. $\int\limits_{1/3}^{3} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x^2-x+1}\,dx.$ **7.41.** $\int\limits_{1/\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{3}} \frac{x\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}}{1+x^4}\,dx.$

7.42. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\,dx}{4-\sin^2 x}.$ **7.43.** $\int\limits_2^{4} \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\,dx.$

7.44. Пусть чётная функция $f\in C[-a;\,a]$. Доказать, что $\int\limits_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx = \int\limits_0^{a} f(x)\,dx.$

7.45. Вычислить: а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$; б) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\, x}\,dx.$

✓**7.46.** Доказать[1], что $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx=\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, где $n\in\mathbb{N}$.

✓**7.47.** Доказать, что $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n+1} x\,dx=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, где $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

[1] Через $n!!$ обозначается произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих ту же чётность, что и число n. Например, $4!!=2\cdot 4=8$. При этом считаем, что $0!!=(-1)!!=1$.

Вычислить, если $m, n \in \mathbb{N}$ (7.48—7.53).

7.48. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$ **7.49.** $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$

7.50. $\int\limits_0^{1} (1-x^2)^n\,dx.$ **7.51.** $\int\limits_0^{1} x^{m-1}\ln^{n-1}x\,dx.$

7.52. $\int\limits_0^{1} x^n(1-x)^{\alpha-1}\,dx,\ \alpha>0.$ **7.53.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в прямоугольных координатах (7.54—7.69).

7.54°. $y=x^2e^{-x},\ y=0,\ x=2.$ ✓**7.55.** $y=a\sin x,\ y=a\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$

✓**7.56.** $y=x\ln^2 x,\ y=x\ln x.$ **7.57°.** $y=\frac{2a}{3}\cos x,\ y=a\operatorname{tg}x,\ x=0.$

✓**7.58.** $y=x^4-4x^3+4x^2,\ y=\cos\pi x-1.$

7.59. $y=\frac{2a^3}{a^2+x^2},\ y=\frac{4a}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{|x|}{a}.$ ✓**7.60.** $y^2=x^3-x^4.$

7.61. $x^3=x^2-y^2.$ **7.62.** $a^2y^4=x^4(a^2-x^2).$

7.63. $y=x,\ y=-x,\ 2x^2-y^2=1.$ **7.64.** $x^3=a(x-y)^2,\ y=0.$

✓**7.65.** $x^2+4y^2=8a^2,\ x^2-3y^2=a^2\ (x\geqslant a).$

7.66. $y^3-y=x,\ y=-(1+x)^2,\ y=0.$

7.67. $y^3-y=x,\ y=-(4+x)^2,\ y=0,\ y=-1.$

7.68. $x=\cos\pi y,\ 4y^2=3(x+3).$ **7.69.** $x=\cos\pi y,\ 4y^2=x+1.$

7.70. Найти площадь каждой из частей, на которые парабола $y^2=a(a-x)$ разбивает круг $x^2+y^2\leqslant a^2$.

7.71. Найти площадь фигуры, заключённой между параболой $y=x^2-2x+3$, касательной к ней в точке $M(2,3)$ и осью Oy.

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически (7.72—7.79).

7.72. $x=3t^2,\ y=3t-t^3.$ **7.73.** $x=\frac{t}{3}(6-t),\ y=\frac{t^2}{8}(6-t).$

✓**7.74°.** $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ (эллипс).

7.75. $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ (астроида).

✓**7.76.** $x=a\sin t,\ y=a\sin 2t$ (кривая Лиссажу).

7.77*. $x=a\cos 3t,\ y=a\sin t$ (кривая Лиссажу).

✓**7.78.** $x=\frac{\sqrt{t}}{(1+t^2)^2},\ y=\frac{t\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}.$ **7.79.** $x=a\cos t,\ y=\frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}.$

Привести уравнение к параметрическому виду и найти площадь фигуры, ограниченной петлёй кривой (7.80—7.83).

✓**7.80.** $x^3+y^3=axy.$ **7.81.** $(x+y)^3=axy.$

7.82. $x^4=axy^2+ay^3.$ **7.83.** $x^5+y^5=ax^2y^2.$

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах (7.84—7.92).

7.84°. $r=a\cos 5\varphi.$ **7.85°.** $r=a\sin 4\varphi.$ **7.86.** $r=a(1-\sin\varphi).$

7.87. $r = a\operatorname{tg}\varphi,\ \varphi = \dfrac{\pi}{4}$. **7.88.** $r = a(2-\cos\varphi)$. ✓**7.89.** $r^2 = a^2\cos 4\varphi$.

7.90. $r = 2\varphi\ (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi),\ \varphi = 0$. **7.91.** $r = \dfrac{a\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$. **7.92.** $r = a(1+\sin^2 2\varphi)$.

7.93. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

а) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ и находящейся внутри круга $r \leqslant a/\sqrt{2}$;

б) $r = a(1+\cos\varphi)$ и лежащей вне кривой $r = 3a\cos\varphi$.

✓**7.94.** Найти сумму площадей фигур, ограниченных кривой $r = a\cos 3\varphi$ и лежащих вне круга $r \leqslant a/2$.

Перейти к полярным координатам и найти площадь фигуры S, ограниченной кривой (7.95—7.102).

7.95. $x^4 + y^4 = a^2xy$. **7.96.** $x^4 + y^4 = a^2x^2$.

7.97. $x^2 + y^2 = 2ax,\ x^2 + y^2 = 2ay,\ M\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right) \in S$.

7.98. $x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = 2ay,\ M\left(0, \dfrac{3a}{2}\right) \in S$.

7.99. $(x^2 + y^2)^3 = ax^4y$. ✓**7.100.** $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2y^2$.

7.101. $x^6 + y^6 = a^2(x^4 + y^4)$. **7.102.** $x^6 + y^6 = a^2x^4$.

✓**7.103.** Найти площадь фигуры, являющейся пересечением фигур, ограниченных кривыми $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ и $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

7.104. Найти площадь фигуры, лежащей между кривыми $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ и $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2(x^2 - y^2)$.

7.105. Найти площадь фигуры, расположенной в первом квадранте, ограниченной кривой $r = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin 2\varphi$ и лежащей вне кривой $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ (полярная и декартова системы совмещены).

✓**7.106.** Найти площадь фигуры, лежащей между кривыми $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ и $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Найти объёмы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями (7.107—7.110).

7.107°. $y = \cos x,\ y = 2\cos x,\ x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ вокруг а) оси Ox; б) оси Oy.

7.108. $y = e^x - 1,\ y = 2,\ x = 0$ вокруг а) оси Oy; б) прямой $y = 2$.

7.109. $y = \dfrac{1}{1+x^2},\ y = 0,\ x = \pm 1$ вокруг а) оси Ox; б) оси симметрии; в) прямой $y = 1$.

✓**7.110.** $y = \sin x,\ x = 0,\ x = \pi,\ y = 0$ вокруг прямой а) $y = -1$; б) $y = 1$; в) $x = -1$.

✓**7.111.** Найти объём тела, полученного при вращении круга радиусом a относительно прямой, лежащей в плоскости круга и отстоящей от его центра на расстояние b $(b > a)$.

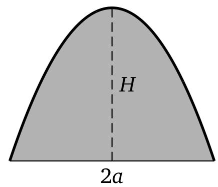
7.112. Дан круг радиусом a и прямая в плоскости круга на расстоянии b от центра $(0 < b < a)$. Найти объём тела, полученного при вращении вокруг этой прямой каждой из частей круга, на которые его делит данная прямая.

✓**7.113.** Найти объём шарового сегмента, полученного вращением сектора круга радиусом R с центральным углом 2φ вокруг оси симметрии.

7.114. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линией $y^3 - y = x$ и отрезком $[-5; 5]$ оси Ox вокруг а) оси Ox; б) оси Oy.

7.115. Найти объём тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y=x(3-x)$, $y=x$, вокруг а) оси Ox; б) оси Oy; в) прямой $y=x$.

7.116. Найти объём тела, полученного при вращении параболического сектора с основанием $2a$ и высотой H вокруг а) основания; б) оси симметрии; в) касательной, проведённой через вершину сектора (см. рис.).



7.117. Найти объём тела, полученного при вращении части эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, лежащего между прямыми $y=h$ и $y=-h$ $(0<h<b)$, вокруг вертикальной оси симметрии.

7.118. Найти объём тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями $x^3=y^2$, $x=0$, $y=-\dfrac{1}{27}$, $y=8$, вокруг оси Oy.

✓**7.119.** Найти объём тела, полученного при вращении фигуры, являющейся общей частью кругов $x^2+y^2\leqslant 2ax$ и $x^2+y^2\leqslant 2ay$, вокруг а) оси Ox, б) прямой $y=x$.

Найти объём тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной заданными линиями (7.120—7.122).

7.120. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ вокруг а) оси Ox; б) прямой $x=a$.

✓**7.121.** $x=a\sin t$, $y=a\sin 2t$ вокруг а) оси Ox; б) оси Oy; в) прямой $x=a$; г) прямой $y=a$.

7.122. $x=a(t+\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $y=0$ вокруг а) оси Ox; б) оси симметрии; в) прямой $y=2a$.

7.123. Найти объём тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной кривой $x=2a\sin 2t$, $y=2a\cos t$ вокруг а) оси Ox; б) оси Oy.

7.124. Найти объём тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной петлёй кривой $x=a\cos 2t$, $y=a\cos 3t$ вокруг а) прямой $x=a$; б) оси Ox; в) прямой $x=-a$.

7.125. Найти объём тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной кривой $r=a(1+\cos\varphi)$, вокруг левой вертикальной касательной к этой кривой.

7.126*. Доказать, что объём тела, образованного вращением вокруг прямой, содержащей полярную ось, фигуры $0\leqslant\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\leqslant\pi$, $0\leqslant r\leqslant r(\varphi)$, где r непрерывна на $[\alpha;\beta]$ (φ и r — полярные координаты), равен

$$V=\frac{2}{3}\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах, вокруг прямой, содержащей полярную ось (7.127—7.130).

7.127. $r=a(1+\sin^2\varphi)$. **7.128.** $r=a\cos^2\varphi$.

7.129. $r=a|\sin 2\varphi|$. **7.130.** $r=ae^{2\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $\varphi=0$, $\varphi=\pi$.

Найти длину дуги кривой (7.131—7.141).

7.131. $y=\ln x$, $\dfrac{3}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{12}{5}$. ✓**7.132.** $y=1-\ln\cos x$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3}$.

7.133°. $y=\ln(1-x^2)$, $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. **7.134.** $y=\arccos e^{-x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

7.135. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, $0\leqslant x\leqslant\frac{7}{9}$.

7.136. $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$, $0\leqslant x\leqslant\frac{8}{9}$.

7.137. $y=\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.

7.138*. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$. **7.139.** $\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

7.140. $x=\frac{2}{3}y\sqrt{\frac{y}{a}}-\frac{1}{2}\sqrt{ay}$ от точки $A(0,0)$ до точки $B\left(\frac{a}{6},a\right)$.

7.141. $x=\frac{1}{3}a+\frac{a^2}{2y}+\frac{y^3}{6a^2}$ от точки $A(a,a)$ до точки $B(5a,3a)$.

✓**7.142.** Найти длину дуги полукубической параболы $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$, заключённой внутри параболы $y^2=\frac{x}{3}$.

Найти длину границы фигуры, ограниченной линиями (7.143—7.144).

✓**7.143.** $y=e^x$, $y=2\sqrt{x}$, $x=0$, $x=1$. **7.144.** $y=2\sqrt{x}$, $y=2x\sqrt{x}$.

Найти длину дуги кривой (7.145—7.148).

✓**7.145°.** $y(x)=\int\limits_1^x\sqrt{t^4-1}\,dt$, $1\leqslant x\leqslant 2$. **7.146.** $y(x)=\int\limits_1^x\sqrt{\frac{t^2+t+1}{t}}\,dt$, $0\leqslant x\leqslant 4$.

7.147°. $y(x)=\int\limits_0^x\sqrt{\sin 2t}\,dt$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$. **7.148°.** $y(x)=\int\limits_0^x\sqrt{\cos 2t}\,dt$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$.

Найти длину дуги кривой, заданной параметрически (7.149—7.163).

✓**7.149.** $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. **7.150.** $x=a\cos^5 t$, $y=a\sin^5 t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$.

7.151. $x=2a\sin^2 t$, $y=2a\cos t$.

✓**7.152.** $x=\ln(1+t^2)$, $y=2\operatorname{arctg} t-2t+8$ от точки $A(0,8)$ до $B\left(\ln 2,\frac{\pi}{2}+6\right)$.

7.153. $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$, $y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

7.154. $x=6at^5$, $y=5at(1-t^8)$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(6a,0)$.

7.155. $x=2a\operatorname{sh}^3 t$, $y=3a\operatorname{ch} t$ от точки $A(0,3a)$ до точки $B(x(t_0),y(t_0))$.

7.156. $x=a\cos t$, $y=-2a\ln\sin t$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(x(t_0),y(t_0))$, где $t_0\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

7.157. $x=\frac{a}{2}\sin t(1+2\cos^2 t)$, $y=a\cos^3 t$ от точки $A(0,a)$ до точки $B\left(\frac{a}{2},0\right)$.

7.158. $x=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y=a\sin t$ от $A(0,a)$ до $B(x(t_0),y(t_0))$, где $t_0\in(0;\pi)$.

7.159. $x=2a\cos t$, $y=2a\sin t$, $z=at$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

7.160. $x=\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2$, $y=-\frac{4}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2$, $z=\frac{1}{3}t^3+t^2$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

7.161*. $x=e^t(\cos t+\sin t)$, $y=e^t(\cos t-\sin t)$, $z=t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

7.162. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $z=a\cos 2t$.

✓**7.163.** $x=a(t\cos t-\sin t)$, $y=a(t\sin t+\cos t)$, $z=t$, $0\leqslant t\leqslant t_0$.

Найти длину дуги кривой, заданной в полярных координатах (7.164—7.168).

7.164. $r=a\cos^3\frac{\varphi}{3}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. ✓**7.165.** $r=a\cos^4\frac{\varphi}{4}$.

7.166. $r=\varphi^2$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

✓**7.167.** $\varphi=\ln r+r$, $1\leqslant r\leqslant 5$.

7.168. $\varphi=\frac{r}{2}\sqrt{r^2+2}+\ln(r+\sqrt{r^2+2})$, $0\leqslant r\leqslant 2$.

7.169. Найти длину дуги спирали Архимеда $r=a\varphi$, находящейся внутри круга радиусом $2a\pi$.

7.170. Найти длину дуги гиперболической спирали $r=\frac{\pi a}{\varphi}$, $\varphi>0$, находящейся внутри кольца $\frac{a}{4}\leqslant r\leqslant 2a$.

✓**7.171.** Найти длины частей l_1, l_2, l_3, l_4, на которые парабола $r=\dfrac{a}{4\sin^2(\varphi/2)}$ разбивает кардиоиду $r=a(1+\cos\varphi)$ (см. рис. 53).

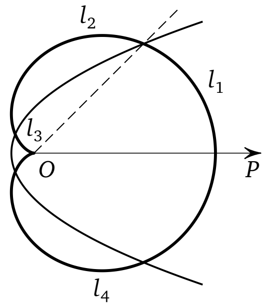


Рис. 53

Найти длину дуги кривой, заданной в полярных координатах (7.172—7.173).

7.172. $r=a\cos^2 u$, $\varphi=2(u-\operatorname{tg}u)$ от точки $A(a,0)$ до точки $B\left(\frac{a}{2},\frac{\pi}{2}-2\right)$.

7.173. $r=a(1+\operatorname{tg}u)$, $\varphi=\operatorname{tg}u-\ln(1+\operatorname{tg}u)$ от точки $A(a,0)$ до точки $B(r(u_0),\varphi(u_0))$, $u_0\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Найти площадь поверхности, полученной вращением кривой вокруг указанной оси (7.174—7.176).

7.174. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a\geqslant b)$ вокруг а) оси Ox; б) оси Oy.

7.175. $y=\frac{1}{x}$, $0<a\leqslant x\leqslant b$, вокруг оси Ox.

7.176. $y^2+4x=2\ln y$, $1\leqslant y\leqslant 2$, вокруг оси Ox.

✓**7.177.** Найти площадь поверхности тела, полученного вращением окружности радиусом a относительно прямой, лежащей в её плоскости и отстоящей от центра на расстояние b $(b>a)$.

7.178. Найти площадь поверхности тела, полученного вращением вокруг оси Ox петли кривой $3ay^2=x(a-x)^2$.

✓**7.179.** Найти полную площадь поверхности тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x$, $2x=3$.

Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной параметрически (7.180—7.184).

7.180. $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$, вокруг оси Ox.

✓**7.181.** $x=a(t+\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, вокруг а) оси Ox; б) оси Oy; в) оси симметрии; г) прямой $y=2a$.

7.182. $x=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y=a\sin t$, $\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{4}$, вокруг оси Ox.

7.183. $x=2a\sin^2 t$, $y=2a\cos t$ вокруг оси Ox.

7.184. $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$ вокруг оси Ox.

Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги AB кривой (7.185—7.187).

7.185. $x=at^2$, $y=\frac{1}{3}at(3-t^2)$, $A(0,0)$, $B(3a,0)$, вокруг оси а) Ox; б) Oy.

7.186. $x=\frac{9}{5}at^4$, $y=\frac{6}{25}a(5t^3-3t^5)$, $A(0,0)$, $B(5a,0)$, вокруг оси а) Ox; б) Oy.

7.187. $x=2at^3$, $y=\frac{3}{4}a(2t^2-t^4)$, $A(0,0)$, $B(4a\sqrt{2},0)$, вокруг оси а) Ox; б) Oy.

√**7.188.** Найти площадь поверхности тела, полученного при вращении фигуры, лежащей внутри окружности $r=2a\sin\varphi$ и вне окружности $r=a$, относительно а) оси Ox; б) оси Oy.

7.189. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $r^2=a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi$ $(a>b)$, вокруг а) оси Ox; б) оси Oy.

Ответы и указания

7.1. $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$. **7.2.** $\ln 2$. *Указание*. Воспользоваться задачей 3.82.
7.3. $e-1$. *Указание*. См. пример 7.2, с. 263.
7.4. $\frac{1}{3}$. *Указание*. Воспользоваться примером 2.15, с. 61.
7.5. $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. *Указание*. Положить $\xi_k=\sqrt{x_{k-1}x_k}$.
7.6. 1. *Указание*. Воспользоваться задачей 2.67.
7.7. $\sin a$. *Указание*. Воспользоваться задачей 2.68.
7.8. $\int\limits_0^2\frac{dx}{1+x}=\ln 3$. **7.9.** $\int\limits_0^2\frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln 5$. **7.10.** $\int\limits_0^1\sqrt{x(1-x)}\,dx=\frac{\pi}{8}$.
7.11. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\pi$. **7.12.** $\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **7.13.** $\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{4}$.
7.14. $\exp\Big(\int\limits_0^1\ln(1+x)\,dx\Big)=\frac{4}{e}$. **7.15.** $\exp\Big(\int\limits_0^1\ln(1+x^2)\,dx\Big)=2\exp\Big(\frac{\pi}{2}-2\Big)$.
7.16. $\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$. **7.18.** $\frac{7\pi}{192}+\frac{2+\sqrt{3}}{64}$. **7.19.** $6-\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$.
7.20. $\frac{1}{4}\Big(\ln\frac{4+\sqrt{15}}{2+\sqrt{3}}-\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{15}}\Big)$. **7.21.** $\frac{\pi}{3}+\ln 5$. **7.22.** $\frac{15}{32}+\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}$.
7.23. $-\frac{\pi}{12a}$. **7.24.** $\frac{3\pi}{4}$. **7.25.** $\frac{3}{8}\sqrt{2}+\frac{7}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{8}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{1}{8}\ln(2+\sqrt{3})$.
7.26. $\frac{14}{5}\sqrt{3}$. **7.27.** $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. **7.30.** $\frac{\pi}{5\sqrt{6}}$. **7.28.** $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. **7.29.** 4π.
7.31. $\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{2}}{3}\Big)=\frac{\sqrt{2}}{2}\big(\operatorname{arctg}(3\sqrt{2}-1)+\operatorname{arctg}(3\sqrt{2}+1)\big)$.
7.32. $\frac{\pi^2}{2}-4$. **7.33.** $\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$. **7.34.** $\frac{3}{5}$. **7.35.** 0. **7.36.** $\frac{1}{2}$. **7.37.** $\frac{2a}{p+q}$.
7.38. 0. *Указание.* В интеграле по отрезку [0,1; 1] сделать замену $t=\frac{1}{x}$. **7.39.** 0.
7.40. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}4\sqrt{3}$. *Указание.* Сделать замену $t=\frac{1}{x}$, затем воспользоваться задачей 1.173 и формулами § 1.2.
7.41. $\frac{\pi^2}{48}$. **7.42.** $\frac{\pi^2}{4\sqrt{3}}$. *Указание.* Сделать замену $t=\pi-x$ (см. также задачу T7.43).
7.43. 1. *Указание.* Сделать замену $t=6-x$.
7.45. а) $\frac{\pi}{4}$; б) 2. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.
7.48. 0, если n чётно; π, если n нечётно. *Указание.* Докажите, что $I_{n+2}=I_n$.
7.49. $(-1)^n\pi$. **7.50.** $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=4^n\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. **7.51.** $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{m^n}$.
7.52. $\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n)}$. **7.53.** $\frac{\pi}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$. **7.54.** $2-\frac{10}{e^2}$. **7.55.** $2\sqrt{2}a$. **7.56.** 1.
7.57. $\Big(\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)a$. **7.58.** $\frac{46}{15}$. **7.59.** $\Big(\pi-2+\frac{4}{\pi}\ln 2\Big)a^2$. **7.60.** $\frac{\pi}{8}$. **7.61.** $\frac{8}{15}$.

7.62. $\frac{8}{5}a^2$. **7.63.** $\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$. **7.64.** $\frac{1}{10}a^2$. **7.65.** $\Big(\pi-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\Big)a^2$.
7.66. $\frac{7}{12}$. **7.67.** $\frac{43}{12}$. **7.68.** $6-\frac{2}{\pi}$. **7.69.** $\frac{2}{3}+\frac{2}{\pi}$.
7.70. $\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\Big)a^2$, $\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\Big)a^2$ и $\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\Big)a^2$. **7.71.** $\frac{8}{3}$. **7.72.** $\frac{72}{5}\sqrt{3}$. **7.73.** $\frac{27}{5}$.
7.74. πab. **7.75.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **7.76.** $\frac{8}{3}a^2$. **7.77.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.
7.78. $\frac{1}{12}$. *Указание.* Если $y=tx$, то $y'(t)x-x'(t)y=x^2(t)$. **7.79.** $\Big(\frac{16}{\sqrt{3}}-9\Big)\pi a^2$.
7.80. $\frac{1}{6}a^2$. **7.81.** $\frac{1}{60}a^2$. **7.82.** $\frac{1}{210}a^2$. **7.83.** $\frac{1}{10}a^2$. **7.84.** $\frac{1}{4}\pi a^2$. **7.85.** $\frac{1}{4}\pi a^2$.
7.86. $\frac{3}{2}\pi a^2$. **7.87.** $\Big(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\Big)a^2$. **7.88.** $\frac{9}{2}\pi a^2$. **7.89.** a^2. **7.90.** $\frac{16}{3}\pi^3$. **7.91.** $\Big(2-\frac{\pi}{2}\Big)a^2$.
7.92. $\frac{19}{8}\pi a^2$. **7.93.** а) $\Big(\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)a^2$; б) $\frac{1}{4}\pi a^2$. **7.94.** $\Big(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\Big)a^2$. **7.95.** $\frac{1}{4}\pi a^2$.
7.96. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2$. **7.97.** $\Big(\frac{\pi}{2}-1\Big)a^2$. **7.98.** $\Big(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)a^2$. **7.99.** $\frac{7}{512}\pi a^2$. **7.100.** $\frac{1}{8}\pi a^2$.
7.101. $\frac{4}{3}\pi a^2$. **7.102.** $\frac{2}{3}\pi a^2$. **7.103.** $\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)a^2$. **7.104.** $3a^2$.
7.105. $\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **7.106.** $\Big(\sqrt{2}-\frac{3}{8}\Big)\pi a^2$. **7.107.** а) $\frac{3}{2}\pi^2$; б) $\pi^2-2\pi$.
7.108. а) $\pi(3\ln^2 3-6\ln 3+4)$; б) $\pi(9\ln 3-8)$. **7.109.** а) $\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}$; б) $\pi\ln 2$; в) $\frac{3\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}$.
7.110. а) $4\pi+\frac{\pi^2}{2}$; б) $4\pi-\frac{\pi^2}{2}$; в) $4\pi+2\pi^2$. **7.111.** $2\pi^2a^2b$.
7.112. $\frac{2\pi}{3}(2a^2+b^2)\sqrt{a^2-b^2}+2\pi a^2b\arcsin\frac{b}{a}\pm\pi^2a^2b$. **7.113.** $\frac{2\pi R^3}{3}(1-\cos\varphi)$.
7.114. а) $\frac{8}{15}\pi$; б) $\frac{16}{105}\pi$. **7.115.** а) $\frac{56}{15}\pi$; б) $\frac{8}{3}\pi$; в) $\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$.
7.116. а) $\frac{16}{15}\pi aH^2$; б) $\frac{1}{2}\pi a^2H$; в) $\frac{8}{5}\pi aH^2$. **7.117.** $2\pi a^2h\Big(1-\frac{h^2}{3b^2}\Big)$.
7.118. $\frac{3\pi}{7}\Big(2^7-\frac{1}{3^7}\Big)=\frac{39\,991\pi}{729}$. **7.119.** а) $\Big(\frac{\pi^2}{2}-\pi\Big)a^3$; б) $\pi\sqrt{2}\Big(\frac{5}{6}-\frac{\pi}{4}\Big)a^3$.
7.120. а) $\frac{32}{105}\pi a^3$; б) $\frac{3}{4}\pi^2a^3$. **7.121.** а) $\frac{16}{15}\pi a^3$; б) $\frac{1}{2}\pi^2a^3$; в) $\frac{16}{3}\pi a^3$; г) $\frac{16}{3}\pi a^3$.
7.122. а) π^2a^3; б) $2\pi\Big(\frac{\pi^2}{4}-\frac{4}{3}\Big)a^3$; в) $3\pi^2a^3$. **7.123.** а) $4\pi^2a^3$; б) $\frac{128}{15}\pi a^3$.
7.124. а) $\frac{114\sqrt{3}}{35}\pi a^3$; б) $\frac{27}{32}\pi a^3$; в) $\frac{54\sqrt{3}}{35}\pi a^3$.
7.125. $\frac{13}{4}\pi^2a^3$. *Указание.* См. пример 7.34.
7.126. *Указание.* Обозначим через $V(\theta)$ объём тела, полученного вращением вокруг указанной прямой криволинейного сектора $D=\big\{(\rho,\varphi)\colon \alpha\leqslant\varphi\leqslant\theta\leqslant\beta,\ 0\leqslant r\leqslant r(\varphi)\big\}$ и через $\widetilde{V}\ (R,\theta)$ — объём шарового сектора, полученного вращением сектора круга $\widetilde{D}=\{(r,\varphi)\colon 0\leqslant\varphi\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant r\leqslant R\}$ вокруг той же прямой. Показать, что $V(\theta+\Delta\theta)-V(\theta)=\widetilde{V}(R,\theta+\Delta\theta)-\widetilde{V}(R,\theta)$, где $R=r(\varphi+\lambda\Delta\varphi)$ при некотором $\lambda\in[0;1]$, и, пользуясь этим соотношением и результатом задачи 7.113, получить выражение для $dV(\theta)$.
7.127. $\frac{236}{35}\pi a^3$. **7.128.** $\frac{4}{21}\pi a^3$. **7.129.** $\frac{64}{105}\pi a^3$. **7.130.** $\frac{2}{111}\pi(e^{6\pi}+1)a^3$.
7.131. $\frac{27}{20}+\ln 2$. **7.132.** $\ln(2+\sqrt{3})$. **7.133.** $\ln 3-\frac{1}{2}$. **7.134.** $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$.
7.135. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **7.136.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **7.137.** 2.
7.138. $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}+\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\ln\frac{(a+\sqrt{a^2+b^2})(b+\sqrt{a^2+b^2})}{ab}$.
Указание. Перейти к параметрическому заданию кривой.

7.139. $\frac{28}{3}a$. *Указание.* Перейти к параметрическому заданию кривой.

7.140. $\frac{7a}{6}$. **7.141.** $\frac{14}{3}a$. **7.142.** $\frac{10\sqrt{10}-8}{9}$.

7.143. $e-2+2\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{1+e^2}+\ln(\sqrt{1+e^2}-1)$.

7.144. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})+\frac{2}{27}(10^{3/2}-1)$. **7.145.** $\frac{7}{3}$. **7.146.** $\frac{28}{3}$. **7.147.** 1. **7.148.** 1.

7.149. $6a$. **7.150.** $\frac{5}{4}\left(1+\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\right)a$. **7.151.** $(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}))a$. **7.152.** $2\sqrt{2}-2$.

7.153. $\frac{1}{3}$. **7.154.** $10a$. **7.155.** $2a\operatorname{ch}^2 t_0-3a\operatorname{ch} t_0+a$. **7.156.** $2a\ln\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}-a\cos t_0$.

7.157. $\frac{3a}{2}$. **7.158.** $-a\ln\sin t_0$. **7.159.** $2\sqrt{5}\pi a$. **7.160.** $\frac{1}{21}(27\sqrt{3}-2\sqrt{6})$.

7.161. $\sqrt{1+4e^{4\pi}}-\sqrt{5}+\ln\frac{\sqrt{1+4e^{4\pi}}-1}{\sqrt{5}-1}-2\pi$. **7.162.** $10a$.

7.163. $\frac{t_0}{2}\sqrt{a^2t_0^2+1}+\frac{1}{2a}\ln\left(at_0+\sqrt{a^2t_0^2+1}\right)$. **7.164.** $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)a$.

7.165. $\frac{16}{3}a$. **7.166.** $\frac{(\pi^2+4)^{\frac{3}{2}}-8}{3}$. **7.167.** $3\sqrt{37}-\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\frac{6+\sqrt{37}}{2+\sqrt{5}}$. **7.168.** $\frac{14}{3}$.

7.169. $\left(\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right)a$.

7.170. $\pi a\ln\frac{8\pi+2\sqrt{16\pi^2+1}}{\pi+\sqrt{\pi^2+4}}+a\left(\sqrt{\pi^2+4}-\sqrt{\pi^2+\frac{1}{16}}\right)$.

7.171. $|l_1|=8a\sin\frac{\pi}{8}=4a\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $|l_2|=|l_4|=4\sqrt{2}a\sin\frac{\pi}{8}=2a\sqrt{4-2\sqrt{2}}$, $|l_3|=8a\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)=4a\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$.

7.172. $(2-\sqrt{2})a$. **7.173.** $\frac{a\sin u_0}{2\cos^2 u_0}+\frac{a}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

7.174. а) $2\pi b^2+2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$; б) $2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left(\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right)$, где $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

7.175. $\pi\ln\frac{b^2+\sqrt{1+b^4}}{a^2+\sqrt{1+a^4}}+\pi\left(\sqrt{1+\frac{1}{a^4}}-\sqrt{1+\frac{1}{b^4}}\right)$. **7.176.** $\frac{10}{3}\pi$. **7.177.** $4\pi^2ab$.

7.178. $\frac{1}{3}\pi a^2$. **7.179.** $\frac{23}{3}\pi$. **7.180.** $\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(e^\pi-2)$.

7.181. а) $\frac{32}{3}\pi a^2$; б) $16\pi^2a^2$; в) $\frac{32}{3}\pi a^2$; г) $\frac{64}{3}\pi a^2$. **7.182.** $(2-\sqrt{2})\pi a^2$.

7.183. $\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)\pi a^2$. **7.184.** $\frac{128}{5}\pi a^2$. **7.185.** а) $3\pi a^2$; б) $\frac{28\sqrt{3}}{5}\pi a^2$.

7.186. а) $\frac{10}{3}\pi a^2$; б) $\frac{1240}{63}\sqrt{\frac{5}{3}}\pi a^2$. **7.187.** а) $6\pi a^2$; б) $\frac{816}{35}\sqrt{2}\pi a^2$.

7.188. а) $\left(\frac{8}{3}\pi+4\sqrt{3}\right)\pi a^2$; б) $4\pi a^2$.

7.189. а) $2\pi\left(a^2+\frac{b^4}{\sqrt{a^4-b^4}}\ln\frac{\sqrt{a^4-b^4}+a^2}{b^2}\right)$; б) $2\pi\left(b^2+\frac{a^4}{\sqrt{a^4-b^4}}\arcsin\frac{\sqrt{a^4-b^4}}{a^2}\right)$.

§ 7.6. Теоретические задачи

Пример Т7.1. Исследуем на интегрируемость на каждом отрезке числовой оси функцию Дирихле

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рациональное,}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное.}\end{cases}$$

Решение. Поскольку на любом отрезке числовой прямой есть как рациональные, так и иррациональные точки, нижняя сумма Дарбу функции Дирихле для любого разбиения отрезка интегрирования будет равна нулю, а верхняя сумма Дарбу будет равна длине этого отрезка. Следовательно, верхний и нижний интегралы Дарбу функции Дирихле по любому отрезку не совпадают, поэтому функция Дирихле не является интегрируемой ни на каком отрезке.

Можно рассуждать иначе. Согласно примеру 4.45, функция Дирихле разрывна во всех точках. Значит, множество её точек разрыва не имеет меру нуль, и поэтому в силу критерия Лебега функция Дирихле не интегрируема. □

Заметим, что функция Дирихле отличается от тождественного нуля только в рациональных точках. Таким образом, изменение функции на счётном множестве точек может вывести её из класса интегрируемых функций.

Пример Т7.2. Исследуем на интегрируемость на каждом отрезке числовой оси функцию Римана

$$R(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n}, \text{ где } m \text{ целое}, m \neq 0,\ n \in \mathbb{N}, \text{ и дробь } \dfrac{m}{n} \text{ несократима}, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Решение. Согласно примеру 4.46, множество точек разрыва функции Римана совпадает с множеством рациональных чисел. Значит, множество её точек разрыва имеет меру нуль, а следовательно, в силу критерия Лебега функция Римана является интегрируемой на любом отрезке. □

Отметим, что доказать интегрируемость функции Римана также можно, рассмотрев верхние и нижние суммы Дарбу.

Пример Т7.3. Приведём пример функции, интегрируемой по Риману на $[0; 1]$, но не имеющей на этом отрезке обобщённой первообразной.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}, & x \in \left(\dfrac{1}{2^n}; \dfrac{1}{2^{n-1}}\right],\ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Функция f интегрируема по Риману на $[0; 1]$, так как она ограничена и монотонна на $[0; 1]$. Предположим, что существует такая непрерывная на $[0; 1]$ функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [0; 1] \setminus E$, где E — конечное множество точек из $[0; 1]$. Тогда найдётся такое n, что на отрезке $\left[\dfrac{3}{2^{n+2}}; \dfrac{1}{2^{n-1}}\right]$ нет точек из E, т. е. $F' = f$ всюду на этом отрезке. Тогда по свойству Дарбу функция f должна на этом отрезке принимать все значения между $f\left(\dfrac{3}{2^{n+2}}\right) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ и $f\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = \dfrac{1}{2^n}$ (см. задачу Т5.36). Но ни одного значения из интервала $\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}; \dfrac{1}{2^n}\right)$ функция $f(x)$ не принимает. Следовательно, предположение о существовании обобщённой первообразной неверно. □

Из критерия Лебега следует, что всякая функция, монотонная на отрезке, интегрируема по Риману на этом отрезке.

Пример T7.4. Докажем, что для каждой монотонной на $[0;1]$ функции f существует такая постоянная C, что для любого $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\Big(\frac{k}{n}\Big)\right|<\frac{C}{n}.$$

Решение. Имеем

$$\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\Big(\frac{k}{n}\Big)=\sum_{k=1}^n\Bigg(\int\limits_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\,dx-\frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Bigg).$$

Пусть $f(x)$ невозрастающая, тогда для всех $x\in\Big[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\Big]$

$$f\Big(\frac{k}{n}\Big)\leqslant f(x)\leqslant f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\quad\text{и}\quad \frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)\leqslant\int\limits_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\,dx\leqslant\frac{1}{n}f\Big(\frac{k-1}{n}\Big).$$

Отсюда получаем, что

$$0\leqslant\sum_{k=1}^n\Bigg(\int\limits_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\,dx-\frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Bigg)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\Big(f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)-f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)=\frac{1}{n}(f(0)-f(1)).$$

Аналогично рассматривается случай неубывающей функции $f(x)$. □

Пример T7.5. Докажем, что $\int\limits_{\pi/2}^{T}\frac{\cos x}{x}\,dx<0$ для любого $T>\frac{\pi}{2}$.

Решение. Пусть $\varphi(T)=\int\limits_{\pi/2}^{T}\frac{\cos x}{x}\,dx$. Тогда $\varphi'(T)=\frac{\cos T}{T}$ и точками локального максимума $\varphi(T)$ на $[\pi/2;+\infty)$ будут точки T_n, в которых $\cos T$ меняет знак с «+» на «−», т. е. точки $T_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(T_n)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\pi/2+2\pi k}^{5\pi/2+2\pi k}\frac{\cos x}{x}\,dx$.

Для любого $k\in\mathbb{N}$ получаем

$$\int\limits_{\pi/2+2\pi k}^{5\pi/2+2\pi k}\frac{\cos x}{x}dx=\int\limits_{\pi/2+2\pi k}^{3\pi/2+2\pi k}\frac{\cos x}{x}dx+\int\limits_{3\pi/2+2\pi k}^{5\pi/2+2\pi k}\frac{\cos x}{x}dx=$$
$$=\int\limits_{\pi/2+2\pi k}^{3\pi/2+2\pi k}\frac{\cos x}{x}dx+\int\limits_{\pi/2+2\pi k}^{3\pi/2+2\pi k}\frac{\cos(x+\pi)}{x+\pi}dx=\pi\int\limits_{\pi/2+2\pi k}^{3\pi/2+2\pi k}\frac{\cos x}{x(x+\pi)}dx<0.$$

Следовательно, $\varphi(T_n)<0$, $n\in\mathbb{N}$, поэтому $\varphi(T)<0$. □

Пример Т7.6. Пусть $f \in C[a;b]$ и $f \geqslant 0$. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n} = M, \quad \text{где } M = \max_{x\in[a;b]} f(x).$$

Решение. Пусть $M = f(x_0) > 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $h > 0$, что на отрезке $I \subset [a;b]$ длины h, содержащем x_0, имеем $f(x) > M - \varepsilon$. Тогда

$$((b-a)M^n)^{1/n} \geqslant \left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n} \geqslant \left(\int_I f^n(x)\,dx\right)^{1/n} \geqslant (h(M-\varepsilon)^n)^{1/n},$$

и в силу произвольности ε отсюда получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n} = M$. □

Пример Т7.7. Пусть $f \in R[a;b]$. Докажем, что существует такая последовательность непрерывных на $[a;b]$ функций φ_n, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)|\,dx = 0.$$

Решение. Поскольку функция f интегрируема на $[a;b]$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение T отрезка $[a;b]$, что $I \leqslant S(f,T) < I + \varepsilon$, т. е.

$$I \leqslant \sum_{k=1}^n M_k(x_{k-1} - x_k) < I + \varepsilon, \quad \text{где } M_k = \sup_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x).$$

Пусть $\varphi_\varepsilon(x) = M_k$, если $x \in [x_{k-1}; x_k)$, $\varphi_\varepsilon(b) = M_n$. Тогда $\varphi_\varepsilon(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx = S(f,T)$. Функция $\varphi_\varepsilon(x)$ разрывна в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ отрезка $[a;b]$ и $\inf\limits_{x\in[a;b]} f = m \leqslant \varphi_\varepsilon(x) \leqslant M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f$. Возьмём отрезки $[x_k - \delta; x_k + \delta]$, где $0 < \delta < \frac{1}{2}\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k - x_{k-1}|$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Отрезки $[x_k - \delta; x_k + \delta]$ не пересекаются. Пусть $\varphi_{\varepsilon,\delta} = M_1$ для $x \in [a; x_1 - \delta]$, $\varphi_{\varepsilon,\delta} = M_n$ для $x \in [x_{n-1} + \delta; b)$, $\varphi_{\varepsilon,\delta} = M_{k+1}$ для $x \in [x_k + \delta; x_{k+1} - \delta]$, $k = 1, 2, \ldots, n-2$, и $\varphi_{\varepsilon,\delta}$ линейна на отрезках $[x_k - \delta; x_k + \delta]$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Функция $\varphi_{\varepsilon,\delta}$ определена корректно, так как значения на концах отрезка уже определены. Тогда функция $\varphi_{\varepsilon,\delta}(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и

$$\left|\int_a^b (f(x) - \varphi_{\varepsilon,\delta}(x))\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b (f(x) - \varphi_\varepsilon(x))\,dx\right| + \left|\int_a^b (\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_{\varepsilon,\delta}(x))\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^b f(x)\,dx - S(f,T)\right| + \left|\int_a^b (\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_{\varepsilon,\delta}(x))\,dx\right| \leqslant \varepsilon + 2(n-1)(|M| + |m|)\delta.$$

Отсюда следует доказываемое утверждение. □

Пример Т7.8. Приведём пример таких дифференцируемых на $[0; 1]$ функций f и g, что g монотонна на $[0; 1]$, $g([0; 1]) = [0; 1]$ и функция $f(g(x))g'(x)$ не интегрируема по Риману на $[0; 1]$.

Решение. Например, пусть (см. рис. 54)

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0,\\ \dfrac{1}{3^n}, & x \in \left[\dfrac{1}{2^n}; \dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{1}{n3^n}\right],\ n \in \mathbb{N},\\ \dfrac{1}{3^n} + \dfrac{2}{3^n}\cos^2\dfrac{\pi n 3^n\left(x - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{2}, & x \in \left(\dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{1}{n3^n}; \dfrac{1}{2^{n-1}}\right),\ n \in \mathbb{N},\\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Покажем, что верны следующие утверждения: а) $g \in C(0; 1]$; б) функция g дифференцируема на $(0; 1]$; $g'(x)$ неотрицательна и не ограничена на $(0; 1]$; в) $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = 0$; г) производная функции g в нуле существует и равна нулю.

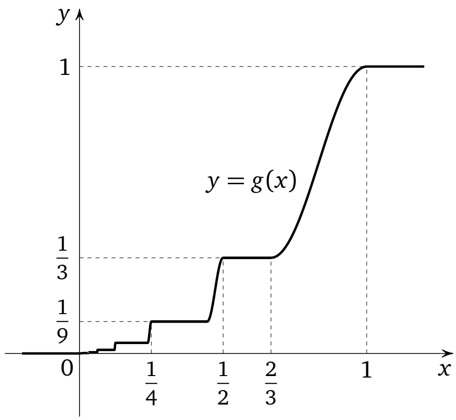


Рис. 54

а) Обозначим $x_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, $\widetilde{x}_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{1}{n3^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Из определения функции g следует, что она непрерывна на каждом из интервалов $(x_{n+1}; \widetilde{x}_n)$, $(\widetilde{x}_n; x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и луче $(1; +\infty)$. Получаем $\lim\limits_{x\to x_n-} g(x) = \dfrac{1}{3^n} + \dfrac{2}{3^n} = \dfrac{1}{3^{n-1}} = g(x_n) = \lim\limits_{x\to x_n+} g(x)$ и $\lim\limits_{x\to \widetilde{x}_n+} g(x) = \dfrac{1}{3^n} + \dfrac{2}{3^n}\cos^2\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{3^n} = g(\widetilde{x}_n) = \lim\limits_{x\to \widetilde{x}_n-} g(x)$, поэтому функция g непрерывна в каждой из точек x_n, $\widetilde{x}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Итак, g непрерывна на $(0; 1]$.

б) Из определения функции g также следует, что она дифференцируема на луче $(1; +\infty)$ и на каждом из интервалов $(x_{n+1}; \widetilde{x}_n)$, $(\widetilde{x}_n; x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, причём $g'(x) = 0$ при $x > 1$, $g'(x) = 0$ при $x \in (x_{n+1}; \widetilde{x}_n)$,

$$g'(x) = -\pi n \sin\left(\pi n 3^n\left(x - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right) \quad \text{при } x \in (\widetilde{x}_n; x_n).$$

Остаётся проверить дифференцируемость g в каждой из точек $\widetilde{x}_n$, x_n, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку g непрерывна в этих точках, достаточно показать, что

$$\lim_{x\to x_n+} g'(x) = \lim_{x\to x_n-} g'(x), \qquad \lim_{x\to \widetilde{x}_n+} g'(x) = \lim_{x\to \widetilde{x}_n-} g'(x).$$

Действительно, $\lim\limits_{x\to x_n+} g'(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_n-} g'(x) = -\pi n\sin 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to \widetilde{x}_n-} g'(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to \widetilde{x}_n+} g'(x) = \pi n\sin\pi = 0$. Если $x\in(\widetilde{x}_n; x_n)$, то $\frac{-1}{3^n n} < x - \frac{1}{2^{n-1}} < 0$, поэтому $g'(x) > 0$ при $x\in(\widetilde{x}_n; x_n)$, следовательно, $g'(x)\geqslant 0$ при $x\in(0;1]$. Наконец, если $x_0=\dfrac{\widetilde{x}_n+x_n}{2}$, то $g'(x_0)=\pi n$, т. е. g' не ограничена на $(0;1]$.

в) Поскольку $g'(x)\geqslant 0$ при $x\in(0;1]$, функция g монотонна, следовательно, предел $g(x)$ при $x\to 0+$ существует, и так как $x_n\to 0+$ $(n\to\infty)$, получаем

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} g\Big(\frac{1}{2^{n-1}}\Big) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n-1}} = 0.$$

г) Если $x\in\Big[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\Big]$, $n\in\mathbb{N}$, то в силу монотонности имеем

$$0\leqslant \frac{g(x)-g(0)}{x}\leqslant 2^n g\Big(\frac{1}{2^{n-1}}\Big) = \frac{2^n}{3^{n-1}}.$$

Условия $x\to 0+$ и $n\to\infty$ эквивалентны, поэтому $g'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=0$. Поскольку g непрерывна в нуле и $g'_-(0)=0$, заключаем, что g дифференцируема в нуле и $g'(0)=0$. Из утверждений а)—г) следует, что функции $f(x)\equiv 1$ и $g(x)$ удовлетворяют требованиям задачи. □

Пример Т7.9. Для заданного отрезка $[a;b]$ и заданных чисел A, B, k_1 и k_2 обозначим $m=\min\Big\{k_1, k_2, \dfrac{B-A}{b-a}\Big\}$, $M=\max\Big\{k_1, k_2, \dfrac{B-A}{b-a}\Big\}$. Докажем, что для любого $\varepsilon>0$ существует функция $f\in C^1(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:

а) $f(a)=A$, $f(b)=B$; б) $f'(a)=k_1$, $f'(b)=k_2$;

в) $m-\varepsilon\leqslant f'(x)\leqslant M+\varepsilon$, $x\in[a;b]$.

Решение. Будем искать функцию f в виде $f(x)=\displaystyle\int_a^x \varphi(t)\,dt + A$. Чтобы функция f удовлетворяла условиям а)—в), достаточно, чтобы функция φ удовлетворяла условиям: 1) $\varphi\in C(\mathbb{R})$; 2) $\varphi(a)=k_1$, $\varphi(b)=k_2$; 3) $m-\varepsilon\leqslant\varphi(x)\leqslant M+\varepsilon$, $x\in[a;b]$; 4) $\displaystyle\int_a^b\varphi(x)\,dx = B-A$. Обозначим $k=\dfrac{B-A}{b-a}$. Рассмотрим два случая.

I. Пусть $k_1<k<k_2$. Тогда точка c, для которой $\dfrac{c-a}{b-c}=\dfrac{k_2-k}{k-k_1}$, лежит на интервале $(a;b)$. Пусть $\varphi(x)=k_1$ для $x\leqslant a$, $\varphi(c)=k$, $\varphi(x)=k_2$ для $x\geqslant b$ и $\varphi(x)$ линейна на $[a;c]$ и $[c;b]$. Условия 1)—3) выполнены и

$$\int_a^b\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}(c-a)(k+k_1)+\frac{1}{2}(b-c)(k_2+k) = k(b-a) = B-A,$$

так что выполнено и условие 4).

II. Пусть $k_1\leqslant k_2<k$. Возьмём число k', удовлетворяющее условиям а) $k<k'<k+\varepsilon$ и б) $k'<2k-\dfrac{k_1+k_2}{2}$. Поскольку $\dfrac{k_1+k_2}{2}<k$, получаем $2k-\dfrac{k_1+k_2}{2}>k$ и условия а) и б) совместны. Пусть $\varphi(x)=k_1$ при $x\leqslant a$, $\varphi(x)=k_2$ при $x\geqslant b$, $\varphi(x)=k'$ при $x\in[a+\delta; b-\delta]$, $\varphi(x)$ линейна на $[a;a+\delta]$ и $[b-\delta;b]$, где δ — некоторое число, $0<\delta<(b-a)/2$, которое будет определено позже. Условия

1)—3) для φ выполнены. Покажем, что можно подобрать δ так, чтобы выполнялось условие 4):

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = k'(b-a) - \frac{1}{2}(k'-k_1)\delta - \frac{1}{2}(k'-k_2)\delta = J_\delta.$$

При $\delta \to 0+$ имеем $J_\delta \to k'(b-a) > k(b-a) = B-A$, а при $\delta \to \frac{b-a}{2}$

$$J_\delta \to \frac{b-a}{2}\Big(k' + \frac{k_1+k_2}{2}\Big) < (b-a)k = B-A$$

в силу условий на k'. Следовательно, в силу непрерывной зависимости J_δ от δ найдётся такое δ, $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$, что $J_\delta = B-A$, т. е. выполнено условие 4). Заметим, что это построение φ проходит и при $k_1 < k_2 = k$. Если же $k_1 = k_2 = k$, то $\varphi = k$, $f = kx + A$. Все остальные варианты соотношений между k_1, k_2 и k рассматриваются аналогично либо первому, либо второму случаю. □

Пример T7.10. Построим непрерывную неубывающую на отрезке $[0; 1]$ функцию $f(x)$ со свойством $f'(x) = 0$ почти всюду[1] на $[0; 1]$, известную под названием *лестница Кантора*.

Решение. Пусть $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Рассмотрим на отрезке $[0; 1]$ множество Кантора $K = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_n$ (см. пример 2.22). При $n \in \mathbb{N}$ множество $[0; 1] \setminus K_n$ — объединение 2^{n-1} интервалов I_n^k, исключённых на n-м шаге построения множества K. Положим $f(x) = \frac{2k-1}{2^n}$, если $x \in \overline{I_n^k}$, $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$. Тогда функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right], \\ \frac{1}{4} & \text{при } x \in \left[\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right], \\ \frac{3}{4} & \text{при } x \in \left[\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

определена на отрезке $[0; 1]$ всюду, кроме точек второго рода множества K (см. рис. 55). Пусть x — одна из таких точек. Выберем две последовательности — возрастающую и убывающую — $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ точек первого рода, сходящиеся к точке x. Тогда последовательности $\{f(y_n)\}$ и $\{f(z_n)\}$ монотонны и ограничены; следовательно, существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = y$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = z$, причём $y \leqslant z$. Если $y < z$, то найдётся точка вида $\frac{2k-1}{2^n} \in (y; z)$. По проведённому выше построению должна найтись точка первого рода x', для которой $f(x') = \frac{2k-1}{2^n}$. Но тогда $y_n \leqslant x' \leqslant z_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, следовательно, $x' = x$, что невозможно. Полученное противоречие означает, что $y = z$. Приняв y в качестве значения функции f в точке x, получим монотонную функцию, определённую и непрерывную на всем отрезке $[0; 1]$.

[1] Если некоторое свойство выполнено во всех точках множества A за исключением множества меры нуль, то говорят, что это свойство выполнено на A *почти всюду*.

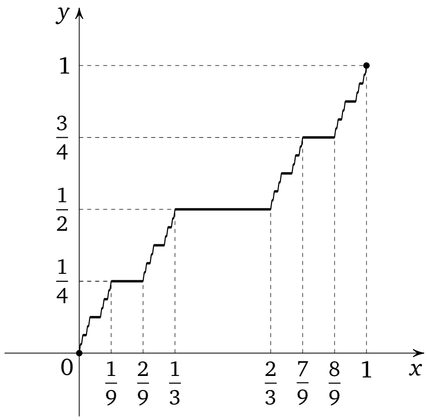


Рис. 55

Построенная функция постоянна на каждом из смежных интервалов $(a_k; b_k)$ множества Кантора. Следовательно, $f'(x) = 0$ при всех $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k; b_k)$. Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = 1$, получаем, что $f'(x) = 0$ почти всюду на $[0; 1]$. □

Пример T7.11. Рассмотрим следующую модификацию множества Кантора, которая обозначается K_λ, $0 < \lambda < 1$, и строится по той же процедуре, что и множество K (см. пример 2.22), только на n-м шаге исключаются средние интервалы длины $\frac{\lambda}{3^n}$. Таким образом, $K_\lambda = [0; 1] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k; b_k)$, где $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda \frac{2^n}{3^{n+1}} = \lambda < 1$, т. е. сумма длин смежных интервалов множества K_λ меньше 1.

Докажем, что K_λ не является множеством меры нуль. Пусть, напротив, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая не более чем счётная система интервалов $(\alpha_n; \beta_n)$, что $K_\lambda \subset \bigcup\limits_n (\alpha_n; \beta_n)$ и $\sum\limits_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$. Пусть $0 < \varepsilon < 1 - \lambda$. Из включения

$$[0; 1] = K_\lambda \cup ([0; 1] \setminus K_\lambda) \subset \bigcup_n (\alpha_n; \beta_n) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k; b_k)$$

получаем, что отрезок $[0; 1]$ покрыт счётной системой интервалов суммарной длины меньше единицы. Полученное противоречие (см. задачу T7.2) означает, что допущение о том, что множество K_λ имеет меру нуль, неверно. □

Пример T7.12. Приведём пример дифференцируемой на отрезке $[0; 1]$ функции f, производная f' которой ограничена на $[0; 1]$, но $f' \notin R[0; 1]$.

Решение. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ при $x > 0$. Её производная равна $\varphi'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. Отсюда следует, что $|\varphi'(x)| \leqslant 2x + 1$, $\varphi'\Big(\frac{1}{2\pi n}\Big) = -1$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и в любой правой полуокрестности нуля найдётся такая точка l, что $\varphi'(l) = 0$ (корень уравнения $2x = \operatorname{ctg}\frac{1}{x}$).

Далее на произвольном интервале $(a;b)$ построим функцию $h(x)$ следующим образом. Зафиксируем такое число $l \in \left(0; \frac{a+b}{2}\right)$, что $\varphi'(l)=0$, и положим

$$h(x)=\begin{cases} \varphi(x-a), & \text{если } a<x\leqslant a+l,\\ \varphi(l), & \text{если } a+l<x<b-l,\\ \varphi(b-x), & \text{если } b-l\leqslant x<b. \end{cases}$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

1) симметрична относительно точки $\frac{a+b}{2}$, т. е. $h\left(\frac{a+b}{2}+x\right)=h\left(\frac{a+b}{2}-x\right)$;

2) дифференцируема на всём интервале $(a;b)$, так как $h'_{-}(a+l)=\varphi'(l)=0$ и $h'_{+}(a+l)=0$, поэтому $h'(a+l)=0$, а дифференцируемость в остальных точках следует из дифференцируемости функции φ и свойства 1;

3) $|h(x)|\leqslant\min\{(x-a)^2, (b-x)^2\}$ при всех $x\in(a;b)$;

4) $|h'(x)|\leqslant 2(b-a)+1$ при всех $x\in(a;b)$;

5) $h'\left(a+\frac{1}{2\pi n}\right)=-1$, если $n\in\mathbb{N}$, $n>\frac{1}{2\pi l}$.

Возьмём теперь множество $K_\lambda=[0;1]\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k;b_k)$, $0<\lambda<1$ (см. предыдущий пример). Для каждого интервала $(a_k;b_k)$ соответствующую ему функцию h обозначим через h_k. Покажем, что требуемыми в условии примера свойствами обладает функция

$$f(x)=\begin{cases} h_k(x), & \text{если } x\in(a_k;b_k),\\ 0, & \text{если } x\in K_\lambda. \end{cases}$$

Из определения функции f и свойства 2 функции h следует, что функция f дифференцируема на каждом интервале $(a_k;b_k)$, а значит, и на множестве $[0;1]\setminus K_\lambda$. Возьмём произвольную точку $c\in K_\lambda$ и докажем, что в этой точке правая производная $f'_{+}(c)$ существует и равна 0. Для произвольного $\varepsilon>0$ пусть $x\in(c;c+\varepsilon)$. Если $x\in K_\lambda$, то $f(x)-f(c)=0$, если же $x\in(a_k;b_k)$ при некотором $k\in\mathbb{N}$, то, используя свойство 3 функции h, получаем

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right|\leqslant\frac{|h_k(x)|}{x-a_k}\leqslant\frac{(x-a_k)^2}{x-a_k}=x-a_k<x-c<\varepsilon.$$

Следовательно, $f'_{+}(c)=\lim\limits_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=0$. Аналогично доказывается, что $f'_{-}(c)=0$. Значит, $f'(c)=0$. Поскольку точка $c\in K_\lambda$ была выбрана произвольно, функция f дифференцируема на всём отрезке $[0;1]$, причём $f'(c)=0$ для всех $c\in K_\lambda$. Кроме того, из свойства 4 функции h следует, что $|f'(x)|\leqslant 3$ для всех $x\in[0;1]$, т. е. производная функции f ограничена.

Докажем, что каждая точка $c\in K_\lambda$ является точкой разрыва функции f'. Из построения множества K_λ следует, что существует такая подпоследовательность интервалов $(a_{k_n};b_{k_n})$, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_{k_n}=\lim\limits_{n\to\infty}b_{k_n}=c$. Используя свойство 5 функции h, получаем, что существует такая последовательность $\{d_n\}$ точек

$d_n \in (a_{k_n}; b_{k_n})$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f'(d_n) = -1 \neq f'(c)$, хотя при этом $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = c$. Значит, функция f' разрывна в точке c.

Итак, функция f' ограничена на отрезке $[0; 1]$, но по критерию Лебега не интегрируема по Риману на этом отрезке, так как множество K_λ её точек разрыва не является множеством меры нуль. □

Т7.1. Доказать, что счётное подмножество числовой оси имеет меру нуль.

Т7.2. Пусть отрезок $[a; b]$ покрывается не более чем счётной системой интервалов $\{(\alpha_k; \beta_k)\}$, $[a; b] \subset \bigcup\limits_k (\alpha_k; \beta_k)$. Доказать, что $\sum\limits_k (\beta_k - \alpha_k) \geqslant b - a$.

Т7.3. Доказать, что отрезок $[a; b]$, $a < b$, не является множеством меры нуль.

Т7.4. Привести пример функции, определённой на $[a; b]$, непрерывной на $(a; b)$, но не интегрируемой по Риману на $[a; b]$.

√**Т7.5.** Привести пример дифференцируемой на всей прямой функции, производная которой не интегрируема по Риману на $[-1; 1]$.

Т7.6. Доказать, что изменение интегрируемой функции на конечном множестве точек не нарушает интегрируемости функции и не изменяет величины интеграла.

√**Т7.7.** Пусть $R(x)$ — функция Римана (см. пример Т7.2). Доказать, что $\int\limits_a^b R(x)\,dx = 0$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$.

√**Т7.8.** Привести пример неинтегрируемой по Риману на $[a; b]$ функции, квадрат которой есть интегрируемая по Риману на $[a; b]$ функция.

Т7.9. Функция $f(x) \in R[a; b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$. Доказать, что существует такой отрезок $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$, что $\inf\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) > 0$.

√**Т7.10.** Доказать, что если функция $f \in R[a; b]$ и $f(x) > 0$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

Т7.11. Пусть $f(x) = 0$ почти всюду на $[a; b]$. Обязательно ли $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует и равен нулю?

Т7.12. Пусть $f \in R[a; b]$ и $f(x) = 0$ почти всюду на $[a; b]$. Доказать, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$ (ср. с задачей Т7.7).

√**Т7.13.** Доказать, что множество Кантора (см. с. 65) имеет меру нуль.

√**Т7.14.** Привести пример интегрируемой функции с несчётным множеством точек разрыва.

Т7.15. Пусть $f \in R[a; b]$, T — разбиение отрезка $[a; b]$, состоящее из точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, $d_T = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k$. Найти:

а) $\lim\limits_{d_T\to 0} \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$; б) $\lim\limits_{d_T\to 0} \sum\limits_{k=1}^n \ln(1 + f(\xi_k)\Delta x_k)$;

в) $\lim\limits_{d_T\to 0} \prod\limits_{k=1}^n (1 + f(\xi_k)\Delta x_k)$.

T7.16. Пусть $f, g \in R[a; b]$, T — разбиение отрезка $[a; b]$, состоящее из точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Найти

$$\lim_{d_T \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\, dx.$$

T7.17. Пусть функция $f \in R[a; b]$ неотрицательна, T — разбиение отрезка $[a; b]$, состоящее из точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$. Доказать, что $\lim\limits_{d_T \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\Delta x_k^{s-1}} \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(u)\, du \right)^s = \int\limits_a^b f^s(u)\, du$ для любого $s > 1$.

✓**T7.18.** Функция f имеет на $[0; 1]$ ограниченную производную. Доказать, что существует такая постоянная C, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\left| \int\limits_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{C}{n}.$$

T7.19. Пусть функция f имеет производную f' в некоторой окрестности точки x, причём f' непрерывна в точке x. Доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(x + \frac{k}{k^2 + n^2}\right) - f(x) \right) = f'(x) \ln \sqrt{2}.$$

T7.20. Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз на отрезке $[a; b]$, т. е. для любых точек $x_1, x_2 \in [a; b]$ и для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ с условием $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, выполнено неравенство $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$. Доказать, что тогда

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\, dx \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a).$$

T7.21. Пусть f и g — непрерывные и неубывающие функции на $[0; 1]$. Доказать, что $f(x)g(x)\, dx \geqslant \int\limits_0^1 f(x)\, dx \cdot \int\limits_0^1 g(x)\, dx$.

T7.22. *Модулем непрерывности* функции f на отрезке $[a; b]$ называется функция $\omega(\delta) = \sup\big\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in [a; b], |x_1 - x_2| < \delta\big\}$. Доказать, что для разбиения T_δ отрезка $[a; b]$ с параметром δ справедлива оценка

$$S(f, T_\delta) - s(f, T_\delta) \leqslant (b-a)\omega(\delta).$$

T7.23. Доказать, что если функция $f \in R[a; b]$, то она обладает свойством *интегральной непрерывности*, т. е. для любого отрезка $[\alpha; \beta] \subset (a; b)$ имеем

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_\alpha^\beta |f(x+h) - f(x)|\, dx = 0.$$

T7.24. Привести пример непрерывной на $[a; b]$ и не равной тождественно нулю функции f, для которой $\int\limits_a^b f(x)\, dx = 0$.

T7.25. Доказать, что если непрерывная на $[a;b]$ функция f не равна тождественно нулю, то найдётся такой отрезок $[\alpha;\beta]\subset[a;b]$, что $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx\neq 0$ (ср. с задачами T7.9 и T7.24).

✓**T7.26.** Доказать, что для непрерывной на $[a;b]$ функции f из равенства $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx=0$ следует, что $f\equiv 0$ на $[a;b]$.

T7.27. Пусть $f\in C[a;b]$ и для всех функций $g\in C[a;b]$ справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx=0$. Доказать, что $f\equiv 0$ на $[a;b]$.

T7.28. Пусть $f\in C[a;b]$ и для всех таких $g\in C[a;b]$, что $g(a)=g(b)=0$, справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx=0$. Доказать, что $f\equiv 0$ на $[a;b]$.

✓**T7.29.** Функции f, $g\in R[a;b]$. Доказать неравенство

$$\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqslant\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int\limits_a^b g^2(x)\,dx.$$

T7.30. Функции f и g непрерывны на $[a;b]$. Найти необходимое и достаточное условие справедливости равенства

$$\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2=\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int\limits_a^b g^2(x)\,dx.$$

✓**T7.31.** Функция f определена на $\mathbb{R}$, периодична с периодом T и интегрируема на $[0;T]$. Доказать, что $f\in R[a;a+T]$ для любого $a\in\mathbb{R}$, причём

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx=\int\limits_0^T f(x)\,dx.$$

T7.32. Пусть $T>0$, $f\in C(\mathbb{R})$ и $\int\limits_a^{a+T} f(t)\,dt=\int\limits_0^T f(t)\,dt$ при всех $a\in\mathbb{R}$. Доказать, что функция f периодическая с периодом T.

T7.33. Пусть $f\in C(\mathbb{R})$ — периодическая функция с периодом $T>0$. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$ была периодической с периодом T.

T7.34. Пусть $f\in C(\mathbb{R})$ — периодическая функция с периодом $T>0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(nx)\,dx=\dfrac{b-a}{T}\int\limits_0^T f(x)\,dx$ при всех $a<b$.

T7.35. Пусть $f \in C[-1; 1]$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n f(\sin x)\,dx$.

T7.36. Пусть $f \in C[0; +\infty)$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 f(n+x)\,dx$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f(nx)\,dx = a$.

✓**T7.37.** Пусть $f \in R[-a; a]$. Доказать, что

1) если f чётная, то $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$,

2) если f нечётная, то $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

T7.38. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$ при всех $a \in \mathbb{R}$. Доказать, что функция f нечётна.

T7.39. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$ при всех $a \in \mathbb{R}$. Доказать, что функция f чётна.

T7.40. Доказать, что любая первообразная нечётной функции является функцией чётной, а среди первообразных чётной функции существует единственная нечётная функция.

✓**T7.41.** Доказать, что для функции $f \in C[0; 1]$ справедливо равенство:

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos x)\,dx.$$

T7.42. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,dx$, где $n \in \mathbb{N}$.

✓**T7.43.** Доказать, что если функция f непрерывна на отрезке $[0; 1]$, то

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

T7.44. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}\,dx$, где $n \in \mathbb{N}$.

T7.45. Функция φ непрерывна на $[0; l]$, и для всех $x \in [0; l]$ имеем $\varphi(l-x) = \varphi(x)$. Функция f непрерывна на отрезке $\varphi([0; l])$. Доказать, что:

а) $\displaystyle\int_0^{l} f(\varphi(x))\,dx = 2\int_0^{l/2} f(\varphi(x))\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^{l} xf(\varphi(x))\,dx = \frac{l}{2}\int_0^{l} f(\varphi(x))\,dx$.

T7.46. Всюду, кроме точки $x = 1$, функция

$$g(x) = \frac{-20(x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 8x - 64)}{16x^6 - 32x^5 + 169x^4 - 1056x^3 + 6784x^2 - 512x + 256}$$

равна $\dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$, где $f(x) = \dfrac{x(80 - 5x)}{4(1-x)(x^2+4)}$. Найти: а) $\displaystyle\int_{-4}^{0} g(x)\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^{4} g(x)\,dx$.

T7.47. Пусть $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}, \\ D(x), & \frac{1}{2}<x\leqslant 1, \end{cases}$ где $D(x)$ — функция Дирихле. Указать, какое из следующих равенств неверно и почему:

а) $\int\limits_0^{1/2} f(x)\,dx=\int\limits_0^{\pi/6} f(\sin t)\cos t\,dt$; б) $\int\limits_0^{1/2} f(x)\,dx=\int\limits_0^{5\pi/6} f(\sin t)\cos t\,dt$.

✓**T7.48.** Найти: а) $\frac{d}{da}\int\limits_a^b e^{-x^2}\,dx$; б) $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b e^{-x^2}\,dx$; в) $\frac{d}{db}\int\limits_a^b e^{-x^2}\,dx$; г) $\frac{d}{db}\int\limits_a^{b^2} \ln(1+x^2)\,dx$; д) $\frac{d}{da}\int\limits_{\sin a}^{\cos a} \ln(1+x^2)\,dx$.

T7.49. Пусть $f\in C(\mathbb{R})$, $a<b$ и $g(x)=\int\limits_a^b f(x+t)\,dt$. Вычислить $g'(x)$.

T7.50. Найти точки локального экстремума функции

$$F(x)=\int\limits_0^x e^{u^2}(u^2-3u+2)\,du.$$

T7.51. Найти все функции $f\in C[0;+\infty)$, удовлетворяющие условию

$$\sin\left(\int\limits_0^x f(u)\,du\right)=\frac{x}{1+x} \quad \text{при всех } x\geqslant 0.$$

T7.52. Найти все функции $f\in C(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию

$$\int\limits_0^x e^u f(x-u)\,du=\sin x \quad \text{при всех } x\in\mathbb{R}.$$

T7.53. Найти все дифференцируемые функции $f:\mathbb{R}\to[1;+\infty)$, удовлетворяющие при всех $x\in\mathbb{R}$ условию $\int\limits_1^{f(x)} e^{u^2}\,du=\int\limits_0^x \frac{u\,du}{f(u)}$.

✓**T7.54.** Пусть $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ Доказать, что $f\in R[-1;1]$ и функция $F(x)=\int\limits_{-1}^x f(t)\,dt$ дифференцируема на $(-1;1)$. Найти $F'(0)$.

✓**T7.55.** Пусть интегрируемая на $[a;b]$ функция f имеет в точке $x_0\in(a;b)$ неустранимый разрыв первого рода и $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Доказать, что F не является дифференцируемой в точке x_0.

T7.56. Привести пример такой функции $f\in R[a;b]$, что функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ не дифференцируема в счётном множестве точек из $[a;b]$.

Т7.57. Привести пример такой функции $f \in R[a;b]$, что равенство $F'(x) = f(x)$, где $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, не выполняется на множестве мощности континуума.

Т7.58. Пусть $f \in R[a;b]$ и $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a;b]$. Доказать, что функция F дифференцируема почти всюду на $[a;b]$.

✓**Т7.59.** Пусть $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Доказать, что существует такая постоянная C, что $\left|\int\limits_0^x g(t)\,dt\right| \leqslant Cx^2$ при $|x| \leqslant 1$.

✓**Т7.60.** Привести пример функции, имеющей неустранимый разрыв в точке $x = 0$, интегрируемой по Риману на $[-1;1]$ и такой, что функция $F(x) = \int\limits_{-1}^x f(t)\,dt$ дифференцируема во всех точках интервала $(-1;1)$.

Т7.61. Пусть функция f непрерывна и неотрицательна на $[0;+\infty)$ и для любого $x > 0$ имеем $\int\limits_0^x f(t)\,dt \neq 0$. Доказать, что функция

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x tf(t)\,dt \Big/ \int\limits_0^x f(t)\,dt \quad \text{возрастает на } (0;+\infty).$$

Т7.62. Пусть функция $f \in C^1[0;1]$ возрастает на $[0;1]$, $f(0) = 0$ и g — функция, обратная к f. Доказать, что для всех $x \in [0;1]$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^x f(u)\,du + \int\limits_0^{f(x)} g(u)\,du = xf(x).$$

✓**Т7.63.** Пусть $f \in C[0;+\infty)$ возрастает. Доказать, что функция

$$g(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(u)\,du \quad \text{возрастает на } (0;+\infty).$$

Т7.64. Пусть $f, g \in C[0;+\infty)$, g положительна и функция $\frac{f}{g}$ возрастает. Доказать, что функция $h(x) = \int\limits_0^x f(u)\,du \left(\int\limits_0^x g(u)\,du\right)^{-1}$ возрастает на $(0;+\infty)$.

Т7.65. Пусть функция $f \in C[0;1]$ возрастает. Доказать, что функция

$$\frac{1}{1-x}\int\limits_x^1 f(t)\,dt \quad \text{возрастает на } [0;1).$$

Т7.66. Пусть функция f непрерывна на $[0;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt = A$.

T7.67. Привести пример функции $f \in C[0; +\infty)$, для которой существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt$, но не существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

✓**T7.68.** Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\int\limits_1^x \ln\Big(1+\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)dt$; б) $\lim\limits_{x\to 0+} x\int\limits_x^1 \dfrac{\cos t}{t^2}\,dt$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x}\int\limits_0^x \dfrac{1}{\sqrt[5]{1+t^5}}\,dt$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\int\limits_0^x (1+\sin t)^{\frac{1}{t}}\,dt$; д) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x^2}\int\limits_0^x t^{1+t}\,dt$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big(\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt\Big)^{\frac{1}{x^2}}$.

✓**T7.69.** Пусть $f \in C[a; b]$ и $f'(x) = 0$ всюду на $[a; b] \setminus E$, где E — конечное множество. Доказать, что функция f постоянна на $[a; b]$.

T7.70. Показать на примере, что для бесконечного множества E утверждение предыдущей задачи, вообще говоря, неверно.

✓**T7.71.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n x\,dx = 0$.

T7.72. Пусть $f \in R[0; 1]$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = A$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(x^n)\,dx = A$.

T7.73. Пусть $f \in R[0; 1]$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \dfrac{nf(x)}{n+x}\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

T7.74. Пусть $f \in R[0; 1]$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{1+nx}\,dx = 0$.

✓**T7.75.** Пусть $f \in C[a; b]$. Доказать, что существует такая точка $c \in (a; b)$, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

T7.76. Пусть $f \in R[a; b]$. Доказать, что существует такая точка $c \in [a; b]$, что $\int\limits_a^c f(t)\,dt = \int\limits_c^b f(t)\,dt$.

T7.77. Пусть $f \in C[a; b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$. Доказать, что существует такая точка $c \in (a; b)$, что $\int\limits_a^c f(t)\,dt = f(c)$.

T7.78. Пусть $f \in C[a; b]$, $a > 0$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$. Доказать, что существует такая точка $c \in (a; b)$, что $\int\limits_a^c f(t)\,dt = cf(c)$.

✓**T7.79.** Показать, что на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ нет такой точки c, что

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin x\,dx = c\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\,dx,$$

так как $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\,dx=0$, а $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin x\,dx\neq 0$. Какое условие теоремы о среднем нарушено?

T7.80. Пусть $g(x)=\operatorname{sgn} x+\frac{1}{2}$. Показать, что на отрезке $[-3;1]$ нет такой точки c, что

$$\int\limits_{-3}^{1} g(x)\,dx = g(c)(1-(-3)),$$

так как $\int\limits_{-3}^{1} g(x)\,dx=0$, а функция $g(x)$ не принимает нулевого значения. Какое условие теоремы о среднем нарушено?

T7.81. Функция g неотрицательна на $[a;b]$ и $g\in R[a;b]$, функция f непрерывна на $(a;b)$ и произведение fg интегрируемо по Риману на $[a;b]$. Доказать, что в этих условиях справедлива *обобщённая теорема о среднем*, т. е. найдётся такое число $\mu\in\langle m;M\rangle$, где $m=\inf\limits_{(a;b)} f(x)$, $M=\sup\limits_{(a;b)} f(x)$, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx=\mu\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

T7.82. Доказать, что а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx>0$; б) $\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2\,dx>0$.

T7.83. Пусть $f\in C[a;b]$, $g\in C^1[a;b]$ и функция g монотонна на $[a;b]$. Доказать, что существует такая точка $c\in(a;b)$, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)\,dx+g(b)\int\limits_c^b f(x)\,dx$$ (*вторая теорема о среднем*).

T7.84. Доказать, что при $0<a<b$ а) $\left|\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right|<\frac{4}{a}$; б) $\left|\int\limits_a^b \sin x^2\,dx\right|<\frac{2}{\sqrt{a}}$.

T7.85. Пусть функция φ — возрастающая, непрерывно дифференцируемая на $[0;+\infty)$ и переводит $[0;+\infty)$ в $[a;b)$. Доказать, что для любой непрерывной на $[a;b]$ функции f имеем $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{T\to+\infty}\int\limits_0^T f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

T7.86. Пусть $f\in C^1[0;1]$. Доказать, что

$$\int\limits_0^1 |f(x)|\,dx \leqslant \max\left\{\int\limits_0^1 |f'(x)|\,dx, \left|\int\limits_0^1 f(x)\,dx\right|\right\}.$$

T7.87. Пусть $f\in C^1[0;1]$ и $f(1)-f(0)=1$. Доказать, что $\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx\geqslant 1$.

T7.88. Функция f определена на отрезке $[0;1]$ и убывает на нём. Доказать, что для любого $\alpha\in(0;1)$ имеем $\int\limits_0^{\alpha} f(x)\,dx\geqslant\alpha\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

T7.89. Доказать, что для непрерывных неотрицательных функций $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющих условию $u(t) \leqslant C + \int\limits_a^t u(x)v(x)\,dx$, $C > 0$, $t > a$, справедливо неравенство $u(t) \leqslant C \exp\Big(\int\limits_a^t v(x)\,dx\Big)$.

✓**T7.90.** Пусть $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in [a; b]$. Обязательно ли $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует и равен $F(b) - F(a)$?

T7.91. Пусть $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in [a; b]$ и функция f ограничена на $[a; b]$. Обязательно ли $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует и равен $F(b) - F(a)$?

T7.92. Пусть $f \in R[a; b]$, $F \in C[a; b]$ и $F'(x) = f(x)$ почти всюду на $[a; b]$. Обязательно ли $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$?

T7.93. Привести пример таких функций $F\colon [0; 1] \to \mathbb{R}$ и $G\colon [0; 1] \to \mathbb{R}$, что F непрерывно дифференцируема на $[0; 1]$, G строго монотонна и всюду дифференцируема на $[0; 1]$, G' ограничена на $[0; 1]$, но не имеет места равенство

$$\int\limits_0^1 F'(x)G(x)\,dx = F(x)G(x)\big|_0^1 - \int\limits_0^1 F(x)G'(x)\,dx$$

из-за того, что интеграл в правой части этого равенства не существует.

T7.94. Привести пример таких функций $F\colon [0; 1] \to \mathbb{R}$ и $\varphi\colon [0; 1] \to [0; 1]$, что F непрерывно дифференцируема на $[0; 1]$, φ строго монотонна и всюду дифференцируема на $[0; 1]$, φ' ограничена на $[0; 1]$, но из-за того, что интеграл в правой части этого равенства не существует, не имеет места равенство

$$\int\limits_0^1 F(x)\,dx = \int\limits_0^1 F(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

✓**T7.95.** Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx$. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$; б) $(-1)^n I_n = \dfrac{\pi}{4} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$.

T7.96. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin nx}{\sin x}\,dx$.

а) Вычислить I_{2n-1}; б) вычислить I_{2n}; в) доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

T7.97. Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $I_n = \dfrac{4}{\pi} \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x\,dx$, где $(-1)!! = 1$. Доказать, что

а) $I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{n^2}$ при $n \in \mathbb{N}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$; в) $I_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

✓T7.98. а) Вычислив интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^4(1-x^4)}{1+x^2}\,dx$, получить оценку сверху числа π.

б) Применив к этому интегралу теорему о среднем, получить оценки снизу и сверху числа π.

T7.99. (*Иррациональность* π.) Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и

$$I_n = \frac{1}{n!}\int\limits_0^{\pi/2}\Big(\frac{\pi^2}{4}-t^2\Big)^n \cos t\,dt.$$

Доказать, что

а) $I_{n+1} = (4n+2)I_n - \pi^2 I_{n-1}$;

б) $I_n = P_n(\pi^2)$, где P_n — многочлен с целыми коэффициентами, $\deg P_n \leqslant n$;

в) существует такое положительное число a, что $0 < I_n < \frac{a^n}{n!}$;

г) число π^2 иррационально.

Ответы и указания

T7.2. *Указание*. См. задачу 2.156; в случае счётной системы интервалов применить лемму о конечном покрытии.

T7.3. *Указание*. Воспользоваться предыдущей задачей.

T7.4. Например, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}, & x \in (a;b), \\ 0, & x = a,\ x = b. \end{cases}$

T7.5. Например, $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

T7.6. *Указание*. Пусть $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0. \end{cases}$ Доказать, что $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = 0$ для любых a и b, а $f(x) - g(x)$ есть линейная комбинация функций такого вида.

T7.7. *Указание*. Найти нижний интеграл Дарбу.

T7.8. Например, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рациональное}, \\ -1, & x \text{ — иррациональное}. \end{cases}$

T7.9. *Указание*. Рассмотреть нижнюю сумму Дарбу для произвольного разбиения.

T7.10. *Указание*. Применить критерий Лебега и рассмотреть окрестность точки непрерывности функции.

T7.11. Нет. *Указание*. Рассмотреть функцию Дирихле из примера T7.1.

T7.12. *Указание*. Показать, что $f(x) = 0$ в каждой точке непрерывности, и воспользоваться критерием Лебега.

T7.13. *Указание*. Согласно примеру 2.22, $K \subset K_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, где K_n — объединение 2^n отрезков длины 3^{-n}.

T7.14. Например, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \notin K, \end{cases}$ где K — множество Кантора.

T7.15. а) 0; б) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$; в) $\exp\Big(\int\limits_a^b f(x)\,dx\Big)$. **T7.16.** $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$.

T7.18. *Указание*. Для оценки интеграла $\int\limits_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\,dx$ применить теорему Лагранжа.

T7.20. *Указание.* Из выпуклости $f(x)$ следует её непрерывность (см. пример T4.5), а следовательно, интегрируемость на отрезке $[a; b]$. Докажите, что

$$f(x) \leqslant \frac{f(a)(b-x)+f(b)(x-a)}{b-a} \quad \text{при } x \in [a; b].$$

Отсюда следует правое неравенство. Для доказательства левого неравенства сделать замену переменной $x = \dfrac{a+b}{2} + t$.

T7.21. *Указание.* Обозначим $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = A$. В силу теоремы о среднем существует такая точка $c \in [0; 1]$, что $f(c) = A$, а в силу неубывания f справедливы неравенства $A - f(x) \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant c$, $f(x) - A \geqslant 0$ при $c \leqslant x \leqslant 1$. По теореме о среднем получаем

$$\int\limits_0^c g(x)(A - f(x))\,dx = g(\xi_1)\int\limits_0^c (A - f(x))\,dx, \quad \xi_1 \in [0; c],$$

$$\int\limits_c^1 g(x)(f(x) - A)\,dx = g(\xi_2)\int\limits_c^1 (f(x) - A)\,dx, \quad \xi_2 \in [c; 1].$$

Так как $0 \leqslant \int\limits_0^c (A - f(x))\,dx = Ac - \int\limits_0^c f(x)\,dx = Ac - \Big(A - \int\limits_c^1 f(x)\,dx\Big) = \int\limits_c^1 (f(x) - A)\,dx$ и $g(\xi_1) \leqslant g(\xi_2)$, верно неравенство $\int\limits_0^c g(x)(A - f(x))\,dx \leqslant \int\limits_c^1 g(x)(f(x) - A)\,dx$, откуда следует, что $A\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx \cdot \int\limits_0^1 g(x)\,dx \leqslant \int\limits_0^1 g(x)f(x)\,dx$.

T7.23. *Указание.* Если $f \in C[a; b]$, то $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0+$ (см. задачу T7.22). Если f не является непрерывной, то воспользоваться результатом примера T7.7 на с. 306.

T7.24. Например, $f(x) = x - \dfrac{a+b}{2}$.

T7.29. *Указание.* Рассмотреть $\int\limits_a^b (f(x) - \lambda g(x))^2\,dx$ как квадратный трёхчлен от λ.

T7.30. Функции $f(x)$ и $g(x)$ линейно зависимы на $[a; b]$.

T7.31. *Указание.* Пусть k — такое целое число, что $kT < a \leqslant (k+1)T$. Сравнить верхние и нижние интегралы от f на парах отрезков $[0; T]$, $[kT; (k+1)T]$ и $[a; kT]$, $[a+T; (k+1)T]$. Другой способ — применить теорему о замене переменной.

T7.32. *Указание.* Пусть $\varphi(a) = \int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx - \int\limits_0^T f(x)\,dx$. Тогда по условию $\varphi(a) \equiv 0$ и, следовательно, $\varphi'(a) = f(a+T) - f(a) \equiv 0$.

T7.33. $\int\limits_0^T f(t)\,dt = 0$.

T7.34. *Указание.* $\int\limits_a^b f(nx)\,dx = \dfrac{1}{n}\int\limits_{an}^{bn} f(t)\,dt = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt + \dfrac{1}{n}\int\limits_{x_{k_n}}^{bn} f(t)\,dt$, где $x_k = an + kT$, $k_n = \Big[\dfrac{(b-a)n}{T}\Big]$.

T7.35. $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\sin x)\,dx$. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.

T7.41. *Указание.* В интеграле $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx$ сделать замены $t = \pi - x$, $t = \dfrac{\pi}{2} - x$.

Т7.42. $\frac{\pi}{4}$. **Т7.44.** $\frac{\pi^2}{4}$. *Указание*. Воспользоваться предыдущей задачей.

Т7.45. *Указание.* В интегралах $\int\limits_0^{l/2} f(\varphi(x))\,dx$ и $\int\limits_0^{l} xf(\varphi(x))\,dx$ сделать замену $l-x=t$.

Т7.46. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{3\pi}{4}$. *Указание.* Обратить внимание на то, что функция $\operatorname{arctg} f(x)$ на отрезке $[0;4]$ не является первообразной функции $g(x)$.

Т7.47. а) Верно; б) неверно, так как образ отрезка $[0;5\pi/6]$ при отображении $t=\sin x$ есть отрезок $[0;1]$, на котором f не интегрируема.

Т7.48. а) $-e^{-a^2}$; б) 0; в) e^{-b^2}; г) $2b\ln(1+b^4)$;
д) $-\sin a\ln(1+\cos^2 a)-\cos a\ln(1+\sin^2 a)$.

Т7.49. $f(b+x)-f(a+x)$. **Т7.50.** $x=1$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума.

Т7.51. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+2x}(1+x)}$. *Указание.* Применить функцию arcsin к обеим частям равенства, затем продифференцировать.

Т7.52. $f(x)=\cos x-\sin x$. **Т7.53.** $f(x)=\sqrt{\ln(x^2+e)}$. **Т7.54.** $F'(0)=1$.

Т7.55. *Указание.* Показать, что $F'_+(x_0)\neq F'_-(x_0)$.

Т7.56. Например, функция из примера Т7.3.

Т7.57. Например, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in K,\\ 0, & x\notin K,\end{cases}$ где K — множество Кантора.

Т7.58. *Указание.* Показать, что $F'(x)=f(x)$ в каждой точке непрерывности функции f, и воспользоваться критерием Лебега.

Т7.59. *Указание.* Поскольку $g(-x)=-g(x)$, имеем $\left|\int\limits_0^{-x} g(t)\,dt\right|=\left|\int\limits_0^{x} g(t)\,dt\right|$, т. е. при доказательстве можно считать, что $0<x\leqslant 1$. Так как $|g(t)|\leqslant 1$, получаем $\left|\int\limits_0^{x^2} g(t)\,dt\right|\leqslant x^2$ для любого $x\in[0;1]$. Далее,

$$\int\limits_{x^2}^{x}\sin\frac{1}{t}\,dt=\int\limits_{x^2}^{x}t^2d\Big(\cos\frac{1}{t}\Big)=t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_{x^2}^{x}-2\int\limits_{x^2}^{x}t\cos\frac{1}{t}\,dt.$$

Итак, $\left|\int\limits_{x^2}^{x}\sin\frac{1}{t}\,dt\right|\leqslant 2x^2+2\int\limits_0^x t\,dt=3x^2$; $\left|\int\limits_0^x g(t)\,dt\right|\leqslant 4x^2$.

Другой способ решения основан на переходе к несобственному интегралу и замене переменной $u=\frac{1}{t}$:

$$\int\limits_0^x\sin\frac{1}{t}\,dt=\int\limits_{1/x}^{+\infty}\frac{\sin u}{u^2}\,du=-\frac{\cos u}{u^2}\Big|_{1/x}^{+\infty}-2\int\limits_{1/x}^{+\infty}\frac{\cos u}{u^3}\,du=x^2\cos\frac{1}{x}+\alpha(x),$$

где $|\alpha(x)|\leqslant 2\int\limits_{1/x}^{+\infty}\frac{du}{u^3}=-\frac{1}{u^2}\Big|_{1/x}^{+\infty}=x^2$.

Т7.60. Например, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ (см. задачу Т7.59).

Т7.67. Например, $f(x)=\sin x$.

Т7.68. а) 2; б) 1; в) 1; г) e; д) $\frac{1}{2}$; е) e. *Указание*. Применить правило Лопиталя.

Т7.69. *Указание.* Показать, что $f(x)=f(a)+\int\limits_a^x f'(t)\,dt$ при всех $x\in[a;b]$.

Т7.70. Например, лестница Кантора из примера Т7.10.

Т7.75. *Указание.* Применить теорему Лагранжа к функции $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$.

Т7.76. *Указание.* Рассмотреть функцию $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt-\int\limits_x^b f(t)\,dt$.

Т7.77. *Указание.* Рассмотреть функцию $F(x)=e^{-x}\int\limits_a^x f(t)\,dt$.

Т7.78. *Указание.* Рассмотреть функцию $F(x)=\dfrac{1}{x}\int\limits_a^x f(t)\,dt$.

Т7.79. Функция $g(x)=\sin x$ не сохраняет знак на отрезке $[-\pi/2;\,\pi/2]$.
Т7.80. Функция $g(x)$ разрывна на отрезке $[-3;\,1]$.

Т7.81. *Указание.* Рассмотреть $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)g(x)\,dx$.

Т7.82. а) *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.
б) *Указание.* Сделать замену переменной $x^2=y$ и полученный интеграл преобразовать к интегралу по промежутку $[0;\,\pi]$.

Т7.83. *Указание.* Положить $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$, проинтегрировать $\int\limits_a^b g(x)\,dF(x)$ по частям и применить теорему о среднем.
Т7.84. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.
Т7.87. *Указание.* Воспользоваться неравенством $(f'(x))^2\geqslant 2f'(x)-1$.

Т7.88. *Указание.* Получить неравенство $\dfrac{1}{1-\alpha}\int\limits_\alpha^1 f(x)\,dx\leqslant f(\alpha)\leqslant\dfrac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha f(x)\,dx$.

Т7.89. *Указание.* Проинтегрировать от a до t неравенство $u(t)\leqslant C+\int\limits_a^t u(x)v(x)\,dx$.
Т7.90. Нет. *Указание.* Например, рассмотреть функцию

$$F(x)=\begin{cases}(x-a)^2\sin\dfrac{1}{(x-a)^2} & \text{при } a<x\leqslant b,\\ 0 & \text{при } x=a.\end{cases}$$

Т7.91. Нет. *Указание.* См. пример Т7.12.
Т7.92. Нет. *Указание.* Например, рассмотреть $f(x)\equiv 0$ на $[0;\,1]$, $F(x)$ — лестница Кантора (см. пример Т7.10).
Т7.93. Например, $F(x)\equiv 1$, $G(x)=f(x)+Cx$, где $f(x)$ — функция из примера Т7.12, $C=\sup\limits_{[0;1]}|f'|+1$.

Т7.94. Например, $F(x)\equiv 1$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{C}(f(x)+Cx)$, где $f(x)$ — функция из примера Т7.12, $C=\sup\limits_{[0;1]}|f'|+1$.

Т7.96. а) $\dfrac{\pi}{2}$; б) $2\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$. **Т7.98.** а) $\pi<\dfrac{22}{7}$; б) $\dfrac{22}{7}-\dfrac{1}{630}<\pi<\dfrac{22}{7}-\dfrac{1}{1260}$.

Глава 8

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

§ 8.1. Предел и непрерывность

В курсе алгебры вводится понятие *векторного* (*линейного*) пространства, элементы которого — векторы — можно складывать и умножать на числа. Одним из важнейших примеров векторного пространства является множество $\mathbb{R}^m$ упорядоченных наборов чисел: $\mathbb{R}^m = \{(v_1, \ldots, v_m) : v_i \in \mathbb{R}\}$. Элементы линейного пространства $\mathbb{R}^m$ будем обозначать через $\vec{v}$.

Определение. *Нормой* на векторном пространстве $\mathbb{R}^m$ называется неотрицательная функция $\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^m \to [0; +\infty)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = 0$;
2) $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$;
3) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (*неравенство треугольника*).

Наиболее употребительной в $\mathbb{R}^m$ является *евклидова* норма:

$$\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} v_i^2},$$

где $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_m)$. Также используют нормы $\|\vec{v}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |v_i|$ и $\|\vec{v}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} |v_i|$.

Определение. Две нормы $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ эквивалентны, если существуют такие положительные числа C_1 и C_2, что при всех $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ выполнено неравенство $C_1\|\vec{v}\|_\alpha \leqslant \|\vec{v}\|_\beta \leqslant C_2\|\vec{v}\|_\alpha$.

Поскольку $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |v_i| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} v_i^2} \leqslant \sqrt{m} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |v_i|$, евклидова норма эквивалентна норме $\|\cdot\|_\infty$. Можно показать, что любая норма в $\mathbb{R}^m$ эквивалентна евклидовой норме. Таким образом, если последовательность $\{\vec{v}_n\}$ стремится к нулю по какой-либо норме, т. е. $\|\vec{v}_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, то это же свойство будет выполнено и для любой другой нормы в $\mathbb{R}^m$. Поэтому при изучении предельных переходов, а также вопросов непрерывности и дифференцируемости функций нескольких переменных не имеет значения тип используемой нормы. В дальнейшем тип нормы, как правило, опускается, и под $\|\vec{v}\|$ для определённости понимается евклидова норма в $\mathbb{R}^m$; если нужно уточнить, в каком пространстве рассматривается норма, используется обозначение $\|\vec{v}\|_{\mathbb{R}^m}$.

Несмотря на то что под $\mathbb{R}^m$ обычно понимают линейное пространство, в дальнейшем обозначение $\mathbb{R}^m$ чаще будет использоваться для аффинного пространства, состоящего не из векторов, а из точек. Это вполне допустимо, так как между векторным и аффинным пространством $\mathbb{R}^m$ существует взаимно однозначное соответствие: любой точке $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ можно сопоставить радиус-вектор с теми же координатами, соединяющий начало координат и точку x. Чтобы отличать векторы от точек, над обозначением точек $x \in \mathbb{R}^m$ стрелка не ставится.

Если к точке $x = (x_1, \dots, x_m)$ прибавить вектор $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$, то получится точка $y = x + \vec{v}$ с координатами $(x_1 + v_1, \dots, x_m + v_m)$. Если $x, y \in \mathbb{R}^m$ — точки с координатами $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, то их разность $y - x$ является вектором с координатами $(y_1 - x_1, \dots, y_m - x_m)$. Евклидова норма этого вектора $\|y - x\|$ называется расстоянием между точками x и y.

Для точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$ и любого $\delta > 0$ множество $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| < \delta\}$ называется *δ-окрестностью точки* x_0. *Проколотой δ-окрестностью* точки $x \in \mathbb{R}^m$ называется множество $\mathring{U}(x) = U(x) \setminus \{x\}$ $(\mathring{U}_\delta(x) = U_\delta(x) \setminus \{x\})$. Таким образом, $\mathring{U}_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : 0 < \|x - x_0\| < \delta\}$.

Определения внутренней, граничной, внешней, предельной и изолированной точек множества дословно совпадают с соответствующими определениями в $\mathbb{R}^1$ (на прямой). Также дословно совпадают определения открытых и замкнутых множеств. Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ называется *связным*, если в $\mathbb{R}^m$ не существует такой пары открытых непересекающихся множеств G_1 и G_2, что $E \cap G_1 \neq \varnothing$, $E \cap G_2 \neq \varnothing$, $E \subset G_1 \cup G_2$. Множество в $\mathbb{R}^m$ называется *областью*, если оно открыто и связно.

Отображение $f : E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, записывается в координатной форме $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, где $f_i : E \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, 2, \dots, n$. В дальнейшем пространство $\mathbb{R}^1$ будем обозначать просто $\mathbb{R}$. Отображение $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$, назовём функцией (действительнозначной функцией) точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ или функцией m переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Исследование многих свойств отображения $f : E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, сводится к исследованию свойств его координатных функций $f_1, f_2, \dots, f_n$, $f_i : E \to \mathbb{R}^1$. Поэтому в настоящей главе более подробно анализируются функции $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$.

Определение. Пусть $f : E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, и x_0 — предельная точка E. Точка $A \in \mathbb{R}^n$ называется *пределом* отображения $f(x)$ при $x \to x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x \in E$, удовлетворяющего условию $0 < \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^m} < \delta$, выполняется неравенство $\|f(x) - A\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$. Запишем это определение с использованием кванторов:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap E \quad \text{имеем} \quad \|f(x) - A\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon.$$

Если $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, то в терминах покоординатной сходимости утверждение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E,$$
$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - x_i^0| < \delta, \ \text{имеем} \ \|f(x) - A\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon.$$

Отображение $f : E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, в координатной записи $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_i : E \to \mathbb{R}$, имеет точку $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ пределом при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = a_i$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Критерий Коши. *Пусть $f: E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, и x_0 — предельная точка множества E. Предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in E$ из неравенств $0 < \|x_0 - x_1\|_{\mathbb{R}^m} < \delta$, $0 < \|x_0 - x_2\|_{\mathbb{R}^m} < \delta$ следует неравенство*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon.$$

С использованием кванторов это записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap E \text{ имеем } \|f(x_1) - f(x_2)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon.$$

Определение. Пусть $f: E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, и U — непустое подмножество в $\mathbb{R}^m$. Тогда $\sup\limits_{x_1, x_2 \in U \cap E} \|f(x_1) - f(x_2)\|$ называется *колебанием отображения f* на множестве U и обозначается $\omega_U(f)$.

Критерий Коши существования предела с использованием понятия колебания отображения формулируется так: пусть $f: E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, и x_0 — предельная точка множества E. Предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая проколотая окрестность $\mathring{U} = \mathring{U}(x_0)$ точки x_0, что $\omega_{\mathring{U}}(f) < \varepsilon$.

Вычисление предела функции нескольких переменных часто сводится к вычислению предела функции одной переменной с помощью оценок или заменой переменных.

Пример 8.1. Найдём предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение. Условие $(x, y) \to (0, 0)$ эквивалентно условию $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$. Так как $|\sin xy| \leqslant |xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, имеем $0 \leqslant \left|\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, и, следовательно, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. □

Пример 8.2. Найдём предел $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y)$, где $f(x, y) = \dfrac{\ln^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}}$.

Решение. Поскольку $z = x + y \to 1$, получаем $\ln z \sim z - 1 = x + y - 1$. Введём новые переменные r и t: $x = 1 + r\cos t$, $y = r\sin t$, тогда условие $(x, y) \to (1, 0)$ эквивалентно условию $r \to 0$ и

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x+y-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos t + \sin t)^2}{r} = 0. \quad \square$$

Предел функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ при условии $x_k \to \infty$ ($x_k \to +\infty$; $x_k \to -\infty$) и $x_i \to x_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $i \neq k$, рассматривается как предел функции

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, \frac{1}{t}, x_{k+1}, \ldots, x_m\right)$$

при $t \to 0$ ($t \to 0+$, $t \to 0-$) и $x_i \to x_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $i \neq k$. Если бесконечно большой является не одна координата x, а несколько, то аналогично все эти координаты заменяются переменными $\frac{1}{t_1}$, $\frac{1}{t_2}$ и т. д.

Пример 8.3. Найдём предел $\lim\limits_{x\to\infty,\ y\to 3}\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

Решение. Обозначим $x=1/t$, тогда условие $x\to\infty$, $y\to 3$ эквивалентно условию $t\to 0$, $y\to 3$, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty,\ y\to 3}\frac{x^2}{x+y}\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)=\lim_{t\to 0,\ y\to 3}\frac{\ln(1+t)}{t(1+ty)}=\lim_{t\to 0,\ y\to 3}\frac{1}{1+ty}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty,\ y\to 3}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{\frac{x^2}{x+y}}=\exp\Big\{\lim_{x\to\infty,\ y\to 3}\frac{x^2}{x+y}\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big\}=e. \qquad \square$$

Определение. Пусть x_0 — предельная точка E и $x_0\in E$. Отображение $f\colon E\to\mathbb{R}^n$, $E\subset\mathbb{R}^m$, *непрерывно в точке* x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0,\, x\in E} f(x)=f(x_0)$. Отображение $f\colon E\to\mathbb{R}^n$, $E\subset\mathbb{R}^m$, называется *непрерывным на множестве* $D\subset E$, если это отображение непрерывно в каждой точке множества D.

Класс непрерывных на множестве D отображений обозначается $C(D)$.

Отображение $f\colon E\to\mathbb{R}^n$, $E\subset\mathbb{R}^m$, где $f=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, в координатной записи $f_i\colon E\to\mathbb{R}$, непрерывно в точке $x_0\in E$ тогда и только тогда, когда каждая из функций $f_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, непрерывна в этой точке.

Непрерывность функции нескольких переменных f в точке x обычно устанавливается по теореме о композиции непрерывных функций. Если же в данной точке функция f не задана как композиция непрерывных функций, то вопрос требует отдельного исследования. Приведём примеры.

Пример 8.4. Непрерывность функции

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

в любой точке $M(x,y)$, кроме точки $M_0(0,0)$, следует из непрерывности многочлена, синуса, квадратного корня и условия $x^2+y^2\neq 0$; непрерывность f в точке M_0 следует из равенства $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ (см. пример 8.1). $\square$

Пример 8.5. Непрерывность функции

$$f(x,y,z)=\begin{cases}ax^2+\dfrac{xyz}{y^2+z^2}, & y^2+z^2\neq 0,\\ ax^2, & y^2+z^2=0,\end{cases}$$

в любой точке (x_0, y_0, z_0), где $y_0^2+z_0^2\neq 0$, устанавливается так же, как и в предыдущем примере. Рассмотрим, как ведут себя значения $f(M)$, если точка M приближается к точке $M_1(x_0, 0, 0)$, $x_0\neq 0$, по прямым $x=x_0$, $y=0$ и $x=x_0$, $y=z$. Для $M(x_0, 0, z)$ имеем $f(M)=ax_0^2$ и $\lim\limits_{M\to M_1} f(M)=ax_0^2=f(M_1)$; для $M(x_0, y, y)$, $y\neq 0$, имеем $f(M)=ax_0^2+\dfrac{x_0}{2}$ и $\lim\limits_{M\to M_1} f(M)=ax_0^2+\dfrac{x_0}{2}\neq f(M_1)$, поскольку $x_0\neq 0$. Итак, f разрывна в точке M_1, более того, поскольку в любой окрестности M_1

функция f принимает как значение ax_0^2, так и значение $ax_0^2+\dfrac{x_0}{2}$, колебание f в этой окрестности не менее $\left|\dfrac{x_0}{2}\right|$. Следовательно, в силу критерия Коши, функция f не имеет предела при $M\to M_1$.

Исследуем непрерывность f в точке $M_0(0,0,0)$. Поскольку $|yz|\leqslant\dfrac{1}{2}(y^2+z^2)$, получаем $|f(x,y,z)|\leqslant|a|x^2+\dfrac{1}{2}|x|$ при $y^2+z^2\neq0$ и $|f(x,y,z)|=|a|x^2$ при $y^2+z^2=0$. Если $M(x,y,z)\to M_0(0,0,0)$, то $x\to0$, следовательно, $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=$ $=0=f(M_0)$, т. е. f непрерывна в точке $M_0(0,0,0)$.

Итак, множество M точек разрыва функции f является осью Ox с выколотым началом координат. □

Обратите внимание: для доказательства разрывности функции f в точке M_1 достаточно было найти такие две линии, проходящие через точку M_1, что f имеет разные пределы, когда точка M стремится к точке M_1, оставаясь на одной из этих линий. Если же проверяется непрерывность функции нескольких переменных в точке M_0, то необходимо рассматривать поведение этой функции не на отдельных линиях, проходящих через точку M_0, а во всех точках некоторой полной окрестности точки M_0, причём необходимо, чтобы было выполнено равенство $\lim\limits_{x\to M_0}f(x)=f(M_0)$.

Задачи на вычисление предела функции нескольких переменных, которые сводятся к нахождению повторных пределов, решаются методами, рассмотренными в гл. 4. Наибольший интерес представляют неалгоритмические задачи, связанные с понятиями предела и непрерывности функций нескольких переменных, поэтому рекомендуем начинать изучение данной темы с теоретических задач (§ 8.9, задачи Т8.1—Т8.48).

§ 8.2. Дифференциал и частные производные

Пусть $E\subset\mathbb{R}^m$ и x — внутренняя точка множества E. Рассмотрим линейное пространство векторов $\vec{h}$ размерности m, имеющих начало («приложенных») в точке x. Такие векторы назовём векторами смещения. Каноническим базисом в этом пространстве будет базис из «приложенных» в точке x ненулевых векторов, коллинеарных базисным векторам исходного пространства $\mathbb{R}^m$. Координаты вектора $\vec{h}$ в этом базисе обозначим $h_1, h_2, \ldots, h_m$.

Определение. Отображение $f\colon E\to\mathbb{R}^n$, $E\subset\mathbb{R}^m$, *дифференцируемо* в точке $x\in E$, внутренней для E, если $f(x+\vec{h})-f(x)=L(x)\vec{h}+\alpha(x;\vec{h})$, где $\vec{h}$ — вектор смещения, $L(x)\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ — линейное отображение и $\|\alpha(x;\vec{h})\|_{\mathbb{R}^n}=o(\|\vec{h}\|_{\mathbb{R}^m})$ при $\|\vec{h}\|_{\mathbb{R}^m}\to0$.

Линейное отображение $L(x)$ называется *производным отображением* или *дифференциалом* отображения f в точке x и обозначается $f'(x)$ или $df(x)$. Часто под дифференциалом понимают значение линейного отображения $L(x)$ на векторе смещения $\vec{h}$ и обозначают его $df(x;\vec{h})$ или $df(x)\vec{h}$. Таким образом, дифференциал представляет собой главную линейную часть приращения дифференцируемой функции.

Пример 8.6. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}^2_{u,v}$, заданное формулами $u = x^2 + y^2$, $v = xy$. Покажем, что оно дифференцируемо в точке $M_0(1, 1)$.

Решение. Вектор смещения обозначим $\vec{h} = (h_1, h_2)$. Имеем

$$f(M_0 + \vec{h}) = f(1 + h_1, 1 + h_2) = \big((1 + h_1)^2 + (1 + h_2)^2, (1 + h_1)(1 + h_2)\big) =$$
$$= \big(2 + 2h_1 + 2h_2 + h_1^2 + h_2^2, 1 + h_1 + h_2 + h_1 \cdot h_2\big).$$

Разность $f(M_0 + \vec{h}) - f(M_0)$ представим в виде

$$(2 + 2h_1 + 2h_2 + h_1^2 + h_2^2, 1 + h_1 + h_2 + h_1 \cdot h_2\big) - (2, 1) =$$
$$= (2h_1 + 2h_2, h_1 + h_2) + (h_1^2 + h_2^2, h_1 \cdot h_2).$$

Отображение $L(1, 1)(h_1, h_2) = (2h_1 + 2h_2, h_1 + h_2)$ линейное. Действительно, всякое линейное отображение в определённом базисе характеризуется некоторой матрицей. Нашему отображению $L(1, 1)$ в каноническом базисе отвечает матрица $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, при этом $L(1, 1)\vec{h} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{h}$.

Норма вектора $\alpha(M_0, \vec{h}) = (h_1^2 + h_2^2, h_1 \cdot h_2)$ есть $o(\|\vec{h}\|)$ при $\|\vec{h}\| \to 0$, поскольку $\|\alpha(M_0, \vec{h})\| = \sqrt{(h_1^2 + h_2^2)^2 + (h_1 \cdot h_2)^2}$, $|h_1 h_2| \leqslant \dfrac{h_1^2 + h_2^2}{2}$ и

$$\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)^2 + (h_1 \cdot h_2)^2} \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}(h_1^2 + h_2^2) = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}(h_1^2 + h_2^2)} =$$
$$= o\Big(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\Big) = o(\|\vec{h}\|) \text{ при } \|\vec{h}\| \to 0, \quad \text{т. е. } \|\alpha(M_0; \vec{h})\| = o(\|\vec{h}\|) \text{ при } \|\vec{h}\| \to 0.$$

Следовательно, $L(1, 1)\vec{h}$ есть дифференциал отображения f. □

Отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируемое в точке x, непрерывно в этой точке.

Основные правила дифференцирования

1 (*Линейность*). Если отображения $f_1\colon E \to \mathbb{R}^n$, $f_2\colon E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в точке $x \in E$, то их линейная комбинация также дифференцируема в точке x и

$$d(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha df_1(x) + \beta df_2(x).$$

2 (*Дифференцирование композиции отображений*). Если отображение $f\colon X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируемо в точке $x \in X$, а отображение $g\colon Y \to \mathbb{R}^q$ дифференцируемо в точке $y = f(x) \in Y$, то композиция $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^q$ дифференцируема в точке x и $d(g \circ f)(x) = dg(y) \circ df(x)$.

Отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, где $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ в координатной записи, $f_i\colon E \to \mathbb{R}$, дифференцируемо в точке $x \in E$ тогда и только тогда, когда каждая функция $f_i\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \ldots, n$, дифференцируема в точке x.

Для функции одной переменной $f\colon (a; b) \to \mathbb{R}$ её производным отображением в точке $x \in (a; b)$ является линейное отображение одномерного вектора h в $\mathbb{R}$, т. е. умножение этого вектора на такое число A, что

$$f(x + h) - f(x) = Ah + o(h).$$

Сравнивая это определение с данным в гл. 5 определением производной функции одной переменной, видим, что коэффициент A есть $f'(x)$ в прежнем смысле: $A = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Другими словами, в прежнем определении не само линейное отображение одномерного вектора h называлось производной, а коэффициент этого линейного отображения, т. е. его числовая характеристика. Поскольку линейное отображение прямой в себя взаимно однозначно определяется своим коэффициентом, для функции одной переменной производную можно считать как числом, так и линейным преобразованием векторов смещения, характеризующимся этим числом. Значение дифференциала $df(x)h = Ah$ функции f одной переменной на векторе h полностью совпадает с данным в этой главе определением при $m=n=1$.

Для аналогичной числовой характеристики функции $f\colon E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 2$, вводится понятие частной производной f по одной из переменных.

Определение. Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 2$, и $x\in E$ — внутренняя точка E. *Частной производной функции f в точке* $x=(x_1, \ldots, x_m)$ по переменной x_i называется предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i+t, x_{i+1}, \ldots, x_m)-f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)}{t},$$

если он существует. В этом случае говорят, что f имеет частную производную по x_i в точке x, и эту производную обозначают $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, или $f'_{x_i}(x)$, или $f'_i(x)$.

Частная производная $f'_{x_i}(x_0)$, $x_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_m^0)$, вычисляется методами дифференцирования функции одной переменной, при этом считаем все координаты точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (все аргументы функции) фиксированными, кроме той, по которой берётся производная, т. е. $x_j=x_j^0$ $(j\neq i)$. Если обозначить $f_i^*(x_i)=f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0)$, то $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=(f_i^*)'(x_i^0)$.

Пример 8.7. Найдём частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ функции $u(x, y, z) = \operatorname{arctg}\dfrac{xz+y}{1-xy}$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Решение. Дифференцируя функцию $u_1^*(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{xz_0+y_0}{1-xy_0}$ по x, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = (u_1^*)'(x_0) = \frac{z_0+y_0^2}{1-2x_0y_0+x_0^2y_0^2+2x_0y_0z_0+y_0^2+x_0^2z_0^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = \frac{1+x_0^2z_0}{1-2x_0y_0+x_0^2y_0^2+2x_0y_0z_0+y_0^2+x_0^2z_0^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = \frac{x_0-x_0^2y_0}{1-2x_0y_0+x_0^2y_0^2+2x_0y_0z_0+y_0^2+x_0^2z_0^2}. \qquad \square$$

Пример 8.8. Найдём частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ функции

$$u = x^y + y^z + z^x \quad (x>0,\ y>0,\ z>0).$$

Решение. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}+z^x\ln z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^y\ln x + zy^{z-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = y^z\ln y + xz^{x-1}$. $\square$

Как уже отмечалось, в случае функции одной переменной использовать формулы производных элементарных функций и правила дифференцирования можно только в тех точках, для которых значения функции в самой точке и в некоторой её окрестности заданы одним и тем же аналитическим выражением. В противном случае приходится находить производную другим путём, например её непосредственным вычислением через предел. Вычисление частных производных функции нескольких переменных в такой особой точке $x_0=(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ иногда упрощается, если для функции одной переменной $f_i^*(x_i)=f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0)$ точка x_i^0 оказывается неособой.

Пример 8.9. Найдём $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ в точке $M_0(1, 0, 0)$ для функции

$$u(x, y, z) = \begin{cases} ax^2+\dfrac{xyz}{y^2+z^2}, & y^2+z^2\neq 0; \\ ax^2, & y^2+z^2=0. \end{cases}$$

Решение. Поскольку $u_1^*(x)=u(x, 0, 0)=ax^2$, то $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)=(u_1^*)'(1)=2a$. Поскольку $u_2^*(y)=u(1, y, 0)=a$ при любом y, получаем $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)=(u_2^*)'(0)=0$ и аналогично $\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)=(u_3^*)'(0)=0$, так как $u_3^*(z)\equiv a$. □

Итак, рассмотренная функция u имеет в точке M_0 все три частные производные, но, как было показано в примере 8.5, разрывна в этой точке.

Внимание! Для функции $f: E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 2$, существование частных производных в точке x не гарантирует непрерывности и тем более дифференцируемости в этой точке.

Если функция $f: E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 2$, дифференцируема в точке $x\in E$, то f имеет в этой точке частные производные по всем переменным и эти производные являются коэффициентами линейной формы $df(x)$, т. е.

$$df(x)\vec{h} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(x)h_m, \quad \text{где } \vec{h}=(h_1, h_2, \ldots, h_m).$$

Рассмотрим проекцию точки x на соответствующую координатную ось — функцию $\pi_i=x_i$, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in\mathbb{R}^m$, $i=1, 2, \ldots, m$. Её приращение $\Delta\pi_i = \pi_i(x+\vec{h})-\pi_i=h_i$ есть линейное отображение L вектора $\vec{h}=(h_1, \ldots, h_m)$: $L\vec{h}=h_i$, следовательно, $dx_i=d\pi_i=\Delta\pi_i=h_i$. Поэтому первый дифференциал функции f в точке x может быть записан в форме

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(x)dx_m = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)dx_k.$$

Именно эта форма записи первого дифференциала функции наиболее употребительна. Удобство её в том, что в силу теоремы о дифференцировании композиции эта форма сохраняется и тогда, когда $x_1, x_2, \ldots, x_m$ являются дифференцируемыми функциями некоторых других независимых аргументов. В этом случае символ dx_i уже есть не приращение Δx_i, а дифференциал функции x_i. Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала*.

Как уже было показано в примере 8.9, существования в точке x_0 частных производных функции $f: E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 2$, недостаточно для дифференцируемости f в точке x_0 (но это необходимое условие). Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке x_0 обычно устанавливается с помощью следующего *достаточного условия*: если G — область в $\mathbb{R}^m$, функция $f: G \to \mathbb{R}$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $x_0 \in G$ и эти производные непрерывны в точке x_0, то f дифференцируема в точке x_0.

Класс функций, имеющих непрерывные частные производные в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^m$, обозначается $C^1(G)$. Все функции $f: G \to \mathbb{R}$ класса $C^1(G)$ непрерывны и дифференцируемы в каждой точке области G, но существуют непрерывные и даже дифференцируемые в каждой точке $x \in G$ функции, не входящие в класс $C^1(G)$ (из-за разрывности частных производных).

Пример 8.10 (функция, дифференцируемая всюду в области G, но не принадлежащая классу $C^1(G)$)**.** Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$, $G = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$ и

$$z(x, y) = \begin{cases} y^{4/3} \ln(y^2 + x^{4/3}), & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

В каждой точке $M(x, y)$, кроме начала координат, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^{4/3} \frac{4x^{1/3}}{3(y^2 + x^{4/3})}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4}{3} y^{1/3} \ln(y^2 + x^{4/3}) + \frac{2y^{7/3}}{y^2 + x^{4/3}}.$$

Отсюда следует, что в этих точках частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны и, следовательно, функция z дифференцируема в этих точках.

В точке $M_0(0, 0)$ имеем $\Delta z(0, 0) = z(x, y) - z(0, 0) = y^{4/3} \ln(y^2 + x^{4/3})$. Для $|x| < 1/2$, $|y| < 1/2$ имеем $y^2 + x^{4/3} < 1$ и $|\ln(y^2 + x^{4/3})| \leqslant |\ln y^2| = 2|\ln|y||$. Отсюда следует, что $|\Delta z(0, 0)| \leqslant |y| \cdot |y|^{1/3} \cdot 2|\ln|y|| = o(|y|) = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $x^2 + y^2 \to 0$. Следовательно, если $L(0, 0)$ — линейное отображение, переводящее вектор $\vec{h} = (x, y)$ в нуль, то $\Delta z(0, 0) = L(0, 0)\vec{h} + o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $x^2 + y^2 \to 0$, т. е. функция $z(x, y)$ дифференцируема в начале координат и $dz(0, 0) = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy$. Отсюда следует, что $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = 0$. Покажем теперь, что $\frac{\partial z}{\partial x}$ разрывна в начале координат. Действительно, если $y = x^{2/3} \neq 0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = x^{8/9} \frac{4x^{1/3}}{3(x^{4/3} + x^{4/3})} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{1/9}},$$

и если точка $M(x, y)$ приближается к точке $M_0(0, 0)$, оставаясь на кривой $y = x^{2/3}$, то $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{\partial z}{\partial x}(M) = \infty$, т. е. $\frac{\partial z}{\partial x}$ разрывна в начале координат и даже не ограничена в любой окрестности начала координат. Итак, функция $z(x, y)$ дифференцируема всюду в области G, но не принадлежит классу $C^1(G)$. □

Если в формулировке задачи, связанной с дифференцированием функции $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$, специально не оговорено, что функция рассматривается в особой точке, где непрерывность самой функции или её частных производных не следует непосредственно из непрерывности композиции простейших элементарных функций, то далее предполагаем, что речь идёт об исследовании функции f в точках такой области $G \subset \mathbb{R}^m$, что $f \in C^1(G)$. То, что такая область существует, можно усмотреть из самого задания функции f. Таким образом, дифференцируемость функции будет предполагаться заранее.

Пример 8.11. Найдём первый дифференциал функции
$$f = \ln(4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2).$$

Решение. Функция определена в области
$$G = \big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - 2xz - 2yz + 2z^2 < 4\big\}.$$
Эта область представляет собой наклонный цилиндр, горизонтальным сечением которого на высоте $z = c$ является открытый круг $(x-c)^2 + (y-c)^2 < 4$. Функция f принадлежит $C^1(G)$, так как непрерывны частные производные
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2z - 2x}{4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2z - 2y}{4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2x + 2y - 4z}{4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2}.$$
Итак, в каждой точке $M(x, y, z) \in G$ функция f дифференцируема и
$$df = \frac{2(z-x)\,dx + 2(z-y)\,dy + 2(x+y-2z)\,dz}{4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2}. \qquad \square$$

Пусть G — область в $\mathbb{R}^m$, $f : G \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемое отображение, тогда линейное отображение df в каноническом виде имеет матрицу
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$
Её называют *матрицей Якоби* отображения f и обозначают J_f или $\dfrac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_m)}$.

Пример 8.12. Напишем матрицу Якоби отображения
$$f : (u, v) \to (x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$x_1 = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}, \quad x_2 = \ln(u^2 + v^2), \quad x_3 = uv^2, \quad x_4 = u^2 v,$$
в области $G = \{(u, v) : u \in \mathbb{R}, v > 0\}$.

Решение. Находя производные функций x_1, x_2, x_3, x_4 по u и v, получаем
$$J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{v}{u^2+v^2} & -\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ \dfrac{2u}{u^2+v^2} & \dfrac{2v}{u^2+v^2} \\ v^2 & 2uv \\ 2uv & u^2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Матрица Якоби отображения $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^m$, является квадратной. Её определитель называется *якобианом отображения* f и обозначается $|J_f|$.

Пример 8.13. Найдём якобиан отображения $f : (u, v, w) \to (x, y, z)$, $x = uv\cos w$, $y = uv\sin w$, $z = u + v + w$.

Решение. Находя производные функций x, y, z по u, v и w, получаем
$$|J_f| = \begin{vmatrix} v\cos w & u\cos w & -uv\sin w \\ v\sin w & u\sin w & uv\cos w \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = uv(u - v). \qquad \square$$

Теорема (об обратном отображении). *Если область $G\subset\mathbb{R}^m$ и отображение $f\colon G\to\mathbb{R}^m$ удовлетворяют условиям*:

1) $f\in C^1(G)$; 2) $f(x_0)=y_0$, $x_0\in G$; 3) *матрица $J_f(x_0)$ обратима,* *то существуют такая окрестность $U(x_0)\subset G$ точки x_0 и такая окрестность $V(y_0)\subset f(G)$ точки y_0, что отображение $f\colon U(x_0)\to V(y_0)$ биективно (взаимно однозначно), $f^{-1}\in C^1(V(y_0))$; для любого $x\in U(x_0)$ и $y=f(x)$ выполняется равенство $J_{f^{-1}}(y)=J_f^{-1}(x)$.*

Замечание. Условие 3 теоремы эквивалентно условию, что якобиан отображения f в точке x_0 отличен от нуля.

Пример 8.14. Найдём якобиан отображения $f\colon (u,v)\to(x,y)$, $xu=x^2+y^2$, $xv=y$ $(x\neq 0,\ y\neq 0)$.

Решение. Поскольку здесь легче записать обратное отображение

$$(x,y)\to(u,v)\colon u=\frac{x^2+y^2}{x},\ v=\frac{y}{x},$$

вычислим сначала его якобиан

$$|J_{f^{-1}}|=\begin{vmatrix}1-\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x}\\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{1}{x}\Big(1+\frac{y^2}{x^2}\Big).$$

Поскольку $\dfrac{y}{x}=v$ и $x=\dfrac{u}{1+v^2}$, используя соотношения между определителями взаимно обратных матриц, получаем

$$|J_f|=\frac{1}{|J_{f^{-1}}|}=\frac{x}{1+\big(\frac{y}{x}\big)^2}=\frac{u}{(1+v^2)^2}. \qquad \square$$

Если отображение $y\colon X\to Y$, $X\subset\mathbb{R}^m$, $Y\subset\mathbb{R}^m$, удовлетворяет условиям теоремы об обратном отображении, то, разумеется, можно найти и матрицу Якоби обратного отображения $x\colon Y\to X$, а именно, $J_x=J_y^{-1}$, и тем самым найти частные производные $\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,m$. Но этот путь часто сложен. Другой метод нахождения частных производных обратного отображения будет рассмотрен ниже.

Аналогично понятию частной производной функции $f\colon E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^m$, вводится *понятие частной производной отображения $f\colon E\to\mathbb{R}^n$, $E\subset\mathbb{R}^m$, по подпространству*. Пусть $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$, $1\leqslant q<m$,

$$u=(u_1,u_2,\ldots,u_q)\in\mathbb{R}^q_u\equiv U,\qquad \text{где } u_i=x_i,\qquad 1\leqslant i\leqslant q,$$
$$v=(v_1,v_2,\ldots,v_{m-q})\in\mathbb{R}^{m-q}_v\equiv V,\quad \text{где } v_j=x_{q+j},\quad 1\leqslant j\leqslant m-q.$$

Возьмём $x_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0)\in E$ и обозначим:

$$f^*(u)=f^*(u_1,u_2,\ldots,u_q)=f(x_1,x_2,\ldots,x_q,x_{q+1}^0,\ldots,x_m^0),$$
$$f^{**}(v)=f^{**}(v_1,v_2,\ldots,v_{m-q})=f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_q^0,x_{q+1},\ldots,x_m).$$

Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial U}(x_0)=J_{f^*}(u_0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial V}(x_0)=J_{f^{**}}(v_0)$. Аналогично определяются частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial U}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial V}$, если координаты точки $x=(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ распределяются в координаты точек $u\in\mathbb{R}^q$ и $v\in\mathbb{R}^{m-q}$ более сложным способом, а также если пространство $\mathbb{R}^m$ представляется в виде декартова произведения не двух, а большего числа подпространств.

Пример 8.15. Напишем матрицы отображений $\dfrac{\partial f}{\partial X}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial Y}$ в каноническом базисе, если $f\colon X\times Y\to(u,v)$, $X=\mathbb{R}^3_{x_1,x_2,x_3}$, $Y=\mathbb{R}^2_{y_1,y_2}$ и

$$u=x_1y_1+x_2y_2-x_3(y_1+y_2),\quad v=x_1x_2x_3+x_2x_3y_1+x_3y_1y_2+y_1y_2x_1.$$

Решение. Находя соответствующие частные производные, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial X}=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & -y_1-y_2\\ x_2x_3+y_1y_2 & x_1x_3+y_1x_3 & x_1x_2+x_2y_1+y_1y_2\end{pmatrix},$$
$$\frac{\partial f}{\partial Y}=\begin{pmatrix} x_1-x_3 & x_2-x_3\\ x_2x_3+x_3y_2+y_2x_1 & x_3y_1+y_1x_1\end{pmatrix}. \qquad \square$$

§ 8.3. Дифференцирование сложной функции

Если зависимость функции от аргументов задана через некоторые промежуточные переменные, т. е. мы имеем дело с композицией функций, то говорят, что *задана сложная функция*.

Пример 8.16. Найдём первый дифференциал функции $f\colon G\to\mathbb{R}$, $G\subset E=$ $=\{(u,v): v>0\}$, в произвольной точке $(u,v)\in G$, если

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz \quad\text{и}\quad x=uv,\quad y=\frac{u}{v},\quad z=u+v.$$

Решение. Разумеется, можно найти дифференциал $f^*(u,v)$, выписав зависимость $f^*(u,v)=f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=u^3v^3+\dfrac{u^3}{v^3}+(u+v)^3-3u^2(u+v)$. Но при более сложных связях между переменными проще использовать инвариантность формы первого дифференциала.

$$\begin{aligned} df &= (3x^2-3yz)\,dx+(3y^2-3xz)\,dy+(3z^2-3xy)\,dz=\\ &=3\Big(\Big(u^2v^2-\frac{u^2}{v}-u\Big)(v\,du+u\,dv)+\\ &\qquad+\Big(\frac{u^2}{v^2}-u^2v-uv^2\Big)\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}+((u+v)^2-u^2)(du+dv)\Big)=\\ &=3\Big(\Big(u^2v^3-2u^2+v^2+\frac{u^2}{v^3}\Big)du+\Big(-\frac{u^3}{v^4}+u^3v^2+2uv+v^2\Big)dv\Big). \qquad \square \end{aligned}$$

Пример 8.17. Найдём первый дифференциал функции $f\colon G\to\mathbb{R}$, $G\subset\mathbb{R}^3$, $G\subset E=\{(x,y,z): x>0,\ y>0\}$, если $f(x,y,z)=\varphi(x^{yz},y^{xz})$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} df &= \varphi_1'\,d(x^{yz})+\varphi_2'\,d(y^{xz})=\varphi_1'(yzx^{yz-1}\,dx+zx^{yz}\ln x\,dy+yx^{yz}\ln x\,dz)+\\ &\qquad+\varphi_2'(zy^{xz}\ln y\,dx+xzy^{xz-1}\,dy+xy^{xz}\ln y\,dz)=\\ &=(yzx^{yz-1}\varphi_1'+zy^{xz}(\ln y)\varphi_2')\,dx+(zx^{yz}(\ln x)\varphi_1'+xzy^{xz-1}\varphi_2')\,dy+\\ &\qquad+(yx^{yz}(\ln x)\varphi_1'+xy^{xz}(\ln y)\varphi_2')\,dz. \qquad \square \end{aligned}$$

Пример 8.18. Напишем матрицу Якоби отображения $f=h\circ g$, $f:(u,v)\to\to(\xi,\eta,\zeta)$, если $g: x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=uv$, $h:\xi=x^2-y^2,\ \eta=xz,\ \zeta=yz$.

Решение. Находя соответствующие производные, получаем

$$J_g=\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\\ v & u\end{pmatrix},\quad J_h=\begin{pmatrix}2x & -2y & 0\\ z & 0 & x\\ 0 & z & y\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$J_{h\circ g}=J_h\cdot J_g=\begin{pmatrix}2x & -2y & 0\\ z & 0 & x\\ 0 & z & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\\ v & u\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2x\cos v-2y\sin v & -2xu\sin v-2yu\cos v\\ z\cos v+xv & -zu\sin v+xu\\ z\sin v+yv & zu\cos v+yu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2u\cos(2v) & -2u^2\sin(2v)\\ 2uv\cos v & u^2\cos v-u^2v\sin v\\ 2uv\sin v & u^2\sin v+u^2v\cos v\end{pmatrix}. \quad \square$$

Переформулируем общую теорему о дифференцировании композиции отображений для случая композиции функций.

Пусть $f: G\to\mathbb{R}$, G — область в $\mathbb{R}^m$, $f=f(x_1,\ldots,x_m)\in C^1(G)$. Пусть $x_i: D\to\to\mathbb{R}$, D — область в $\mathbb{R}^k$, $x_i=x_i(t_1,\ldots,t_k)\in C^1(D)$, $i=1,\ldots,m$. Тогда сложная функция $f(t)=f(t_1,\ldots,t_k)=f(x_1(t),\ldots,x_m(t))$ дифференцируема в области D и

$$\frac{\partial f}{\partial t_j}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_j}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t_j}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial x_m}{\partial t_j}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j},\quad j=1,2,\ldots,k. \tag{1}$$

Пример 8.19. Найдём $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, если $u=f\left(x,\dfrac{x}{y},\dfrac{xy}{z}\right)$.

Решение. Из формулы (1) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot\frac{1}{y}+f_3'\cdot\frac{y}{z};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_2'\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+f_3'\cdot\frac{x}{z};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=f_3'\cdot\left(-\frac{xy}{z^2}\right).$$

Можно найти эти частные производные также через выражение первого дифференциала функции:

$$du=f_1'\,dx+f_2'\,d\left(\frac{x}{y}\right)+f_3'\,d\left(\frac{xy}{z}\right)=f_1'\,dx+f_2'\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}+f_3'\frac{zy\,dx+zx\,dy-xy\,dz}{z^2}=$$

$$=\left(f_1'+\frac{1}{y}f_2'+\frac{y}{z}f_3'\right)dx+\left(-\frac{x}{y^2}\cdot f_2'+\frac{x}{z}f_3'\right)dy-\frac{xy}{z^2}\cdot f_3'\,dz.$$

Поскольку частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ функции u есть соответствующие коэффициенты её дифференциала, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}\cdot f_2'+\frac{y}{z}\cdot f_3';\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot f_2'+\frac{x}{z}\cdot f_3';\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\left(-\frac{xy}{z^2}\right)\cdot f_3'. \quad \square$$

§ 8.4. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Если функция $f\colon G \to \mathbb{R}$, определённая в области $G \subset \mathbb{R}^m$, в каждой точке $x \in G$ имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, то эта частная производная сама есть функция $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\colon G \to \mathbb{R}$, частные производные которой можно рассматривать.

Определение. Если функция $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\colon G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^m$, имеет частную производную $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big)$, то эта производная называется *второй частной производной от f по x_i и x_j* и обозначается $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, или f''_{ij}, или $f''_{x_i x_j}$, или f_{ij}.

Теорема (Шварц). *Если функция $f\colon G \to \mathbb{R}$, имеет в области $G \subset \mathbb{R}^m$ частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, то в каждой точке $x \in G$, в которой обе эти производные непрерывны, их значения совпадают.*

Теорема (Юнг). *Если функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ имеет в области $G \subset \mathbb{R}^m$ частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ и эти частные производные дифференцируемы в точке $x \in G$, то*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Пример функции $f(x, y)$, для которой $f''_{xy} \neq f''_{yx}$, приведён в задаче T8.53.

Если определена частная производная $f^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ функции f порядка k по переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, то частная производная порядка $k+1$ по переменным $x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ определяется равенством $f^{(k+1)}_{i_1 i_2 \ldots i_k i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(f^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k})$.

Из теоремы Шварца следует, что если все частные производные порядка k функции f непрерывны в области G, то значение всех производных f до порядка k включительно не зависит от порядка дифференцирования. Класс функций, непрерывных в G вместе со своими производными до порядка k включительно, обозначается $C^k(G)$. Если далее при формулировке задачи не оговорено, что функция исследуется в особой точке, то подразумевается, что рассматриваются точки такой области G, что $f \in C^k(G)$. То, что такая область непуста, или вытекает из условия, или оговаривается в нём.

Функции класса $C^k(G)$ называют гладкими функциями *до порядка k* в G.

Если $f \in C^k(G)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то говорят, что $f \in C^\infty(G)$. Символами $C^k(\overline{G})$ и $C^\infty(\overline{G})$ мы обозначаем классы функций, каждая из которых принадлежит $C^k(D)$ и $C^\infty(D)$ соответственно для некоторого открытого множества $D \supset \overline{G}$, зависящего от функции.

Пример 8.20. Пусть $f(x, y) = x \ln(x + y^2)$. Тогда областью G, для которой $f \in C^\infty(G)$, является любая область, содержащаяся во множестве $D = \{(x, y)\colon y^2 > -x\}$. Найдём $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ и $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}$ для произвольной точки такой области. Пользуясь независимостью производных высшего порядка от порядка дифференцирования, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln(x+y^2) + \frac{x}{x+y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{2y}{x+y^2} - \frac{2xy}{(x+y^2)^2} = \frac{2y^3}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big) = \frac{6y^2}{(x+y^2)^2} - \frac{8y^4}{(x+y^2)^3} = \frac{2y^2(3x-y^2)}{(x+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big) = \frac{-4y^3}{(x+y^2)^3}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\Big) = \frac{12y^3}{(x+y^2)^4}. \ \square$$

Для вычисления производных высших порядков сложных функций пользуются формулой (1) вычисления первой производной сложной функции, учитывая, что все частные производные сами есть сложные функции данных аргументов.

Пример 8.21. Найдём $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, если $f = u\ln(u^2-v^2)$, $u = \operatorname{tg} xy$, $v = \sin(x-y)$.

Решение. Вычисляем частную производную первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \Big(\ln(u^2-v^2) + \frac{2u^2}{u^2-v^2}\Big)\cdot\frac{y}{\cos^2 xy} - \frac{2uv}{u^2-v^2}\cdot\cos(x-y).$$

Не подставляя выражение u и v через x и y в эту производную, вычисляем частную производную второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\Big(\ln(u^2-v^2) + \frac{2u^2}{u^2-v^2}\Big)\cdot\frac{y}{\cos^2 xy}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{2uv}{u^2-v^2}\cos(x-y)\Big) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\ln(u^2-v^2) + \frac{2u^2}{u^2-v^2}\Big)\cdot\frac{y}{\cos^2 xy} + \Big(\ln(u^2-v^2) + \frac{2u^2}{u^2-v^2}\Big)\Big(\frac{1}{\cos^2 xy} + \frac{2yx\sin xy}{\cos^3 xy}\Big) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{2uv}{u^2-v^2}\Big)\cos(x-y) - \frac{2uv}{u^2-v^2}\sin(x-y) =$$

$$= \frac{y}{\cos^2 xy}\Big(\Big(\frac{2u}{u^2-v^2} + \frac{4u}{u^2-v^2} - \frac{4u^3}{(u^2-v^2)^2}\Big)\frac{x}{\cos^2 xy} +$$

$$+ \Big(-\frac{2v}{u^2-v^2} + \frac{4u^2 v}{(u^2-v^2)^2}\Big)(-\cos(x-y))\Big) + \Big(\ln(u^2-v^2) + \frac{2u^2}{u^2-v^2}\Big)\times$$

$$\times\Big(\frac{1}{\cos^2 xy} + \frac{2xy\sin xy}{\cos^3 xy}\Big) - \cos(x-y)\Big(\Big(\frac{2v}{u^2-v^2} - \frac{4u^2 v}{(u^2-v^2)^2}\Big)\frac{x}{\cos^2 xy} +$$

$$+ \Big(\frac{2u}{u^2-v^2} + \frac{4uv^2}{(u^2-v^2)^2}\Big)\cdot(-\cos(x-y))\Big) - \frac{2uv}{u^2-v^2}\sin(x-y).$$

Для наглядности ответы к задачам такого типа в ряде случаев приводятся без подстановки в окончательный результат выражения u и v через x и y, а только указывается ещё раз их зависимость. Ответ к примеру:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2xy}{\cos^4 xy}\cdot\frac{u^3 - 3uv^2}{(u^2-v^2)^2} + 2\frac{u^2+v^2}{(u^2-v^2)^2}\Big(v\frac{(x-y)\cos(x-y)}{\cos^2 xy} + u\cos^2(x-y)\Big) +$$

$$+ \frac{\ln(u^2-v^2)}{\cos^2 xy} + \frac{2xy\sin xy}{\cos^3 xy}\ln(u^2-v^2) + \frac{2u^2}{u^2-v^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 xy} +$$

$$+ \frac{4xy\sin xy}{\cos^3 xy}\cdot\frac{u^2}{u^2-v^2} - \frac{2uv\sin(x-y)}{u^2-v^2}, \quad \text{где } u = \operatorname{tg} xy,\ v = \sin(x-y). \quad \square$$

Пример 8.22. Найдём $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2}$, если $u = f\Big(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\Big)$.

Решение. Поскольку $\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' \cdot \frac{1}{y}$, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{y} \cdot f_1'\Big) = -\frac{1}{y^2} f_1' + \frac{1}{y}\Big(f_{11}''\Big(-\frac{x}{y^2}\Big) + f_{12}'' \cdot \frac{1}{z}\Big) = -\frac{1}{y^2} \cdot f_1' - \frac{x}{y^3} f_{11}'' + \frac{1}{yz} f_{12}'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{y} f_1'\Big) = \frac{1}{y} f_{12}''\Big(-\frac{y}{z^2}\Big) = -\frac{1}{z^2} \cdot f_{12}'',$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\Big) = \frac{2}{z^3} f_{12}'' - \frac{1}{z^2}\Big(f_{122}'''\Big(-\frac{y}{z^2}\Big)\Big) = \frac{2}{z^3} f_{12}'' + \frac{y}{z^4} f_{122}'''. \qquad \square$$

Определение. Если функция $f \in C^2(G)$, где G — область в $\mathbb{R}^m$, то её дифференциал $df(x; \vec{h})$ является функцией от $2m$ действительных аргументов. Зафиксируем вектор смещения $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_m)$ и вычислим дифференциал от $df(x)$ как от функции точки $x \in G$ при фиксированном $\vec{h}$. Полученная функция, вычисленная на том же векторе $\vec{h}$, называется *вторым дифференциалом* функции f и обозначается $d^2 f \equiv d^2 f(x; \vec{h})$. Поскольку $df = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$, имеем

$$d^2 f = d(df) = d\Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) h_i = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j.$$

В силу равенства $h_i = dx_i$ второй дифференциал функции обычно записывают в виде

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \, dx_i \, dx_j.$$

По теореме Юнга, если второй дифференциал $d^2 f$ существует, то матрица определяемой им квадратичной формы симметрична.

Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков: если $f \in C^n(G)$, то $d^n f = d(d^{n-1} f)$, где дифференцирование функции $d^{n-1} f(x; \vec{h})$ производится при фиксированном $\vec{h}$. Для вычисления дифференциала n-го порядка удобно пользоваться следующей символической формулой:

$$d^n f = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\Big)^n f.$$

В отличие от первого дифференциала форма второго дифференциала, вообще говоря, меняет вид при замене независимых аргументов x_i на функции $x_i \colon D \to G$, $D \subset \mathbb{R}^q$, $i = 1, 2, \ldots, m$, а именно: пусть $G \subset \mathbb{R}^m$, $f \colon G \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(G)$, $D \subset \mathbb{R}^q$, $x_i \colon D \to \mathbb{R}$, $x_i \in C^2(D)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $g \colon D \to \mathbb{R}$,

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_q) = f(x_1(t_1, t_2, \ldots, t_q), \ldots, x_m(t_1, \ldots, t_q)), \quad \text{тогда } g \in C^2(D),$$

но выражение $d^2 g = \sum\limits_{i,j=1}^{q} \frac{\partial^2 g}{\partial t_i \partial t_j} \, dt_i \, dt_j$ не обязано совпадать с выражением

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_1(t_1, \ldots, t_q), \ldots, x_m(t_1, \ldots, t_q)) \, dx_i(t_1, \ldots, t_q) \, dx_j(t_1, \ldots, t_q).$$

Исключением является случай, когда x_i — линейные функции от $t_1, \ldots, t_q$. В этом случае указанные два выражения совпадают. В самом деле, пользуясь теоремой о дифференцировании сложной функции, получаем

$$d^2g = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} d^2 x_i.$$

Поскольку все функции x_i линейные, имеем $d^2x_i = 0$ при $i = 1, \dots, m$. Таким образом, при линейной замене переменных форма второго дифференциала (и дифференциалов более высоких порядков) инвариантна.

Пример 8.23. Пусть $f(x, y) = x \sin y + y \cos x$, где x и y — независимые переменные. Тогда

$$df = (\sin y - y \sin x)\, dx + (x \cos y + \cos x)\, dy,$$
$$d^2 f = -y \cos x\, dx^2 - x \sin y\, dy^2 + 2(\cos y - \sin x)\, dx\, dy.$$

Пусть теперь $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, где $f(x, y)$ определена, как раньше, и $x = uv$, $y = u^2 - v^2$. Тогда $dx = u\, dv + v\, du$, $dy = 2u\, du - 2v\, dv$ и

$$\begin{aligned} dg &= (\sin(u^2 - v^2) - (u^2 - v^2) \sin uv)(u\, dv + v\, du) + \\ &\quad + (uv \cos(u^2 - v^2) + \cos uv)(2u\, du - 2v\, dv) = \\ &= (v \sin(u^2 - v^2) + 2u^2 v \cos(u^2 - v^2) + 2u \cos uv - (u^2 v - v^3) \sin uv)\, du + \\ &\quad + (u \sin(u^2 - v^2) - 2uv^2 \cdot \cos(u^2 - v^2) - 2v \cos uv - (u^3 - uv^2) \sin uv)\, dv, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\partial g}{\partial u} = v \sin(u^2 - v^2) + 2u^2 v \cos(u^2 - v^2) + 2u \cos uv - (u^2 v - v^3) \sin uv;$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = u \sin(u^2 - v^2) - 2uv^2 \cos(u^2 - v^2) - 2v \cos uv - (u^3 - uv^2) \sin uv.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 6uv \cos(u^2 - v^2) - 4u^3 v \sin(u^2 - v^2) - 4uv \sin uv + (2 + v^4 - u^2 v^2) \cos uv;$$
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} &= 2(u^2 - v^2) \cos(u^2 - v^2) + (4u^2 v^2 + 1) \sin(u^2 - v^2) - \\ &\qquad - 3(u^2 - v^2) \sin uv - uv(u^2 - v^2) \cos uv; \end{aligned}$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = -6uv \cos(u^2 - v^2) - 4uv^3 \sin(u^2 - v^2) + 4uv \sin uv + (u^2 v^2 - 2 - u^4) \cos uv.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d^2 g &= \big(6uv \cos(u^2 - v^2) - 4u^3 v \sin(u^2 - v^2) - 4uv \sin uv + \\ &\quad + (2 + v^4 - u^2 v^2) \cos uv\big) du^2 + \big(-6uv \cos(u^2 - v^2) - 4uv^3 \sin(u^2 - v^2) + \\ &\quad + 4uv \sin uv + (u^2 v^2 - 2 - u^4) \cos uv\big) dv^2 + 2\big(2(u^2 - v^2) \cos(u^2 - v^2) + \\ &\quad + (4u^2 v^2 + 1) \sin(u^2 - v^2) - 3(u^2 - v^2) \sin uv - uv(u^2 - v^2) \cos uv\big)\, du\, dv. \end{aligned}$$

Если же в выражении

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2$$

формально заменить x, y, dx, dy через u, v, du, dv, то получим

$$\begin{aligned}
d^2f &= -y\cos x\,dx^2 - x\sin y\,dy^2 + 2(\cos y - \sin x)\,dx\,dy = \\
&= (-(u^2-v^2)\cos uv)(v\,du + u\,dv)^2 - uv\sin(u^2-v^2)(2u\,du - 2v\,dv)^2 + \\
&\qquad + 2(\cos(u^2-v^2) - \sin uv)(v\,du + u\,dv)(2u\,du - 2v\,dv) = \\
&= \big(4uv\cos(u^2-v^2) - 4u^3v\sin(u^2-v^2) - 4uv\sin uv + \\
&\qquad + (v^4 - u^2v^2)\cos uv\big)du^2 + \big(-4uv\cos(u^2-v^2) - 4uv^3\sin(u^2-v^2) + \\
&\qquad + 4uv\sin uv + (u^2v^2 - u^4)\cos uv\big)dv^2 + 2\big(2(u^2-v^2)\cos(u^2-v^2) + \\
&\qquad + 4u^2v^2\sin(u^2-v^2) - 2(u^2-v^2)\sin uv - uv(u^2-v^2)\cos uv\big)du\,dv.
\end{aligned}$$

Если $u = \frac{\pi}{2}$, $v = 1$ и $dv = 0$, $du \neq 0$, то имеем

$$d^2g - d^2f = \pi\cos\Big(\frac{\pi^2}{4} - 1\Big)du^2 \neq 0,$$

т. е. $d^2g \neq d^2f$. □

Пример 8.24. Найдём первый и второй дифференциалы функции

$$z(x, y) = f(u, v, w),$$

если

$$u = x^2 + y^2, \quad v = x^2 - y^2, \quad w = 2xy,$$

x и y — независимые переменные и $f \in C^2(G)$, $G \subset \mathbb{R}^3$.

Решение. Поскольку

$$du = 2x\,dx + 2y\,dy, \qquad dv = 2x\,dx - 2y\,dy,$$
$$dw = 2y\,dx + 2x\,dy, \qquad d^2u = 2\,dx^2 + 2\,dy^2,$$
$$d^2v = 2\,dx^2 - 2\,dy^2, \qquad d^2w = 4\,dx\,dy,$$

находим

$$\begin{aligned}
dz &= f_1'\,du + f_2'\,dv + f_3'\,dw = \\
&= f_1'(2x\,dx + 2y\,dy) + f_2'(2x\,dx - 2y\,dy) + f_3'(2y\,dx + 2x\,dy) = \\
&= (2xf_1' + 2xf_2' + 2yf_3')\,dx + (2yf_1' - 2yf_2' + 2xf_3')\,dy;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^2z &= f_{11}''(2x\,dx + 2y\,dy)^2 + f_{22}''(2x\,dx - 2y\,dy)^2 + f_{33}''(2y\,dx + 2x\,dy)^2 + \\
&\qquad + 2f_{12}''(2x\,dx + 2y\,dy)(2x\,dx - 2y\,dy) + \\
&\qquad + 2f_{13}''(2x\,dx + 2y\,dy)(2y\,dx + 2x\,dy) + \\
&\qquad + 2f_{23}''(2x\,dx - 2y\,dy)(2y\,dx + 2x\,dy) + \\
&\qquad + f_1'(2\,dx^2 + 2\,dy^2) + f_2'(2\,dx^2 - 2\,dy^2) + f_3'4\,dx\,dy = \\
&= (4x^2f_{11}'' + 4x^2f_{22}'' + 4y^2f_{33}'' + 8x^2f_{12}'' + 8xyf_{13}'' + 8xyf_{23}'' + 2f_1' + 2f_2')\,dx^2 + \\
&\qquad + (4y^2f_{11}'' + 4y^2f_{22}'' + 4x^2f_{33}'' - 8y^2f_{12}'' + 8xyf_{13}'' - 8xyf_{23}'' + 2f_1' - 2f_2')\,dy^2 + \\
&\qquad + (8xyf_{11}'' - 8xyf_{22}'' + 8xyf_{33}'' + 8(x^2+y^2)f_{13}'' + 8(x^2-y^2)f_{23}'' + 4f_3')\,dx\,dy
\end{aligned}$$

или

$$
\begin{aligned}
d^2z &= d\big((2xf_1' + 2xf_2' + 2yf_3')\,dx + (2yf_1' - 2yf_2' + 2xf_3')\,dy\big) = \\
&= \big(2f_1'\,dx + 2x\,d(f_1') + 2f_2'\,dx + 2x\,d(f_2') + 2f_3'\,dy + 2y\,d(f_3')\big)\,dx + \\
&\qquad + \big(2f_1'\,dy + 2y\,d(f_1') - 2f_2'\,dy - 2y\,d(f_2') + 2f_3'\,dx + 2x\,d(f_3')\big)\,dy = \\
&= 2f_1'\,dx^2 + 2f_2'\,dx^2 + 4f_3'\,dx\,dy + (f_{11}''\,du + f_{12}''\,dv + f_{13}''\,dw) \times \\
&\qquad \times (2x\,dx + 2y\,dy) + 2f_1'\,dy^2 - 2f_2'\,dy^2 + (f_{12}''\,du + f_{22}''\,dv + f_{23}''\,dw) \times \\
&\qquad \times (2x\,dx - 2y\,dy) + (f_{13}''\,du + f_{23}''\,dv + f_{33}''\,dw)(2y\,dx + 2x\,dy) = \\
&= 2f_1'\,dx^2 + 2f_2'\,dx^2 + 4f_3'\,dx\,dy + (2x\,dx + 2y\,dy) \times \\
&\qquad \times \big(f_{11}''(2x\,dx + 2y\,dy) + f_{12}''(2x\,dx - 2y\,dy) + f_{13}''(2y\,dx + 2x\,dy)\big) + \\
&\qquad + (2x\,dx - 2y\,dy) \cdot \big(f_{12}''(2x\,dx + 2y\,dy) + f_{22}''(2x\,dx - 2y\,dy) + \\
&\qquad + f_{23}''(2y\,dx + 2x\,dy)\big) + (2y\,dx + 2x\,dy) \cdot \big(f_{13}''(2x\,dx + 2y\,dy) + \\
&\qquad + f_{23}''(2x\,dx - 2y\,dy) + f_{33}''(2y\,dx + 2x\,dy)\big) + 2f_1'\,dy^2 - 2f_2'\,dy^2. \qquad \square
\end{aligned}
$$

§ 8.5. Дифференцирование неявных функций

Приведём несколько формулировок *теоремы о неявной функции*, заданной уравнением $F(x, y) = 0$. Начнём со случая $x, y \in \mathbb{R}$, затем рассмотрим $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$ и, наконец, сформулируем общую теорему для случая $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, называемую также *теоремой о неявном отображении*.

Теорема. *Пусть функция $F\colon U \to \mathbb{R}$, определённая в окрестности U точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, такова, что $F(x_0, y_0) = 0$, $F \in C^1(U)$ и $F_y'(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует такая окрестность $V = U_\delta(x_0) \times U_\varepsilon(y_0) \subset U$ точки (x_0, y_0) и такая непрерывно дифференцируемая функция $y = f(x)\colon U_\delta(x_0) \to U_\varepsilon(y_0)$, что для любой точки $(x, y) \in V$ уравнение $F(x, y) = 0$ равносильно равенству $y = f(x)$, причём $f(x_0) = y_0$ и $f'(x) = -\dfrac{F_x'(x, f(x))}{F_y'(x, f(x))}$ при всех $x \in U_\delta(x_0)$.*

Если выполнены условия этой теоремы, то говорят, что в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) уравнение $F(x, y) = 0$ *определяет* (или *задаёт*) непрерывно дифференцируемую функцию $y = f(x)$.

Теорема. *Пусть функция $F\colon U \to \mathbb{R}$, определённая в окрестности U точки $(x_0, y_0) = (x_1^0, \ldots, x_m^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$, такова, что $F(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_0) = 0$, $F \in C^k(U)$, $k \in \mathbb{N}$, и $F_y'(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_0) \neq 0$. Тогда существует такая окрестность $V = I_x^m \times I_y$ точки (x_0, y_0), где $V \subset U$,*

$$
I_x^m = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m\colon |x_i - x_i^0| < \delta_i\}, \quad I_y = \{y \in \mathbb{R}\colon |y - y_0| < \varepsilon\},
$$

и такая функция $f\colon I_x^m \to I_y$, что $f \in C^k(I_x^m)$ и для любой точки $(x, y) \in V$ уравнение $F(x_1, \ldots, x_m, y) = 0$ равносильно равенству $y = f(x_1, \ldots, x_m)$, причём $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\dfrac{F_{x_i}'(x, f(x))}{F_y'(x, f(x))}$ при всех $x \in I_x^m$, $i = 1, \ldots, m$.

Пример 8.25. Найдём первые и вторые производные функции $z(x, y)$, если $z = \sqrt{x^2 - y^2} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Решение. Перепишем уравнение, неявно определяющее z, в виде

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$$

Способ 1. По формуле (2) получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{zx}{(\sqrt{x^2 - y^2})^3} - \dfrac{zx}{(\sqrt{x^2 - y^2})^3} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2} \cdot \cos^2 \dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{yz}{(\sqrt{x^2 - y^2})^3} - \dfrac{yz}{(\sqrt{x^2 - y^2})^3} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2} \cdot \cos^2 \dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}}}.$$

Поскольку $\dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}} = 1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 1 + \dfrac{z^2}{x^2 - y^2}$, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xz}{x^2 - y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{yz}{x^2 - y^2}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz}{x^2 - y^2}\right) = \frac{z}{x^2 - y^2} - \frac{2x^2 z}{(x^2 - y^2)^2} + \frac{x}{x^2 - y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y^2 z}{(x^2 - y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-yz}{x^2 - y^2}\right) = -\frac{z}{x^2 - y^2} - \frac{2y^2 z}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{y}{x^2 - y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2 z}{(x^2 - y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xz}{x^2 - y^2}\right) = \frac{2xyz}{(x^2 - y^2)^2} + \frac{x}{x^2 - y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xyz}{(x^2 - y^2)^2}.$$

Способ 2. В области, где выполнены условия теоремы о неявной функции,

$$d\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{1}{\cos^2 \dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}}\, d\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0,$$

следовательно, $d\dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$ (если $\cos^2 \dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ тождественно равен 1, то также $d\dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$). Отсюда

$$\frac{dz}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{(x\,dx - y\,dy)z}{(x^2 - y^2)^{3/2}} = 0 \quad \text{и} \quad dz = \frac{z(x\,dx - y\,dy)}{x^2 - y^2}.$$

Далее,

$$d^2 z = dz \cdot \frac{x\,dx - y\,dy}{x^2 - y^2} + z\frac{dx^2 - dy^2}{x^2 - y^2} - z(x\,dx - y\,dy)\frac{2x\,dx - 2y\,dy}{(x^2 - y^2)^2} =$$

$$= -\frac{y^2 z}{(x^2 - y^2)^2}\, dx^2 - \frac{x^2 z}{(x^2 - y^2)^2}\, dy^2 + \frac{2xyz}{(x^2 - y^2)^2}\, dx\,dy.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2 z}{(x^2 - y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2 z}{(x^2 - y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xyz}{(x^2 - y^2)^2}.$$ □

Теорема. *Пусть отображение* $F\colon U\to\mathbb{R}^n$, *определённое в окрестности* U *точки* $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^{m+n}$, $x_0\in X=\mathbb{R}^m$, $y_0\in Y=\mathbb{R}^n$, *таково, что*

1) $F(x_0, y_0)=0$; 2) $F\in C^k(U)$, $k\geqslant 1$; 3) $\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$ — *обратимая матрица.* *Тогда существуют* $(m+n)$*-мерная область* $V=V_X^m\times V_Y^n\subset U$, *где* V_X^m — *область в* $\mathbb{R}^m$, $x_0\in V_X^m$, *а* V_Y^n — *область в* $\mathbb{R}^n$, *содержащая* y_0, *и такое отображение* $f\colon V_X^m\to V_Y^n$, $f\in C^k(V_X^m)$, *что для любой точки* $(x, y)\in V$ *равенство* $F(x, y)=0$ *равносильно равенству* $y=f(x)$, *в частности,* $F(x, f(x))\equiv 0$, $x\in V_X^m$.

В координатной форме эта теорема выглядит так.

Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,\\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \end{cases}$$

и выполнены условия:

1) *существует такая точка* (x_0, y_0), $x_0=(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, $y_0=(y_1^0, \ldots, y_n^0)$, *что* $F_i(x_0, y_0)=0$, $i=1, 2, \ldots, n$;

2) *существует такая окрестность* $U(x_0, y_0)\subset\mathbb{R}^{m+n}$ *точки* (x_0, y_0), *что*

$$F_i \in C^k(U(x_0, y_0)), \quad i=1, 2, \ldots, n, \quad k\geqslant 1;$$

3) *якобиан* $\left|\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}\right|$ *в точке* (x_0, y_0) *отличен от нуля.*

Тогда существуют такая окрестность $V(x_0)\subset\mathbb{R}^m$ *точки* x_0 *и такая окрестность* $W(y_0)\subset\mathbb{R}^n$ *точки* y_0, *а также такие функции* $f_i\colon V(x_0)\to\mathbb{R}$, $f_i\in C^k(V(x_0))$, $i=1, 2, \ldots, n$, *определяющие отображение окрестности* $V(x_0)$ *на окрестность* $W(y_0)$, *что соотношение*

$$F_j(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)\equiv 0, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

выполняется для $x=(x_1, \ldots, x_m)\in V(x_0)$ *и* $y=(y_1, \ldots, y_n)\in W(y_0)$ *тогда и только тогда, когда* $y_j=f_j(x_1, \ldots, x_m)$, $j=1, \ldots, n$.

Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называют *неявно заданными данной системой уравнений* или *неявно определёнными данной системой уравнений*.

Пусть в некоторой области $G\subset\mathbb{R}^m$, содержащей точку (x_0, y_0), система уравнений $F_j(x, y)=0$, $j=1, 2, \ldots, n$, $x=(x_1, \ldots, x_m)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$, принадлежит классу $C^1(G)$, где $F_j(x_0, y_0)=0$, и якобиан функций $F_j(x, y)$ по переменным y отличен от нуля в точке (x_0, y_0). Тогда существуют окрестность $V(x_0)$ точки x_0 и окрестность $W(y_0)$ точки y_0, а также функции $f_j\colon V(x_0)\to\mathbb{R}$, $f_j\in C^1(V(x_0))$, определяющие отображение окрестности $V(x_0)$ на окрестность $W(y_0)$ и такие, что соотношение $F_j(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0$ выполняется для всех $x=(x_1, \ldots, x_m)\in V(x_0)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)\in W(y_0)$ тогда и только тогда, когда $y_j=f_j(x_1, \ldots, x_m)$, $j=1, \ldots, n$. Таким образом, дифференциалы переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ в области G связаны системой линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\,dx_i+\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial F_j}{\partial y_q}\,dy_q=0, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Из наших предположений следует, что в окрестности точки (x_0, y_0) якобиан $\left|\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}\right|$ отличен от нуля, поэтому из этой системы однозначно выражаются дифференциалы $dy_1, dy_2, \ldots, dy_n$ как линейные формы относительно dx_1, $dx_2, \ldots, dx_m$. Коэффициенты полученных линейных форм являются соответствующими частными производными $\dfrac{\partial y_q}{\partial x_i}$, $q = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Пример 8.26. Функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ определяются системой

$$xy - z\cos u \cos v = 0, \quad yz - x\cos u \sin v = 0.$$

Найдём $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial z}$.

Решение. Составим тождества от независимых переменных:

$$\begin{cases} xy - z\cos u(x, y, z)\cos v(x, y, z) = 0, \\ yz - x\cos u(x, y, z)\cos v(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Используя инвариантность формы первого дифференциала, продифференцируем эти равенства и получим уравнения

$$y\,dx + x\,dy - dz\cos u\cos v + z\sin u\cos v\,du + z\cos u\sin v\,dv = 0,$$
$$y\,dz + z\,dy - dx\cos u\sin v + x\sin u\sin v\,du - x\cos u\cos v\,dv = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} du = \frac{-1}{xz\sin u}\big(&(xy\cos v - z\cos u\sin^2 v)\,dx + \\ &+ (x^2\cos v + z^2\sin v)\,dy + (yz\sin v - x\cos u\cos^2 v)\,dz\big), \\ dv = \frac{-1}{xz\cos u}\big(&(z\cos u\sin v\cos v + xy\sin v)\,dx + \\ &+ (x^2\sin v - z^2\cos v)\,dy - (yz\cos v + x\cos u\sin v\cos v)\,dz\big) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{z\cos u\sin^2 v - xy\cos v}{xz\sin u}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-(x^2\cos v + z^2\sin v)}{xz\sin u}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{x\cos u\cos^2 v - yz\sin v}{xz\sin u}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-z\cos u\sin v\cos v - xy\sin v}{xz\cos u}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{z^2\cos v - x^2\sin v}{xz\cos u}, & \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{yz\cos v + x\cos u\cos v\sin v}{xz\cos u}. \end{aligned}$$

Данная система определяет функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ в некоторой окрестности такой точки (x_0, y_0, z_0), что $x_0 z_0 \cos u_0 \sin u_0 \neq 0$, где u_0, v_0 удовлетворяют уравнениям $x_0 y_0 - z_0\cos u_0\cos v_0 = 0$ и $y_0 z_0 - x_0\cos u_0\sin v_0 = 0$.

Точно так же можно было бы взять в качестве независимых аргументов любые три из переменных x, y, z, u, v, а оставшиеся две переменных считать их функциями, например, рассматривать z и u как функции $z(x, y, v)$ и $u(x, y, v)$. При этом система, связывающая дифференциалы dx, dy, dz, du, dv, имеет такой же вид, только разрешается уже относительно дифференциалов dz и du. □

Если нужно найти производные $\dfrac{\partial y_q}{\partial x_i}$, $q = 1, 2, \ldots, n$, не для всех i, а только для некоторого i_0, то обычно рассматривают систему, полученную дифференцированием системы тождеств $F_j(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0$, $\leqslant j \leqslant n$, по переменной x_{i_0}, считая y_q функциями от x_i:

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_{i_0}} + \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial y_q} \cdot \frac{\partial y_q}{\partial x_{i_0}} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Точно так же система уравнений для вторых производных $\dfrac{\partial^2 y_q}{\partial x_i \partial x_k}$, $1 \leqslant q \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant m$, имеет вид

$$\frac{\partial^2 F_j(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1(x_1, \ldots, x_m), y_2(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m))}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

или в форме вторых дифференциалов $d^2F_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. При этом уже необходимо заранее знать, какие из переменных являются независимыми, а какие зависимыми, поскольку, как было показано выше, форма второго дифференциала существенно зависит от того, независимыми или зависимыми являются формальные аргументы соответствующей функции.

Вернёмся к уравнениям предыдущего примера. По условию, x, y, z — независимые переменные; тогда, как отмечалось выше, $d^2x = 0$, $d^2y = 0$, $d^2z = 0$. Пользуясь формулой $d^2F_j = d(dF_j)$, получаем систему уравнений, связывающих переменные x, y, z, u, v и их первые и вторые дифференциалы:

$$2\,dx\,dy + 2\,dz \sin u \cos v\, du + 2\,dz \cos u \sin v\, dv + z \cos u \cos v\, du^2 -$$
$$- 2z \sin u \sin v\, du\, dv + z \sin u \cos v\, d^2u + z \cos u \sin v\, d^2v + z \cos u \cos v\, dv^2 = 0,$$
$$2\,dz\,dy + 2\,dx \sin u \sin v\, du - 2\,dx \cos u \cos v\, dv + x \cos u \sin v\, du^2 +$$
$$+ 2x \sin u \cos v\, du\, dv + x \sin u \sin v\, d^2u - x \cos u \cos v\, d^2v + x \cos u \sin v\, dv^2 = 0.$$

Подставляя в полученные уравнения выражения du и dv в виде линейных форм от dx, dy, dz и разрешая систему относительно d^2u, d^2v, получим выражение этих дифференциалов в виде квадратичных форм от dx, dy, dz. Вторые производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и т. д. выражаются через соответствующие коэффициенты этих квадратичных форм. Покажем, как найти одну из частных производных, например $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$. Дифференцируя уравнения системы в предыдущем примере по y, получим

$$x + z \sin u \cos v \frac{\partial u}{\partial y} + z \cos u \sin v \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad z + x \sin u \sin v \frac{\partial u}{\partial y} - x \cos u \cos v \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Дифференцируя эту систему по z, имеем

$$\sin u \cos v \frac{\partial u}{\partial y} + z \cos u \cos v \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - z \sin u \sin v \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \cos u \sin v \frac{\partial v}{\partial y} -$$
$$- z \sin u \sin v \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + z \cos u \cos v \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + z \sin u \cos v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + z \cos u \sin v \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = 0,$$
$$1 + x \sin v \cos u \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + x \sin u \cos v \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + x \sin u \cos v \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} +$$
$$+ x \cos u \sin v \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + x \sin u \sin v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - x \cos u \cos v \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения выражения для $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial z}$, получим систему, решая которую можно найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$ и $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}$.

Иногда удобно для нахождения одной из вторых производных дифференцировать по соответствующей переменной соотношение, определяющее первую производную, учитывая, какие из переменных в этом соотношении независимы и какие зависимы. Так, в нашем случае

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(-\frac{x^2\cos v + z^2\sin v}{xz\sin u}\Big) =$$
$$= -\frac{\Big(2z\sin v + z^2\cos v\,\dfrac{\partial v}{\partial z} - x^2\sin v\,\dfrac{\partial v}{\partial z}\Big)xz\sin u}{x^2z^2\sin^2 u} + \frac{(x^2\cos v + z^2\sin v)\Big(x\sin u + xz\cos u\,\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big)}{x^2z^2\sin^2 u}.$$

Подставляя $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{x\cos u\cos^2 v - yz\sin v}{xz\sin u}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{yz\cos v + x\sin v\cos v\cos u}{xz\cos u}$ в это выражение, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \frac{1}{x^3z^3\sin^3 u}\Big(x^4 z\cos u\cos v(2\sin^2 u\sin^2 v + \cos^2 v) +$$
$$+ x^3yz^2\cos v\sin v(\sin^2 u - \cos^2 u) + x^2z^3(\cos^2 u\cos^2 v - \sin^2 u - \sin^2 u\cos^2 v) -$$
$$- xyz^4(\sin^2 u\cos^2 v + \cos^2 u\sin^2 v)\Big).$$

Производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием, но технические трудности при их нахождении возрастают.

Пример 8.27. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ независимых переменных x и y определены равенствами $xe^{u+v} + 2uv = 1$, $ye^{u-v} - \dfrac{u}{1+v} = 2x$. Найдём du, dv, d^2u, d^2v в точке $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ при $u_0 = v_0 = 0$.

Решение. В тех точках, где выполнены условия теоремы о неявных функциях, переменные x, y, u, v, их первые и вторые дифференциалы связаны уравнениями

$$e^{u+v}\,dx + xe^{u+v}(du + dv) + 2(u\,dv + v\,du) = 0,$$
$$e^{u-v}\,dy + ye^{u-v}(du - dv) - \frac{1}{1+v}\,du + \frac{u\,dv}{(1+v)^2} = 2\,dx,$$
$$2e^{u+v}\,dx(du + dv) + xe^{u+v}(du + dv)^2 + xe^{u+v}(d^2u + d^2v) +$$
$$+ 4\,du\,dv + 2u\,dv^2 + 2v\,du^2 = 0,$$
$$2\,dye^{u-v}(du - dv) + ye^{u-v}(du - dv)^2 + ye^{u-v}(d^2u - d^2v) -$$
$$- \frac{d^2u}{1+v} + \frac{2\,du\,dv}{(1+v)^2} + \frac{u\,d^2v}{(1+v)^2} - \frac{2u\,dv^2}{(1+v)^3} = 0.$$

В точке (x_0, y_0, u_0, v_0) условия теоремы о неявных функциях выполнены, поэтому $du(1,2)$, $dv(1,2)$, $d^2u(1,2)$, $d^2v(1,2)$ удовлетворяют уравнениям

$$dx + du + dv = 0, \quad dy + 2(du - dv) - du = 2\,dx,$$
$$2\,dx\,du + 2\,dx\,dv + (du + dv)^2 + (d^2u + d^2v) + 4\,du\,dv = 0,$$
$$2\,dy\,du - 2\,dy\,dv + 2(du - dv)^2 + 2(d^2u - d^2v) - d^2u + 2\,du\,dv = 0,$$

откуда

$$du(1,2) = -\frac{dy}{3}; \qquad d^2u(1,2) = \frac{14}{27}\,dy^2 - \frac{8}{9}\,dx\,dy,$$
$$dv(1,2) = -dx + \frac{dy}{3}, \quad d^2v(1,2) = dx^2 - \frac{2}{27}\,dy^2 - \frac{4}{9}\,dx\,dy. \qquad \square$$

Пусть задано отображение $f\colon G\to\mathbb{R}^m$, $G\subset\mathbb{R}^m$, где в координатной записи $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_m)=y_1,\ldots,f_m(x_1,x_2,\ldots,x_m)=y_m$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in G$. Тогда переменные $x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m$ связаны системой уравнений $(1\leqslant i\leqslant m)$ $y_i-f_i(x_1,\ldots,x_m)=0$. Эта система при соответствующих условиях неявно задаёт обратные функции $x_i=x_i(y_1,\ldots,y_m)$, $1\leqslant i\leqslant m$. Дифференцировать обратные функции по общему методу дифференцирования неявных функций проще, чем находить обратную матрицу к матрице Якоби отображения f.

Пример 8.28. Найдём условие существования обратных функций $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ и их дифференциалы, если $x=uv\cos w$, $y=uv\sin w$, $z=u+v+w$.

Решение. Подставляем u, v, w как функции от x, y, z в формулы замены:

$$x=u(x,y,z)v(x,y,z)\cos w(x,y,z),\qquad y=u(x,y,z)v(x,y,z)\sin w(x,y,z),$$
$$z=u(x,y,z)+v(x,y,z)+w(x,y,z).$$

Якобиан отображения $f\colon(u,v,w)\to(x,y,z)$ равен $uv(u-v)$, как было вычислено в примере 8.13, поэтому обратные функции определены в окрестности каждой точки (x_0,y_0,z_0), если $x_0=u_0v_0\cos w_0$, $y_0=u_0v_0\sin w_0$, $z_0=u_0+v_0+w_0$ и $u_0v_0(u_0-v_0)\neq 0$. При этом условии переменные x, y, z, u, v, w и их дифференциалы связаны уравнениями

$$dx=v\cos w\,du+u\cos w\,dv-uv\sin w\,dw,$$
$$dy=v\sin w\,du+u\sin w\,dv+uv\cos w\,dw,\qquad dz=du+dv+dw.$$

Разрешая эту систему относительно du, dv, dw, получим

$$\begin{aligned}
du&=\frac{1}{v(u-v)}\big((\sin w-v\cos w)\,dx-(\cos w+v\sin w)\,dy+uv\,dz\big),\\
dv&=\frac{1}{u(u-v)}\big((u\cos w-\sin w)\,dx+(\cos w+u\sin w)\,dy-uv\,dz\big),\\
dw&=\frac{1}{uv}\big(-\sin w\,dx+\cos w\,dy\big).
\end{aligned}$$ □

Остановимся на ещё одном частном случае неявного задания функции, а именно, на *параметрическом задании* функции двух переменных:

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\quad x,y,z\in C^1(D),\quad D\subset\mathbb{R}^2_{u,v}. \tag{3}$$

Для определённости считаем, что соотношения (3) определяют переменную z как функцию переменных x и y, тогда переменные $u(x,y)$ и $v(x,y)$ рассматриваются как промежуточные параметры в определении $z(x,y)=z(u(x,y),v(x,y))$. Из общей теоремы о существовании обратных функций следует, что в некоторой окрестности любой точки (x_0,y_0), в которой

$$\begin{vmatrix} x'_u(u_0,v_0) & x'_v(u_0,v_0)\\ y'_u(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0)\end{vmatrix}\neq 0,$$

определены функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — обратные к функциям $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, где x_0,y_0,u_0,v_0 связаны равенствами $x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$. Поэтому в этой окрестности определена функция $z(x,y)=z(u(x,y),v(x,y))$.

Разумеется, данные соотношения (3) можно рассматривать как параметрическое задание функции $x=x(y,z)$ или функции $y=y(x,z)$ при выполнении условий существования соответствующих обратных функций.

Пример 8.29. Найдём первый и второй дифференциалы функции $z = z(x, y)$, если $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = au + bv$.

Решение. В данном примере кажется возможным явно выразить $u(x, y)$ и $v(x, y)$, а именно $u = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. Но в таком представлении, во-первых, функция $v(x, y)$ не определена при $x = 0$ и, во-вторых, функция v принимает значения только в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$, хотя в соотношениях $x = u\cos v$, $y = u\sin v$ как u, так и v могут принимать любые действительные значения и для $v = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, имеем $x = 0$. Кроме того, часто функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ вообще не выражаются в явном виде.

Составим тождества, связывающие функции от независимых переменных:

$$x = u(x, y)\cos v(x, y), \quad y = u(x, y)\sin v(x, y), \quad z = au(x, y) + bv(x, y).$$

Найдём дифференциалы обратных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ из системы

$$\begin{cases} dx = \cos v\, du - u\sin v\, dv, \\ dy = \sin v\, du + u\cos v\, dv. \end{cases}$$

Имеем $du = \cos v\, dx + \sin v\, dy$, $dv = \dfrac{\cos v}{u}\, dy - \dfrac{\sin v}{u}\, dx$.

Подставив выражения du и dv в dz, получаем

$$dz = a\, du + b\, dv = \left(a\cos v - \frac{b\sin v}{u}\right)dx + \left(a\sin v + \frac{b\cos v}{u}\right)dy.$$

Далее,

$$\begin{aligned} d^2z = \Big(-a\sin v\, dv - \frac{b\cos v}{u}\, dv + \frac{b\sin v}{u^2}\, du\Big)dx + {}&\\ + \Big(a\cos v\, dv - \frac{b\sin v}{u}\, dv - \frac{b\cos v}{u^2}\, du\Big)dy &= \\ = \bigg(\Big(-a\sin v - \frac{b\cos v}{u}\Big)\Big(\frac{\cos v}{u}\, dy - \frac{\sin v}{u}\, dx\Big) + \frac{b\sin v}{u^2}(\cos v\, dx + \sin v\, dy)\bigg)dx + {}&\\ + \bigg(\Big(a\cos v - \frac{b\sin v}{u}\Big)\Big(\frac{\cos v}{u}\, dy - \frac{\sin v}{u}\, dx\Big) - \frac{b\cos v}{u^2}(\cos v\, dx + \sin v\, dy)\bigg)dy &= \\ = \Big(\frac{a}{u}\sin^2 v + \frac{b}{u^2}\sin 2v\Big)dx^2 + \Big(\frac{a}{u}\cos^2 v - \frac{b}{u^2}\sin 2v\Big)dy^2 - {}&\\ - \Big(\frac{a}{u}\sin 2v + \frac{2b}{u^2}\cos 2v\Big)dx\, dy.& \end{aligned}$$

□

§ 8.6. Замена переменных

Методы дифференцирования сложных и неявно заданных функций используются для замены переменных в дифференциальных выражениях. Эта задача для функции одной переменной была рассмотрена в гл. 5. Здесь будут рассматриваться функции нескольких переменных, и для простоты изложения ограничимся случаем функции двух переменных.

Постановка задачи. Пусть задано некоторое выражение A, в которое входят переменные x, y, функция $z = z(x, y)$ и её частные производные по x и y до некоторого порядка. Пусть, далее, переменные x и y выражаются через новые независимые аргументы: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Требуется преобразовать данное дифференциальное выражение A так, чтобы в него входили переменные u, v, функция $\widetilde{z} = \widetilde{z}(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$ и частные производные соответствующих порядков функции $\widetilde{z}$ по переменным u и v. Предполагается, что все преобразования делаются в таких областях изменения x, y, u, v, что существуют обратные функции $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ и все рассматриваемые функции достаточно гладкие. Пусть $z(x, y)=\widetilde{z}(u, v)$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Чтобы выразить вторые производные функции z по x, y через производные $\widetilde{z}$ по u, v и производные u и v по x, y, дифференцируем выражения первых производных, учитывая, что переменные u и v независимы. Например,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}\Big)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\Big)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=$$
$$=\Big(\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\Big(\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

Аналогично находятся производные любого порядка.

Обратите внимание: в приведённых формулах фигурируют не производные функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, а производные обратных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$. На практике связь между переменными x, y, u, v задаётся как соотношениями вида $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, так и соотношениями вида $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ или $\varphi_1(x, y, u, v)=0$, $\varphi_2(x, y, u, v)=0$.

Пример 8.30. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуем уравнение $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$.

Решение. Модуль якобиана перехода от переменных x, y к переменным u, v равен $2|x/y|=2|v|$. Поэтому предложенную замену переменных можно делать в той окрестности любой точки на плоскости xOy, где $x\neq 0$, $y\neq 0$, и тем самым в окрестности любой точки на плоскости uOv, где $v\neq 0$.

Составим тождество $\widetilde{z}\Big(xy, \dfrac{x}{y}\Big)=z(x, y)$ для $z=z(x, y)=\widetilde{z}(u, v)$. Найдём первый и второй дифференциалы полученного тождества двух функций от независимых переменных x и y:

$$dz=\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}(y\,dx+x\,dy)+\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2},$$
$$d^2z=\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u^2}(y\,dx+x\,dy)^2+2\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u\,\partial v}(y\,dx+x\,dy)\cdot\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}+$$
$$+\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial v^2}\Big(\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}\Big)^2+\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}2\,dx\,dy+\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}\cdot\frac{(-2y\,dy)(y\,dx-x\,dy)}{y^4},$$

откуда находим $\dfrac{\partial y}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ как коэффициенты в правых частях этих формул при dx, dx^2 и dy^2 соответственно.

Подставляя выражения $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в исходное уравнение, получаем

$$4x^2\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u\partial v}-\frac{2x}{y}\cdot\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}=0,\quad\text{или}\quad 2u\frac{\partial^2 \widetilde{z}}{\partial u\partial v}=\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}.\qquad\square$$

В дальнейшем будем считать, что замена переменных производится в той области, где якобиан перехода к новым переменным существует и отличен от нуля, не оговаривая это дополнительно.

Пример 8.31. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуем уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2 z=0$, если $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$.

Решение. Пусть $z=z(x,y)=z(e^u\cos v, e^u\sin v)=\widetilde{z}(u,v)$. Дифференцируя это тождество для функций независимых переменных u и v, получаем

$$d\widetilde{z}=\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}du+\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial x}(e^u\cos v\,du-e^u\sin v\,du)+\frac{\partial z}{\partial y}(e^u\sin v\,du+e^u\cos v\,dv),$$

$$d^2\widetilde{z}=\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u\,\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}dv^2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(e^u\cos v\,du-e^u\sin v\,dv)^2+$$
$$+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,dy}(e^u\cos v\,du-e^u\sin v\,dv)(e^u\sin v\,du+e^u\cos v\,dv)+$$
$$+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(e^u\sin v\,du+e^u\cos v\,dv)^2+\frac{\partial z}{\partial x}(e^u\cos v du^2-2e^u\sin v du dv-e^u\cos v dv^2)+$$
$$+\frac{\partial z}{\partial y}(e^u\sin v\,du^2+2e^u\cos v\,du\,dv-e^u\sin v\,dv^2).$$

Приравнивая коэффициенты при du и dv в $d\widetilde{z}$ и при du^2, $du\,dv$ и dv^2 в $d^2\widetilde{z}$, получаем систему уравнений для $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Решая эту систему линейных уравнений и подставляя найденные выражения в исходное уравнение, получаем уравнение $\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}+e^{2u}m^2\widetilde{z}=0$. □

Более общий случай замены представляет собой переход от функции $z(x,y)$ к функции $w=w(u,v)$ при условиях связи переменных x,y,z,u,v,w вида $f_1(x,y,z,u,v,w)=0$, $f_2(x,y,z,u,v,w)=0$, $f_3(x,y,z,u,v,w)=0$. Кроме того, между переменными x,y,z есть зависимость $z-f(x,y)=0$. Итак, имеем систему четырёх уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z,u,v,w)=0,\\ f_2(x,y,z,u,v,w)=0,\\ f_3(x,y,z,u,v,w)=0,\\ z-f(x,y)=0.\end{cases}$$

Предполагая опять, что преобразования делаются в соответствующей области, получаем, что первые три уравнения системы допускают в окрестности исследуемой точки единственное решение

$$x=\varphi(u,v,w),\quad y=\psi(u,v,w),\quad z=\chi(u,v,w),$$

подставляя которое в последнее уравнение системы, получаем уравнение

$$\chi(u,v,w)-f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w))=0,$$

и оно в соответствующей области даёт функцию $w=F(u,v)$, определяемую нашей исходной системой. Если требуется найти дифференциалы функций

$\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$, $\chi(u,v,w)$, определяемых заменой переменных, то следует дифференцировать нужное число раз тождества

$$\begin{cases} f_1(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w),u,v,w)=0,\\ f_2(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w),u,v,w)=0,\\ f_3(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w),u,v,w)=0,\end{cases}$$

и дифференцировать требуемое число раз тождества

$$\begin{cases} f_1(\varphi(u,v,F(u,v)),\psi(u,v,F(u,v)),\chi(u,v,F(u,v)),u,v,F(u,v))=0,\\ f_2(\varphi(u,v,F(u,v)),\psi(u,v,F(u,v)),\chi(u,v,F(u,v)),u,v,F(u,v))=0,\\ f_3(\varphi(u,v,F(u,v)),\psi(u,v,F(u,v)),\chi(u,v,F(u,v)),u,v,F(u,v))=0,\end{cases}$$

чтобы найти дифференциалы функции F, используя найденные дифференциалы функций $\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$, $\chi(u,v,w)$.

Пример 8.32. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуем уравнение $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z}$, если $u=2x-z^2$, $v=\frac{y}{z}$.

Решение. В данном примере замена функции z не осуществляется, но, поскольку z входит формальным аргументом в выражения переменных u и v, применяем общий метод. Пусть $z=\widetilde{z}(u,v)=\widetilde{z}\left(2x-z^2,\frac{y}{z}\right)=z(x,y)$, где x и y — независимые переменные. Тогда

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\left(2dx-2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\right)+\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\cdot\frac{z\,dy-y\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)}{z^2}.$$

Приравнивая коэффициенты при dx и dy, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\left(2-2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\left(-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}\left(-2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\left(\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

откуда $\frac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}}{1+2z\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\frac{1}{z}\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}}{1+2z\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}}$. Подставляя эти выражения производных и $x=\frac{u+z^2}{2}$, $y=vz$ в исходное уравнение, имеем

$$v\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}(\widetilde{z}^2-u^2)=\widetilde{z}(u^2+\widetilde{z}^2).\qquad\square$$

Пример 8.33. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуем к новым переменным уравнение

$$(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz,$$

если $u=yz-x$, $v=xz-y$, $w=xy-z$.

Решение. Составим соответствующее тождество, содержащее функции $z=z(x,y)$ и $w=w(u,v)$ и записанное в виде равенства двух функций от независимых переменных x и y: $xy-z(x,y)=w(yz(x,y)-x,\,xz(x,y)-y)$.

Дифференцируя это тождество, получаем

$$x\,dy+y\,dx-\frac{\partial z}{\partial x}\,dx-\frac{\partial z}{\partial y}\,dy=$$
$$=\frac{\partial w}{\partial u}\Big(y\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\Big)+z\,dy-dx\Big)+\frac{\partial w}{\partial v}\Big(x\Big(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\Big)+z\,dx-dy\Big)$$

и приравниваем коэффициенты при dx и dy слева и справа:

$$y-\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\Big(y\frac{\partial z}{\partial x}-1\Big)+\frac{\partial w}{\partial v}\Big(x\frac{\partial z}{\partial x}+z\Big),\quad x-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\Big(y\frac{\partial z}{\partial y}+z\Big)+\frac{\partial w}{\partial v}\Big(x\frac{\partial z}{\partial y}-1\Big),$$

откуда находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+\dfrac{\partial w}{\partial u}-z\dfrac{\partial w}{\partial v}}{1+y\dfrac{\partial w}{\partial u}+x\dfrac{\partial w}{\partial v}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-z\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v}}{1+y\dfrac{\partial w}{\partial u}+x\dfrac{\partial w}{\partial v}}.$$

Подставляя эти выражения производных в исходное уравнение, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial v}(-2xyz-z^2+1-y^2-x^2)=0,\quad \text{т. е.}\quad \frac{\partial w}{\partial v}=0.$$ □

Пример 8.34. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуем к новым переменным уравнение

$$x^2\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+y^2\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},\quad \text{если } x=ue^w,\ y=ve^w,\ z=we^w.$$

Решение. Составим соответствующее тождество, содержащее функции $z(x,y)$ и $w(u,v)$ и записанное в виде равенства двух функций от независимых переменных u и v: $w(u,v)e^{w(u,v)}=z(ue^{w(u,v)},ve^{w(u,v)})$. Дифференцируя это тождество, имеем

$$(e^w+we^w)\Big(\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv\Big)=$$
$$=\frac{\partial z}{\partial x}\Big(e^w du+ue^w\Big(\frac{\partial w}{\partial u}\,du+\frac{\partial w}{\partial v}\,dv\Big)\Big)+\frac{\partial z}{\partial y}\Big(e^w du+ve^w\Big(\frac{\partial w}{\partial u}\,du+\frac{\partial w}{\partial v}\,dv\Big)\Big).$$

Сокращая на e^w и приравнивая коэффициенты при du и dv, получаем систему линейных уравнений относительно $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}=\Big(1+u\frac{\partial w}{\partial u}\Big)\frac{\partial z}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},\quad (1+w)\frac{\partial w}{\partial v}=u\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\Big(1+v\frac{\partial w}{\partial v}\Big)\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Решая эту систему, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(1+w)\dfrac{\partial w}{\partial u}}{1+u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(1+w)\dfrac{\partial w}{\partial v}}{1+u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}}.$$

Подставляя эти выражения производных и выражения $x=ue^w$, $y=ve^w$, $z=we^w$ в исходное уравнение, получаем

$$u^2\Big(\frac{\partial w}{\partial u}\Big)^2+v^2\Big(\frac{\partial w}{\partial v}\Big)^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}.$$ □

Пример 8.35. Преобразуем уравнение $(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, приняв x за функцию, а y и z за независимые переменные.

Решение. Составим тождество, содержащее функции $z(x,y)$ и $x(y,z)$ и записанное в виде равенства двух функций от независимых переменных y и z: $z=z(x(y,z),y)$. Дифференцируя это тождество, имеем

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{\partial z}{\partial x}\Big(\frac{\partial x}{\partial y}dy+\frac{\partial x}{\partial z}dz\Big)+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

и, приравнивая коэффициенты при dz и dy слева и справа, получаем уравнения $1=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial z}$, $0=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$, откуда $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\partial x/\partial z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-\partial x/\partial y}{\partial x/\partial z}$. Подставляя эти выражения производных в исходное уравнение, находим ответ: $y\dfrac{\partial x}{\partial y}=x-z$. □

Пример 8.36. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуем к новым переменным уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad \text{если } u=x+y,\ v=\frac{y}{x},\ w=\frac{z}{x}.$$

Решение. Составим тождество, содержащее функции $z=z(x,y)$ и $w=w(u,v)$ и записанное в виде равенства двух функций от независимых переменных x и y: $\dfrac{z(x,y)}{x}=w\Big(x+y,\dfrac{y}{x}\Big)$. Дифференцируя тождество, имеем:

$$\frac{x\,dz-z\,dx}{x^2}=\frac{\partial w}{\partial u}(dx+dy)+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2},$$

$$\frac{x^3d^2z-2x\,dx(x\,dz-z\,dx)}{x^4}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}(dx+dy)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}(dx+dy)\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}+$$
$$+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big(\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}\Big)^2+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{(-2x\,dx)(x\,dy-y\,dx)}{x^4}$$

и, раскрывая dz и d^2z и приравнивая коэффициенты при dx и dy и при dx^2, $dx\,dy$ и dy^2 слева и справа в этих соотношениях, получаем уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x}\Big)=\frac{\partial w}{\partial u}+x\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\Big)+$$
$$+\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{y}{x}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big)-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=$$
$$=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{2y}{x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+2\frac{\partial w}{\partial u};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\Big)=x\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\Big)+\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big)=$$
$$=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x}\Big)=x\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\Big)-\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}-$$
$$-\frac{y}{x}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big)+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\Big(1-\frac{y}{x}\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial w}{\partial u}.$$

Подставляя эти выражения производных в исходное уравнение, получаем $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big(\dfrac{y^2}{x^3}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2y}{x^2}\Big)=0$, или $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$. □

§ 8.7. Геометрические приложения

Определение. Если $f\colon G\to\mathbb{R}$, $G\subset\mathbb{R}^m$ — область, $f\in C^1(G)$, $x\in G$, то вектор с координатами $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right)$ называется *градиентом функции f в точке x* и обозначается $\operatorname{grad} f(x)$.

Пример 8.37. Пусть $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^3x_2+x_2^3x_3+x_3^3x_4+x_4^3x_1-x_1x_2x_3x_4$. Найдём градиент функции f в точке $x=(1,-1,2,-3)$.

Решение. Найдём частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \dfrac{\partial f}{\partial x_4}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=3x_1^2x_2+x_4^3-x_2x_3x_4;\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1^3+3x_2^2x_3-x_1x_3x_4;$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=x_2^3+3x_3^2x_4-x_1x_2x_4;\quad \frac{\partial f}{\partial x_4}=x_3^3+3x_4^2x_1-x_1x_2x_3.$$

Значения производных в точке $x=(1,-1,2,-3)$ являются координатами вектора $\operatorname{grad} f(x)$, т. е. $\operatorname{grad} f(x)=(-36,13,-40,37)$. □

Определение. Пусть $f\colon G\to\mathbb{R}$, область G содержится в $\mathbb{R}^m$, $x\in G$ и $\vec{l}=(l_1,l_2,\ldots,l_m)$, $\|\vec{l}\|=1$. Если существует предел

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x+t\vec{l})-f(x)}{t},$$

то его значение называется *производной функции f по направлению $\vec{l}$ в точке x* и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial l}(x)$.

Если $f\colon G\to\mathbb{R}$, $G\in\mathbb{R}^m$ — область и f дифференцируема в точке $x\in G$, то $\dfrac{\partial f}{\partial l}(x)$ по любому направлению $\vec{l}=(l_1,\ldots,l_m)$, $\|\vec{l}\|=1$, существует и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot l_i=(\operatorname{grad} f(x),\vec{l}),$$

где $(\cdot\,,\cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Следовательно, производная $\dfrac{\partial f}{\partial l}(x)$, т. е. скорость изменения функции f по направлению $\vec{l}$ в точке x, достигает наибольшего значения, если $\vec{l}$ совпадает с направлением $\operatorname{grad} f(x)$; максимум равен $\|\operatorname{grad} f(x)\|$.

Пример 8.38. Найдём производную функции $f=\operatorname{arctg}\dfrac{xz}{y}+\ln(x^2z^2+y^2)$ в точке $M_0(1,1,-1)$ по направлению градиента функции $\varphi(x,y,z)=xyz-x^2-y^2-z^2$ в этой точке.

Решение. Имеем $\operatorname{grad}\varphi(M_0)=(yz-2x,xz-2y,xy-2z)|_{M_0}=(-3,-3,3)$, $l=\left(-\dfrac{1}{\sqrt3},-\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)=\left.\frac{zy+2xz^2}{y^2+x^2z^2}\right|_{M_0}=\frac12;\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)=\left.\frac{2y-xz}{y^2+x^2z^2}\right|_{M_0}=\frac32;$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)=\left.\frac{xy+2x^2z}{y^2+x^2z^2}\right|_{M_0}=-\frac12;\quad \frac{\partial f}{\partial l}(M_0)=-\frac{1}{2\sqrt3}-\frac{3}{2\sqrt3}-\frac{1}{2\sqrt3}=-\frac{5}{2\sqrt3}.\quad □$$

Определение. Пусть Γ — кривая в $\mathbb{R}^3$ и $M_0 \in \Gamma$. Прямая L, проходящая через точку M_0, называется *касательной к кривой* Γ *в точке* M_0, если для расстояния от точки $M \in \Gamma$ до прямой L имеем $\rho(M, L) = o(\|M - M_0\|)$, $M \to M_0$.

Если кривая Γ задана равенствами $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$, точка M_0 имеет координаты $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ причём функции x, y и z дифференцируемы в точке t_0, а вектор $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ ненулевой, то касательная к Γ в точке M_0 существует и параллельна вектору $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$, т. е. её уравнение имеет вид

$$x = x(t_0) + tx'(t_0), \quad y = y(t_0) + ty'(t_0), \quad z = z(t_0) + tz'(t_0).$$

Определение. Если кривая Γ имеет в точке M_0 касательную, то плоскость, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной, называется *нормальной плоскостью к кривой* Γ *в точке* M_0.

Пример 8.39. Напишем уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой Γ: $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ в точке $M_0\left(\frac{3a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, a\right)$.

Решение. В сферических координатах $x = \rho\cos\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$ $(\rho \geqslant 0, -\pi < \varphi \leqslant \pi, -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$, получаем $\rho^2\cos^2\theta = 2a\rho\cos\theta\cos\varphi$ и $\rho = 2a$, так что $\cos\theta = \cos\varphi$, или, поскольку $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, имеем $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \pm\theta$. Точка M_0 отвечает координатам $\theta = \varphi = \frac{\pi}{6}$; следовательно, в окрестности точки M_0 можно взять любую из координат x, y, z или θ в качестве независимой переменной. Дифференцируя уравнения поверхностей, получаем $2x\,dx + y\,dy = 2a\,dx$, $2x\,dx + y\,dy + 2z\,dz = 0$. Разрешая эту систему и выражая dx и dy через dz, получим $dx = \frac{-z}{a}dz$, $dy = \frac{-z(a-x)}{ay}dz$. Итак, $\frac{dx}{dz}(M_0) = -1$, $\frac{dy}{dz}(M_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, и уравнение касательной к Γ в точке M_0 имеет вид $x = \frac{3a}{2} - t$, $y = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{t}{\sqrt{3}}$, $z = a + t$, а уравнение нормальной плоскости

$$\left(x - \frac{3a}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) - (z - a) = 0. \qquad \square$$

Определение. Пусть поверхность S задана в $\mathbb{R}^3$ непрерывной функцией $z = f(x, y)$, т. е. $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$, и пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Плоскость P, проходящая через точку M_0, называется *касательной плоскостью к поверхности* S *в точке* M_0, если для расстояния от точки $M \in S$ до плоскости P имеем $\rho(M, P) = o(\|M - M_0\|)$, $M \to M_0$.

Аналогично определяется касательная плоскость, если поверхность задана непрерывной функцией $x = x(y, z)$ или $y = y(x, z)$. Поверхность в данной точке может иметь только одну касательную плоскость.

Если поверхность S задана функцией $z = f(x, y)$, $f \in C^1(D)$ и область D содержится в $\mathbb{R}^2$, то касательная плоскость к S существует в каждой точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ и её уравнение имеет вид

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Если поверхность S задана уравнением $F(x,y,z)=0$, причём $F\in C^1(G)$, область G содержится в $\mathbb{R}^3$, $M_0(x_0,y_0,z_0)\in G$, $F(x_0,y_0,z_0)=0$ и хотя бы одна из производных $F'_x(M_0)$, $F'_y(M_0)$, $F'_z(M_0)$ отлична от нуля, то касательная плоскость к S существует в точке M_0 и имеет уравнение

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0.$$

Если поверхность S задана равенствами $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, причём $x,y,z\in C^1(D)$, область D содержится в $\mathbb{R}^2_{u,v}$, $M_0(u_0,v_0)\in D$, $x_0=$ $=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$, $z_0=z(u_0,v_0)$ и векторы

$$(x'_u(M_0),\, y'_u(M_0),\, z'_u(M_0)) \quad \text{и} \quad (x'_v(M_0),\, y'_v(M_0),\, z'_v(M_0))$$

неколлинеарны, то касательная плоскость к S в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ существует и имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_u(M_0) & y'_u(M_0) & z'_u(M_0) \\ x'_v(M_0) & y'_v(M_0) & z'_v(M_0) \end{vmatrix}=0.$$

При выполнении сформулированных выше условий параметрического и неявного задания поверхности S в полученном уравнении касательной плоскости хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля, т. е. этому уравнению действительно отвечает некоторая плоскость в $\mathbb{R}^3$. Равенство нулю коэффициента при какой-нибудь переменной в уравнении касательной плоскости в точке M_0 геометрически означает, что эта плоскость параллельна соответствующей оси координат. Аналитически это значит, что в окрестности точки M_0 не выполнены условия теоремы существования для этой координаты как функции остальных двух.

Пример 8.40. Напишем уравнение касательной плоскости к сфере x^2+ $+y^2+z^2=a^2$, $a\neq 0$, в некоторой её точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Решение. Пусть $z_0>0$. Тогда в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) сфера задаётся функцией $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Поскольку $x_0^2+y_0^2=a^2-z_0^2<a^2$, можно считать эту окрестность такой, что производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

непрерывны в ней. Итак, условия существования касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $z_0>0$, выполнены, и её уравнение имеет вид

$$z-z_0=-\frac{x_0}{z_0}(x-x_0)-\frac{y_0}{z_0}(y-y_0),$$

Точно так же проводятся рассуждения для точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, если $z_0<0$. Если же $z_0=0$, то z не является гладкой функцией переменных x и y ни в какой окрестности точки (x_0,y_0). Поскольку $x_0^2+y_0^2=a^2$ при $z_0=0$, значения x_0 и y_0 одновременно в нуль не обращаются. Если $x_0\neq 0$, то в окрестности точки $(y_0,0)$ переменная x представляет собой гладкую функцию y и z; если $y_0\neq 0$, то в окрестности точки $(x_0,0)$ переменная y является гладкой функцией x

и z. В каждом из этих случаев уравнение касательной плоскости находится тем же методом, как и в случае $z_0>0$, и имеет вид

$$x-x_0=-\frac{y_0}{x_0}(y-y_0)\quad \text{при } x_0\neq 0,\qquad y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)\quad \text{при } y_0\neq 0.$$

Все эти случаи объединяются, если использовать формулу уравнения касательной плоскости для неявного задания поверхности.

Обозначим $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2$, тогда $F'_x=2x$, $F'_y=2y$, $F'_z=2z$, и так как ни в какой точке сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ все три координаты одновременно не обращаются в нуль, уравнение касательной плоскости к этой сфере в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид $x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$, т. е. $x_0x+y_0y+z_0z=a^2$. Очевидно, что при соответствующих условиях это уравнение касательной плоскости совпадает с найденным выше. □

Определение. Если поверхность S имеет в точке $M_0\in S$ касательную плоскость P, то прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно P, называется *нормалью к* S в точке M_0, а единичный вектор, перпендикулярный к P, называется *нормальным вектором к поверхности* S в точке M_0.

Градиент функции $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ в точке M_0, если он существует и не равен нулю, пропорционален нормальному вектору поверхности уровня функции f, проходящей через точку M_0, т. е. поверхности $f(x,y,z)=f(M_0)$.

Пример 8.41. Напишем уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной уравнением $2^{y/z}+2^{z/x}=6$, в точке $M_0(1,2,2)$.

Решение. Если $F(x,y,z)=2^{y/z}+2^{z/x}-6$, то

$$F'_x=-\frac{z}{x^2}2^{z/x}\ln 2,\quad F'_y=\frac{1}{z}2^{y/z}\ln 2,\quad F'_z=\frac{1}{x}2^{z/x}\ln 2-\frac{y}{z^2}2^{y/z}\ln 2.$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости имеет вид

$$-8\ln 2\cdot(x-1)+\ln 2\cdot(y-2)+3\ln 2\cdot(z-2)=0,\quad \text{или}\quad 8x-y-3z=0.$$

Уравнение нормали в параметрическом виде есть $x=1+8t$, $y=2-t$, $z=2-3t$, или в каноническом $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2}{-3}$. □

Пример 8.42. Напишем уравнение касательной плоскости и нормали к цилиндру $y^2=2px$, $p>0$, в произвольной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ этого цилиндра.

Решение. Цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz, не может быть задана функцией $z=z(x,y)$. В данном случае можно рассматривать эту поверхность как определённую функцией $x=\dfrac{y^2}{2p}$. Тогда $\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{y}{p}$, $\dfrac{\partial x}{\partial z}=0$ и уравнение касательной плоскости в точке M_0 имеет вид $x-x_0=\dfrac{y_0}{p}(y-y_0)$, или $p(x-x_0)-y_0(y-y_0)=0$. Можно рассматривать цилиндр и как поверхность, определённую неявным соотношением $y^2-2px=0$.

Уравнение нормали к цилиндру в точке M_0 имеет вид

$$x=x_0+pt,\quad y=y_0-y_0t,\quad z=z_0.$$

В любой точке цилиндра касательная плоскость вертикальна (параллельна оси Oz), а нормаль горизонтальна (перпендикулярна оси Oz). □

Пример 8.43. Напишем уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной соотношениями $x=u+v^2$, $y=u^2-v^3$, $z=2uv$, в точке $M_0(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0))$, если $u_0=2$, $v_0=1$.

Решение. Имеем $x'_u=1$, $x'_v=2v$; $y'_u=2u$, $y'_v=-3v^2$; $z'_u=2v$, $z'_v=2u$;

$$\begin{aligned} x_0=x(u_0,v_0)&=3, & y_0=y(u_0,v_0)&=3, & z_0=z(u_0,v_0)&=4;\\ x'_u(u_0,v_0)&=1, & x'_v(u_0,v_0)&=2; & y'_u(u_0,v_0)&=4,\\ y'_v(u_0,v_0)&=-3; & z'_u(u_0,v_0)&=2, & z'_v(u_0,v_0)&=4. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости в точке M_0 имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-4\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=0, \quad \text{т.е. } 2x-z-2=0,$$

а уравнение нормали в точке s_0: $x=3+2t$, $y=3$, $z=4-t$. □

Пример 8.44. Найдём производную функции $u=xyz$ в точке (x_0,y_0,z_0), лежащей на эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, по направлению внутренней нормали к эллипсоиду в этой точке.

Решение. Один из нормальных векторов к поверхности $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке (x_0,y_0,z_0) имеет координаты $\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)$. Геометрические и/или арифметические соображения показывают, что единичный вектор внутренней нормали должен иметь координаты, противоположные по знаку координатам точки, в которой он определяется. Следовательно, обозначая этот вектор через $\vec{n}$, имеем

$$\vec{n}=-\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{x_0y_0z_0\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}=-\frac{x_0y_0z_0(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{\sqrt{x_0^2b^4c^4+y_0^2a^4c^4+z_0^2a^4b^4}}. \qquad \square$$

§ 8.8. Экстремумы функций нескольких переменных

Определение. Функция $f\colon E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^m$, имеет *локальный максимум* (*локальный минимум*) во внутренней точке x_0 множества E, если существует такая окрестность $U(x_0)\subset E$ точки x_0, что $f(x)\leqslant f(x_0)$ $(f(x)\geqslant f(x_0))$ для всех $x\in U(x_0)$. Если при $x\in\mathring{U}(x_0)$ имеет место строгое неравенство $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$, то локальный максимум (минимум) называется строгим, в противном случае — нестрогим.

Определение. Локальные максимумы и минимумы функции называются её *локальными экстремумами*.

Точки, в которых функция имеет локальный экстремум, называются *точками экстремума*, или *экстремальными* точками.

Определение. Пусть $f: G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^m$ — область. Точка $x_0 \in G$ называется *критической точкой* функции f, если f непрерывна в x_0 и каждая из частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, в этой точке или не существует, или равна нулю.

Обратим внимание на то, что критическая точка функции обязательно есть внутренняя точка её множества определения.

Необходимое условие экстремума: если область G содержится в $\mathbb{R}^m$ и в точке $x_0 \in G$ функция $f: G \to \mathbb{R}$ имеет локальный экстремум, то x_0 — критическая точка функции.

Иначе говоря, экстремальная точка функции, являющаяся внутренней точкой области определения, есть её критическая точка.

Достаточное условие экстремума: пусть область G содержится в $\mathbb{R}^m$, $f: G \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(G)$ и $x_0 \in G$ — критическая точка f. Тогда

а) если квадратичная форма $d^2 f(x_0)$ положительно определена, то в точке x_0 функция f имеет строгий локальный минимум;

б) если квадратичная форма $d^2 f(x_0)$ отрицательно определена, то в точке x_0 функция f имеет строгий локальный максимум;

в) если квадратичная форма $d^2 f(x_0)$ знакопеременная, то в точке x_0 функция f не имеет экстремума; точка x_0 в этом случае называется *седловой* точкой функции f.

Исследование определённости квадратичной формы $d^2 f(x_0)$ может быть проведено с помощью *критерия Сильвестра*: квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$ положительно определена тогда и только тогда, когда положительны все главные миноры матрицы $(a_{i,j})$, и отрицательно определена тогда и только тогда, когда $a_{11} < 0$ и при переходе от любого главного минора к главному минору следующего порядка знак минора меняется (напомним, что главным минором порядка k называется минор, образованный пересечением первых k столбцов и первых k строк данной матрицы). Если нестрогие неравенства соответствующих знаков нарушаются для главных миноров, то форма является знакопеременной.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ критерий Сильвестра состоит в следующем. Пусть область G содержится в $\mathbb{R}^2$, $f: G \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(G)$ и $M_0 \in G$ — критическая точка функции f. Обозначим $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)$. Тогда:

а) если $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$ и $A > 0$, то в точке M_0 функция f имеет строгий локальный минимум;

б) если $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$ и $A < 0$, то в точке M_0 функция f имеет строгий локальный максимум;

в) если $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$, то точка M_0 — седловая точка функции f (в частности, M_0 не есть точка максимума или минимума).

Пример 8.45. Исследуем на экстремум функцию $u = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$.

Решение. Координаты x, y, z критической точки гладкой функции u должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 6x^2yz - 2x = 0, \\ 2x^3z - 2y = 0, \\ 2x^3y - 2z = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x^2yz = x, \\ x^3z = y, \\ x^3y = z. \end{cases}$$

Отсюда получаем пять критических точек:

$$M_0(0,0,0), \quad M_1\Big(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big), \quad M_2\Big(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big),$$
$$M_3\Big(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big), \quad M_4\Big(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

Так как $u \in C^2(G)$ для любой области $G \subset \mathbb{R}^3$, можно исследовать поведение функции u в стационарных точках с помощью достаточного условия экстремума:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12xyz - 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x^2 z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 6x^2 y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 2x^3.$$

1) Для M_0 отсюда получаем $d^2u(M_0) = -2\,dx^2 - 2\,dy^2 - 2\,dz^2$. Поскольку $d^2u(M_0)$ является отрицательно определённой квадратичной формой, в точке M_0 функция u имеет строгий локальный максимум.

2) Применим критерий Сильвестра для анализа квадратичной формы

$$d^2u(M_1) = 2dx^2 - 2dy^2 - 2dz^2 + 4\sqrt{3}\,dx\,dy + 4\sqrt{3}\,dx\,dz + 4\,dy\,dz.$$

Выпишем матрицу этой формы и её главные миноры:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad 2 > 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} < 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{vmatrix} > 0.$$

Распределение знаков этих миноров показывает, что данная квадратичная форма знакопеременная, следовательно, в точке M_1 функция u не имеет экстремума: точка M_1 есть седловая точка функции u.

Точно так же устанавливается, что точки M_2, M_3 и M_4 также седловые точки функции u. Таким образом, у функции u единственная точка экстремума — точка максимума $M_0(0,0,0)$, $u(0,0,0) = 0$. □

Пусть $f : G \to \mathbb{R}$, область G содержится в $\mathbb{R}^m$ и $x_0 \in G$ — критическая точка функции f. Если f не принадлежит классу $C^2(G)$ или квадратичная форма $d^2 f(x_0)$ полуопределена, т. е. неположительна или неотрицательна, то приходится непосредственно сравнивать значение $f(x_0)$ со значениями $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, ибо сформулированное достаточное условие неприменимо.

Пример 8.46. Исследуем на экстремум функцию $z=(1-x^2)\sqrt[3]{y^2}(1-y)$.
Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x\sqrt[3]{y^2}(1-y);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(1-x^2)(2-5y)}{3\sqrt[3]{y}}\quad (y\neq 0).$$

Пусть $M_0(x_0,0)$ и $M(x_0,y)$, $|x_0|\neq 1$, тогда

$$\lim_{y\to 0}\frac{z(M)-z(M_0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{(1-x_0^2)\sqrt[3]{y^2}(1-y)}{y}=\infty.$$

Если же $M_1(1,0)$ и $M(1,y)$, то $z(M)-z(M_1)=0$, следовательно, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_1)=$ $=0$. Точно так же $\frac{\partial z}{\partial y}(M_2)=0$, где $M_2(-1,0)$. Поэтому все точки оси Ox, кроме точек M_1 и M_2, являются такими критическими точками функции $z(x,y)$, в которых $\frac{\partial z}{\partial y}$ не существует. В точках M_1 и M_2 выполняются равенства $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, т. е. эти точки также критические, но в любой окрестности как точки M_1, так и точки M_2 имеются точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial y}$ не существует. Поэтому для любой окрестности $U(M)$ произвольной точки M оси Ox функция z не является функцией класса $C^2(U(M))$. Рассмотрим точку $M_0(x_0,0)$, $|x_0|<1$, и такую окрестность $U(M_0)$, что для всех $(x,y)\in U(M_0)$ имеем $|x|<1$, $|y|<1$, тогда для всех $(x,y)\in U(M_0)$ имеем $z(x,y)\geqslant 0=z(x_0,0)$. Итак, в точке M_0 функция $z(x,y)$ имеет локальный минимум (нестрогий). Точно так же проверяется, что во всех точках $M_1(x_1,0)$, $|x_1|>1$, функция $z(x,y)$ имеет нестрогий локальный максимум.

Рассмотрим теперь произвольную окрестность $U(M_2)$ точки $M_2(1,0)$. Если $(x,y)\in U(M_2)$, $x>1$, $0<|y|<1$, то $z(x,y)<0=z(1,0)=z(M_2)$. Если же $(x,y)\in U(M_2)$, $0<x<1$, $0<|y|<1$, то $z(x,y)>0=z(1,0)=z(M_2)$, т. е. в точке $M_2(1,0)$ функция $z(x,y)$ не имеет экстремума. Точно так же проверяется, что $M_3(-1,0)$ — не точка экстремума функции z.

Кроме точек оси Ox критическими точками функции $z(x,y)$ являются точки $M_4(1,1)$, $M_5(-1,1)$, $M_6\left(0,\frac{2}{5}\right)$. Для анализа поведения функции $z(x,y)$ в этих точках можно применить достаточное условие:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2\sqrt[3]{y^2}(1-y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(1-x^2)\left(-\frac{2}{9}\right)y^{-4/3}(1+5y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2}{3}xy^{-1/3}(5y-2).$$

Отсюда $d^2z(M_6)=-\frac{6}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2}\,dx^2-\frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\,dy^2$. Поскольку квадратичная форма $d^2z(M_6)$ отрицательно определена, в точке $M_6\left(0,\frac{2}{5}\right)$ функция $z(x,y)$ имеет строгий локальный максимум. Так как $d^2z(M_4)=4\,dx\,dy$ есть знакопеременная квадратичная форма, в точке $M_4(1,1)$ функция $z(x,y)$ не имеет экстремума: M_4 — седловая точка функции $z(x,y)$. Аналогично проверяется, что M_5 — седловая точка функции $z(x,y)$. □

Пример 8.47. Исследуем на экстремум функцию $z=(1+x^2)\sqrt[3]{y}$.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sqrt[3]{y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1+x^2}{3\sqrt[3]{y^2}}\quad (y\neq 0),$$

поэтому ни одна точка вне оси Ox не является критической. Пусть $P_0(x_0,0)$ и $P(x_0,y)$, тогда

$$\lim_{y\to 0}\frac{z(P)-z(P_0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+x_0^2)\sqrt[3]{y}}{y}=\infty.$$

Таким образом, все точки оси Ox являются для функции z критическими точками, в которых $\frac{\partial z}{\partial y}$ не существует. Из определения $z(x,y)$ получаем, что если $y>0$, то $z(x_0,y)>0=z(x_0,0)$, если $y<0$, то $z(x_0,y)<0=z(x_0,0)$ для любого x_0. Итак, каждая точка оси Ox является критической точкой функции $z(x,y)$, в которой нарушены условия гладкости, и каждая точка оси Ox не является точкой экстремума. □

Из двух предыдущих примеров видно, что если в критической точке функция $z(x,y)$ не имеет хотя бы одной частной производной, то эта точка может быть как точкой локального минимума, так и точкой локального максимума, а также не иметь экстремума в этой точке.

Пример 8.48. Исследуем на экстремум функцию $z=(x-y)^2+(y^3-1)^4-1$.

Решение. Поскольку функция $z(x,y)$ гладкая, координаты x и y её критической точки должны удовлетворять системе

$$\begin{cases}2(x-y)=0,\\ -2(x-y)+12y^2(y^3-1)^3=0.\end{cases}$$

Отсюда находим две критические точки $M_0(0,0)$ и $M_1(1,1)$. Получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2+24y(y^3-1)^3+108y^4(y^3-1)^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2.$$

Поэтому $d^2z(M_0)=d^2z(M_1)=2\,dx^2+2\,dy^2-4\,dx\,dy=2(dx-dy)^2$, откуда видно, что это полуопределённая квадратичная форма (неотрицательная). Поскольку $z(M_1)=-1$ и $z(M)>-1$ для любой точки $M\neq M_1$, в точке $M_1(1,1)$ функция $z(x,y)$ имеет строгий локальный минимум (даже абсолютный).

Рассмотрим поведение функции $z(x,y)$ в произвольной окрестности $U(M_0)$ точки $M_0(0,0)$. Если $M(x,0)\in U(M_0)$, $x\neq 0$, то $z(M)=x^2>0=z(M_0)$; если же $M(y,y)\in U(M_0)$, $0<y<1$, то $z(M)=(y^3-1)^4-1<0=z(M_0)$.

Следовательно, точка M_0 — седловая точка функции $z(x,y)$. □

Итак, если $f\in C^2(U(M_0))$ для некоторой окрестности $U(M_0)\subset\mathbb{R}^m$ точки $M_0\in\mathbb{R}^m$, точка M_0 — критическая точка функции f и $d^2f(M_0)$ — полуопределённая квадратичная форма, то точка M_0 может быть как точкой локального экстремума, так и точкой, в которой функция f не имеет экстремума.

Заметим, что если $f\in C^2(U(M_0))$ для некоторой окрестности $U(M_0)\subset\mathbb{R}^m$ точки $M_0\in\mathbb{R}^m$ и в точке M_0 функция $f(x,y)$ имеет нестрогий экстремум, то квадратичная форма $d^2f(M_0)$ обязательно будет полуопределённой.

Пример 8.49. Исследуем на экстремум функцию $z=\dfrac{xy}{1+x^2y^2}$.

Решение. Поскольку

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2},$$

критическими точками функции $z(x,y)$ является точка $M_0(0,0)$ и все точки $M(x,y)$: $xy=\pm 1$. Из неравенства $|2xy|\leqslant 1+x^2y^2$ получаем, что $|z|\leqslant 1/2$. В каждой точке линии $xy=1$ имеем $z(x,y)=1/2$; в каждой точке линии $xy=-1$ имеем $z(x,y)=-1/2$. Следовательно, в каждой точке линии $xy=1$ функция z имеет нестрогий максимум, в каждой точке линии $xy=-1$ — нестрогий минимум. Найдём вторые частные производные функции z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2xy^3\frac{x^2y^2-3}{(1+x^2y^2)^3},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3y\frac{x^2y^2-3}{(1+x^2y^2)^3},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1-6x^2y^2+x^4y^4}{(1+x^2y^2)^3}.$$

В точке $M(x,y)$, где $xy=1$ или $xy=-1$, квадратичная форма $d^2z(M)=$ $=-\dfrac{\operatorname{sgn}(xy)}{2}(y^2\,dx^2+x^2\,dy^2\pm 2xy\,dx\,dy)$ полуопределена, как и должно быть в точках нестрогого экстремума.

Квадратичная форма $d^2z(M_0)=2\,dx\,dy$ — знакопеременная, следовательно, $M_0(0,0)$ — седловая точка функции $z(x,y)$. □

Определение. Пусть область G содержится в $\mathbb{R}^m$, переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$ связаны системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_m)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ F_k(x_1,\dots,x_m)=0, \quad k<m,\ F_i\in C^1(G),\ 1\leqslant i\leqslant k,\end{cases}$$

и точка $x_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)\in G$ такова, что $F_i(x_0)=0$, $1\leqslant i\leqslant k$. Функция $f\colon G\to\mathbb{R}$ имеет *условный максимум* (*минимум*) *в точке* x_0, если существует такая окрестность $U(x_0)\in G$ точки x_0, что $f(x_0)\geqslant f(x)$ ($f(x_0)\leqslant f(x)$) для всех $x\in U(x_0)$, для которых $F_i(x)=0$, $1\leqslant i\leqslant k$.

(Другими словами, сравниваются между собой значения функции, которые она принимает на множестве тех точек $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям связи $F_i(x_1,\dots,x_m)=0$, $1\leqslant i\leqslant k<m$.)

Далее предполагаем, что функции f и F_i, $1\leqslant i\leqslant k<m$, принадлежат классу $C^2(G)$ и ранг матрицы $\dfrac{D(F_1,\dots,F_k)}{D(x_1,\dots,x_m)}$ в каждой точке $x_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)\in G$ равен k. Для определённости предположим, что $\left|\dfrac{D(F_1,\dots,F_k)}{D(x_1,\dots,x_k)}\right|\Bigg|_{x_0}\neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0(x_{k+1}^0,\dots,x_m^0)$ система уравнений $F_i(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots,x_m)=0$, $1\leqslant i\leqslant k<m$, определяет k функций класса $C^2(U(M_0))$ от $(m-k)$ независимых аргументов: $x_1=x_1(x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_m)$, $x_2=x_2(x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_m)$, …, $x_k=x_k(x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_m)$.

Таким образом, в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки M_0 функция f с учётом условий связи $F_i(x)=0$, $1\leqslant i\leqslant k<m$, представляет функцию класса

$C^2(U(M_0))$ от $(m-k)$ независимых аргументов:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1(x_{k+1}, \ldots, x_m), \ldots, x_k(x_{k+1}, \ldots, x_m), x_{k+1}, \ldots, x_m) = \\ = f^*(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_m).$$

Если $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ есть точка локального условного экстремума функции f при условиях $F_i(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, то точка $(x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \ldots, x_m^0)$ есть точка обычного локального экстремума функции $f^*(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_m)$.

Итак, исследование условного локального экстремума функции f сводится к уже разобранному исследованию обычного локального экстремума некоторой функции меньшего числа переменных.

Метод множителей Лагранжа

Пусть G — область в $\mathbb{R}^m$, функции $f\colon G \to \mathbb{R}$ и $F_i\colon G \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, принадлежат классу $C^2(G)$ и ранг матрицы $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_k)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$ во всех точках $x \in G$ равен k.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Составим функцию Лагранжа

$$L(x; \lambda) = L(x_1, x_2, \ldots, x_m; \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x).$$

Точка $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ может быть точкой условного экстремума функции f при условиях $F_i(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, только тогда, когда существуют такие числа $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_k^0$, что точка $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, удовлетворяющая условиям связи $F_i(x_1, \ldots, x_m) = 0$, является критической точкой функции Лагранжа $L(x; \lambda)$ при $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_k^0)$. При этом числа $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_k^0$ называются *множителями Лагранжа*, соответствующими точке x_0.

Дальнейшее исследование поведения функции f в выделенных точках возможного локального условного экстремума проводится анализом второго дифференциала функции $L(x; \lambda)$ с учётом условий связи. В предположении максимальности ранга якобиевой матрицы условий связи в точке условного экстремума дифференциалы зависимых переменных могут быть выражены линейно через дифференциалы независимых переменных, и, подставляя эти линейные выражения в формулу для второго дифференциала функции Лагранжа, мы получаем квадратичную форму от дифференциалов независимых переменных, и именно её положительная или отрицательная определённость или знакопеременность отвечает наличию условного минимума или условного максимума или отсутствию экстремума соответственно. Если выражение $d^2L(x; \lambda)$ в точке x_0 есть знакоопределённая квадратичная форма, то и с учётом условий связи выражение для $d^2L(x; \lambda)$ останется таковым, т. е. экстремальной точке функции $L(x; \lambda)$ соответствует точка условного экстремума функции f при условиях $F_i(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$. Если же выражение $d^2L(x; \lambda)$ есть знакопеременная квадратичная форма, то с учётом условий связи выражение d^2L уже может быть знакоопределённой квадратичной формой.

Пример 8.50. Найдём экстремальные значения функции $z=x^2-y^2$ на прямой $2x-y-3=0$.

Решение. Запишем функцию Лагранжа $L(x, y; \lambda)=x^2-y^2+\lambda(2x-y-3)$. Координаты критических точек функции $L(x, y; \lambda)$ находим из системы

$$\begin{cases} 2x+2\lambda=0, \\ -2y-\lambda=0, \\ 2x-y-3=0, \end{cases}$$

отсюда $x=2$, $y=1$, $\lambda=-2$. В точке $(2, 1; -2)$ выражение $d^2L(x, y; -2)$, равное $2\,dx^2-2\,dy^2$, есть знакопеременная квадратичная форма, следовательно, точка $(2, 1; -2)$ не экстремальная для функции $L(x, y; \lambda)$, но эта точка экстремальна для функции $z=x^2-y^2$ при условии связи. В самом деле, из условия связи имеем $2\,dx=dy$. Подставляя это в d^2L, получаем выражение $2\,dx^2-8\,dx^2=-6\,dx^2$; это — отрицательно определённая квадратичная форма, и поэтому точка $(2, 1)$ является точкой локального максимума функции $z=x^2-y^2$ при условии связи $2x-y-3=0$. □

Пример 8.51. Исследуем, имеет ли функция $u(x, y, z)=xy+xz+yz$ условный экстремум в точке $M_0(1, 1, 1)$, если $2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0$.

Решение. Напишем функцию Лагранжа

$$L(x, y, z; \lambda)=xy+xz+yz+\lambda(2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17).$$

Координаты x, y, z, λ критической точки функции $L(x, y, z; \lambda)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} y+z+6\lambda x^2y^2z+8\lambda x=0, \\ x+z+4\lambda x^3yz+10\lambda y=0, \\ x+y+2\lambda x^3y^2+12\lambda z=0, \\ 2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0. \end{cases}$$

Проверка показывает, что $x=1$, $y=1$, $z=1$, $\lambda=-1/7$ есть решение этой системы. Следовательно, в точке $M_0(1, 1, 1)$ возможен условный экстремум функции $u(x, y, z)$ с условием $2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0$, причём соответствующий множитель Лагранжа λ равен $-1/7$. Находим второй дифференциал функции Лагранжа: $d^2L(x, y, z; \lambda)=2\,dx\,dy+2\,dx\,dz+2\,dy\,dz$. В силу условия связи

$$\begin{aligned} d(2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17)&= \\ &=6x^2y^2z\,dx+4yx^3z\,dy+2x^3y^2\,dz+8x\,dx+10y\,dy+12z\,dz=0, \end{aligned}$$

поэтому при $x=y=z=1$ имеем $6\,dx+4\,dy+2\,dz+8\,dx+10\,dy+12\,dz=0$, откуда $dz=-dx-dy$, и, следовательно, в точке $(1, 1, 1; -1/7)$

$$d^2L=2\,dx\,dy-2\,dx^2-2\,dx\,dy-2\,dy^2-2\,dx\,dy=-2(dx^2+dx\,dy+dy^2).$$

Поскольку $d^2L(x, y, z; -1/7)$ в точке $(1, 1, 1)$ является отрицательно определённой квадратичной формой, точка $M_0(1, 1, 1)$ есть точка условного максимума функции $u=xy+yz+zx$ при условии $2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0$. □

Иногда можно выяснить характер точек, полученных методом Лагранжа, не прибегая к анализу второго дифференциала функции Лагранжа.

Пример 8.52. Найдём точки условного экстремума функции
$$z = 2x^3 + 3a^2x + 2y^3 + 3a^2y, \quad \text{если } x^2 + y^2 = a^2 \ (a > 0).$$

Решение. Запишем функцию Лагранжа
$$L(x, y; \lambda) = 2x^3 + 3a^2x + 2y^3 + 3a^2y + \lambda(x^2 + y^2 - a^2).$$
Координаты x, y, λ критической точки функции $L(x, y; \lambda)$ должны удовлетворять системе
$$\begin{cases} 6x^2 + 3a^2 + 2\lambda x = 0, \\ 6y^2 + 3a^2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - a^2 = 0. \end{cases}$$
Отсюда получаем критические точки $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, -3\sqrt{2a}\right)$ и $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2a}}\right)$.

Множество $K = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 = a^2\}$ — компакт в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, непрерывная функция z на этом множестве должна принимать максимальное и минимальное значения. Из предыдущего рассмотрения видно, что эти значения функция z принимает в одной из точек $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, так как в других точках множества K функция z заведомо не имеет экстремума. Поскольку $z\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 4a\sqrt[3]{2}$, $z\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -4a\sqrt[3]{2}$, то $M_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ — точка условного максимума, а точка $M_2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ — точка условного минимума функции $z = 2x^3 + 3a^2x + 2y^3 + 3a^2y$ при условии $x^2 + y^2 = a^2$. □

Пример 8.53. На сфере $S = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ расположены три материальные точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ с массами m_1, m_2, m_3. При каком положении точки $P(x, y, z)$ на сфере S сумма $\sum\limits_{i=1}^{3} \|P - P_i\|^2 \cdot m_i$ — момент инерции данной системы точек относительно точки P — будет минимальной?

Решение. Необходимо найти условный минимум функции
$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{3} m_i\big((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\big),$$
если $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Запишем функцию Лагранжа
$$L(x, y, z; \lambda) = \sum_{i=1}^{3} m_i\big((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\big) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2).$$
Для координат x, y, z, λ критической точки функции $L(x, y, z; \lambda)$ получаем
$$\begin{cases} 2m_1(x - x_1) + 2m_2(x - x_2) + 2m_3(x - x_3) + 2\lambda x = 0, \\ 2m_1(y - y_1) + 2m_2(y - y_2) + 2m_3(y - y_3) + 2\lambda y = 0, \\ 2m_1(z - z_1) + 2m_2(z - z_2) + 2m_3(z - z_3) + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:

$$\widetilde{x}_{1,2}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3+\lambda_{1,2}},\quad \widetilde{y}_{1,2}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3+\lambda_{1,2}},\quad \widetilde{z}_{1,2}=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3+\lambda_{1,2}},$$

где $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{a^2\sum\limits_{i=1}^{3}m_i^2+2\sum\limits_{i,j=1,i\neq j}^{3}m_im_j(x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j)}-(m_1+m_2+m_3)$.

Итак, точкой P может быть одна из двух точек: $(\widetilde{x}_1,\widetilde{y}_1,\widetilde{z}_1)$ и $(\widetilde{x}_2,\widetilde{y}_2,\widetilde{z}_2)$, а именно та, для которой значение функции $u(P)$ меньше, в зависимости от конкретных чисел x_i, y_i, z_i, m_i, $1\leqslant i\leqslant 3$. □

Выделение точек условного экстремума входит составной частью в решение задачи нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f\colon E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^m$, на множестве $D\subset E$. Действительно, если эти значения функция f принимает во внутренней точке x_0 множества D, то точка x_0 есть точка обычного локального экстремума функции f; если наибольшее или наименьшее значение функция f принимает в граничной точке x_1 множества D, которая является внутренней точкой рассматриваемой части границы множества D, то точка x_1 есть точка условного локального экстремума функции f при условии, что рассматриваются только граничные точки множества D.

Пример 8.54. Найдём наибольшее и наименьшее значения функции

$$u=x^2-2ax+y^2-2ay+z^2-2az\quad (a>0)$$

в полушаре $D=\{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2\leqslant 4a^2,\ z\geqslant 0\}$.

Решение. Поскольку непрерывная функция u рассматривается на компакте, существуют такие точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и $\widetilde{M}_0(\widetilde{x}_0,\widetilde{y}_0,\widetilde{z}_0)$, что

$$u(M_0)=\max_{M\in D}u(M),\quad u(\widetilde{M}_0)=\min_{M\in D}u(M).$$

Если эти точки лежат внутри полушара, то их координаты должны удовлетворять уравнениям $2x-2a=0$, $2y-2a=0$, $2z-2a=0$. Отсюда видно, что внутри полушара есть только одна возможная экстремальная точка $M_1(a,a,a)$.

Возможную экстремальную точку на полусфере

$$S=\{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2=4a^2,\ z\geqslant 0\}$$

ищем как точку условного экстремума функции $u=x^2-2ax+y^2-2ay+z^2-2az$ при условии $x^2+y^2+z^2=4a^2$, $z\geqslant 0$.

Запишем функцию Лагранжа

$$L(x,y,z;\lambda)=x^2-2ax+y^2-2ay+z^2-2az+\lambda(x^2+y^2+z^2-4a^2).$$

Координаты критической точки функции $L(x,y,z;\lambda)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases}2x-2a+2\lambda x=0, & 2y-2a+2\lambda y=0,\\ 2z-2a+2\lambda z=0, & x^2+y^2+z^2-4a^2=0.\end{cases}$$

Отсюда получаем, что возможной экстремальной точкой на полусфере S является точка $M_2\Big(\frac{2a}{\sqrt3},\frac{2a}{\sqrt3},\frac{2a}{\sqrt3}\Big)$.

Далее ищем возможную экстремальную точку $M_3(x, y, 0)$ на круге $x^2 + y^2 \leqslant 4a^2$, $z = 0$. Так как в точках этого круга $u(x, y, z) = u(x, y, 0) = x^2 - 2ax + y^2 - 2ay$, координаты экстремальной точки, лежащей внутри этого круга, должны удовлетворять системе $\begin{cases} 2x - 2a = 0, \\ 2y - 2a = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

Отсюда получаем $M_3(a, a, 0)$. Наконец, осталось найти возможную экстремальную точку $M_4(x, y, 0)$ на окружности $x^2 + y^2 = 4a^2$, $z = 0$. Запишем функцию Лагранжа

$$L(x, y, z; \lambda, \mu) = x^2 - 2ax + y^2 - 2ay + z^2 - 2az + \lambda(x^2 + y^2 - 4a^2) + \mu z.$$

Координаты критических точек этой функции должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2x - 2a + 2\lambda x = 0, \quad 2y - 2a + 2\lambda y = 0, \\ 2z - 2a + \mu = 0, \quad x^2 + y^2 = 4a^2, \quad z = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем $M_4(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, 0)$, $M_5\big(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}, 0\big)$ — две возможные экстремальные точки на окружности $x^2 + y^2 = 4a^2$, $z = 0$. Итак, наибольшее и наименьшее значения в полушаре D функция u может достигать только в одной из пяти точек: $M_1(a, a, a)$, $M_2\Big(\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2a}{\sqrt{3}}\Big)$, $M_3(a, a, 0)$, $M_4(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a, 0)$, $M_5(-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a, 0)$. Получаем: $u(M_1) = -3a^2$, $u(M_2) = -4(\sqrt{3} - 1)a^2$, $u(M_3) = -2a^2$, $u(M_4) = -4(\sqrt{2} - 1)a^2$, $u(M_5) = 4a^2(\sqrt{2} + 1)$,

$$\max_{M \in D} u(M) = u(M_5) = 4a^2(\sqrt{2} + 1), \quad \min_{M \in D} u(M) = u(M_1) = -3a^2. \qquad \square$$

Задачи

Найти частные производные указанного порядка от функции u (8.1—8.6).

8.1°. $u = \cos(x + y)$; $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. **8.2.** $u = \frac{1}{ax + by}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

✓**8.3.** $u = x^y + y^x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. **8.4.** $u = e^{x^2 + y^2 + z^2}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

✓**8.5.** $u = \sin \frac{x}{y}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$. **8.6.** $u = \ln(1 + 2x + 3y)$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$.

Показать, что функция $u = f(x, y, z)$ или $u = f(x, y)$ удовлетворяет данному уравнению (8.7—8.12).

8.7. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{z/y}$, $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

✓**8.8.** $u = \ln(x^2 + y^2)$, $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

8.9. $u = e^{-x}(x - y)^2$, $\quad x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = u$.

8.10. $u = e^{x+y}(x + y)$, $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

8.11. $u = x \cos \frac{y}{x}$, $\quad x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

8.12. $u = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{x}$, $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$.

Найти якобиан отображения $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (8.13—8.21).

✓**8.13°.** $f\colon (r,\varphi)\to(x,y),\quad x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$

✓**8.14.** $f\colon (u,v)\to(x,y),\quad u=xy,\ v=\dfrac{y}{x}.$

✓**8.15.** $f\colon (r,\varphi,\psi)\to(x,y,z),\quad x=r\cos\varphi\cos\psi,\ y=r\sin\varphi\cos\psi,\ z=r\sin\psi.$

8.16. $f\colon (x,y,z)\to(r,\varphi,u),\quad x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=u^2.$

8.17. $f\colon (x,y,z)\to(u,v,w),\quad u=\dfrac{z}{y^2},\ v=\dfrac{z}{x},\ w=z.$

8.18. $f\colon (x,y,z)\to(u,v,w),\quad u=\dfrac{z}{x^2+y^2},\ v=xy,\ w=\dfrac{y}{x}.$

8.19. $f\colon (u,v,w)\to(x,y,z),\quad x=uvw,\ y=uv-uvw,\ z=v-uv.$

8.20. $f\colon (u,v,w)\to(x,y,z),\quad u=x^2+z^2,\ v=y^2+z^2,\ w=x^2+y^2.$

8.21. $f\colon (u,v,w)\to(x,y,z),\quad u=x+y+z,\ uv=y+z,\ uvw=z.$

Написать матрицу Якоби заданного отображения φ в каноническом базисе (8.22—8.27).

8.22°. $\varphi\colon (u,v)\to x,\quad x=\dfrac{u}{v}.$

8.23°. $\varphi\colon u\to(x,y),\quad x=u\operatorname{tg}u,\ y=u\sin u.$

✓**8.24°.** $\varphi\colon (u,v)\to(x,y),\quad x=u\cos v,\ y=u\sin v.$

✓**8.25.** $\varphi\colon (u,v,w)\to(x,y),\quad x=u^2+v^2+w^2,\ y=u+v+w.$

8.26. $\varphi\colon (u,v)\to(x,y,z),\quad x=uv,\ y=u^2+v^2,\ z=u^2-v^2.$

8.27. $\varphi\colon (u,v,w)\to(x,y,z),\quad x=u\ln\dfrac{v}{w},\ y=v\ln\dfrac{w}{u},\ z=w\ln\dfrac{u}{v}.$

Написать матрицу Якоби отображения $\varphi=f\circ g$ в каноническом базисе (8.28—8.33).

8.28. $g\colon x=\sin u,\ y=\cos u,\ z=e^u,\quad f\colon p=\operatorname{arctg}xyz.$

8.29. $g\colon x=u^2+v^2+w^2,\quad f\colon p=x^2,\ q=x^4.$

✓**8.30.** $g\colon x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=w,\quad f\colon p=x^2-yz,\ q=z^2-xy.$

8.31. $g\colon x=u^v,\quad f\colon p=\sin x,\ q=\cos x,\ r=\operatorname{tg}x.$

8.32. $g\colon x=uv,\ y=u^2-v^2,\quad f\colon p=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y},\ q=\ln(x^2+y^2),\ r=x-y.$

8.33. $g\colon x=u^2-w^2,\ y=u^2-v^2,\quad f\colon p=xy,\ q=\dfrac{x}{y},\ r=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}.$

Написать матрицу Якоби отображения $\varphi=f\circ g$ в точке M_0 в каноническом базисе (8.34—8.37).

8.34. $g\colon u=x^2+y^2+z^2;\ f\colon p=\arcsin\dfrac{1}{u};\ M_0\colon x_0=1,\ y_0=2,\ z_0=3.$

8.35. $g\colon u=\ln x,\ v=x^2,\ w=x+\ln x;\ f\colon p=\dfrac{u}{v},\ q=w+u;\ M_0\colon x_0=1.$

8.36. $g\colon u=\operatorname{arctg}(y^2-2x),\ v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x};\ f\colon p=u^2+v^2,\ q=u^2-v^2;\ M_0\colon x_0=1,$ $y_0=\sqrt{3}.$

✓**8.37.** $g\colon u=xyz,\ v=x^2+y^2+z^2;\ f\colon p=uv,\ q=\dfrac{u}{v},\ r=\dfrac{v}{u^2+v^2};\ M_0\colon x_0=1,$ $y_0=0,\ z_0=1.$

8.38. Написать матрицы отображений $\dfrac{\partial\varphi}{\partial X}$ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y}$ в каноническом базисе, где $\varphi\colon X\times Y\to\mathbb{R}^2_{u,v},\ X=\mathbb{R}^2_{x_1,x_2},\ Y=\mathbb{R}^3_{y_1,y_2,y_3}$, если:

✓а) $u=x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-y_3^2,\ \ v=x_1+x_2-y_1y_2y_3;$

б)* $u=y_1\sin x_1+y_2\sin x_2+y_3\cos(x_1-x_2),$

$$v=y_2\cos(x_1x_2)+y_1\sin(x_1^2-x_2^2)+y_3\cos(x_1^2+x_2^2);$$

в) $u=y_1\operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_2}+(y_2-y_3)\ln(x_1^2+x_2^2),\ \ v=y_2\Big(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\Big)+y_1y_3\ln\dfrac{x_1}{x_2}.$

Найти дифференциалы первого и второго порядков функции u (где x, y и z — независимые переменные) (8.39—8.44).

8.39°. $u=x^2y^2$.

✓**8.40°.** $u=xy+yz+zx$.

8.41. $u=\ln xyz$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

8.42. $u=\cos(e^x y)$.

8.43. $u=x^y+y^x$.

8.44*. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z}$.

8.45. Найти значение первого дифференциала функции u в точке M_0 на векторе смещения $\vec{h}$, если:

а) $u=\cos(x-y^2)$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$, $\vec{h}=(0{,}1; 0)$;

б) $u=x^3y-xy^3$, $M_0(1, 2)$, $\vec{h}=(-0{,}5; 0{,}8)$;

✓в) $u=x\sqrt{1+y^3}$, $M_0(2, 2)$, $\vec{h}=(0; 0{,}5)$;

г) $u=\sqrt[3]{4x^2+y^2}$, $M_0(1, 2)$, $\vec{h}=(-0{,}2; 0{,}3)$;

д) $u=\arcsin xy$, $M_0(0{,}5, 1)$, $\vec{h}=(0{,}5; 0{,}1)$;

е) $u=x^{2y}$, $M_0(4, 1)$, $\vec{h}=(0{,}1; 0{,}2)$.

Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции u, если φ — дважды непрерывно дифференцируемая функция и x, y, z — независимые переменные (8.46—8.64).

8.46°. $u=\varphi(x^2-y^2)$.

8.47. $u=\varphi(xyz)$.

✓**8.48.** $u=\varphi(xy+yz+zx)$.

8.49. $u=\varphi(x^2+y^2+z^2)$.

8.50. $u=\varphi(x^2+y^2, x^2-y^2)$.

8.51. $u=\varphi(x^2+y^2, xy)$.

✓**8.52.** $u=\varphi\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$.

8.53. $u=\varphi\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}\right)$.

8.54. $u=\varphi(x+y, x^2+y^2)$.

8.55. $u=\varphi(xy, yz)$.

8.56. $u=\varphi\left(\dfrac{x^2}{y}, \dfrac{y}{x^2}\right)$.

✓**8.57.** $u=\varphi(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$.

8.58. $u=\varphi(xy, x-y, x+y)$.

8.59. $u=\varphi(x^2, y^2, z^2)$.

8.60. $u=\varphi(2x, 3y, 4z)$.

8.61. $u=\varphi(x+z^2, y+x^2, z+y^2)$.

8.62. $u=\varphi(x^2+y^2, y^2+z^2, x^2+z^2)$.

8.63*. $u=\varphi(xe^z, ye^z, ze^{x-y})$.

8.64*. $u=\varphi(\sin xz, \sin yz, \sin xy)$.

Проверить, что данное уравнение однозначно определяет функцию $y = f(x)$ в окрестности точки $M(x_0, y_0)$ (8.65—8.67).

8.65. $x^2+yx+y^2=3$, $x_0=y_0=1$.

✓**8.66.** $xy+\ln xy=1$, $x_0=2$, $y_0=\dfrac{1}{2}$.

8.67. $e^{x+y}+y-x=0$, $x_0=\dfrac{1}{2}$, $y_0=-\dfrac{1}{2}$.

Проверить, что данное уравнение однозначно определяет функцию $z(x, y)$ в окрестности точки $M(x_0, y_0, z_0)$ (8.68—8.70).

8.68. $x+y+z=\sin xyz$, $x_0=y_0=z_0=0$.

✓**8.69.** $x^2z^3+y^3z^2+z^2x^3=8$, $x_0=1$, $y_0=-1$, $z_0=2$.

8.70. $x^y+y^z+z^x=3$, $x_0=y_0=z_0=1$.

✓8.71. Проверить, что в точке $(1, 1, 1, 1, 1)$ равенства

$$x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2-5=0, \quad x_1-x_2+y_1^3-y_2^3+y_3^3-1=0,$$
$$x_1^3+2x_2^3+y_2y_3-4=0$$

не удовлетворяют условиям теоремы существования отображения $\varphi: \mathbb{R}^2_{y_2,y_3} \to \mathbb{R}^3_{x_1,x_2,y_1}$, но при этом удовлетворяют условиям существования отображения $\varphi: \mathbb{R}^2_{x_1,x_2} \to \mathbb{R}^3_{y_1,y_2,y_3}$.

✓8.72. Проверить, что данные соотношения однозначно определяют отображение $\varphi: X \to Y$ в окрестности точки M_0, если:

а) $x_1y_1+x_2y_2-y_3y_2-1=0,\quad (x_2-x_1)(y_2+y_1)-y_1y_2y_3-1=0,$

$(x_1^2+x_2^2)(y_3^2-y_1^2)+y_1y_2=0,\quad X=\mathbb{R}^2_{x_1,x_2},\ Y=\mathbb{R}^3_{y_1,y_2,y_3},$

$M_0(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0),\quad x_1^0=1,\quad x_2^0=2,\quad y_1^0=1,\quad y_2^0=0,\quad y_3^0=1;$

б) $\sin(\pi x_1y_1)+\sin(\pi x_2y_2)+\sin(\pi x_2x_3)=0,$

$\cos\dfrac{\pi}{2}(x_1-y_1)+\cos\dfrac{\pi}{2}(x_2-y_2)+\cos\dfrac{\pi}{2}(x_3-x_2)=0,\quad X=\mathbb{R}^3_{x_1,x_2,x_3},\ Y=\mathbb{R}^2_{y_1,y_2},$

$M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0),\quad x_1^0=0,\quad x_2^0=1,\quad x_3^0=0,\quad y_1^0=1,\quad y_2^0=0;$

в) $\operatorname{arctg}\dfrac{x_1y_1}{x_2y_2}-\pi x_1x_2y_1y_2=0,\quad x_1^2y_1^2-x_2^2y_2^2=0,\quad X=\mathbb{R}^2_{x_1,x_2},\ Y=\mathbb{R}^2_{y_1,y_2},$

$M_0(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0),\quad x_1^0=1,\quad x_2^0=3,\quad y_1^0=\dfrac{1}{2},\quad y_2^0=\dfrac{1}{6}.$

Предполагая, что в некоторой окрестности точки (x, y, z) однозначно определена дважды непрерывно дифференцируемая функция $z(x, y)$, найти значения указанных производных в этой точке (8.73—8.81).

✓8.73°. $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $x^2+y^2+z^2=R^2$.

8.74. $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $\operatorname{arctg}\dfrac{z}{x}=z+x+y$.

8.75. $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $x+y+z=\cos xyz$.

8.76. $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $x^y+y^z=3$.

8.77. $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $x+y+z=\ln xyz$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

8.78*. $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $\ln(xy+yz)=x^2+y^2+z^2-2$.

8.79. $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $x=u^2-v^2$, $y=uv$, $z=u+2v$.

8.80. $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $x=\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$, $y=\ln(u^2+v^2)$, $z=u-v$.

✓8.81. $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $x=e^u\sin v$, $y=e^u\cos v$, $z=uv$.

Найти частные производные первого порядка функции $z(x, y)$, заданной неявно, предварительно найдя её первый дифференциал (8.82—8.86).

8.82°. $z^4+zx^3+zy^3=a^4$.

✓8.83°. $xyz=x^2+y^2+z^2$.

8.84. $z(1+x^2)=y(1+z^4)$.

8.85. $z\cos x+y\cos z+x\cos y=3$.

8.86. $\dfrac{z}{x^2+y^2}=\ln(x+y+z)$.

Найти производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ функций $y(x)$ и $z(x)$, неявно заданных системой уравнений (8.87—8.91).

8.87. $x^2=z^2+y^2, \quad az+by+cx=1.$

8.88. $x^3+y^2-3z+a=0, \quad z^2-2y^2-x+6=0.$

✓**8.89.** $x^3+y^3+z^3-3xyz=0, \quad x+y+z=a.$

8.90. $\cos x+\cos y+\cos z=a, \quad x^3+y^3+z^3=b.$

8.91. $\sin^2 y-\cos x\sin z=0, \quad 2x-y\operatorname{tg} z=0.$

✓**8.92.** Найти $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}$, если $u^2+x^2+y^2+z^2=a^2$, $\ln xy+\frac{y}{x}=b^2$, $\ln\frac{z}{x}+ +zx=c^2$.

Найти первые и вторые производные неявно заданных функций $z(x, y)$ и $u(x, y)$ (8.93—8.94).

8.93. $x+y+z+u=a, \quad x^3+y^3+z^3+u^3=b.$

✓**8.94*.** $x+y+z+u=a, \quad xyzu=b.$

8.95. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, если $x(u^2+v^2)-uy=2$, $xv-y(u^2+v^2)=1$.

8.96. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ в точке $x=-1$, $y=1$ $(u=2,\ v=-2)$, если $xuv+yxu+vxy+uvy=0$, $x^2+y^2+u^2+v^2=10$.

8.97. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\frac{x+u}{y-u}$, а $u(x, y)$ находится из уравнения $ux-u^3+y^3=8$.

Найти первые и вторые производные функций $y(x)$ и $z(x)$ в точке x_0 (8.98—8.99).

8.98. $x^2-y^2+z^2=1,\ y^2-2x+z=0, \quad x_0=1\ (y_0=1,\ z_0=1).$

✓**8.99.** $7x^2+2y-3z^2=-9,\ 4x+2y^2-2z^3+4=0, \quad x_0=1\ (y_0=-2,\ z_0=2).$

8.100. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=g(x)=x^2+y^2$, где $y(x)$ есть решение уравнения $1+x+y^2=e^{x+y}$.

Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, заданной неявно (8.101—8.107).

8.101. $x^2+zx+z^2+y=0.$ ✓**8.102*.** $x^3+y^3-3xyz-z^3=1.$

8.103*. $x^4+y^4+z^4=4xyz.$

8.104*. $2\ln(xyz)=x^2+y^2-z^2-1,\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

✓**8.105.** $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=uv.$

8.106. $x=u+\ln v,\ y=v-\ln u,\ z=2u+v.$

8.107. $x=e^{u+v},\ y=e^{u-v},\ z=u^2+v^2.$

✓**8.108.** Найти первые и вторые дифференциалы функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, если $xu+yv=1$, $x+y+u+v=0$.

Найти второй дифференциал в точке $M_0(x_0, y_0)$, $z(M_0)=z_0$, функции $z(x, y)$, заданной неявно (8.109—8.113).

✓**8.109.** $xz^5+y^3z-x^3=0, \quad M_0(1, 0),\ z_0=1.$

8.110. $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2yz-2xz-72=0, \quad M_0(1, 1),\ z_0=4.$

8.111. $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0, \quad M_0(-2, 0),\ z_0=1.$

8.112. $2x^2+2y^2+z^2+4xz-z-8=0, \quad M_0(0,2), z_0=1.$

✓**8.113.** $x=\cos u\sin v,\ y=\cos u\cos v,\ z=\sin u,$

$$M_0\Big(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\Big), \quad z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad u_0=\frac{\pi}{4},\ v_0=\frac{\pi}{3}.$$

Найти вторые дифференциалы функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ (8.114—8.115).

✓**8.114.** $xu+yv=0,\ uv-xy=5, \quad M_0(-1,1),\ u_0=2,\ v_0=2.$

8.115. $x+y=u+v,\ y\cos u=x\sin v, \quad M_0\Big(\frac{\pi}{2},0\Big),\ u_0=\frac{\pi}{2},\ v_0=0.$

Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением (8.116—8.119).

✓**8.116.** $F(xyz, x+y)=0.$ **8.117.** $F(xy, yz, zx)=0.$

8.118. $F(x^2-y^2, y^2-z^2, z^2-x^2)=0.$ **8.119.** $F(y-zx, x-zy, z-xy)=0.$

Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая равенством $F(u, v)=0$, является решением уравнения (8.120—8.124).

✓**8.120.** $F\Big(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z}, \frac{1}{x-y}+\frac{1}{z}\Big)=0, \quad (x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0.$

8.121. $F(z^2-y^2, x^2+(y-z)^2)=0, \quad (z-y)^2\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$

8.122. $F\Big(\frac{z}{x}, 2x-4z-y^2\Big)=0, \quad xy\frac{\partial z}{\partial x}+(x-2z)\frac{\partial z}{\partial y}=yz.$

8.123. $F\Big(x^2+y^2, \frac{z}{x}\Big)=0, \quad xy\frac{\partial z}{\partial x}-x^2\frac{\partial z}{\partial y}=yz.$

8.124. $F((x-y)(z+1), (x+y)(z-1))=0, \quad (xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+zy)\frac{\partial z}{\partial y}=1-z^2.$

Предполагая, что функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство (8.125—8.141).

✓**8.125.** $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$, если $z=y\varphi(x^2-y^2)$.

8.126. $\cos y\,\frac{\partial z}{\partial x}+\cos x\,\frac{\partial z}{\partial y}=\cos x\cos y$, если $z=\sin y+\varphi(\sin x-\sin y)$.

8.127. $xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=xy$, если $z^2=xy+\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big)$.

8.128. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$, если $z=xy+x\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big)$.

8.129. $(y^2+z^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial x}-2xy\frac{\partial z}{\partial y}+2xz=0$, если $x^2+y^2+z^2=y\varphi\Big(\frac{z}{y}\Big)$.

8.130. $xy\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}+x(1+x^2)=0$, если $4xyz+x^4+2x^2=\varphi(xy)$.

8.131. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial z}{\partial y}=z$, если $z=e^{-x}\cdot\varphi(x-y)$.

8.132. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\varphi''(y-x)$, если $z=\varphi(y-x)-x\varphi'(y-x)$.

8.133. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=\varphi(ax-y)+\psi(ax+y)$.

✓**8.134.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=\frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\psi(t)\,dt.$

8.135. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$, если $z=\dfrac{\varphi(x-y)+\psi(x+y)}{x}$.

8.136*. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, если $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}\varphi(xy)+\psi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$.

✓**8.137.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $z=\varphi(x+y)$.

8.138. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, если $z=\varphi(xy)\ln y+\psi(xy)$.

8.139. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $z=x\varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$.

8.140. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}+xyz=0$, если $z=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(\varphi(x)+\psi(y))$.

8.141. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=\varphi(x+t, y+t)+\psi(x-t, y-t)$.

Приняв y за новую независимую переменную, а x за функцию от y, преобразовать уравнение (8.142—8.145).

8.142. $y''+(e^y-x)(y')^3=0$. **8.143.** $y''-y'-(y')^3x^3=0$.

✓**8.144.** $y'y'''-3(y'')^2=0$. **8.145.** $(y'''+yy')(y')^2-(y'')^2(3y'+x^2)=0$.

Вводя новые переменные, преобразовать уравнение (8.146—8.158).

✓**8.146.** $x^2y''+3xy'+y=0$, $\quad x=e^t$, $y=y(t)$.

8.147. $x^3y'''+2x^2y''-xy'+y=0$, $\quad t=\ln x$, $y=y(t)$.

✓**8.148.** $y^2+(x^2-xy)y'=0$, $\quad y=tx$, $y=y(t)$.

8.149. $y'+2xy=2x^3y^3$, $\quad u=\dfrac{1}{y^2}$, $u=u(x)$.

8.150. $(xy+x^2y^3)^{-1}y'=1$, $\quad u=\dfrac{1}{y^2}$, $u=u(x)$.

8.151. $xy''-y'+xy=0$, $\quad t=\dfrac{x^2}{4}$, $y=y(t)$.

✓**8.152.** $xy''+2y'-xy=e^x$, $\quad y=\dfrac{u}{x}$, $u=u(x)$.

8.153. $y''+\dfrac{2}{x}y'-a^2y=2$, $\quad y=\dfrac{u}{x}$, $u=u(x)$.

8.154. $xyy''-x(y')^2+y\cdot y'=0$, $\quad u=\ln\dfrac{y}{x}$, $u=u(y)$.

8.155. $2y''+(x+y)(1-y')^3=0$, $\quad x-y=u$, $x+y=v$, $v=v(u)$.

8.156. $x^4y''-c^2y=0$, $\quad y=\dfrac{u}{t}$, $x=\dfrac{1}{t}$, $u=u(t)$.

8.157. $(y''-1)(1-x^2)^2+y=0$, $\quad x=\operatorname{th}t$, $y=\dfrac{u}{\operatorname{ch}t}$, $u=u(t)$.

8.158*. $y''=\dfrac{y}{(x-1)^2(x-2)^2}$, $\quad u=\dfrac{y}{x-2}$, $t=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$, $u=u(t)$.

Приняв v за новую функцию $v(x, y)$, преобразовать уравнение относительно функции $u(x, y)$ (8.159—8.162).

✓**8.159.** $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big)-x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\quad v=xu$.

8.160. $(x-y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, $\quad v=(x-y)u$.

8.161. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=-u$, $\quad u=ve^{-x-y}$.

8.162. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{2}{x-y}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{3}{x-y}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{3u}{(x-y)^2}=0$, $\quad u=\dfrac{v}{x-y}$.

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующее уравнение (8.163—8.168).

8.163. $2y\frac{\partial z}{\partial x}+e^x\frac{\partial z}{\partial y}=4ye^x, \quad u=y^2+e^x,\ v=y^2-e^x.$

✓**8.164.** $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=2, \quad u=xy,\ v=\frac{y}{x}.$

8.165. $y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}+xy=0, \quad u=\frac{y}{x},\ v=yx^3.$

8.166. $y\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+2y=0, \quad y=v,\ x=\frac{u+v^2}{2}.$

8.167*. $\frac{\partial z}{\partial y}+4\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{xy}, \quad x=v^2,\ y=(u-v)^2.$

8.168. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0, \quad u=x,\ v=\frac{y+z}{x+z}.$

Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение относительно функции $z(x, y)$ (8.169—8.175).

✓**8.169.** $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+x+y=0, \quad u=y+x,\ v=y-x,\ w=xy-z.$

8.170. $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=4x, \quad u=x,\ v=x-y,\ w=x-y+z.$

8.171. $x\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)+z+x+y=0, \quad u=x+y,\ v=x-y,\ w=zx.$

8.172. $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz, \quad u=yz-x,\ v=xz-y,\ w=xy-z.$

8.173. $y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad u=\frac{y}{x},\ v=y,\ w=yz-x.$

8.174. $\frac{\partial z}{\partial x}\sin^2 x+\operatorname{ctg} x\frac{\partial z}{\partial y}=\cos^2 z,$

$u=2y+\operatorname{tg} z\cdot\operatorname{ctg} x,\ v=\operatorname{ctg} x(\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} x),\ w=\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} x.$

8.175. $yz\frac{\partial z}{\partial x}-xz\frac{\partial z}{\partial y}=e^z, \quad u=x^2+y^2,\ v=\operatorname{arctg}\frac{x}{y},\ w=(x^2+y^2)e^{-z}.$

Приняв ξ, η и τ за новые независимые переменные, а w за новую функцию от ξ, η и τ, преобразовать к новым переменным уравнение относительно функции $u(x, y, z)$ (8.176—8.177).

8.176. $2\cos z\frac{\partial u}{\partial z}=u\sin z\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+2\right),$

$u\cos z=\xi,\ u\sin z=\eta,\ x+y+u=\tau,\ w=u^2.$

✓**8.177.** $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=u,$

$x-y=\frac{\xi}{u},\ y-z=\frac{\eta}{u},\ x+y+z=\tau,\ w=u^2.$

8.178. Приняв y за функцию, а x и z за независимые переменные, преобразовать уравнение $(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

✓**8.179.** Приняв x за функцию, а y и z за независимые переменные, преобразовать уравнение $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

8.180. Приняв y за функцию, а $u=x+z$, $v=y-z$ за независимые переменные, преобразовать уравнение $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1.$

8.181. Приняв x за функцию, а $u=yz+x$, $v=xz+y$ за независимые переменные, преобразовать уравнение $z\left(y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}+z\right)=y\frac{\partial z}{\partial x}$.

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать уравнение относительно функции $z(x, y)$ (8.182—8.198).

✓**8.182°.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad u=x-y,\ v=x+y.$

8.183. $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad u=\frac{1}{3}(x-y),\ v=\frac{1}{3}(2x+y).$

8.184. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial x}+6\frac{\partial z}{\partial y}=0, \quad u=x+y,\ v=3x-y.$

8.185. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0, \quad u=2x-y,\ v=x.$

8.186. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad y=\frac{u+v}{2},\ x=\frac{u-v}{4}.$

8.187. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0\ (y>0), \quad u=x,\ v=2\sqrt{y}.$

8.188. $(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$
$u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\ v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right).$

8.189. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad u=xe^y,\ v=y.$

8.190. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\sin x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(2-\cos^2 x)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad u=x,\ v=y-\cos x.$

8.191. $\operatorname{tg}^2 x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2y\operatorname{tg} x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\operatorname{tg}^3 x\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad u=y\sin x,\ v=y.$

✓**8.192.** $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2y\frac{\partial z}{\partial y}=0, \quad u=xy,\ v=\frac{y}{x}.$

8.193. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad u=\frac{y}{x},\ v=yx^3.$

8.194. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad u=\frac{y}{x},\ v=y.$

8.195. $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\sqrt{xy}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0, \quad u=\sqrt{x}+\sqrt{y},\ v=\sqrt{x}.$

8.196. $y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad y=v,\ x=\frac{u+v^2}{2}.$

8.197. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ y>0, \quad x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{(v-u)^2}{16}.$

8.198. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2 z=0, \quad 2x=u^2-v^2,\ y=uv.$

Приняв u, v и w за новые независимые переменные, преобразовать следующее уравнение относительно функции $f(x, y, z)$ (8.199—8.200).

✓**8.199.** $2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}+3\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0,$
$u=x+y+z,\ v=-y-z,\ w=-z.$

8.200*. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}=0,$
$x=2u-v-w,\ y=2v-u-w,\ z=u+v+w.$

Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение относительно функции $z=z(x, y)$ (8.201—8.210).

✓**8.201.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad u=x,\ v=x-y,\ w=x-y+z.$

8.202. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\quad u=y+x,\ v=y-x,\ w=xy-z.$

8.203. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad u=xy,\ v=y,\ w=z-y.$

✓**8.204.** $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-x\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=4,\quad u=x+y,\ v=x-y,\ w=zx.$

8.205. $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y},\quad x=\cos u,\ y=\cos v,\ z=e^w.$

8.206. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{2}x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{y},\quad u=\dfrac{y}{x},\ v=y,\ w=yz-x.$

8.207. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad u=x+y,\ v=\dfrac{y}{x},\ w=\dfrac{z}{x}.$

8.208. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad u=x,\quad v=x+y,\quad w=x+y+z.$

8.209. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+4\dfrac{\partial z}{\partial x}+4\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0,\quad u=2y-x,\ v=x,\ z=we^{-x-y}.$

8.210*. $(1-x)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial z}{\partial x},\quad u=\dfrac{y}{2}+\sqrt{1-x},\ v=\dfrac{y}{2}-\sqrt{1-x},\ w=\sqrt{2}z\sqrt[4]{1-x}.$

Преобразовать к полярным координатам r и φ выражение, содержащее $f=f(x, y)$, полагая $g(r, \varphi)=f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ (8.211—8.216).

✓**8.211°.** $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}.$ **8.212°.** $y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}.$ **8.213.** $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2-\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$

✓**8.214.** $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$ **8.215.** $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$

8.216. $y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right).$

8.217. Найти производную функции $f=x^3-x^2y+y^3-1$ в точке $A(2, 1)$ по направлению, образующему угол $\pi/6$ с осью Ox.

8.218. Найти производную функции $f=x-x^2y+y^4$ в точке $A(1, 1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, где $B(4, -2)$.

8.219. Найти производную функции $f=x^2-xy+y^2+2z$ в точке $M(1, 2, 3)$ по направлению вектора $\vec{a}=(1, 1, 1)$.

8.220. Найти производную функции $f=xy+yz+xz$ в точке $M(-1, 2, 2)$ по направлению вектора $\vec{a}=(-2, 1, 2)$.

8.221. Найти производную функции $u=xy+\dfrac{z}{y}$ в точке $M(2, 1, 2)$ по направлению градиента функции $v=xyz$ в этой точке.

✓**8.222.** Найти производную функции $z=\ln(x^2+y^2)$ в точке $M\left(\dfrac{a}{8}, a\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ кривой $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ по направлению внутренней нормали этой кривой.

8.223. Найти производную функции $z=f(x, y)$ в точке $A(x_0, y_0)$:

а) по направлению касательной к кривой $\varphi(x, y)=C$ в точке (x_1, y_1);

б) по направлению нормали к кривой $\varphi(x, y)=C$ в точке (x_1, y_1).

8.224. Дана функция $z=f(x, y)$ из класса $C^1(D)$ и гладкая кривая $C: x = x(t), y=y(t), t\in[T_0; T_1]$, лежащая в области D. Обозначим через $\vec{n}(t)$ непрерывно меняющийся вектор нормали к C на $[T_0; T_1]$. Найти $\dfrac{\partial f}{\partial n}$.

Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к следующей кривой в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (8.225—8.234).

8.225°. $4x=t^4$, $3y=t^3$, $2z=t^2$, $M_0\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

✓**8.226°.** $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\sin\frac{t}{2}$, $M_0\left(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2}\right)$.

8.227. $x=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$, $y=\dfrac{(1+t^3)^2-9t^4}{(1+t^3)^2}$, $z=\dfrac{3t}{1+t^3}$, $M_0\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

8.228. $y=e^x$, $z=x^2$, $M_0(0, 1, 0)$.

✓**8.229.** $y^2+z^2=25$, $x^2+y^2=10$, $M_0(1, 3, 4)$.

8.230. $2x^2+3y^2+z^2-47=0$, $x^2+2y^2-z=0$, $M_0(-2, 1, 6)$.

8.231. $x^2+y^2+z^2=r^2$, $2x^2+y^2-z^2=0$, $M_0\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2\sqrt{2}}, \frac{r\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)$.

8.232. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\dfrac{z}{c}=\operatorname{arctg}\dfrac{bx}{ay}$, $M_0\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{c\pi}{4}\right)$.

8.233. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$, $x^2+y^2=4ax$, $M_0\left(a, -a\sqrt{3}, \frac{2\pi a}{3}\right)$.

✓**8.234.** $x=u^2+v^2$, $y=2uv$, $z=u^2v-v^2u$, $z^2=2x-y-2$, $M_0(5, 4, -2)$ $(u_0=1, v_0=2)$.

Написать уравнения касательной плоскости и нормали к следующей поверхности в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (8.235—8.244).

8.235°. $z=xy$, $M_0(5, 1, 5)$.

8.236. $x^8+y^{13}+5z=7$, $M_0(1, 1, 1)$.

8.237. $x^3+z^3-3xz=3$, $M_0(1, 4, 2)$.

✓**8.238.** $xy+xz+yz=x^3+y^3+z^3$, $M_0(1, 1, 1)$.

8.239. $x^3+y^3+z^3=-xyz$, $M_0(1, -1, -1)$.

8.240. $x^2y^3-xy^2=z+\frac{3}{8}$, $M_0\left(2, \frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right)$.

✓**8.241.** $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$, $M_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$, $u_0=1$, $v_0=2$.

✓**8.242.** $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$, $M_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$, $u_0=1$, $v_0=\frac{\pi}{4}$.

8.243. $x=e^u+u\sin v$, $y=e^u-u\cos v$, $z=uv$, $M_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$, $u_0=1$, $v_0=\pi$.

8.244. $x=\sin u\sqrt{1-m^2\sin^2 v}$, $y=\cos u\cdot\cos v$, $z=\sin v\cdot\sqrt{1-m^2\sin^2 v}$, $|m|\leqslant 1$, $M_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$, $u_0=\frac{\pi}{4}$, $v_0=\frac{\pi}{4}$.

Найти все критические точки функции f и выделить из них точки максимума и минимума (8.245—8.263).

8.245°. $f=-x^2-xy-y^2+x+y$.

8.246. $f=x^3+y^3-3axy$.

8.247. $f=3x^2y+y^3-18x-30y$.

8.248. $f=(2ax-x^2)(2by-y^2)$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

8.249. $f=x^4+y^4-36xy$.

✓**8.250.** $f=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

✓**8.251.** $f=x^2-2xy^2+y^4-y^5$.

✓**8.252.** $f=x^2+xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

8.253. $f=e^{2x}(x+y^2+2y)$. ✓**8.254.** $f=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
8.255. $f=x^2+3xy-8\ln|x|-6\ln|y|$.
8.256. $f=x+y+8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $0\leqslant y\leqslant 2\pi$.
✓**8.257.** $f=4-(x^2+y^2)^{2/3}$. **8.258.** $f=\dfrac{x^2-y^2}{1+x^4+y^4-2x^2y^2}$.
8.259. $f=xy+yz+zx$. **8.260.** $f=x^2-2xy+4y^2+6z^2+6yz-6z$.
✓**8.261.** $f=yx^3z^2(2-y-2z-3x)$.
8.262. $f=\ln xy-z(x-y)-x^2-y^2+2xy-y$.
8.263. $f=z\ln z-z-z\ln xy+xy+x^2+2y^2-4x-2y$.

Исследовать функцию на экстремум в заданной точке (8.264—8.266).
✓**8.264.** $f=x^3+y^3+z^2+3xy-2z-9x-9y$, а) $M_1(2,-1,1)$; б) $M_2(-1,2,1)$.
8.265. $f=x^5+3x^3y+3y^3x+y^5$, $M_0\left(-\frac{12}{5},-\frac{12}{5}\right)$.
8.266. $f=x\cos y+z\cos x$, а) $M_1\left(\frac{\pi}{2},0,1\right)$; б) $M_2\left(\frac{\pi}{2},\pi,-1\right)$.

Найти все точки кривой, в которых ордината или абсцисса имеют локальный экстремум, указать характер экстремума (8.267—8.272).
✓**8.267.** $x^3+y^3=3axy$, $xy\neq 0$, $a>0$.
8.268. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2\neq 0$, $a>0$.
8.269. $(x^2+y^2-4x)^2=16(x^2+y^2)$, $x^2+y^2\neq 0$.
8.270*. $x^4+y^4=8xy^2$, $xy\neq 0$.
8.271*. $x^4+y^4+4x^2y-2y^3=0$ (исследовать только ординату).
✓**8.272.** $r=a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $r>0$, $a>0$.

Исследовать на экстремум заданную неявно функцию y от переменной x (8.273—8.276).
8.273. $y^2-ay-\sin x=0$, $0\leqslant x\leqslant\pi$. ✓**8.274.** $x^2+xy+y^2=27$.
8.275. $(y-x)^3+x+6=0$. **8.276.** $(y-x^2)^2=x^5$, $x^2+y^2\neq 0$.

Найти экстремальные значения и точки экстремума заданной неявно функции z от переменных x, y (8.277—8.281).
8.277. $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$.
8.278. $5z^2+4zy+y^2-2y+3x^2-6x+4=0$.
8.279. $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0$.
8.280. $z^2+xyz-xy^2-x^3=0$, $x^2+y^2+z^2\neq 0$.
✓**8.281.** $x^4+y^4+z^4=2(x^2+y^2+z^2)$, $x^2+y^2+z^2\neq 0$.

Проверить существование экстремума у функции $z(x,y)$ в точке M_0 (8.282—8.283).
✓**8.282.** $21\ln(x^2+y^2+z^2)=12x-18y-13z$, $M_0\left(\frac{2}{7},-\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)$.
8.283. $x\sin\pi y-\pi y^2\sin\pi z+\pi z\sin\pi x=\frac{\pi}{6}(7-9y)$, $M_0\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{6}\right)$.

Исследовать функцию f на условный экстремум при заданных условиях (8.284—8.293).
8.284. $f=x-y$, $\quad\operatorname{tg}x-3\operatorname{tg}y=0$, $\quad|x|<\frac{\pi}{2}$, $|y|<\frac{\pi}{2}$.
8.285. $f=2x+y-z+1$, $\quad x^2+y^2+2z^2=22$.

8.286. $f=xy,\quad x^3+y^3-axy=0,\quad x^2+y^2\neq 0,\ a>0.$

✓**8.287.** $f=xyz,\quad x^2+y^2+z^2=a^2,\quad a>0.$

✓**8.288.** $f=xyz,\quad xy+xz+yz=a^2,\quad x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0.$

✓**8.289.** $f=xyz,\quad x+y+z=5,\ xy+yz+zx=8.$

8.290. $f=xy^2z^3,\quad x+my^2+nz^3=1,\quad m>0,\ n>0,\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

8.291. $f=xy+yz,\quad x^2+y^2=2,\ y+z=2,\quad x>0,\ y>0,\ z>0.$

✓**8.292.** $f=x_1^m+x_2^m+\ldots+x_n^m\ (m>1),\quad \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a.$

8.293. $f=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i,\quad \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=r^2,\quad \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2>0,\ r>0.$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции f на заданном множестве (8.294—8.305).

8.294. $f=xy-x^2y-\dfrac{xy^2}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2.$

8.295. $f=x^2+3y^2-x+18y-4,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$

8.296. $f=x^3+3y^2-3xy,\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$

8.297. $f=\dfrac{xy}{2}-\dfrac{x^2y}{6}-\dfrac{xy^2}{8},\quad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}\leqslant 1.$

8.298. $f=x^6+y^6-3x^2+6xy-3y^2,\quad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 2.$

8.299. $f=\cos x\cos y\cos(x+y),\quad 0\leqslant x\leqslant \pi,\ 0\leqslant y\leqslant \pi.$

8.300. $f=2\sin x+2\sin y+\sin(x+y),\quad 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant \dfrac{\pi}{2}.$

8.301. $f=x^3+y^3-9xy+27,\quad 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ 3<a<9.$

8.302. $f=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2,\quad 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ a>1.$

8.303. $f=x+y+z,\quad x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1.$

8.304. $f=(x-y^2)\sqrt[3]{(1-x)^2},\quad y^2\leqslant x\leqslant 2.$

✓**8.305.** $f=xy+yz+zx,\quad x^2+y^2+z^2\leqslant a^2.$

8.306. Представить положительное число a в виде суммы пяти положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

8.307. Представить положительное число a в виде суммы n положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

8.308. Представить положительное число a в виде суммы n положительных слагаемых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы произведение $z=x_1^{s_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{s_n}$ (s_i — заданные положительные числа) было наибольшим.

8.309. Определить наибольшее значение корня n-й степени из произведения положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при условии, что их сумма равна заданному числу a. Используя эту задачу, доказать, что среднее геометрическое нескольких положительных чисел не больше их среднего арифметического.

8.310. На плоскости xOy даны две различные точки $P_1(a_1, b_1)$ и $P_2(a_2, b_2)$, $a_1\geqslant a_2>0$, $b_2\geqslant b_1>0$. Найти такие точки Q_1 на оси Ox и Q_2 на оси Oy, чтобы длина ломаной $P_1Q_1Q_2P_2$ принимала наименьшее значение.

8.311. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(p, 4p)$ до точек параболы $y^2=2px$ $(p>0)$.

8.312. Через точку M, лежащую внутри данного угла, провести прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник наименьшей площади.

8.313. Внутри данного угла с вершиной B поместить такой отрезок DE длины b, концы которого — точки D и E — находятся на сторонах угла, чтобы площадь треугольника DBE была наибольшей.

8.314. Определить положение точки относительно вершин остроугольного треугольника ABC так, чтобы сумма расстояний от этой точки до вершин треугольника была наименьшей.

8.315. Определить положение точки относительно вершин треугольника так, чтобы сумма квадратов расстояний от этой точки до вершин треугольника была наименьшей.

8.316. В данный круг вписать треугольник так, чтобы сумма квадратов длин его сторон была наибольшей.

8.317. Доказать, что в треугольнике радиус вписанной окружности не может быть больше половины радиуса описанной окружности.

✓**8.318.** Доказать, что из всех четырёхугольников, описанных вокруг круга радиусом R, наименьшую площадь имеет квадрат.

8.319. Среди всех четырёхугольников с заданными сторонами найти такой, площадь которого наибольшая.

8.320. В данный круг радиусом R вписать четырёхугольник $ABCD$ наибольшей площади, если $\angle BAD = \alpha$.

8.321. Найти длины осей эллипса, полученного в сечении цилиндра $x^2 + 2y^2 = 1$ плоскостью $x + y + z = 0$.

8.322. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ и $\frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{m_1} = \frac{z-c_1}{n_1}$.

✓**8.323.** Через точку $A(a, b, c)$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, провести плоскость, отсекающую от первого октанта ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$) тетраэдр наименьшего объёма.

8.324. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда с заданной суммой длин его рёбер a, имеющего наибольший объём.

8.325. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда данного объёма V, имеющего наименьшую площадь поверхности.

8.326. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда, вписанного в сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, при которых параллелепипед имеет наибольшую полную поверхность.

8.327. Найти треугольник с периметром, равным $2p$, который при вращении относительно одной из своих сторон образует тело наибольшего объёма.

✓**8.328.** Из всех конусов с данной боковой поверхностью найти конус с наибольшим объёмом.

8.329. Точки A и B лежат в разных однородных оптических средах, разделенных плоскостью P. Скорость света в них равна v_1 и v_2 соответственно. По принципу Ферма свет идёт из A в B по пути, требующему минимального времени. Найти соотношение между углами φ_1 и φ_2, которые образуют лучи AC и BC с плоскостью P, где C — точка пересечения пути AB с плоскостью P.

8.330. На плоскости заданы n точек $P_i(a_i, b_i)$. Найти координаты точки $P(x, y)$ с наименьшей суммой $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2)$ (m_i — заданные положительные числа). Дать механическое толкование полученных формул.

Ответы и указания

8.1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\sin(x+y),\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\sin(x+y),\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\cos(x+y),\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\cos(x+y).$

8.2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2a^2}{(ax+by)^3},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{2b^2}{(ax+by)^3},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{2ab}{(ax+by)^3}.$

8.3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}+y^x\ln^2 y,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x+x(x-1)y^{x-2},$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}+y^{x-1}+xy^{x-1}\ln y.$

8.4. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=4ye^{x^2+y^2+z^2}+8x^2ye^{x^2+y^2+z^2},\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=8xyze^{x^2+y^2+z^2}.$

8.5. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=-\dfrac{1}{y^3}\cos\dfrac{x}{y},\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=-\dfrac{x^2}{y^5}\cos\dfrac{x}{y}-\dfrac{4x}{y^4}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{2}{y^3}\cos\dfrac{x}{y}.$ **8.6.** $-\dfrac{216}{(1+2x+3y)^4}.$

8.13. r. **8.14.** $\dfrac{1}{2v}$. **8.15.** $r^2\cos\psi$. **8.16.** $\dfrac{1}{2\sqrt{z(x^2+y^2)}}$. **8.17.** $-\dfrac{2z^2}{x^2y^3}$.

8.18. $\dfrac{2y}{x(x^2+y^2)}$. **8.19.** uv^2. **8.20.** $\dfrac{-1}{4\sqrt{2}\sqrt{(u+v-w)(u+w-v)(v+w-u)}}$. **8.21.** u^2v.

8.22. $\left(\dfrac{1}{v},-\dfrac{u}{v^2}\right)$. **8.23.** $\begin{pmatrix}\operatorname{tg}u+\dfrac{u}{\cos^2 u}\\ \sin u+u\cos u\end{pmatrix}$. **8.24.** $\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{pmatrix}$. **8.25.** $\begin{pmatrix}2u & 2v & 2w\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

8.26. $\begin{pmatrix}v & u\\ 2u & 2v\\ 2u & -2v\end{pmatrix}$. **8.27.** $\begin{pmatrix}\ln\dfrac{v}{w} & \dfrac{u}{v} & -\dfrac{u}{w}\\ -\dfrac{v}{u} & \ln\dfrac{w}{u} & \dfrac{v}{w}\\ \dfrac{w}{u} & -\dfrac{w}{v} & \ln\dfrac{u}{v}\end{pmatrix}$. **8.28.** $\dfrac{yz\cos u-xz\sin u+e^u xy}{1+x^2y^2z^2}$.

8.29. $\begin{pmatrix}4xu & 4xv & 4xw\\ 8x^3u & 8x^3v & 8x^3w\end{pmatrix}$. **8.30.** $\begin{pmatrix}2x\cos v-z\sin v & -2xu\sin v-zu\cos v & -y\\ -y\cos v-x\sin v & yu\sin v-xu\cos v & 2z\end{pmatrix}$.

8.31. $\begin{pmatrix}vu^{v-1}\cos x & u^v\ln u\cos x\\ -vu^{v-1}\sin x & -u^v\ln u\sin x\\ \dfrac{vu^{v-1}}{\cos^2 x} & \dfrac{u^v\ln u}{\cos^2 x}\end{pmatrix}$. **8.32.** $\begin{pmatrix}\dfrac{yv-2xu}{x^2+y^2} & \dfrac{yu+2xv}{x^2+y^2}\\ \dfrac{2xv+4uy}{x^2+y^2} & \dfrac{2xu-4yv}{x^2+y^2}\\ v-2u & u+2v\end{pmatrix}$.

8.33. $\begin{pmatrix}2u(x+y) & -2xv & -2wy\\ 2u\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right) & \dfrac{2xv}{y^2} & -\dfrac{2w}{y}\\ 2u\dfrac{y-x}{x^2+y^2} & \dfrac{2vx}{x^2+y^2} & -\dfrac{2wy}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$. **8.34.** $\left(-\dfrac{1}{7\sqrt{195}},-\dfrac{2}{7\sqrt{195}},-\dfrac{3}{7\sqrt{195}}\right)$.

8.35. $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. **8.36.** $\begin{pmatrix}-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} & \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{6}\\ -\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} & \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}\end{pmatrix}$. **8.37.** $\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0\\ -\dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$.

8.38. а) $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial X}\right)=\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)=\begin{pmatrix}2y_1 & 2y_2 & -2y_3\\ -y_2y_3 & -y_1y_3 & -y_1y_2\end{pmatrix};$

б) $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial X}\right)=\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{pmatrix}$, где

$$Y_{11}=y_1\cos x_1-y_3\sin(x_1-x_2),\quad Y_{12}=y_2\cos x_2+y_3\sin(x_1-x_2),$$
$$Y_{21}=-y_2x_2\sin(x_1x_2)+2y_1x_1\cos(x_1^2-x_2^2)-2y_3x_1\sin(x_1^2+x_2^2),$$
$$Y_{22}=-y_2x_1\sin(x_1x_2)-2y_1x_2\cos(x_1^2-x_2^2)-2y_3x_2\sin(x_1^2+x_2^2);$$

$\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)=\begin{pmatrix}\sin x_1 & \sin x_2 & \cos(x_1-x_2)\\ \sin(x_1^2-x_2^2) & \cos x_1x_2 & \cos(x_1^2+x_2^2)\end{pmatrix};$

в) $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial X}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{y_1x_2+2x_1y_2-2x_1y_3}{x_1^2+x_2^2} & \dfrac{2x_2y_2-2x_2y_3-y_1x_1}{x_1^2+x_2^2} \\ \dfrac{y_1y_3x_1-y_2}{x_1^2} & \dfrac{y_2-y_1y_3x_2}{x_2^2} \end{pmatrix},$

$\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)=\begin{pmatrix} \operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_2} & \ln(x_1^2+x_2^2) & -\ln(x_1^2+x_2^2) \\ y_3\ln\dfrac{x_1}{x_2} & \dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2} & y_1\ln\dfrac{x_1}{x_2} \end{pmatrix}.$

8.39. $du=2xy^2\,dx+2yx^2\,dy,\quad d^2u=2y^2\,dx^2+8xy\,dx\,dy+2x^2\,dy^2.$

8.40. $du=(y+z)\,dx+(x+z)\,dy+(y+x)\,dz,\quad d^2u=2(dx\,dy+dx\,dz+dz\,dy).$

8.41. $du=\dfrac{1}{x}\,dx+\dfrac{1}{y}\,dy+\dfrac{1}{z}\,dz,\quad d^2u=-\dfrac{1}{x^2}\,dx^2-\dfrac{1}{y^2}\,dy^2-\dfrac{1}{z^2}\,dz^2.$

8.42. $du=-\sin(e^xy)(ye^x\,dx+e^x\,dy),$

$$d^2u=\big(-\cos(e^xy)e^{2x}y^2-\sin(e^xy)e^xy\big)\,dx^2+2\big(-\cos(e^xy)e^{2x}y-\sin(e^xy)e^x\big)\,dx\,dy+ \\ +(-\cos(e^xy)e^{2x})\,dy^2.$$

8.43. $du=(yx^{y-1}+y^x\ln y)\,dx+(x^y\ln x+xy^{x-1})\,dy,$

$$d^2u=\big(y(y-1)x^{y-2}+y^x\ln^2 y\big)\,dx^2+ \\ +2\big(x^{y-1}+x^{y-1}y\ln x+x\ln y\cdot y^{x-1}+y^{x-1}\big)\,dx\,dy+ \\ +(x^y\ln^2 x+x(x-1)y^{x-2})\,dy^2.$$

8.44. $du=\dfrac{z^2}{z^2+x^2y^2}\left(\dfrac{y}{z}\,dx+\dfrac{x}{z}\,dy-\dfrac{xy}{z^2}\,dz\right),$

$$d^2u=\frac{-2xzy^3}{(z^2+x^2y^2)^2}\,dx^2+2\frac{z^3-zy^2x^2}{(z^2+x^2y^2)^2}\,dx\,dy+2\frac{x^2y^3-z^2y}{(z^2+x^2y^2)^2}\,dx\,dz- \\ -\frac{2x^3zy}{(z^2+x^2y^2)^2}\,dy^2+2\frac{x^3y^2-xz^2}{(z^2+x^2y^2)^2}\,dy\,dz+\frac{2zxy}{(z^2+x^2y^2)^2}\,dz^2.$$

8.45. а) $-\dfrac{\sqrt{2}}{20}$; б) $-7{,}8$; в) 2; г) $-\dfrac{1}{30}$; д) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0{,}55$; е) $0{,}8+12{,}8\ln 2$.

8.46. $du=2\varphi'x\,dx-2\varphi'y\,dy,$

$$d^2u=(2\varphi'+4\varphi''x^2)\,dx^2-8xy\varphi''\,dx\,dy+(-2\varphi'+4\varphi''y^2)\,dy^2.$$

8.47. $du=\varphi'yz\,dx+\varphi'xz\,dy+\varphi'xy\,dz,$

$$d^2u=(\varphi''y^2z^2)\,dx^2+\varphi''x^2z^2\,dy^2+\varphi''x^2y^2\,dz^2+(2\varphi'z+2\varphi''xyz^2)\,dx\,dy+ \\ +(2\varphi'y+2\varphi''xzy^2)\,dx\,dz+(2\varphi'x+2\varphi''yzx^2)\,dy\,dz.$$

8.48. $du=\varphi'(y+z)\,dx+\varphi'(x+z)\,dy+\varphi'(y+x)\,dz,$

$$d^2u=\varphi''(y+z)^2\,dx^2+\varphi''(x+z)^2\,dy^2+\varphi''(y+x)^2\,dz^2+ \\ +2(\varphi'+\varphi''(y+z)(x+z))\,dx\,dy+ \\ +2(\varphi'+\varphi''(y+z)(y+x))\,dx\,dz+2(\varphi'+\varphi''(x+z)(y+x))\,dy\,dz.$$

8.49. $du=2x\varphi'\,dx+2y\varphi'\,dy+2z\varphi'\,dz,$

$$d^2u=(2\varphi'+4x^2\varphi'')\,dx^2+(2\varphi'+4y^2\varphi'')\,dy^2+(2\varphi'+4z^2\varphi'')\,dz^2+ \\ +8xy\varphi''\,dx\,dy+8xz\varphi''\,dx\,dz+8zy\varphi''\,dy\,dz.$$

8.50. $du=(\varphi_1'2x+\varphi_2'2x)\,dx+(\varphi_1'2y-\varphi_2'2y)\,dy,$

$$d^2u=(\varphi_{11}''4x^2+8\varphi_{12}''x^2+\varphi_{22}''4x^2+2\varphi_1'+2\varphi_2')\,dx^2+2(\varphi_{11}''4xy-\varphi_{22}''4xy)\,dx\,dy+ \\ +(\varphi_{11}''4y^2-8\varphi_{12}''y^2+\varphi_{22}''4y^2+2\varphi_1'-2\varphi_2')\,dy^2.$$

8.51. $du=(\varphi_1' 2x+\varphi_2' y)\,dx+(\varphi_1' 2y+\varphi_2' x)\,dy,$

$$d^2u=(\varphi_{11}'' 4x^2+4\varphi_{12}'' xy+\varphi_{22}'' y^2+2\varphi_1')\,dx^2+ \\ +2(\varphi_{11}'' 4xy+\varphi_{12}''(2x^2+2y^2)+\varphi_{22}'' xy+\varphi_2')\,dx\,dy+ \\ +(\varphi_{11}'' 4y^2+4xy\varphi_{12}''+\varphi_{22}'' x^2+2\varphi_1')\,dy^2.$$

8.52. $du=\Big(\varphi_1' y+\varphi_2'\dfrac{1}{y}\Big)dx+\Big(\varphi_1' x-\varphi_2'\dfrac{x}{y^2}\Big)dy,$

$$d^2u=\Big(\varphi_{11}'' y^2+2\varphi_{12}''+\varphi_{22}''\frac{1}{y^2}\Big)dx^2+2\Big(\varphi_{11}'' xy-\varphi_{22}''\frac{x}{y^3}+\varphi_1'-\varphi_2'\frac{1}{y^2}\Big)dx\,dy+ \\ +\Big(\varphi_{11}'' x^2-2\varphi_{12}''\frac{x^2}{y^2}+\varphi_{22}''\frac{x^2}{y^4}+\varphi_2'\frac{2x}{y^3}\Big)dy^2.$$

8.53. $du=\Big(\varphi_1'\cdot\dfrac{1}{y}-\varphi_2'\cdot\dfrac{y}{x^2}\Big)dx+\Big(-\varphi_1'\cdot\dfrac{x}{y^2}+\varphi_2'\cdot\dfrac{1}{x}\Big)dy,$

$$d^2u=\Big(\varphi_{11}''\cdot\frac{1}{y^2}-2\varphi_{12}''\cdot\frac{1}{x^2}+\varphi_{22}''\cdot\frac{y^2}{x^4}+\varphi_2'\cdot\frac{2y}{x^3}\Big)dx^2+ \\ +2\Big(-\varphi_{11}''\cdot\frac{x}{y^3}+2\varphi_{12}''\frac{1}{xy}-\varphi_{22}''\cdot\frac{y}{x^3}-\varphi_1'\cdot\frac{1}{y^2}-\varphi_2'\cdot\frac{1}{x^2}\Big)dx\,dy+ \\ +\Big(\varphi_{11}''\cdot\frac{x^2}{y^4}-2\varphi_{12}''\cdot\frac{1}{y^2}+\varphi_{22}''\cdot\frac{1}{x^2}+2\varphi_1'\frac{x}{y^3}\Big)dy^2.$$

8.54. $du=(\varphi_1'+2x\varphi_2')\,dx+(\varphi_1'+2y\varphi_2')\,dy,$

$$d^2u=(\varphi_{11}''+4x\varphi_{12}''+4x^2\varphi_{22}''+2\varphi_2')\,dx^2+2(\varphi_{11}''+2y\varphi_{12}''+2x\varphi_{12}''+4xy\varphi_{22}'')\,dx\,dy+ \\ +(\varphi_{11}''+4y\varphi_{12}''+4y^2\varphi_{22}''+2\varphi_2')\,dy^2.$$

8.55. $du=\varphi_1' y\,dx+(\varphi_1' x+\varphi_2' z)\,dy+\varphi_2' y\,dz,$

$$d^2u=\varphi_{11}'' y^2\,dx^2+(\varphi_{11}'' x^2+2\varphi_{12}' xz+\varphi_{22}'' z^2)\,dy^2+\varphi_{22}'' y^2\,dz^2+ \\ +2(\varphi_{11}'' xy+\varphi_{12}'' yz+\varphi_1')\,dx\,dy+2\varphi_{12}'' y^2\,dx\,dz+2(\varphi_{12}'' xy+\varphi_{22}'' zy+\varphi_2')\,dy\,dz.$$

8.56. $du=\Big(\varphi_1'\cdot\dfrac{2x}{y}-\varphi_2'\dfrac{2y}{x^3}\Big)dx+\Big(-\varphi_1'\cdot\dfrac{x^2}{y^2}+\varphi_2'\cdot\dfrac{1}{x^2}\Big)dy,$

$$d^2u=\Big(\varphi_{11}''\cdot\frac{4x^2}{y^2}-\varphi_{12}''\cdot\frac{8}{x^2}+\varphi_{22}''\frac{4y^2}{x^6}+\varphi_1'\frac{2}{y}+\varphi_2'\frac{6y}{x^4}\Big)dx^2+ \\ +2\Big(-\varphi_{11}''\cdot\frac{2x^3}{y^3}+\varphi_{12}''\cdot\frac{4}{xy}-\varphi_{22}''\cdot\frac{2y}{x^5}-\varphi_1'\cdot\frac{2x}{y^2}-\varphi_2'\frac{2}{x^3}\Big)dx\,dy+ \\ +\Big(\varphi_{11}''\cdot\frac{x^4}{y^4}-2\varphi_{12}''\cdot\frac{1}{y^2}+\varphi_{22}''\cdot\frac{1}{x^4}+\varphi_1'\frac{2x^2}{y^3}\Big)dy^2.$$

8.57. $du=(\varphi_1'+2x\varphi_2')\,dx+(\varphi_1'+2y\varphi_2')\,dy+(\varphi_1'+2z\varphi_2')\,dz,$

$$d^2u=(\varphi_{11}''+4x\varphi_{12}''+4x^2\varphi_{22}''+2\varphi_2')\,dx^2+(\varphi_{11}''+4y\varphi_{12}''+4y^2\varphi_{22}''+2\varphi_2')\,dy^2+ \\ +(\varphi_{11}''+4z\varphi_{12}''+4z^2\varphi_{22}''+2\varphi_2')\,dz^2+2(\varphi_{11}''+2y\varphi_{12}''+2x\varphi_{12}''+4xy\varphi_{22}'')\,dx\,dy+ \\ +2(\varphi_{11}''+2z\varphi_{12}''+2x\varphi_{12}''+4xz\varphi_{22}'')\,dx\,dz+2(\varphi_{11}''+2z\varphi_{12}''+2y\varphi_{12}''+4yz\varphi_{22}'')\,dy\,dz.$$

8.58. $du=(\varphi_1' y+\varphi_2'+\varphi_3')\,dx+(\varphi_1' x-\varphi_2'+\varphi_3')\,dy,$

$$d^2u=(\varphi_{11}'' y^2+2\varphi_{12}'' y+2\varphi_{13}'' y+\varphi_{22}''+2\varphi_{23}''+\varphi_{33}'')\,dx^2+ \\ +2(\varphi_{11}'' xy-\varphi_{12}'' y+\varphi_{13}'' y+\varphi_{12}'' x+\varphi_{13}'' x-\varphi_{22}''+\varphi_1'+\varphi_{33}'')\,dx\,dy+ \\ +(\varphi_{11}'' x^2+2\varphi_{13}'' x-2\varphi_{12}'' x+\varphi_{22}''-2\varphi_{23}''+\varphi_{33}'')\,dy^2.$$

8.59. $du=\varphi_1' 2x\,dx+\varphi_2' 2y\,dy+\varphi_3' 2z\,dz,$

$$d^2u=(\varphi_{11}'' 4x^2+2\varphi_1')\,dx^2+(\varphi_{22}'' 4y^2+2\varphi_2')\,dy^2+(\varphi_{33}'' 4z^2+2\varphi_3')\,dz^2+ \\ +\varphi_{12}'' 8xy\,dx\,dy+\varphi_{13}'' 8xz\,dx\,dz+\varphi_{32}'' 8zy\,dz\,dy.$$

8.60. $du=2\varphi_1'\,dx+3\varphi_2'\,dy+4\varphi_3'\,dz,$

$d^2u=4\varphi_{11}''\,dx^2+9\varphi_{22}''\,dy^2+16\varphi_{33}''\,dz^2+12\varphi_{12}''\,dx\,dy+16\varphi_{13}''\,dx\,dz+24\varphi_{23}''\,dy\,dz.$

8.61. $du=(\varphi_1'+2x\varphi_2')\,dx+(\varphi_2'+2y\varphi_3')\,dy+(\varphi_1'2z+\varphi_3')\,dz,$

$$\begin{aligned}d^2u={}&(\varphi_{11}''+\varphi_{12}''4x+\varphi_{22}''4x^2+2\varphi_2')\,dx^2+(\varphi_{22}''+\varphi_{23}''4y+4y^2\varphi_{33}''+2\varphi_3')\,dy^2+\\&+(\varphi_{11}''4z^2+\varphi_{13}''4z+\varphi_{33}''+2\varphi_1')\,dz^2+\\&+2(\varphi_{12}''+\varphi_{13}''2y+2x\varphi_{22}''+4xy\varphi_{23}'')\,dx\,dy+\\&+2(\varphi_{11}''2z+\varphi_{13}''+\varphi_{12}''4xz+\varphi_{23}''2x)\,dx\,dz+2(\varphi_{12}''2z+\varphi_{23}''+4yz\varphi_{13}''+2y\varphi_{33}'')\,dy\,dz\end{aligned}$$

8.62. $du=2x(\varphi_1'+\varphi_3')\,dx+2y(\varphi_1'+\varphi_2')\,dy+2z(\varphi_2'+\varphi_3')\,dz,$

$$\begin{aligned}d^2u={}&\big((\varphi_{11}''+2\varphi_{13}''+\varphi_{33}'')4x^2+2(\varphi_1'+\varphi_3')\big)\,dx^2+\\&+\big((\varphi_{11}''+2\varphi_{12}''+\varphi_{22}'')4y^2+2(\varphi_1'+\varphi_2')\big)\,dy^2+\\&+\big((\varphi_{22}''+2\varphi_{23}''+\varphi_{33}'')4z^2+2(\varphi_2'+\varphi_3')\big)\,dz^2+\\&+8xy(\varphi_{11}''+\varphi_{12}''+\varphi_{13}''+\varphi_{23}'')\,dx\,dy+8xz(\varphi_{12}''+\varphi_{13}''+\varphi_{23}''+\varphi_{33}'')\,dx\,dz+\\&+8yz(\varphi_{22}''+\varphi_{12}''+\varphi_{13}''+\varphi_{23}'')\,dy\,dz.\end{aligned}$$

8.63. $du=(\varphi_1'e^z+\varphi_3'ze^{x-y})\,dx+(\varphi_2'e^z-\varphi_3'ze^{x-y})\,dy+(\varphi_1'xe^z+\varphi_2'ye^z+\varphi_3'e^{x-y})\,dz,$

$$\begin{aligned}d^2u={}&(\varphi_{11}''e^{2z}+2\varphi_{13}''ze^{z+x-y}+\varphi_{33}''z^2e^{2x-2y}+\varphi_3'ze^{x-y})\,dx^2+\\&+(\varphi_{22}''e^{2z}-2\varphi_{23}''ze^{z+x-y}+\varphi_{33}''z^2e^{2x-2y}+\varphi_3'ze^{x-y})\,dy^2+\\&+(\varphi_{11}''x^2e^{2z}+2\varphi_{12}''xye^{2z}+2\varphi_{13}''xe^{z+x-y}+\varphi_{22}''y^2e^{2z}+2\varphi_{23}''ye^{z+x-y}+\\&+\varphi_{33}''e^{2x-2y}+\varphi_1'xe^z+\varphi_2'ye^z)\,dz^2+\\&+2(\varphi_{12}''e^{2z}-\varphi_{13}''ze^{z+x-y}+\varphi_{23}''ze^{z+x-y}-\varphi_{33}''z^2e^{2x-2y}-\varphi_3'ze^{x-y})\,dx\,dy+\\&+2(\varphi_{11}''xe^{2z}+\varphi_{12}''ye^{2z}+\varphi_{13}''e^{z+x-y}+\varphi_{13}''xze^{z+x-y}+\varphi_{23}''zye^{z+x-y}+\\&\qquad+\varphi_{33}''ze^{2x-2y}+\varphi_1'e^z+\varphi_3'e^{x-y})\,dx\,dz+\\&+2(\varphi_{12}''xe^{2z}+\varphi_{22}''ye^{2z}+\varphi_{23}''e^{z+x-y}-\varphi_{13}''zxe^{z+x-y}-\varphi_{23}''zye^{z+x-y}-\\&\qquad-\varphi_{33}''ze^{2x-2y}-\varphi_3'e^{x-y}+\varphi_2'e^z)\,dy\,dz.\end{aligned}$$

8.64. $du=(\varphi_1'z\cos xz+\varphi_3'y\cos xy)\,dx+(\varphi_2'z\cos yz+\varphi_3'x\cos xy)\,dy+$
$+(\varphi_1'x\cos xz+\varphi_2'y\cos yz)\,dz,$

$$\begin{aligned}d^2u={}&(\varphi_{11}''z^2\cos^2 xz+2\varphi_{13}''zy\cos xz\cos xy+\varphi_{33}''y^2\cos^2 xy-\varphi_1'z^2\sin xz-\\&\qquad-\varphi_3'y^2\sin xy)\,dx^2+\\&+(\varphi_{22}''z^2\cos^2 yz+2\varphi_{23}''xz\cos xy\cos yz+\varphi_{33}''x^2\cos^2 xy)\,dy^2+\\&+(\varphi_{11}''x^2\cos^2 xz+2\varphi_{12}''xy\cos xz\cos yz+\varphi_{22}''y^2\cos^2 yz-\varphi_1'x^2\sin xz-\\&\qquad-\varphi_2'y^2\sin yz)\,dz^2+\\&+2(\varphi_{12}''z^2\cos xz\cos yz+\varphi_{13}''xz\cos xz\cos xy+\varphi_{32}''yz\cos xy\cos yz+\\&\qquad+\varphi_{33}''yx\cos^2 xy+\varphi_3'\cos xy-xy\varphi_3'\sin xy)\,dx\,dy+\\&+2(\varphi_{11}''xz\cos^2 xz+\varphi_{12}''zy\cos xz\cos yz+\varphi_{13}''xy\cos xz\cos xy+\\&\qquad+\varphi_{23}''y^2\cos yz\cos xy+\varphi_1'\cos xz-xz\varphi_1'\sin xz)\,dx\,dz+\\&+2(\varphi_{12}''xz\cos xz\cos yz+\varphi_{22}''yz\cos^2 yz+\varphi_{13}''x^2\cos xz\cos xy+\\&\qquad+\varphi_{23}''xy\cos xy\cos yz+\varphi_2'\cos yz-\varphi_2'zy\sin yz)\,dy\,dz.\end{aligned}$$

8.73. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{z};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{z};\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{xy}{z^3}.$

8.74. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^2+z^2+z}{x-x^2-z^2};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^2+z^2}{x-x^2-z^2};$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2-z^2-z+2xz)+\dfrac{\partial z}{\partial x}(x-x^2+z^2+2zx)}{(x-x^2-z^2)^2}=\frac{2(z^4+z^3+z^2x+zx^2+x^3-x^4)}{(x-x^2-z^2)^3}=$$
$$=2\frac{x^2-z^2-z}{(x-x^2-z^2)^2}+2\frac{zx(1+2z)}{(x-x^2-z^2)^3}.$$

8.75. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1+yz\sin xyz}{1+xy\sin xyz},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1+xz\sin xyz}{1+xy\sin xyz};$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-\cos xyz\Big(yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big)\Big(xz+yx\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big)-\Big(z+y\dfrac{\partial z}{\partial y}+x\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big)\sin xyz}{1+xy\sin(xyz)}=$$
$$=\frac{(y-z)\sin xyz-xyz^2\cos xyz}{1+xy\sin xyz}+\frac{xy\cos xyz(yz-xy-x^2yz\sin xyz-x^2y^2z^2\sin^2 xyz)}{(1+xy\sin xyz)^2}.$$

8.76. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{yx^{y-1}}{y^z\ln y}=-\dfrac{x^{y-1}}{y^{z-1}\ln y},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x^y\ln x+zy^{z-1}}{y^z\ln y},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x^{y-1}-x^{y-1}\ln y-x^{2y-1}y^{1-z}\ln x\ln y-x^{y-1}y\ln x\ln y}{y^z\ln^2 y}.$$

8.77. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x}\cdot\dfrac{x-1}{1-z};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y}\cdot\dfrac{y-1}{1-z};$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z}{xy}\cdot\frac{(x-1)(y-1)}{(1-z)^3};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{z}{y^2}\cdot\frac{(z-1)^2+(y-1)^2}{(z-1)^3}.$$

8.78. $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{(1-2y^2)(x+z)}{y(2zx+2z^2-1)},\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1-2x^2-2xz}{2zx+2z^2-1};$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{(2xz+2z^2-1)^2}\Big(4x-4z^3-4zx^2-8xz^2+\frac{\partial z}{\partial x}(4x^3-4z+4xz^2+8x^2z)\Big),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{4x^3+8x^2z+4xz^2-4z}{(2xz+2z^2-1)^2}.$$

8.79. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{u-2v}{2(u^2+v^2)},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{v+2u}{u^2+v^2},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{v^3+6uv^2-3u^2v-2u^3}{2(u^2+v^2)^2}.$

8.80. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=u+v,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{u-v}{2},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{u+v}{2}.$

8.81. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{u\cos v+v\sin v}{e^u},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-u\sin v+v\cos v}{e^u},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{v\cos 2v+(1-u)\sin 2v}{e^{2u}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(1-u)\cos 2v-v\sin 2v}{e^{2u}}.$$

8.82. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{3zx^2}{4z^3+x^3+y^3},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{3y^2z}{4z^3+x^3+y^3}.$ **8.83.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x-yz}{xy-2z},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-xz}{xy-2z}.$

8.84. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-2xz}{1+x^2-4yz^3},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1+z^4}{1+x^2-4yz^3}.$ **8.85.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}.$

8.86. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{(x^2+y^2)^2+2xz(x+y+z)}{(x^2+y^2)(x+y+z-x^2-y^2)},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{(x^2+y^2)^2+2yz(x+y+z)}{(x^2+y^2)(x+y+z-x^2-y^2)}.$

8.87. $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{xb+yc}{zb-ay},\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-zc-xa}{zb-ay}.$ **8.88.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6zx^2-3}{12y-4yz},\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{6x^2-1}{6-2z}.$

8.89. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy-z^2-yz+x^2}{z^2-xy-y^2+xz},\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{yz-x^2+y^2-xz}{z^2-xy-y^2+xz}.$

8.90. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x^2\sin z+z^2\sin x}{y^2\sin z-z^2\sin y},\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{-y^2\sin x+x^2\sin y}{y^2\sin z-z^2\sin y}.$

8.91. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-y\sin x\sin z+2\cos x\cos^3 z}{y\sin 2y+\sin z\cos x\cos^2 z},\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2\sin 2y\cos^2 z+\sin^2 z\sin x\cos z}{y\sin 2y+\sin z\cos x\cos^2 z}.$

8.92. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{y-x}{x+y}$, $\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1-xz}{1+xz}\cdot\dfrac{z}{x}$, $\quad \dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\Big(\dfrac{y^2}{x}\cdot\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{z^2}{x}\cdot\dfrac{xz-1}{xz+1}-x\Big)$.

8.93. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{u^2-x^2}{u^2-z^2}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{u^2-y^2}{u^2-z^2}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z^2-x^2}{u^2-z^2}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{z^2-y^2}{u^2-z^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\cdot\frac{u(x^2-z^2)^2+x(u^2-z^2)^2+z(u^2-x^2)^2}{(u^2-z^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\cdot\frac{u(y^2-z^2)(x^2-z^2)+z(u^2-x^2)(u^2-y^2)}{(u^2-z^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\cdot\frac{y(u^2-z^2)^2+z(y^2-u^2)^2+u(z^2-y^2)^2}{(u^2-z^2)^3}.$$

8.94. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{z(u-x)}{x(u-z)}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{z(u-y)}{y(u-z)}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{u(z-x)}{x(z-u)}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{u(z-y)}{y(z-u)}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=zu\frac{(u-z)^2+(u-x)^2+(z-x)^2}{x^2(u-z)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=zu\frac{(u-x)(u-y)+(z-x)(z-y)}{xy(u-z)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=zu\frac{(u-z)^2+(u-y)^2+(z-y)^2}{y^2(u-z)^3}.$$

8.95. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2xv^2-(x-2vy)(u^2+v^2)}{2x^2u-xy+2vy^2}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u(x-2vy)-2xv(u^2+v^2)}{2x^2u-xy+2vy^2}$,

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{yv-2xuv-2uy(u^2+v^2)}{2x^2u-xy+2vy^2}$, $\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{(u^2+v^2)(2xu-y)+2u^2y}{2x^2u-xy+2vy^2}$.

8.96. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{7}{4}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{9}{4}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{9}{4}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{7}{4}$.

8.97. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y-u}+\dfrac{u(x+y)}{(y-u)^2(3u^2-x)}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}(y-u)-(x+u)\Big(1-\frac{\partial u}{\partial y}\Big)}{(y-u)^2}=-\frac{x+u}{(y-u)^2}+\frac{3y^2(x+y)}{(y-u)^2(3u^2-x)}.$$

8.98. $y'(1)=1$, $y''(1)=-\dfrac{2}{3}$, $z'(1)=0$, $z''(1)=-\dfrac{2}{3}$.

8.99. $y'(1)=-2$, $y''(1)=-\dfrac{61}{36}$, $z'(1)=\dfrac{5}{6}$, $z''(1)=\dfrac{29}{54}$.

8.100. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-e^{x+y}}{e^{x+y}-2y}$, $\dfrac{dz}{dx}=2x+2y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2(x-y)e^{x+y}-4xy+2y}{e^{x+y}-2y}$.

8.101. $dz=\dfrac{-(2x+z)}{x+2z}\,dx-\dfrac{1}{x+2z}\,dy$,

$$d^2z=\frac{-6x^2-6z^2-6xz}{(x+2z)^3}\,dx^2-\frac{6x}{(x+2z)^3}\,dx\,dy-\frac{2}{(x+2z)^3}\,dy^2.$$

8.102. $dz=\dfrac{x^2-yz}{xy+z^2}\,dx+\dfrac{y^2-xz}{xy+z^2}\,dy$,

$$d^2z=\frac{6x^2z^2y+2xzy^3+2xz^4-2zx^4}{(xy+z^2)^3}\,dx^2+\frac{6xz^2y^2+2yzx^3+2yz^4-2y^4z}{(xy+z^2)^3}\,dy^2+$$
$$+2\frac{(x^3+y^3)(-xy+z^2)-z(z^2+xy)^2}{(xy+z^2)^3}\,dx\,dy.$$

8.103. $dz=\dfrac{x^3-zy}{xy-z^3}\,dx+\dfrac{y^3-zx}{xy-z^3}\,dy$,

$$d^2z=\frac{x^4y^2-10x^3z^3y+2zxy^3+3x^6z^2+z^4y^2+3z^6x^2}{(xy-z^3)^3}\,dx^2+$$
$$+2\Big(\frac{3z^4xy-xy^5-z^7}{(xy-z^3)^3}+\frac{-2y^4z^3-2x^4z^3-x^5y+3z^2y^3x^3+x^2y^2z}{(xy-z^3)^3}\Big)\,dx\,dy+$$
$$+\Big(\frac{x^2y^4-10z^3y^3x+2zx^3y+z^4x^2}{(xy-z^3)^3}+\frac{3z^2y^6+3z^6y^2}{(xy-z^3)^3}\Big)\,dy^2.$$

8.104. $dz=\frac{x^2-1}{z^2+1}\cdot\frac{z}{x}\,dx+\frac{y^2-1}{z^2+1}\cdot\frac{z}{y}\,dy,$

$d^2z=\frac{1}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^3}\Bigl(\Bigl(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\Bigr)dx^2-$

$-2\Bigl(\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\Bigr)dx\,dy+\Bigl(\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(y-\frac{1}{y}\right)^2\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\Bigr)dy^2\Bigr).$

8.105. $dz=(v\cos v-\sin v)\,dx+(\cos v+v\sin v)\,dy,$

$d^2z=\frac{v}{u}\sin^2 v\,dx^2-2\frac{v}{u}\sin v\cos v\,dx\,dy+\frac{v}{u}\cos^2 v\,dy^2.$

8.106. $dz=\frac{2uv+v}{1+uv}\,dx+\frac{uv-2u}{1+uv}\,dy,$

$d^2z=\frac{2uv+2uv^2-uv^3+v}{(1+uv)^3}\,dx^2+\frac{4u^2v-2uv+2uv^2}{(1+uv)^3}\,dx\,dy+\frac{u^2v+2u^3v-uv+2u}{(1+uv)^3}\,dy^2.$

8.107. $dz=(u+v)e^{-u-v}\,dx+(u-v)e^{-u+v}\,dy,$

$d^2z=\frac{1-u}{2}(e^{-u-v}\,dx+e^{-u+v}\,dy)^2+\frac{1-u}{2}(e^{-u-v}\,dx-e^{-u+v}\,dy)^2-$

$-v(e^{-2u-2v}\,dx^2-e^{-2u+2v}\,dy^2).$

8.108. $du=\frac{y-u}{x-y}\,dx+\frac{y-v}{x-y}\,dy,\quad dv=\frac{x-u}{y-x}\,dx+\frac{x-v}{y-x}\,dy,$

$-d^2u=d^2v=\frac{2(y-u)}{(x-y)^2}\,dx^2+\frac{2(v-x)}{(x-y)^2}\,dy^2+\frac{2(y-v+u-x)}{(x-y)^2}\,dx\,dy.$

8.109. $-\frac{6}{25}\,dx^2.$ **8.110.** $-\frac{5}{18}\,dx^2+\frac{1}{9}\,dx\,dy-\frac{5}{18}\,dy^2.$ **8.111.** $\frac{4}{15}\,dx^2+\frac{4}{15}\,dy^2.$

8.112. $-4\,dx^2-64\,dx\,dy-132\,dy^2.$ **8.113.** $-\frac{7}{2\sqrt2}\,dx^2-\frac{\sqrt3}{\sqrt2}\,dx\,dy-\frac{5}{2\sqrt2}\,dy^2.$

8.114. $d^2u=\frac{55}{32}\,dx^2+\frac{25}{16}\,dx\,dy-\frac{25}{32}\,dy^2,\ d^2v=-\frac{25}{32}\,dx^2+\frac{25}{16}\,dx\,dy+\frac{55}{32}\,dy^2.$

8.115. $d^2u=-d^2v=\frac{4}{\pi}(dx\,dy+dy^2).$ **8.116.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_2'+zyF_1'}{xyF_1'},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2'+zxF_1'}{xyF_1'}.$

8.117. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yF_1'+zF_3'}{yF_2'+xF_3'},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xF_1'+zF_2'}{yF_2'+xF_3'}.$ **8.118.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xF_1'-xF_3'}{zF_2'-zF_3'},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF_2'-yF_1'}{zF_2'-zF_3'}.$

8.119. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-zF_1'+F_2'-yF_3'}{xF_1'+yF_2'-F_3'},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_1'-zF_2'-xF_3'}{xF_1'+yF_2'-F_3'}.$ **8.142.** $x''+x=e^y.$

8.143. $x''+(x')^2+x^3=0.$ **8.144.** $x'''=0.$ **8.145.** $x'''+x^2(x'')^2-y(x')^3=0.$

8.146. $\ddot y+2\dot y+y=0.$ **8.147.** $\dddot y-\ddot y-\dot y+y=0.$ **8.148.** $\dot y=y.$

8.149. $u'-4xu+4x^3=0.$ **8.150.** $-u'=2x(u+x).$ **8.151.** $t\ddot y+y=0.$

8.152. $u''-u=e^x.$ **8.153.** $u''-a^2u=2x.$ **8.154.** $yu''+u'=0.$ **8.155.** $v''+v=0.$

8.156. $\ddot u-c^2u=0.$ **8.157.** $\ddot u\,\mathrm{ch}^3\,t=1.$ **8.158.** $\ddot u-\dot u-u=0.$ **8.159.** $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$

8.160. $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0.$ **8.161.** $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0.$ **8.162.** $(x-y)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0.$

8.163. $\frac{\partial\tilde z}{\partial u}=1.$ **8.164.** $\sqrt{uv}\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial v}=-1.$ **8.165.** $4\sqrt{\frac{v}{u}}\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial v}+1=0.$ **8.166.** $\frac{\partial\tilde z}{\partial v}+2v=0.$

8.167. $\frac{1}{2(u-v)}\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial u}+4\left(\frac{1}{2v}\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial u}+\frac{1}{2v}\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial v}\right)=|v(u-v)|.$ **8.168.** $\frac{\partial\tilde z}{\partial u}=0.$ **8.169.** $\frac{\partial w}{\partial u}=u.$

8.170. $\frac{\partial w}{\partial u}=4u.$ **8.171.** $2\frac{\partial w}{\partial u}+u=0.$ **8.172.** $\frac{\partial w}{\partial v}=0.$ **8.173.** $\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{w}{v}.$

8.174. $\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}=0.$ **8.175.** $\frac{\partial w}{\partial v}\ln\frac{w}{u}=u.$ **8.176.** $\frac{\partial w}{\partial\eta}=2\eta.$ **8.177.** $\frac{\partial w}{\partial\tau}\cdot\tau=w.$

8.178. $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{y-z}{y+z}.$ **8.179.** $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x}{y}.$ **8.180.** $\frac{1}{2}=\frac{\partial y}{\partial v}\left(1-\frac{\partial y}{\partial u}\right).$ **8.181.** $\frac{\partial x}{\partial u}=1.$

8.182. $\frac{\partial^2\tilde z}{\partial u\partial v}=0.$ **8.183.** $\frac{\partial^2\tilde z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\tilde z}{\partial v^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial u}-\frac{2}{3}\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial v}=0.$ **8.184.** $\frac{\partial^2\tilde z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\tilde z}{\partial u}=0.$

8.185. $\frac{\partial^2\tilde z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\tilde z}{\partial v^2}+\frac{\partial\tilde z}{\partial v}=0.$ **8.186.** $\frac{\partial^2\tilde z}{\partial u\partial v}=0.$ **8.187.** $\frac{\partial^2\tilde z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\tilde z}{\partial v^2}=0.$

8.188. $\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}=0.$ **8.189.** $\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}-u\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}=0.$ **8.190.** $\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}+\cos u\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}=0.$

8.191. $\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}-2\frac{u}{v^2}\cdot\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}=0.$ **8.192.** $2\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u\partial v}+\frac{1}{v}\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}=0.$ **8.193.** $\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u\partial v}-\frac{1}{4v}\cdot\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}=0.$

8.194. $\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}=0.$ **8.195.** $\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}-\frac{1}{v}\Big(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}+\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\Big)=0.$ **8.196.** $\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}-2\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}=0.$

8.197. $2\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u\partial v}+\frac{1}{u-v}\Big(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial u}-\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial v}\Big)=0.$ **8.198.** $\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial v^2}+m^2(u^2+v^2)\widetilde{z}=0.$

8.199. $\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial v^2}+\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial w^2}+2\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial u}+\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial v}=0.$ **8.200.** $\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial v^2}=3\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial w}.$ **8.201.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0.$

8.202. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}.$ **8.203.** $v^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-2u\frac{\partial w}{\partial u}=0.$

8.204. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\frac{2}{u+v}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{2w}{(u+v)^2}=2.$

8.205. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\Big(\frac{\partial w}{\partial u}\Big)^2+\Big(\frac{\partial w}{\partial v}\Big)^2=0.$ **8.206.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0.$ **8.207.** $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$

8.208. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\Big(\frac{v}{u}-1\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$ **8.209.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}-w=0.$

8.210. $\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{1}{4}\cdot\frac{w}{(u-v)^2}.$ **8.211.** $r\frac{\partial g}{\partial r}.$ **8.212.** $-\frac{\partial g}{\partial\varphi}.$

8.213. $\Big(\frac{\partial g}{\partial r}\Big)^2\cos 2\varphi-\frac{\cos 2\varphi}{r^2}\Big(\frac{\partial g}{\partial\varphi}\Big)^2-2\frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial g}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{r}.$

8.214. $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}.$ **8.215.** $r^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}.$ **8.216.** $\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}.$ **8.217.** $4\sqrt{3}-\frac{1}{2}.$

8.218. $-\frac{4}{\sqrt{2}}.$ **8.219.** $\frac{5}{\sqrt{3}}.$ **8.220.** $-\frac{5}{3}.$ **8.221.** $\sqrt{\frac{2}{3}}.$ **8.222.** $-\frac{8\sqrt{3}}{7a}.$

8.223. а) $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Big(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_1,y_1)\Big)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_1,y_1)}{\pm\sqrt{\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_1,y_1)\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_1,y_1)\Big)^2}}$;

б) $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_1,y_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_1,y_1)}{\pm\sqrt{\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_1,y_1)\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_1,y_1)\Big)^2}}.$

8.224. $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),y(t_0))y'(t_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0))x'(t_0)}{\pm\sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2}}.$

8.225. $x-\frac{1}{4}=y-\frac{1}{3}=z-\frac{1}{2},\quad x+y+z=\frac{13}{12}.$

8.226. $x-\frac{\pi}{2}+1=y-1=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\quad x+y+\sqrt{2}z-\frac{\pi}{2}-4=0.$

8.227. $x-\frac{3}{2}=\dfrac{y+\frac{5}{4}}{-3}=\dfrac{z-\frac{3}{2}}{-1},\quad x-3y-z-\frac{15}{4}=0.$

8.228. $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{0},\quad x+y-1=0.$

8.229. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{-3/4},\quad -3x+y-\frac{3}{4}z+3=0.$

8.230. $\frac{x+2}{27}=\frac{y-1}{28}=\frac{z-6}{4},\quad 27x+28y+4z+2=0.$

8.231. $\dfrac{x-\frac{r}{2}}{\sqrt{10}}=\dfrac{y-\frac{r}{2\sqrt{2}}}{-3\sqrt{5}}=\dfrac{z-\frac{r\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{1},\quad \sqrt{10}x-3\sqrt{5}y+z=0.$

8.232. $\dfrac{x-\frac{a}{\sqrt{2}}}{a}=\dfrac{y-\frac{b}{\sqrt{2}}}{-b}=\dfrac{z-\frac{c\pi}{4}}{c\sqrt{2}},\quad ax-by+\sqrt{2}cz-\frac{a^2}{\sqrt{2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2}}-\frac{c^2\pi\sqrt{2}}{4}=0.$

8.233. $\dfrac{x-a}{2\sqrt{3}}=\dfrac{y+\sqrt{3}a}{-2}=\dfrac{z-\frac{2\pi}{3}a}{1}$, $\quad 2\sqrt{3}x-2y+z-4a\sqrt{3}-\dfrac{2\pi}{3}a=0.$

8.234. $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+2}{0}$, $\quad x+2y-13=0.$

8.235. $x+5y-z-5=0$, $\quad \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-5}{-1}.$

8.236. $8x+13y+5z-26=0$, $\quad \dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{13}=\dfrac{z-1}{5}.$

8.237. $-x+3z-5=0$, $\quad \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-4}{0}=\dfrac{z-2}{3}.$

8.238. $x+y+z-3=0$, $\quad \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}.$

8.239. $2x+y+z=0$, $\quad \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+1}{1}.$

8.240. $x+4y-4z-\dfrac{11}{2}=0$, $\quad \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{4}=\dfrac{z+\frac{3}{8}}{-4}.$

8.241. $12x-9y+2z-9=0$, $\quad \dfrac{x-3}{12}=\dfrac{y-5}{-9}=\dfrac{z-9}{2}.$

8.242. $x-y+\sqrt{2}z-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}=0$, $\quad \dfrac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\dfrac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=\dfrac{z-\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}.$

8.243. $(e+1)x-(e+\pi)y+(e+1)z=0$, $\quad \dfrac{x-e}{e+1}=\dfrac{y-e-1}{-e-\pi}=\dfrac{z-\pi}{e+1}.$

8.244. $\dfrac{x-\frac{\sqrt{2-m^2}}{2}}{\frac{m^2-1}{\sqrt{2-m^2}}}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{m^2-1}=\dfrac{z-\frac{\sqrt{2-m^2}}{2}}{-\frac{1}{\sqrt{2-m^2}}}$,

$$\left(x-\frac{\sqrt{2-m^2}}{2}\right)\cdot\frac{m^2-1}{\sqrt{2-m^2}}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\cdot(m^2-1)-\left(z-\frac{\sqrt{2-m^2}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2-m^2}}=0.$$

8.245. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ — т. макс.

8.246. (a, a) при $a>0$ — т. мин., при $a<0$ — т. макс.; $(0, 0)$ — седловая точка. При $a=0$ нет экстремума.

8.247. $(1, 3)$ — т. мин.; $(-1, -3)$ — т. макс.; $(3, 1)$, $(-3, -1)$ — седловые точки.

8.248. (a, b) — т. макс.; $(0, 2b)$, $(0, 0)$, $(2a, 0)$, $(2a, 2b)$ не являются точками экстремума.

8.249. $(3, 3)$, $(-3, -3)$ — т. мин., в точке $(0, 0)$ нет экстремума.

8.250. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ — т. мин., в точке $(0, 0)$ нет экстремума.

8.251. В точке $(0, 0)$ нет экстремума. *Указание.* Рассмотреть $f(x, 0)$ и $f(y^2, y)$ в окрестности точки $(0, 0)$.

8.252. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}},\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ — т. мин. **8.253.** $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ — т. мин.

8.254. $(0, 0)$ — т. мин.; все точки окружности $x^2+y^2=1$ — точки нестрогого макс.

8.255. $(1, 2)$, $(-1, -2)$ — т. мин.

8.256. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ — т. макс., $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ — седловая точка. **8.257.** $(0, 0)$ — т. макс.

8.258. $(0, 0)$ — седловая точка; все точки гиперболы $x^2-y^2=1$ — точки нестрогого макс.; все точки гиперболы $y^2-x^2=1$ — точки нестрогого мин.

8.259. $(0, 0, 0)$ — седловая точка. **8.260.** $(-1, -1, 1)$ — т. мин.

8.261. $\left(\frac{2}{7},\frac{2}{7},\frac{2}{7}\right)$ — т. макс.; все точки прямых $z=0$, $y+3x-2=0$ и $y=0$, $2-2z-3x=0$ и точки плоскости $x=0$ не являются точками экстремума; при $z=0$, $y\neq0$, $x\neq0$ и $y+3x\neq2$ — нестрогий экстремум.

8.262. $\left(2, 2, \frac{1}{2}\right)$ — седловая точка. **8.263.** $\left(2, \frac{1}{2}, 1\right)$ — т. мин.

8.264. а), б) Седловая точка. **8.265.** Т. макс. **8.266.** а), б) Седловая точка.
8.267. $(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$ — т. макс. абсциссы; $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$ — т. макс. ординаты.
8.268. $\left(\pm\frac{1}{2}a\sqrt{3}, \frac{1}{2}a\right)$ — т. макс. ординаты; $\left(\pm\frac{1}{2}a\sqrt{3}, -\frac{1}{2}a\right)$ — т. мин. ординаты; $(a\sqrt{2}, 0)$ — т. макс. абсциссы; $(-a\sqrt{2}, 0)$ — т. мин. абсциссы.
8.269. $(-1, \sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$ — т. мин. абсциссы; $(3, 3\sqrt{3})$ — т. макс. ординаты; $(3, -3\sqrt{3})$ — т. мин. ординаты; $(8, 0)$ — т. макс. абсциссы.
8.270. $(4, 4)$, $(4, -4)$ — т. макс. абсциссы; $\left(2\sqrt{3}, -2\sqrt[4]{27}\right)$ — т. мин. ординаты; $\left(2\sqrt{3}, 2\sqrt[4]{27}\right)$ — т. макс. ординаты.
8.271. $(0, 2)$ — т. макс. ординаты; $\left(\pm\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}, 1-\sqrt{5}\right)$ — т. мин. ординаты.
8.272. $\left(a\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}}, a\frac{\sqrt[4]{27}}{2\sqrt{2}}\right)$ — т. макс. ординаты; $\left(-a\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}}, -a\frac{\sqrt[4]{27}}{2\sqrt{2}}\right)$ — т. мин. ординаты; $\left(a\frac{\sqrt[4]{27}}{2\sqrt{2}}, a\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ — т. макс. абсциссы; $\left(-a\frac{\sqrt[4]{27}}{2\sqrt{2}}, -a\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ — т. мин. абсциссы.
8.273. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}\right)$ — т. макс.; $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}\right)$ — т. мин.
8.274. $(-3, 6)$ — т. макс.; $(3, -6)$ — т. мин.
8.275. $\left(-6-\frac{1}{3\sqrt{3}}, -6+\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ — т. макс.; $\left(-6+\frac{1}{3\sqrt{3}}, -6-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ — т. мин.
8.276. $\left(\frac{16}{25}, \frac{256}{3125}\right)$ — т. макс. **8.277.** $z_{\min}=z(0,-2)=1$; $z_{\max}=z\left(0, \frac{16}{7}\right)=-\frac{8}{7}$.
8.278. $z_{\max}=0$ при $x=y=1$; $z_{\min}=-4$ при $x=1$, $y=9$.
8.279. $z_{\max}=4$ при $x=y=1$; $z_{\min}=-4$ при $x=y=-1$.
8.280. $z_{\min}=12\sqrt{3}$ при $x=-6$, $y=6\sqrt{3}$, $z_{\max}=-12\sqrt{3}$ при $x=-6$, $y=-6\sqrt{3}$.
8.281. $z^{(1)}_{\max}=-\sqrt{2}$ при $x=0$, $y=0$; $z^{(1)}_{\min}=\sqrt{2}$ при $x=0$, $y=0$;
$z^{(2)}_{\max}=\sqrt{1+\sqrt{3}}$ при $x=y=1$, $x=y=-1$, $x=-y=1$, $-x=y=1$;
$z^{(2)}_{\min}=-\sqrt{1+\sqrt{3}}$ при $x=y=1$, $x=y=-1$, $x=-y=1$, $-x=y=1$.
8.284. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ — т. макс., $f_{\max}=\frac{\pi}{6}$; $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$ — т. мин., $f_{\min}=-\frac{\pi}{6}$.
8.285. $(4, 2, -1)$ — т. макс., $f_{\max}=12$; $(-4, -2, 1)$ — т. мин., $f_{\min}=-10$.
8.286. $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ — т. макс., $f_{\max}=\frac{a^2}{4}$.
8.287. $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ — т. макс.; $f_{\max}=\frac{a^3}{3\sqrt{3}}$; $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ — т. мин., $f_{\min}=-\frac{a^3}{3\sqrt{3}}$.
8.288. $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ — т. макс., $f_{\max}=\frac{a^3}{3\sqrt{3}}$. *Указание.* Рассмотреть $\ln f$.
8.289. $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ — т. макс., $f_{\max}=4\frac{4}{27}$; $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$ — т. мин., $f_{\min}=4$.
8.290. $f_{\max}=\frac{1}{27mn}$ в точке $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3m}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}\right)$.
8.291. $(1, 1, 1)$ — т. макс., $f^{(1)}_{\max}=2$; $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, 2-\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$ — т. макс.,
$f^{(2)}_{\max}=\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$.
8.292. $f_{\min}=\frac{ma^m}{n^m}$ в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i=\frac{a}{n}$.

8.293. $f_{\max}=r\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$ в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i=\alpha_i r\Big/\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$,

$f_{\min}=-r\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$ в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i=-\alpha_i r\Big/\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$.

8.294. $f_{\min}=-2$ при $x=1$, $y=2$; $f_{\max}=\frac{2}{27}$ при $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$.

8.295. $f_{\max}=17$ при $x=0$, $y=1$ и $x=1$, $y=1$; $f_{\min}=-\frac{17}{4}$ при $x=\frac{1}{2}$, $y=0$.

8.296. $f_{\max}=8$ при $x=2$, $y=0$; $f_{\min}=-\frac{1}{16}$ при $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}$.

8.297. $f_{\max}=\frac{2}{9}$ при $x=1$, $y=\frac{4}{3}$; $f_{\min}=0$ на всей границе.

8.298. $f_{\max}=2^7$ при $x=2$, $y=2$; $f_{\min}=-2$ при $x=1$, $y=0$.

8.299. $f_{\max}=1$ при $x=\pi$, $y=0$ и $x=0$, $y=\pi$; $x=0$, $y=0$ и $x=\pi$, $y=\pi$;

$f_{\min}=-\frac{1}{8}$ при $x=\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{3}$ и $x=\frac{2\pi}{3}$, $y=\frac{2\pi}{3}$.

8.300. $f_{\min}=0$ при $x=0$, $y=0$; $f_{\max}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot(3+\sqrt{3})$ при $x=y$, $\cos x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

8.301. $f_{\max}=a^3+27$ при $x=0$, $y=a$ и $x=a$, $y=0$; $f_{\min}=0$ при $x=3$, $y=3$.

8.302. $f_{\max}=2a^4$ при $x=a$, $y=a$; $f_{\min}=-1$ при $x=0$, $y=1$ и $x=1$, $y=0$.

8.303. $f_{\max}=1+\sqrt{2}$ при $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z=1$; $f_{\min}=-\frac{1}{2}$ при $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{2}$.

8.304. $f_{\max}=2$ при $x=2$, $y=0$; $f_{\min}=0$ во всех точках хорды $x=1$ и на параболе $y^2=x$, составляющей часть контура области.

8.305. $f_{\max}=a^2$ при $x=y=z=\frac{a}{\sqrt{3}}$ и $x=y=z=-\frac{a}{\sqrt{3}}$;

$f_{\min}=-\frac{a^2}{2}$ на всей окружности $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

8.306. $\frac{a}{5}+\frac{a}{5}+\frac{a}{5}+\frac{a}{5}+\frac{a}{5}$. **8.307.** $\frac{a}{n}+\frac{a}{n}+\ldots+\frac{a}{n}$ (n слагаемых).

8.308. $x_i=\frac{as_i}{s_1+s_2+\ldots+s_n}$, $i=1, 2, \ldots, n$. *Указание.* Рассмотреть $\ln z$. **8.309.** $\frac{a}{n}$.

8.310. $OQ_1=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1+b_2}$, $OQ_2=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1+a_2}$. **8.311.** $p\sqrt{5}$.

8.312. Если B и C — точки пересечения прямой со сторонами угла, то $BM=MC$.

8.313. DBE — равнобедренный треугольник, $DB=BE$.

8.314. Точка O должна удовлетворять условиям $\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=\frac{2\pi}{3}$.

8.315. Центр тяжести треугольника. **8.316.** Правильный треугольник.

8.319. Вписанный в окружность.

8.320. AC — диаметр, точки B и D расположены на окружности по разные стороны диаметра AC, $\angle CAB=\angle CAD=\alpha/2$.

8.321. $\sqrt{6+\sqrt{12}}$, $\sqrt{6-\sqrt{12}}$.

8.322. $\frac{(a-a_1)L+(b-b_1)M+(c-c_1)N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$, $L=mn_1-nm_1$, $M=nl_1-ln_1$, $N=lm_1-ml_1$.

8.323. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$. **8.324.** Куб со стороной $\frac{a}{12}$. **8.325.** Куб со стороной $\sqrt[3]{V}$.

8.326. Длины сторон равны $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **8.327.** Стороны треугольника $\frac{3p}{4}$, $\frac{3p}{4}$ и $\frac{p}{2}$.

8.328. Квадраты радиуса основания, высоты и образующей конуса относятся как $1:2:3$.

8.329. $\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}=\frac{v_1}{v_2}$.

8.330. $x=\sum\limits_{i=1}^{n}m_ia_i\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}m_i$, $y=\sum\limits_{i=1}^{n}m_ib_i\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}m_i$. Если на плоскости задана система, состоящая из n материальных точек, то минимум момента инерции этой системы относительно подвижной точки P, лежащей в той же плоскости, достигается при совпадении точки P с центром масс этой системы.

§ 8.9. Теоретические задачи

Пример Т8.1. Докажем, что объединение двух связных множеств, имеющих общую точку, связно.

Решение. Пусть E_1 и E_2 — связные множества и $x_0 \in E_1 \cap E_2$. Если $E = E_1 \cup E_2$ несвязно, то существуют два таких открытых непересекающихся множества G_1 и G_2, что $E \subset G_1 \cup G_2$, $E \cap G_2 \neq \varnothing$, $E \cap G_1 \neq \varnothing$. Пусть $x_0 \in G_1$. Поскольку E_1 связно и $x_0 \in E_1 \cap G_1$, получаем $E_1 \subset G_1$. Точно так же и $E_2 \subset G_1$. Следовательно, $E = E_1 \cup E_2 \subset G_1$, и так как $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, получаем $E \cap G_2 = \varnothing$, что противоречит построению множеств G_1 и G_2. □

Пример Т8.2. Пусть F — непустое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ и $F = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$, где F_m — замкнутые множества. Докажем, что существует такое число m_0 и такой замкнутый шар $\overline{U} \subset \mathbb{R}^n$, что $F \cap \overline{U} = F_{m_0} \cap \overline{U}$, $F \cap U \neq \varnothing$.

Решение. Предположим противное. Тогда в любом таком шаре U, что $F \cap U \neq \varnothing$, найдётся такая точка x_1, что $x_1 \in F \cap \overline{U}$, $x_1 \notin F_1$. Поскольку F_1 замкнуто, найдётся шар $U_1 \subset \overline{U}$ с центром в точке x_1, $\overline{U}_1 \cap F_1 = \varnothing$, причём можно считать, что радиус δ_1 шара U_1 не превосходит 1. Продолжая так же рассуждать, получим последовательность вложенных и замкнутых шаров $\overline{U} \supset \overline{U}_1 \supset \overline{U}_2 \supset \ldots \supset \overline{U}_n \supset \ldots$ с центрами в точках x_n и радиусами $\delta_n < 1/n$ соответственно таких, что $\overline{U}_n \cap E \neq \varnothing$, $\overline{U}_n \cap F_n = \varnothing$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть x_0 — общая точка всех множеств $\overline{U}_n \cap F$, тогда, с одной стороны, $x_0 \in F$, с другой стороны — для любого n имеем $x_0 \notin F_n$, поэтому $x_0 \notin F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Получили противоречие. □

Числовую функцию $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назовём *линейно непрерывной*, если она непрерывна как функция каждой из координат x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, при фиксированных остальных.

Пример Т8.3. Пусть G — область в $\mathbb{R}^2$ и функция $f : G \to \mathbb{R}$ линейно непрерывна в G и монотонна по одной из переменных. Докажем, что функция f непрерывна в G.

Решение. Для определённости предположим, что функция $f(x, y)$ монотонна по переменной x при фиксированном значении y. Пусть $(x_0, y_0) \in G$. Тогда некоторый квадрат A с центром в точке (x_0, y_0) и сторонами, параллельными осям координат, также лежит в области G. Пусть теперь $(x, y) \in A$.

Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. В силу линейной непрерывности функции f существует такое $h > 0$, что для всех Δx, Δy: $|\Delta x| \leqslant h$, $|\Delta y| \leqslant h$, выполняются неравенства $|f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$, $|f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$, $|f(x_0 + h, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + h, y_0)| < \varepsilon$ и $|f(x_0 - h, y_0 + \Delta y) - f(x_0 - h, y_0)| < \varepsilon$. Тогда, используя монотонность по переменной x, получаем

$$
\begin{aligned}
&|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \leqslant \\
&\leqslant |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)| + |f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| < \\
&< |f(x_0 + h, y_0 + \Delta y) - f(x_0 - h, y_0 + \Delta y)| + \varepsilon \leqslant \\
&\leqslant |f(x_0 + h, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + h, y_0)| + |f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)| + \\
&+ |f(x_0, y_0) - f(x_0 - h, y_0)| + |f(x_0 - h, y_0) - f(x_0 - h, y_0 + \Delta y)| + \varepsilon < 5\varepsilon,
\end{aligned}
$$

следовательно, функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0). □

Отображение $f: E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, называется *равномерно непрерывным на E*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in E$, удовлетворяющих условию $\|x_1 - x_2\| < \delta$, выполняется неравенство $\|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$.

Пример Т8.4. Область $D \subset \mathbb{R}^2$ состоит из тех точек M, полярные координаты которых φ_M, r_M удовлетворяют условиям $\varphi_M > 2\pi$,

$$\operatorname{arctg}\varphi_M - \alpha < r_M < \operatorname{arctg}\varphi_M + \alpha, \quad \text{где } \alpha = \frac{1}{8}(\operatorname{arctg}(2\pi + \varphi_M) - \operatorname{arctg}\varphi_M).$$

Обозначим через O полюс и положим $\varphi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ — значение угла между полярной осью и отрезком OM, для которого

$$\operatorname{arctg}\varphi - \alpha < r_M < \operatorname{arctg}\varphi + \alpha.$$

Покажем, что функция $\varphi(x, y)$ корректно определена на D, имеет непрерывные и ограниченные частные производные по переменным x и y в D, но не является равномерно непрерывной в D.

Решение. Пусть

$$D_p = \left\{M: 2\pi p < \varphi_M \leqslant 2\pi(p+1), \operatorname{arctg}\varphi_M - \alpha < r_M < \operatorname{arctg}\varphi_M + \alpha\right\},$$

тогда $D = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} D_p$. Если точка $M(x, y) \in D_p$, то $\varphi(x, y) = \varphi_0 + 2\pi p$, где φ_0 $(0 < \varphi_0 \leqslant 2\pi)$ — угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и полярной осью, совпадающей с положительной полуосью Ox. Чтобы установить корректность определения функции $\varphi(x, y)$, достаточно показать, что множества D_p не пересекаются. Пусть l_0 есть луч, выходящий из полюса под углом φ_0, $0 < \varphi_0 \leqslant 2\pi$, к полярной оси. Этот луч пересекается с D_p по отрезку, концевые точки которого отстоят от полюса на

$$r_p = \operatorname{arctg}(\varphi_0 + 2\pi p) - \frac{1}{8}(\operatorname{arctg}(\varphi_0 + 2\pi(p+1)) - \operatorname{arctg}(\varphi_+ 2\pi p)),$$

$$\widetilde{r}_p = \operatorname{arctg}(\varphi_0 + 2\pi p) + \frac{1}{8}(\operatorname{arctg}(\varphi_0 + 2\pi(p+1)) - \operatorname{arctg}(\varphi_+ 2\pi p)).$$

Поскольку $\widetilde{r}_p < r_{p+1}$, отрезки $l_0 \cap D_p$ и $l_0 \cap D_q$, $p \neq q$, не пересекаются. Следовательно, $D_p \cap D_q \neq \varnothing$, $p \neq q$. Возьмём последовательность точек M_p с полярными координатами $\varphi_p = \varphi_0 + 2\pi p$, $r_p = \operatorname{arctg}(\varphi_0 + 2\pi p)$. Тогда $M_p \in D_p \cap l_0$, $\lim\limits_{p\to\infty} r_p = \pi/2$, следовательно, существует $\lim\limits_{p\to\infty} M_p = M_0$ и в силу критерия Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует такое P, что $\|M_{p_1} - M_{p_2}\| < \varepsilon$ для любых $p_1 > p_2 > P$. С другой стороны, поскольку $M_{p_1} \in D_{p_1} \cap l_0$, $M_{p_2} \in D_{p_1} \cap l_0$, получаем $\varphi(M_{p_1}) = \varphi_0 + 2\pi p_1$, $\varphi(M_{p_2}) = \varphi_0 + 2\pi p_2$, т. е. $|\varphi(M_{p_1}) - \varphi(M_{p_2})| = 2\pi|p_1 - p_2| \geqslant 2\pi$. Итак, в множестве D имеется пара сколь угодно близких точек, разность значений функции φ в которых не менее 2π, т. е. φ не является равномерно непрерывной на D. Пусть $M_0(x_0, y_0) \in D$. Если $x_0 \neq 0$, то найдётся такая окрестность $U(M_0) \in D$ точки M_0, что $\varphi(M) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 2\pi k_1(M_0)$, $k_1 \in \mathbb{N}$ для любого $M \in U(M_0)$; если $y_0 \neq 0$, то найдётся такая окрестность $U(M_0)$ точки M_0, что $\varphi(M) = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y} + 2\pi k_2(M_0)$, $k_2 \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любой точки $M_0 \in D$ получаем $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0) = \dfrac{-y_0}{x_0^2 + y_0^2}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(M_0) = \dfrac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}$, т. е. $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(M)\right| \leqslant 1$, $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(M)\right| \leqslant 1$ для любой точки $M \in D$. $\square$

Пример Т8.5. Пусть $f = \sqrt[3]{x^2y}$. Покажем, что функция f непрерывна в квадрате $[-1; 1] \times [-1; 1]$, имеет обе частные производные в точке $(0, 0)$, но не дифференцируема в этой точке.

Решение. Функция f непрерывна как композиция многочлена и кубического корня. Поскольку $f(x, 0) = 0$ для любого $x \in [-1; 1]$ и $f(0, y) = 0$ для любого $y \in [-1; 1]$, получаем $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$. Если f дифференцируема в точке $M_0(0, 0)$, то $df = 0$ и, следовательно, $f = f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ $(x^2 + y^2 \to 0)$. Но для $y = x$ имеем: $f(x, x) = x$, следовательно, $\dfrac{f(x,x)}{\sqrt{x^2+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} x$, а функция $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} x$ не является бесконечно малой при $x \to 0$. Полученное противоречие показывает, что f не дифференцируема в точке $M_0(0, 0)$. □

Пример Т8.6. Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Покажем, что:

а) $f(x, y)$ непрерывна в начале координат;

б) $f(x, y)$ не является дифференцируемой в начале координат;

в) для любых $x = x(t)$, $y = y(t)$: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$; $x \in C^1[-1; 1]$, $y \in C^1[-1; 1]$; $x^2(t) + y^2(t) > 0$ при $t \neq 0$, $\widetilde{f}(t) = f(x(t), y(t))$ дифференцируема при любом $t \in [-1; 1]$ (в частности, при $t = 0$).

Решение. Поскольку $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, получаем $|f(x, y)| \leqslant \frac{1}{2}|x|$, откуда следует непрерывность f в начале координат. Так же как в примере Т8.5, можно показать, что $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$. Если f дифференцируема в точке $(0, 0)$, то отсюда следует, что $df = 0$ и $\Delta f = f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ $(x^2 + y^2 \to 0)$. Но для $y = x$ имеем $\dfrac{f(x,x)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x^3}{2x^2\sqrt{2}|x|} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn} x$, а функция $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn} x$ не бесконечно малая при $x \to 0$. Следовательно, f не дифференцируема в точке $(0, 0)$. Пусть $x = x(t)$, $x(0) = 0$, $y = y(t)$, $y(0) = 0$, $x(t), y(t) \in C^1[-1; 1]$, $x'(0) = A$, $y'(0) = B$, $A^2 + B^2 > 0$. Тогда $x(t) = At + o(t)$, $y(t) = Bt + o(t)$ при $t \to 0$ и $\widetilde{f} = f(x(t), y(t)) = \dfrac{A^2Bt^3 + o(t^3)}{A^2t^2 + B^2t^2 + o(t^2)} = \dfrac{A^2Bt}{A^2+B^2} + o(t)$, т. е. $\widetilde{f}(t)$ дифференцируема в нуле и $\widetilde{f}'(0) = \dfrac{A^2B}{A^2+B^2}$. Если $A = 0$ и $B = 0$, то $x(t) = t\varepsilon_1(t)$, $y(t) = t\varepsilon_2(t)$, где $\varepsilon_1^2(t) + \varepsilon_2^2(t) \to 0$ при $t \to 0$. Поскольку $x^2(t) + y^2(t) > 0$ при $t \neq 0$, получаем $\varepsilon_1^2(t) + \varepsilon_2^2(t) > 0$ при $t \neq 0$. Тогда

$$\frac{\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(0)}{t} = \frac{\widetilde{f}(t)}{t} = \frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}$$

и, как показано выше, $\lim\limits_{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2 \to 0} \dfrac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2} = 0$, т. е. $\widetilde{f}(t)$ дифференцируема в 0 и $\widetilde{f}'(0) = 0$. □

Пример Т8.7. Функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$;

2) для любого отображения $\varphi\colon \mathbb{R}^2_{u,v} \to \mathbb{R}^2_{x,y}$; $\varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$, непрерывно дифференцируемого в некоторой окрестности точки (u_0, v_0), существуют производные $(f\circ\varphi)'_u(u_0, v_0) = A$ и $(f\circ\varphi)'_v(u_0, v_0) = B$;

3) справедливы равенства

$$A = f'_x(x_0, y_0)x'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0)y'_u(u_0, v_0),$$

$$B = f'_x(x_0, y_0)x'_v(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0)y'_v(u_0, v_0).$$

Докажем, что функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Решение. Пусть $f'_x(x_0, y_0) = a$ и $f'_y(x_0, y_0) = b$. Функция

$$g(x, y) = f(x_0 + x, y_0 + y) - ax - by - f(x_0, y_0)$$

дифференцируема в точке $M_0(0, 0)$ тогда и только тогда, когда f дифференцируема в точке (x_0, y_0). Поскольку $g'_x(M_0) = 0$, $g'_y(M_0) = 0$, в силу условия задачи для любых $x(t)$, $y(t)$: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x(t), y(t) \in C^1(-1; 1)$, имеем $\dfrac{d}{dt} g(x(t), y(t))|_{t=0} = 0$. Предположим, что g не дифференцируема в точке $M_0(0, 0)$. Это значит, что существует последовательность точек $M_p(x_p, y_p) \to \to M_0$ и число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $p \in \mathbb{N}$ имеем $|g(x_p, y_p)| \geqslant \varepsilon_0\sqrt{x_p^2 + y_p^2}$. Пусть k — конечная предельная точка множества $\{y_p/x_p\}$. (Если это множество не имеет конечных предельных точек, то аналогичное рассуждение проводится для множества $\{x_p/y_p\}$, для которого в этом случае нуль будет предельной точкой.) Выберем такую подпоследовательность $\{M_{p_m}\}$ последовательности $\{M_p\}$, что x_{p_m} монотонно стремятся к нулю (для определённости $x_{p_m} > 0$) и $\dfrac{y_{p_m}}{x_{p_m}} \to k$ $(m \to \infty)$. Положим $n_1 = p_1$. Поскольку $y_{p_m} \to 0$, $x_{p_m} \to 0$ при $m \to \infty$, то найдётся такой номер $n_2 = p_m$, что $\dfrac{y_{n_1}}{x_{n_1}} - \dfrac{1}{2} < \dfrac{y_{n_1} - y_{n_2}}{x_{n_1} - x_{n_2}} < \dfrac{y_{n_1}}{x_{n_1}} + \dfrac{1}{2}$. Продолжая по индукции такой выбор, построим последовательность таких точек $M_q(x_q, y_q)$, что последовательность $\{x_q\}$ монотонно стремится к нулю, $\lim\limits_{q\to\infty} y_q = 0$, $\lim\limits_{q\to\infty} \dfrac{y_q}{x_q} = k$ и при любом q $(q = 1, 2, \ldots)$ $\dfrac{y_q}{x_q} - \dfrac{1}{q} < \dfrac{y_q - y_{q+1}}{x_q - x_{q+1}} < \dfrac{y_q}{x_q} + \dfrac{1}{q}$. Используя результат примера Т7.9 (с. 312), для каждого q найдём такую функцию $\varphi_q\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, что $\varphi_q \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi_q(x_{q+1}) = y_{q+1}$, $\varphi_q(x_q) = y_q$, $\varphi'_q(x_{q+1}) = \dfrac{y_{q+1}}{x_{q+1}}$, $\varphi'_q(x_q) = \dfrac{y_q}{x_q}$, $\dfrac{y_q}{x_q} - \dfrac{2}{q} < \varphi'_q(x) < \dfrac{y_q}{x_q} + \dfrac{2}{q}$, $x \in [x_{q+1}; x_q]$. Положим

$$x(t) = t \quad \text{и} \quad y(t) = y(x) = \begin{cases} \varphi_q(x), & x \in (x_{q+1}; x_q), \\ kx, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{y_1}{x_1}x + y_1, & x > x_1. \end{cases}$$

Тогда $x(t), y(t) \in C^1(\mathbb{R})$, $x(0) = y(0) = 0$, но, по построению последовательности $\{M_q(x_q, y_q)\}$: $|g(x_q, y(x_q))| = |g(x_q, y_q)| \geqslant \varepsilon_0\sqrt{x_q^2 + y_q^2}$, следовательно, функция $g(x(t), y(t))$ не может иметь в точке $t = 0$ производную, равную нулю. Полученное противоречие показывает, что g дифференцируема в точке $M_0(0, 0)$. □

Пример Т8.8. Покажем, что уравнение $x = ky + \varphi(y)$, где $k \neq 0$ и $\varphi(y)$ — дифференцируемая, периодическая с периодом T функция, удовлетворяющая условию $|\varphi'(y)| < |k|$, определяет на всей числовой прямой функцию $y(x) = \frac{x}{k} + \psi(x)$, где $\psi(x)$ — периодическая функция с периодом $|k| \cdot T$.

Решение. В силу периодичности φ, применяя теорему Лагранжа (см. гл. 5), получаем $\max\limits_{y\in\mathbb{R}} |\varphi(y)| = \max\limits_{0\leqslant y\leqslant T} |\varphi(y)| \leqslant |k|T + |\varphi(0)|$, следовательно, переменная $x = ky + \varphi(y)$ принимает все действительные значения. Поскольку $x'_y = k + \varphi'_y \neq 0$, обратная функция $y = y(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема на всей числовой оси. Функция $g(x) = y(x) - \frac{x}{k}$ также определяется из уравнения $kg + \varphi\left(g + \frac{x}{k}\right) = 0$ при любом x. Если $x_1 = x + |k|T$, то значение $g_1 = g(x_1)$ должно удовлетворять уравнению $kg_1 + \varphi\left(g_1 + \frac{x}{k} + T \operatorname{sgn} k\right) = 0$, которое в силу периодичности φ равносильно уравнению $kg_1 + \varphi\left(g_1 + \frac{x}{k}\right) = 0$. Таким образом, значения $g = g(x)$ и $g_1 = g(x + |k|T)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению, и в силу единственности его решения получаем $g = g_1(x) = g(x + |k|T)$, т. е. функция g периодическая с периодом $|k| \cdot T$. □

Пример Т8.9. Рассмотрим кривую, заданную уравнением $xy(x+y) + x^2 = 2y^2$. Найдём количество значений y, которое может соответствовать данному x, и выделим непрерывные и гладкие ветви кривой.

Решение. Пусть $F(x, y) = xy(x + y) + x^2 - 2y^2 = (x - 2)y^2 + x^2y + x^2$. Тогда $F(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и $F'_y(x, y) = 2(x-2)y + x^2$. Если точка (x_0, y_0) такова, что $F(x_0, y_0) = 0$ и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности этой точки уравнение $F(x, y) = 0$ определяет непрерывно дифференцируемую функцию $y = f(x)$, причём $y_0 = f(x_0)$. Единственная точка кривой, не удовлетворяющая условию $F'_y(x, y) \neq 0$, — точка $(0, 0)$. Все остальные точки кривой будут лежать на какой-либо одной из её ветвей.

Выделим ветви кривой. Для этого разрешим уравнение $F(x, y) = 0$ относительно y. Получаем либо точку $(2, -1)$, либо $y = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4x^3 + 8x^2}}{4 - 2x}$. Поскольку $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - \sqrt{x^4 - 4x^3 + 8x^2}}{4 - 2x} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{-2x^2}{x^2 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 8x^2}} = -1$, можно выделить три непрерывные ветви исследуемой кривой:

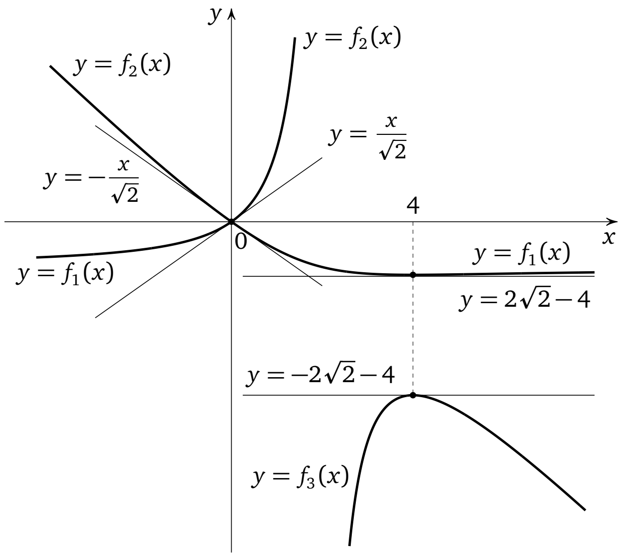
1) $y = f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - \sqrt{x^4 - 4x^3 + 8x^2}}{4 - 2x}, & x \neq 2, \\ -1, & x = 2 \end{cases}$ с областью определения $\mathbb{R}$;

2) $y = f_2(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 8x^2}}{4 - 2x}$ с областью определения $(-\infty; 2)$;

3) $y = f_3(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 8x^2}}{4 - 2x}$ с областью определения $(2; +\infty)$.

Таким образом, данному значению x могут соответствовать одно или два значения y.

Функция $f_3(x)$ дифференцируема на всей области определения. Функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ дифференцируемы на всей области определения за исключением точки $x = 0$. Действительно, при $x \to 0$ имеем $f_1(x) \sim -\frac{1}{\sqrt{2}}|x|$ и $f_2(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}|x|$.



Поэтому получившиеся ветви $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ являются непрерывными, но не гладкими.

Поскольку $f_1'(0+) = f_2'(0-) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_1'(0-) = f_2'(0+) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, гладкие ветви можно выделить следующим образом:

$$y = \widetilde{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in (-\infty; 0], \\ f_2(x), & x \in (0; 2), \end{cases} \quad y = \widetilde{f}_2(x) = \begin{cases} f_2(x), & x \in (-\infty; 0], \\ f_1(x), & x \in (0; +\infty), \end{cases} \quad y = f_3(x).$$

Заметим, что $\widetilde{f}_1(x) = \dfrac{x^2 + x\sqrt{x^2 - 4x + 8}}{4 - 2x}$, $\widetilde{f}_2(x) = \dfrac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 4x + 8}}{4 - 2x}$ при $x \neq 2$, $\widetilde{f}_2(2) = -1$. В точке $(0, 0)$ эти ветви пересекаются под углом $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

Выделить ветви данной кривой можно также при помощи введения параметра. Положив $y = tx$, получаем

$$x(t) = \frac{2t^2 - 1}{t(t+1)}, \quad y(t) = \frac{2t^2 - 1}{t+1}, \quad \dot{x}(t) = \frac{2t^2 + 2t + 1}{t^2(t+1)^2}, \quad \dot{y}(t) = \frac{2t^2 + 4t + 1}{(t+1)^2}.$$

Функция $x(t)$ имеет три участка монотонности $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$, которым соответствуют три гладкие ветви кривой.

Первая ветвь $y = g_1(x)$, соответствующая $t \in (-\infty; -1)$, определена при $x \in (2; +\infty)$, возрастает на промежутке $(2; 4]$ от $-\infty$ до $-4 - 2\sqrt{2}$, убывает на луче $[4; +\infty)$ от $-4 - 2\sqrt{2}$ до $-\infty$.

Вторая ветвь $y = g_2(x)$, соответствующая $t \in (-1; 0)$, определена при $x \in \mathbb{R}$, убывает на луче $(-\infty; 4]$ от $+\infty$ до $-4 + 2\sqrt{2}$, возрастает на луче $[4; +\infty)$ от $-4 + 2\sqrt{2}$ до -1.

Третья ветвь $y = g_3(x)$, соответствующая $t \in (0; +\infty)$, определена при $x \in (-\infty; 2)$, возрастает от -1 до $+\infty$.

Нетрудно видеть, что $g_1(x) = f_3(x)$, $g_2(x) = \widetilde{f}_2(x)$, $g_3(x) = \widetilde{f}_1(x)$. □

В рассмотренном примере удалось указать явный вид функций, задающих ветви кривой. В тех случаях, когда это не представляется возможным, можно попытаться выделить ветви путём введения параметра. Для иллюстрации обоих подходов мы привели два решения.

T8.1. Пусть $p \geqslant 1$ и $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Проверить, что $\|\vec{v}\|_p = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} |v_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ является нормой в $\mathbb{R}^n$.

T8.2. Пусть $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Доказать, что $\lim\limits_{p\to+\infty} \|\vec{v}\|_p = \|\vec{v}\|_\infty \equiv \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |v_k|$. Проверить, что $\|\vec{v}\|_\infty$ является нормой в $\mathbb{R}^n$.

✓**T8.3.** Изобразить единичный круг на плоскости для каждой из норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ в $\mathbb{R}^2$.

T8.4. Доказать, что норма $\|\cdot\|_1$ эквивалентна евклидовой норме в $\mathbb{R}^n$.

T8.5. Доказать, что любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ есть объединение не более чем счётного семейства открытых шаров.

Множество $D \subset \mathbb{R}^2$ называется *линейно связным*, если для любых его точек M_1 и M_2 существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и целиком лежащая в данном множестве (т. е. такое непрерывное отображение φ отрезка $[0; 1] \to \mathbb{R}^n$, что $\varphi(0) = M_1$, $\varphi(1) = M_2$ и $\varphi(x) \in D$ для любого $x \in [0; 1]$).

T8.6. Доказать, что любое линейно связное множество связно.

T8.7. Множество $D \subset \mathbb{R}^2$ состоит из точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $y = \sin 1/x$, и отрезка $\{(x, y) : x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$. Доказать, что D связно, но не линейно связно.

Метрикой на множестве X называется функция $\rho : X^2 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$ (неотрицательность), $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);

3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ (неравенство треугольника).

Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактом*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие. Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

T8.8. Является ли метрикой на числовой прямой функция $\rho(x, y)$:

✓а) $\rho(x, y) = \operatorname{arctg}|x - y|$; б) $\rho(x, y) = \dfrac{|x-y|}{1+(x-y)^2}$;

✓в) $\rho(x, y) = \sin^2 xy$; г) $\rho(x, y) = |xy|$;

д) $\rho(x, y) = (x - y)^2$; ✓е) $\rho(x, y) = \dfrac{|x-y|}{x^2+2y^2+1}$;

ж) $\rho(x, y) = \sin|x - y|$; ✓з) $\rho(x, y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$?

T8.9. Рассмотрим $(\mathbb{R}, \rho_1)$ — числовую прямую с метрикой $\rho_1(x, y) = |x - y|$ и $(\mathbb{R}, \rho_2)$ — числовую прямую с метрикой $\rho_2(x, y) = \operatorname{arctg}|x - y|$. Доказать, что

а) любое открытое множество в $(\mathbb{R}, \rho_1)$ является открытым в $(\mathbb{R}, \rho_2)$ и любое замкнутое множество в $(\mathbb{R}, \rho_1)$ является замкнутым в $(\mathbb{R}, \rho_2)$;

б) в пространстве $(\mathbb{R}, \rho_2)$ существует замкнутое ограниченное множество, не являющееся компактом.

Расстоянием между двумя множествами $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Т8.10. Доказать, что расстояние между двумя компактными непересекающимися множествами в $\mathbb{R}^n$ больше нуля.

Т8.11. Привести пример двух замкнутых непересекающихся множеств в $\mathbb{R}^2$, расстояние между которыми равно нулю.

Т8.12. Привести пример двух непересекающихся ограниченных множеств в $\mathbb{R}^2$, расстояние между которыми равно нулю.

✓**Т8.13.** Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности U_0 точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Для произвольной окрестности $U \subset U_0$ положим $\omega(f, U) = \sup\limits_{A,B \in U} |f(A) - f(B)|$ — колебание функции на U. Доказать, что для любой ограниченной функции существует число

$$\omega(f, x_0) = \lim_{\delta \to 0+} \omega(f, U_\delta(x_0))$$

(число $\omega(f, x_0)$ называется *колебанием* функции f в точке x_0).

✓**Т8.14.** Доказать, что колебание $\omega(f, x_0)$ (см. задачу Т8.13) равно нулю тогда и только тогда, когда f непрерывна в точке x_0.

Т8.15. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f: E \to \mathbb{R}$, $E_c^+ = \{x \in E: f(x) > c\}$, $E_c^- = \{x \in E: f(x) < c\}$. Доказать, что для непрерывности f на E необходимо и достаточно, чтобы множества E_c^+ и E_c^- были открыты относительно E для любого $c \in \mathbb{R}$ (т. е. E_c^+ и E_c^- есть пересечение E с некоторым открытым в $\mathbb{R}^n$ множеством).

Т8.16. Пусть U — некоторый открытый шар в $\mathbb{R}^k$ и $\{f_n\}$, $f_n: \overline{U} \to \mathbb{R}$, — последовательность функций. Для натуральных чисел n, m и числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим множества $A_{n,m,\varepsilon} = \{x \in \overline{U}: |f_n(x) - f_{n+m}(x)| \leqslant \varepsilon\}$ и $B_{n,\varepsilon} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_{n,m,\varepsilon}$. Доказать, что условие «$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{n,\varepsilon} = \overline{U}$ для любого $\varepsilon > 0$» необходимо и достаточно для сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ в каждой точке $x \in \overline{U}$.

Т8.17. Пусть U — некоторый открытый шар в $\mathbb{R}^k$, $f_n: \overline{U} \to \mathbb{R}$, $f_n \in C(\overline{U})$, и $f_n(x) \to f(x)$ для любого $x \in \overline{U}$. Доказать, что для любого замкнутого множества $F \subset U$ найдётся точка $x_0 \in F$, в которой $f(x)$ непрерывна относительно F, т. е.

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in F} f(x) = f(x_0).$$

Т8.18. Пусть на декартовой плоскости задано множество D ($D \neq \varnothing$). Каждой точке этого множества ставится в соответствие его ортогональная проекция на ось Ox. Доказать, что полученное отображение $f: D \to \mathbb{R}$ непрерывно.

✓**Т8.19.** Привести пример функции $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, линейно непрерывной в квадрате $[-1; 1] \times [-1; 1]$, но разрывной в начале координат.

Т8.20. Доказать, что линейно непрерывная в некотором круге $U \subset \mathbb{R}^2$ функция $f: U \to \mathbb{R}$ имеет в этом круге точку непрерывности.

Т8.21. Привести пример функции $f(x, y)$, разрывной в каждой точке квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$, но непрерывной как функция x при любом фиксированном $y \in [0; 1]$.

✓**T8.22.** Пусть G — область в $\mathbb{R}^2$ и функция $f: G \to \mathbb{R}$ непрерывна в G как функция переменной x при фиксированном y, для которого $(x, y) \in G$, и удовлетворяет условию Липшица по переменной y, т. е. существует такая постоянная L, что $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$ для любой пары точек (x, y_1), (x, y_2) из G. Доказать, что f непрерывна в G.

T8.23. Привести пример разрывной в квадрате $[-1; 1] \times [-1; 1]$ функции f, строго монотонной по каждой переменной и непрерывной по одной из них на $[-1; 1]$ при фиксированной другой (ср. с примером T8.3).

T8.24. Привести пример таких функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$, что каждая из них является разрывной в точке $(0, 0)$, но в точке $(0, 0)$ а) непрерывна их сумма; б) непрерывно их произведение.

T8.25. Пусть $f(x, y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$. Показать, что не существует $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, но существуют и равны $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y))$ и $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y))$.

T8.26. Пусть существуют $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)) = B$. Доказать, что $A = B$.

✓**T8.27.** Пусть задана функция

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

Доказать, что существует $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, но не существует ни один из повторных пределов: $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y))$, $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y))$.

✓**T8.28.** Пусть $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + (x - y)^4}$. Показать, что $\lim\limits_{x\to\infty,\ y\to\infty} f(x, y)$ не существует, но $\lim\limits_{x\to\infty}(\lim\limits_{y\to\infty} f(x, y)) = \lim\limits_{y\to\infty}(\lim\limits_{x\to\infty} f(x, y))$.

T8.29. Показать, что в любой окрестности точки $(0, 0)$ функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

принимает все значения из интервала $(-1; 1)$.

T8.30. Показать, что в любой окрестности точки $(0, 0)$ функция

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

принимает все положительные значения.

T8.31. Пусть $f(x, y) = xy\exp(-(y - x^2)^2)$. Показать, что $f(x, y) \to 0$, когда точка (x, y) стремится к ∞, оставаясь на фиксированном луче $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, $t \to +\infty$, но $f(x, y)$ не является бесконечно малой при $x \to \infty$, $y \to \infty$.

Т8.32. Доказать, что функция непрерывна в точке $(0,0)$:

а) $f=\sin(x^2+y^2)$; б) $f=\begin{cases} x^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

✓в) $f=\begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0;\end{cases}$ ✓г) $f=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

д) $f=\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

Т8.33. Доказать, что функция не является непрерывной в точке $(0,0)$:

а) $f=\begin{cases} \sin\dfrac{y}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ б) $f=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

в) $f=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^2}{x^3+y^3}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ ✓г) $f=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y}, & x^2+y\neq 0,\\ 0, & x^2+y=0;\end{cases}$

д) $f=\begin{cases} \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ ✓е) $f=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

Напомним основные свойства непрерывных отображений $f: E\to\mathbb{R}^n$, $E\subset\mathbb{R}^m$.

1) Отображение f непрерывно на $D\subset E$ тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества в $f(D)$ является открытым множеством (*критерий непрерывности отображения*).

2) Если $f\in C(D)$ и множество K — компакт в D, то множество $f(K)$ также является компактом в $f(D)$.

3) Если $f\in C(D)$ и множество $P\subset D$ связно, то множество $f(P)$ тоже связно.

4) Если $f\in C(D)$ и множество K — компакт в D, то f равномерно непрерывно на множестве K.

Обозначим

$$D=\{(x,y): x^2+y^2<1\},\quad \Omega_1=\{(u,v): u^2+v^2<4\},$$
$$\Omega_2=\{(u,v): u^2+v^2<4\}\cup\{(u,v): (u-4)^2+v^2<1\},$$
$$\Omega_3=\{(u,v): u^2+v^2\leqslant 4\},\quad \Omega_4=\{(u,v): v^2<u\}.$$

✓**Т8.34.** Существует ли такое непрерывное в D отображение $f: D\to\mathbb{R}^2$, что:

а) $f(D)=\Omega_1$; б) $f(D)=\Omega_2$; в) $f(D)=\Omega_3$; г) $f(D)=\Omega_4$?

Если существует, то привести пример, если не существует — объяснить почему.

✓**Т8.35.** Пусть $E=\{(x,y): x^2+y^2<4\}$. Существует ли непрерывное в E отображение $f: E\to\mathbb{R}^2$, для которого:

а) $f(D)=\Omega_1$; б) $f(D)=\Omega_2$; в) $f(D)=\Omega_3$; г) $f(D)=\Omega_4$?

Если существует, то привести пример, если не существует — объяснить почему.

✓**T8.36.** Пусть $E=\{(x,y): x^2+y^2<4\}$. Существует ли непрерывное и биективное отображение $f: E\to\mathbb{R}^2$, для которого:

а) $f(D)=\Omega_1$; б) $f(D)=\Omega_2$; в) $f(D)=\Omega_3$; г) $f(D)=\Omega_4$?

Если существует, то привести пример, если не существует — объяснить почему.

T8.37. Привести пример функции $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, равномерно непрерывной на множестве $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, непрерывной, но не равномерно непрерывной на $\mathbb{R}^2$.

T8.38. Показать, что функция $f=x^2+y^2$ равномерно непрерывна на множестве $x^2+y^2<1$.

✓**T8.39.** Показать, что функция $f=\sin\dfrac{\pi x}{y}$ непрерывна в своей области определения E и не является равномерно непрерывной на множестве $E\cap\cap\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1\}$. Какое условие теоремы Кантора нарушено?

✓**T8.40.** Функция $f=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ непрерывна на множестве $0<x^2+y^2<2$. Является ли она равномерно непрерывной на этом множестве? Является ли она равномерно непрерывной на множестве $\dfrac{1}{2}<x^2+y^2<2$?

T8.41. Пусть $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ равномерно непрерывна на открытом ограниченном множестве $D\subset\mathbb{R}^n$ и A — предельная точка D, не принадлежащая D. Доказать, что существует $\lim\limits_{M\to A,\ M\in D} f(M)$.

T8.42. Пусть D — открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ и $f: D\to\mathbb{R}$. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на D тогда и только тогда, когда существует такая функция $g:\overline{D}\to\mathbb{R}$, что $g(x)=f(x)$ для всех $x\in D$ и для любой точки $x_0\in\overline{D}$ имеем

$$\lim_{x\to x_0,\ x\in D} f(x)=g(x_0).$$

✓**T8.43.** Пусть функция $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ такова, что $f(x,y)=0$, если $x=0$ или $y=0$. Доказать, что $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.

✓**T8.44.** Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

имеет производные по всем направлениям в точке $(0,0)$, но не дифференцируема в этой точке.

T8.45. Найти все направления $\vec{l}\in\mathbb{R}^2$, по которым существует производная $\dfrac{\partial f}{\partial l}(0,0)$ функции $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$. Дифференцируема ли эта функция в начале координат?

T8.46. Найти все направления $\vec{l}\in\mathbb{R}^2$, по которым существует производная $\dfrac{\partial f}{\partial l}(0,0)$ функции $f(x,y)=\sqrt{|x^2-3y^2|}$. Дифференцируема ли эта функция в начале координат?

T8.47. Пусть функция $f(x,y,z)=|x+y+z|$, точка $M(x_0,y_0,z_0)$ такова, что $x_0+y_0+z_0=0$. Найти все векторы, по направлению которых существует производная функции f в точке M.

T8.48. Найти все α, при которых функция $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$ в начале координат

а) непрерывна; б) дифференцируема.

✓**T8.49.** Проверить, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + |y|}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

в квадрате $A = [-1; 1] \times [-1; 1]$ всюду имеет частные производные, эти производные ограничены в A, но f не является дифференцируемой в $(0, 0)$.

✓**T8.50.** Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos \dfrac{\pi}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Показать, что f дифференцируема в точке $(0, 0)$, но её частные производные — разрывные функции в точке $(0, 0)$.

T8.51. Пусть G — область в $\mathbb{R}^2$, а функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ непрерывна по одной из переменных и имеет ограниченную частную производную по другой переменной в G. Доказать, что f непрерывна в G.

T8.52. Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклая область, функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ имеет в G ограниченные частные производные по обеим переменным. Доказать, что f равномерно непрерывна в G (ср. с примером T8.4).

✓**T8.53.** Показать, что $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$, если

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Какое условие теоремы Шварца здесь нарушено?

✓**T8.54.** Рассмотрим уравнение $y^2 - x^2(1 - x) = 0$.

а) Найти множество $A \subset \mathbb{R}$ всех значений x, для которых это уравнение определяет хотя бы одно значение $y(x)$.

б) Сколько функций $y(x)$ на A определяет это уравнение?

в) Сколько непрерывных на A функций $y(x)$ определяет это уравнение?

г) Сколько дифференцируемых во всех внутренних точках A функций $y(x)$ определяет это уравнение?

д) Сколько непрерывных на отрезке $[0; 1]$ функций $y(x)$ определяет это уравнение, если добавить условие:

1) $y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{8}}$; 2) $y(1) = 0$?

T8.55. Рассмотрим кривую, заданную уравнением $(x^2 + y^2)^2 = x^3 - 3xy^2$.

1) Сколько значений y может соответствовать данному x?

2) Выделить а) непрерывные; б) гладкие ветви кривой.

Ответы и указания

T8.1. *Указание.* Для доказательства неравенства треугольника применить неравенство Минковского (см. задачу T5.88).

T8.5. *Указание.* Представить открытое множество G в виде счётного объединения ограниченных открытых множеств G_α, а каждое из G_α в виде $G_\alpha = \bigcup G_{\alpha,n}$ (где $G_{\alpha,n}$ — множество тех $x \in G_\alpha$, для которых расстояние до границы G_α больше $1/n$).

T8.6. *Указание.* Воспользоваться тем, что при непрерывном отображении отрезок переходит в связное множество.

T8.8. а) Да, б) нет, не выполнено неравенство треугольника: например, для $x = 10$, $y = 11$, $z = 0$; в), г) нет, не выполнено условие «$\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$»; д) нет, не выполнено неравенство треугольника: например, для $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$; е) нет, не выполнено условие симметрии; ж) нет, так же как и в п. в); з) да.

T8.9. а) *Указание.* Пусть $a \in \mathbb{R}$. Показать, что в любой окрестности точки a в смысле метрики ρ_1 содержится некоторая её окрестность в смысле метрики ρ_2, и наоборот. б) *Указание.* Рассмотреть всю числовую прямую.

T8.10. *Указание.* Показать, что для любых двух множеств $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ функция $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \inf\limits_{y \in B} \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$ непрерывна.

T8.11. Например, гипербола $x^2 - y^2 = 1$ и её асимптота $y = x$.

T8.12. Например, два открытых круга $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ и $\{(x, y) : (x-2)^2 + y^2 < 1\}$.

T8.13. *Указание.* Проверить, что функция $g(\delta) = \omega(f, U_\delta(x_0))$ монотонна и ограничена в некоторой правой полуокрестности нуля $(0; \delta_0)$.

T8.15. *Указание.* Необходимость условия следует из свойства сохранения знака непрерывной функции. Достаточность условия доказывается от противного. Если f разрывна в точке $x_0 \in E$, то x_0 не является изолированной точкой E и по крайней мере две из трёх точек расширенной числовой прямой $\varliminf\limits_{x \to x_0} f(x)$, $f(x_0)$, $\varlimsup\limits_{x \to x_0} f(x)$ различны. Для определённости положим, что $\varliminf\limits_{x \to x_0} f(x) < f(x_0)$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Если $\varliminf\limits_{x \to x_0} f(x) < c < f(x_0)$, то $x_0 \in E_c^+$, но в любой окрестности точки x_0 найдётся точка $\widetilde{x} \in E$, $\widetilde{x} \notin E_c^+$. Таким образом, E_c^+ не является открытым относительно множества E. Полученное противоречие доказывает достаточность условия задачи.

T8.16. *Указание.* Показать, что условие задачи эквивалентно фундаментальности последовательности $\{f_n(x_0)\}$ для любого $x_0 \in \overline{U}$. Ср. с задачей 3.69.

T8.17. *Указание.* См. пример T8.2.

T8.19. Например, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

T8.20. *Указание.* Показать, что такая функция есть предел последовательности непрерывных функций, и применить результат задачи T8.17.

T8.21. Например, $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \text{ рационально и } x \in [0; 1], \\ 0, & \text{если } y \text{ иррационально и } x \in [0; 1]. \end{cases}$

T8.22. *Указание.* Представить приращение f в виде

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

T8.23. Например, $f(x, y) = x + y + \operatorname{sgn} y$.

T8.24. Например: а) $f = -g = \operatorname{sgn}(xy)$; б) $f = \operatorname{sgn}(xy)$, $g = 1 - \operatorname{sgn}^2(xy)$.

T8.25. *Указание.* Рассмотреть $f(x, x)$ и $f(x, -x)$.

T8.28. *Указание.* Рассмотреть $f(x, x)$ и $f(x, 0)$.

Т8.31. *Указание.* Рассмотреть $f(x, x^2)$.
Т8.32. *Указание.* б)—д) Перейти к полярной системе координат.
Т8.33. *Указание.* а) Рассмотреть $f(x, x)$; б) рассмотреть $f(0, y)$;
в) рассмотреть $f(x, 0)$; г) рассмотреть $f(x, x^3 - x^2)$;
д) рассмотреть $f(x, kx)$ либо перейти к полярным координатам;
е) рассмотреть $f(x, x)$.
Т8.34. Необходимые примеры отображений удобно записывать в виде $r_1 = r_1(r, \varphi)$, $\varphi_1 = \varphi_1(r, \varphi)$, где (r, φ) — полярные координаты точки $M(x, y)$, $x^2 + y^2 > 0$, а (r_1, φ_1) — полярные координаты точек $P(u, v)$, $u^2 + v^2 > 0$ (полярная и декартова системы координат согласованы). Если при отображении f полюс переходит в полюс, r_1 и φ_1 — непрерывные функции r и φ, $\lim\limits_{r\to 0} r_1(r, \varphi) = 0$ для любого φ, $\lim\limits_{\varphi\to 2\pi} \varphi_1(r, \varphi) = \varphi_1(r, 0) + 2\pi$ для любого $r > 0$, то отображение f будет непрерывным. а) f_1: полюс переходит в полюс, $r_1 = 2r$, $\varphi_1 = \varphi$. б) Непрерывного отображения D в M_2 не существует, так как D связно, а M_2 несвязно. в) f_2: полюс переходит в полюс, $r_1 = 8r(1 - r)$, $\varphi_1 = \varphi$. г) $f_3 = g_1 \circ g_2$, где $g_2 : (x, y) \to (u, v)$ полюс переводит в полюс, $\varphi_1 = \varphi$, $r_1 = \dfrac{2r}{(1 - r\cos\varphi)}$ и $g_1 : (u, v) \to (u, v)$ — сдвиг в плоскости uOv на 1 вправо по оси U ($g_2 : (x, y) \to (u, v)$ переводит множество D во внутренность параболы $v^2 = u + 1$).
Т8.35. а) Отображение f_1 из ответа к задаче Т8.34; б) такого отображения нет, см. п. б) ответа к задаче Т8.34; в) отображение f_2 из решения задачи Т8.34; г) такого отображения не существует, так как по условию отображение f непрерывно на $\overline{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \subset E$, следовательно, $f(\overline{D})$ — ограниченное множество и, в силу соотношения $f(D) \subset f(\overline{D})$, $f(D)$ также должно быть ограниченным множеством.
Т8.36. а) Отображение f_1 из ответа к задаче Т8.34; б) такого отображения не существует, см. п. б) ответа к задаче Т8.34; в) такого отображения не существует. Действительно, из условия задачи следует, что $f^{-1}(M_2) = f^{-1}(f(D)) = D$, т. е. прообраз замкнутого множества не замкнут, что противоречит непрерывности отображения, г) такого отображения не существует, см. п. г) ответа к задаче Т8.35.
Т8.37. Например, $f(x, y) = x^2e^{-x} + y^2e^{-y}$; $f(x, y) = e^{-x-y}$.
Т8.38. *Указание.* Использовать непрерывность функции $f(x, y)$ на множестве $x^2+y^2 \leqslant 1$.
Т8.39. *Указание.* Рассмотреть значение функции на прямых $y = kx$. Нарушено условие теоремы Кантора, требующее, чтобы область определения была замкнутой.
Т8.40. На множестве $0 < x^2 + y^2 < 2$ функция не является равномерно непрерывной (см. указание к задаче Т8.39). На множестве $\dfrac{1}{2} < x^2 + y^2 < 2$ функция равномерно непрерывна (см. указание к задаче Т8.38).
Т8.41. *Указание.* Использовать критерий Коши.
Т8.42. *Указание.* Для доказательства необходимости следует показать, что функция $f(A) = \lim\limits_{M\to A, M\in D} f(M)$ существует (см. задачу Т8.41) и непрерывна на границе $\partial D = \overline{D} \setminus D$.
Т8.45. Производная существует по всем направлениям; не дифференцируема.
Т8.46. $\vec{l} = \left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \pm\dfrac{1}{2}\right)$ и $\vec{l} = \left(\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \pm\dfrac{1}{2}\right)$; не дифференцируема.
Т8.47. $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$, где $l_1 + l_2 + l_3 = 0$. **Т8.48.** а) $\alpha \geqslant 0$; б) $\alpha > 1$.
Т8.49. *Указание.* См. пример Т8.1.
Т8.51. *Указание.* Использовать теорему Лагранжа (см. гл. 5) и результат задачи Т8.22 в δ-окрестности $U_\delta(M)$ произвольной точки $M \subset G$, где δ выбирается так, чтобы $U_\delta(M) \subset G$.
Т8.52. *Указание.* Использовать теорему Лагранжа (см. гл. 5), ср. с примером Т8.4.

T8.53. $(f'_y)'_x(0,0)=1$, $(f'_x)'_y(0,0)=-1$. Нарушено условие теоремы Шварца, требующее, чтобы обе производные f''_{xy} и f''_{yx} были непрерывными в точке. Обе производные разрывны в точке $(0,0)$. Разрывность $(f'_x)'_y$ следует, например, из равенства $(f'_x)'_y(x,0)=1$, $x\neq 0$, разрывность $(f'_y)'_x$ — из равенства $(f'_y)'_x(0,y)=-1$, $y\neq 0$.

T8.54. а) $A=(-\infty;1]$; б) бесконечно много;

в) четыре: $y_1=-x\sqrt{1-x}$, $y_2=-|x|\sqrt{1-x}$, $y_3=|x|\sqrt{1-x}$, $y_4=x\sqrt{1-x}$;

г) две: $y_1=-x\sqrt{1-x}$, $y_2=x\sqrt{1-x}$;

д) 1) одну: $y=-x\sqrt{1-x}$; 2) две: $y_1=-x\sqrt{1-x}$ и $y_2=x\sqrt{1-x}$.

T8.55. 1) 0, 1, 2, 4. *Указание.* Изобразить кривую, перейдя к полярным координатам.

2) а) $f_1(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{-2x^2-3x-x\sqrt{16x+9}}$, $x\in\left[-\dfrac{9}{16};0\right]$, $\quad f_2(x)=-f_1(x)$,

$f_3(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{-2x^2-3x+x\sqrt{16x+9}}$, $x\in\left[-\dfrac{9}{16};1\right]$, $\quad f_4(x)=-f_3(x)$.

б) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\widetilde{f}_3(x)=\begin{cases} f_3(x), & x\in\left[-\dfrac{9}{16};0\right],\\ f_4(x), & x\in(0;1],\end{cases}$ $\quad \widetilde{f}_4(x)=-\widetilde{f}_3(x)$.

Оглавление

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: http://biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: http://www.litres.ru/mcnmo/

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru, k_i_@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru