

**И. А. Виноградова
С. Н. Олехник
В. А. Садовничий**

3

Математический анализ в задачах и упражнениях

**Кратные,
криволинейные
и поверхностные
интегралы**



И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий

Математический анализ в задачах и упражнениях

Том 3

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Электронное издание

DeVU/Wnu8vg9di4=

Москва

Издательство МЦНМО

2019

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я73
В49

Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.
Математический анализ в задачах и упражнениях.
Том 3: Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2018.
254 с.
ISBN 978-5-4439-3122-7

Сборник задач соответствует программе курса математического анализа для студентов механико-математических и математических факультетов университетов, педагогических и технических вузов. Он может использоваться на семинарских занятиях по математическому анализу и для самостоятельной работы студентов. Пособие содержит широкий круг упражнений по основным темам курса, представлена большая подборка теоретических задач. Изложение каждой темы предваряется определениями и формулировками основных теорем, а также примерами решения задач от типовых упражнений до заданий повышенного уровня сложности.

В томе 3 рассматриваются кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, векторный анализ и дифференциальные формы.

В книге обобщён и методически переработан опыт преподавания математического анализа на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова за последние десятилетия.

Для студентов и преподавателей университетов, педагогических и технических вузов, а также лиц, изучающих математический анализ самостоятельно.

Подготовлено на основе книги:

Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.

Математический анализ в задачах и упражнениях: В 3-х т. Том 3: Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. — Новое изд. — М.: Изд-во Московского университета; МЦНМО, 2018. — 254 с. — ISBN 978-5-4439-1122-9

Учебное издание для вузов

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241-08-04.
<http://www.mcsme.ru>

DeVU/Wnu8vg9dI4=

ISBN 978-5-4439-3122-7

© Коллектив авторов, 2018.
© МЦНМО, 2019.

Глава 15

Кратные интегралы

Предварительные сведения

Напомним для удобства читателя некоторые определения и факты, относящиеся к материалу первого и второго томов.

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *связным*, если в \mathbb{R}^n не существует такой пары открытых непересекающихся множеств E_1 и E_2 , что $E \cap E_1 \neq \emptyset$, $E \cap E_2 \neq \emptyset$ и $E \subset E_1 \cup E_2$. Открытое связное множество называется *областью* (см. т. 1, гл. 8, § 8.1).

Класс функций, непрерывных в области $G \subset \mathbb{R}^n$ вместе со своими производными до порядка k включительно, обозначается через $C^k(G)$. Если $f \in C^k(G)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то пишут $f \in C^\infty(G)$ (см. т. 1, гл. 8, § 8.4). Символами $C^k(\bar{G})$ и $C^\infty(\bar{G})$ обозначаются классы функций, которые принадлежат $C^k(E)$ и, соответственно, $C^\infty(E)$ для некоторой области E , содержащей множество \bar{G} (замыкание области G).

Функции Эйлера (эйлеровы интегралы)

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0, \quad \text{и} \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0,$$

подробно рассматриваются в т. 2 (гл. 13, § 13.1). Напомним те формулы, которые потребуются в этом томе:

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0;$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1; \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x > 0, \quad y > 0;$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^p x \sin^q x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}, \quad p > -1, \quad q > -1.$$

§ 15.1. Определение и общие свойства интеграла Римана от функции нескольких переменных

Определение. Множество $\Pi = \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i, \quad 1 \leq i \leq n\}$ называется *стандартным брусом* в \mathbb{R}^n (*n*-мерным брусом или промежутком).

Если необходимо обратить внимание на точки $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, задающие брус, то применяется обозначение $\Pi_{a,b}$.

Другими словами, стандартный брус в \mathbb{R}^n есть декартово произведение отрезков, лежащих на координатных осях: $\Pi_{a,b} = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times \dots \times [a_n; b_n]$.

Определение. Число $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ называется *n-мерным объёмом бруса* $\Pi_{a,b}$ и обозначается $|\Pi_{a,b}|$.

Если размерность бруса ясна из контекста, то вместо термина «*n-мерный объём*» используется термин «*объём*».

Определение. Пусть задан брус $\Pi_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$. Разбиения T_i координатных отрезков $[a_i; b_i]$, $1 \leq i \leq n$, с диаметрами d_{T_i} индуцируют разбиение бруса $\Pi_{a,b}$ на более мелкие брусы Π^j , $1 \leq j \leq p$, получающиеся декартовым произведением промежутков разбиения отрезков $[a_i; b_i]$, $1 \leq i \leq n$. Представление бруса $\Pi_{a,b}$

в виде $\Pi_{a,b} = \bigcup_{j=1}^p \Pi^j$ называется *разбиением бруса* $\Pi_{a,b}$ и обозначается символом T . Величина $d_T = \max_{1 \leq i \leq n} d_{T_i}$ называется *диаметром* разбиения T .

Пусть функция $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена на Π и T — разбиение Π . Положим

$$M_j = \sup_{x \in \Pi^j} f(x) \quad \text{и} \quad m_j = \inf_{x \in \Pi^j} f(x) \quad (1 \leq j \leq p).$$

Определим верхнюю

$$S(f, T) = \sum_{j=1}^p M_j |\Pi^j|$$

и нижнюю

$$s(f, T) = \sum_{j=1}^p m_j |\Pi^j|$$

суммы Дарбу и верхний

$$(U) \int_{\Pi} f(x) dx = \inf_T S(f, T) = \bar{I}$$

и нижний

$$(L) \int_{\Pi} f(x) dx = \sup_T s(f, T) = \underline{I}$$

интегралы Дарбу. Для любой ограниченной функции $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ имеем $\underline{I} \leq \bar{I}$.

Определение. Если $\underline{I} = \bar{I} = I$, то функция $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ называется *интегрируемой по Риману на Π* и число I называется *интегралом Римана* от функции f по брусу Π и обозначается $\int_{\Pi} f(x) dx$.

Это определение эквивалентно следующему.

Пусть T — разбиение бруса Π и $\{\xi_j\}_{j=1}^p$ — совокупность таких точек ξ_j , что $\xi_j \in \Pi^j$. Тогда функция $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$ интегрируема по Риману на Π , если существует предел *интегральных сумм Римана* $\lim_{d_T \rightarrow 0} \sum_{j=1}^p f(\xi_j) |\Pi^j|$. Данное определение

аналогично определению интеграла Римана на отрезке $[a; b]$, т. е. случаю $n = 1$. Сходство определения подчёркнуто и формой записи подынтегрального выражения $f(x) dx$. Более развёрнутые обозначения рассматриваемого

интеграла таковы:

$$\int_{\Pi} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad \text{или} \quad \overbrace{\int \dots \int}_{n \text{ раз}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Замечание. Для функции одной переменной $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ определяется также интеграл $\int_b^a f dx$, равный $-\int_a^b f dx$. Аналогичные определения в пространстве \mathbb{R}^n не вводятся.

Чтобы подчеркнуть, что речь идёт об интеграле от функции нескольких переменных на брусе $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), говорят, что это кратный интеграл (двойной, тройной и т. д. в соответствии с размерностью \mathbb{R}^n).

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *множеством меры нуль* в смысле Лебега (короче, *множеством меры нуль*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества M не более чем счётной системой $\{\Pi^k\}$ n -мерных брусков, сумма объёмов которых $\sum |\Pi^k|$ не превышает ε .

Замечание. Множества, составляющие покрытие в этом определении, замкнуты. При замене n -мерных брусков n -мерными *открытыми* брусками, т. е. декартовыми произведениями не отрезков, а интервалов $(a_i; b_i)$, $1 \leq i \leq n$, лежащих на координатных осях, получим эквивалентное определение. Таким образом, имея дело с множеством меры нуль, можно считать его покрытие состоящим как из замкнутых, так и из открытых n -мерных брусков.

Перечислим некоторые *свойства множеств меры нуль* в смысле Лебега.

1. Точка есть множество меры нуль.
2. Объединение конечного или счётного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль. В частности, всякое не более чем счётное множество есть множество меры нуль.
3. Подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.
4. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое ограниченное множество и $f \in C(D)$. Тогда множество

$$M \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad M = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y) : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, y = f(x)\}$$

(график функции f на D) есть множество меры нуль.

Заметим, что никакое непустое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ не является множеством меры нуль. Так, например, интервал $(a; b) \subset \mathbb{R}$ есть открытое множество в пространстве \mathbb{R} и тем самым не есть в этом пространстве множество меры нуль. Если же взять интервал $(a; b)$ на оси Ox в двумерном пространстве \mathbb{R}^2 , то он будет множеством меры нуль, но этот интервал уже не есть открытое множество в \mathbb{R}^2 .

Определение. Пусть множество $D \subset \mathbb{R}^n$. Функция $\chi_D: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D, \end{cases}$$

называется *характеристической функцией* множества D .

Определение. Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *жордановым множеством*, если D ограничено и функция χ_D интегрируема по Риману на любом таком брусе $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, что $D \subset \Pi$. Величина $\int_{\Pi} \chi_D dx$ называется *n -мерным объёмом* или *мерой* в смысле Жордана множества D и обозначается $|D|$ или $V(D)$.

Величина $\int_{\Pi} \chi_D dx$ не зависит от выбора бруса Π , содержащего множество D , и, следовательно, данное определение корректно. Можно показать, что для того чтобы множество $D \subset \mathbb{R}^n$ было жордановым, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и множество его граничных точек было множеством меры нуль в смысле Лебега.

Приведём теперь эквивалентное определение n -мерного объёма, не использующее понятие интеграла.

Обозначим через H_k множество всех брусов $\Pi_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$, для которых $a_i = \frac{p}{2^k}$, $b_i = \frac{p+1}{2^k}$, $p \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq n$. Для множества $D \subset \mathbb{R}^n$ через $\underline{H}_k(D)$ обозначим объединение всех брусов из H_k , которые целиком входят в D , через $\bar{H}_k(D)$ — объединение всех брусов из H_k , которые пересекаются с D . Объём $\underline{H}_k(D)$, равный сумме объёмов составляющих его брусов, обозначим $\underline{V}_k(D)$; объём $\bar{H}_k(D)$ обозначим $\bar{V}_k(D)$. Если $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{V}_k(D) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{V}_k(D)$, то множество D жорданово и число $V(D)$, равное значению этих пределов, есть его n -мерный объём.

Любой брус $\Pi_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ является жордановым множеством, и определённый выше его объём $|\Pi_{a,b}| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ совпадает с объёмом $V(\Pi_{a,b})$, определяемым по приведённому выше правилу для объёма жордановых множеств.

Используя указанные выше свойства множеств меры нуль, можно получить следующие свойства жордановых множеств.

1. Дополнение жорданова множества до любого включающего его бруса есть жорданово множество.

2. Объединение и пересечение конечного числа жордановых множеств есть жорданово множество.

3. Если D — жорданово множество объёма нуль, то любое его подмножество есть жорданово множество объёма нуль.

4. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое жорданово множество, $\varphi_1 \in C(D)$, $\varphi_2 \in C(D)$, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, $x \in D$. Тогда множество $M = \{m : m = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, \varphi_1(x) \leq x_{n+1} \leq \varphi_2(x)\}$ жорданово.

5. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество и C — константа. Тогда множество

$$M = \{m : m = (x_1, x_2, \dots, x_n, C), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$$

есть жорданово множество объёма нуль в \mathbb{R}^{n+1} .

6. Область $D \subset \mathbb{R}^2$, границей которой является кусочно-гладкий контур, является жордановым множеством. Ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^3$, границей которой является кусочно-гладкая поверхность без самопересечений, является жордановым множеством.

7. Если D — жорданово множество, то \bar{D} (замыкание D) и D^0 (множество внутренних точек D) также жордановы множества и объёмы множеств D , \bar{D} и D^0 равны, т. е. $|D| = |\bar{D}| = |D^0|$.

Так, например, отрезок $[a; b]$ оси Ox есть жорданово множество объёма $b - a$ в одномерном пространстве \mathbb{R} и жорданово множество объёма нуль в двумерном пространстве \mathbb{R}^2 (и любом \mathbb{R}^n , $n > 2$) (свойство 5); круг $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ и множество $D = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq a^2\}$ являются жордановыми множествами объёма πa^2 в \mathbb{R}^2 (свойство 6).

Несвязное множество, являющееся объединением шаров $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ и $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 4a)^2 \leq a^2\}$, есть жорданово множество объёма $\frac{8}{3}\pi a^3$ в \mathbb{R}^3 (свойства 2 и 6).

Определение. Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, если D — жорданово множество и произведение $f\chi_D$ интегрируемо по Риману на таком бруссе Π , что $D \subset \Pi$. Число $\int_D f\chi_D dx$ называется интегралом Римана от f по D и обозначается¹ $\int_D f dx$.

Можно показать, что существование и величина интеграла $\int_D f dx$ не зависят от выбора бруса Π , если $D \subset \Pi$.

Из определения и свойства 7 жордановых множеств следует, что функция f одновременно интегрируема или нет на всех трёх множествах D , \bar{D} и D^0 , где \bar{D} — замыкание множества D , а D^0 — его внутренность, т. е. множество внутренних точек D , и выполняется равенство $\int_D f dx = \int_{\bar{D}} f dx = \int_{D^0} f dx$.

Поэтому в дальнейшем при качественном анализе или вычислении интеграла по области D мы часто будем переходить к рассмотрению интеграла по замыканию \bar{D} этой области, не оговаривая специально этого перехода. Множество интегрируемых по Риману на множестве D функций будем обозначать $R(D)$.

Внимание! При использовании записи $R(D)$ мы подразумеваем, что множество D жорданово.

Основные свойства кратного интеграла Римана

1 (Аддитивность интеграла). Если $f \in R(D_1)$ и $f \in R(D_2)$, то $f \in R(D_1 \cup D_2)$; если множества D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек, то

$$\int_{D_1 \cup D_2} f dx = \int_{D_1} f dx + \int_{D_2} f dx.$$

2 (Линейность интеграла). Если $f \in R(D)$ и $g \in R(D)$, то для любых постоянных λ и μ функция $\lambda f + \mu g$ также лежит в классе $R(D)$ и

$$\int_D (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int_D f dx + \mu \int_D g dx.$$

¹ Если функция f задана на подмножестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то доопределяем её на всё пространство, полагая $f(x) = 0$ для любого $x \notin E$.

3 (Монотонность). Если $f \in R(D)$, $g \in R(D)$ и $f(x) \leq g(x)$, $x \in D$, то

$$\int_D f \, dx \leq \int_D g \, dx.$$

4 (Интегрируемость модуля). Если $f \in R(D)$, то $|f| \in R(D)$ и

$$\left| \int_D f \, dx \right| \leq \int_D |f| \, dx.$$

5 (Интегрируемость произведения). Если $f \in R(D)$ и $g \in R(D)$, то $fg \in R(D)$.

6 (Теорема о среднем). Если $f \in R(D)$, $g \in R(D)$, $g(x) \geq 0$ для любого $x \in D$, $m = \inf_D f$, $M = \sup_D f$, то

$$m \int_D g \, dx \leq \int_D fg \, dx \leq M \int_D g \, dx;$$

в частности, при $g = \chi_D$ получаем

$$m|D| \leq \int_D f \, dx \leq M|D|.$$

Если при этом D связно и $f \in C(D)$, то найдётся такая точка $c \in D$, что

$$\int_D fg \, dx = f(c) \int_D g \, dx.$$

Замечание. Как показывает следующий пример, условие связности множества D существенно. В самом деле, для функций $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1$ и множества $D = \{x: x \in [-2; -1] \cup [1; 2]\}$ имеем $\int_D f \, dx = 0$ и $\int_D g \, dx = 2$, однако не существует такой точки $c \in D$, что $f(c) = 0$.

7. Если $g \in R(D)$ и ограниченная функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ совпадает с g при всех $x \in D$, кроме множества объёма нуль, то $f \in R(D)$ и

$$\int_D f \, dx = \int_D g \, dx.$$

В частности, если на жордановом множестве D функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и совпадает с функцией $g \in C(D)$ всюду, кроме множества объёма нуль, то $f \in R(D)$.

Поэтому если в дальнейшем функция будет задана выражением, которое теряет смысл в точках множества объёма нуль, то будем предполагать эту функцию доопределённой в точках этого множества: там, где возможно, — по непрерывности, там, где это невозможно, — произвольным образом, лишь бы полученная функция была ограниченной.

Замечание. Требование ограниченности функции $f(x)$ на D в свойстве 7 существенно. Так, например, пусть $g(x) = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}; \\ n, & x = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

и D есть отрезок $[0; 1]$. Функция $f(x)$ совпадает с интегрируемой на $[0; 1]$ функцией $g(x)$ всюду на отрезке $[0; 1]$, кроме множества $M = \{x: x = 1/2^n, n \in \mathbb{N}\}$, объём которого равен нулю (проверьте!), но $f(x)$ не интегрируема на $[0; 1]$, поскольку не ограничена.

Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Пусть D — жорданово множество и $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Для интегрируемости по Риману функции f на D необходимо и достаточно, чтобы f была ограничена на D и множество её точек разрыва было множеством меры нуль.

Из критерия интегрируемости Лебега и свойств множеств меры нуль вытекает, что ограниченная функция, имеющая не более чем счётное множество точек разрыва на жордановом множестве D , интегрируема по Риману на этом множестве. Кроме того, если $f \in R(D)$, то $f \in R(M)$ для любого жорданова множества $M \subset D$.

Замена переменных в кратном интеграле Римана

Определение. Взаимно однозначное отображение φ области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ на область $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *регулярным отображением* или *диффеоморфизмом* области Ω , если $\varphi \in C^1(\Omega)$ и его якобиан $\det J_\varphi$ (определитель матрицы Якоби отображения φ), не обращается в нуль на Ω .

Перечислим некоторые свойства регулярного отображения φ .

1. Если $\bar{M} \subset \Omega$, то внутренние точки множества M переходят во внутренние точки множества $\varphi(M)$, граничные точки M — в граничные $\varphi(M)$; отсюда следует, что образ открытого множества — открытое множество, образ замкнутого — замкнутое.

2. Если $\bar{M} \subset \Omega$ и M — жорданово множество, то $\varphi(M)$ тоже жорданово множество.

3. Отображение $\varphi^{-1}: D \rightarrow \Omega$ регулярно.

Первая теорема о замене переменных в кратном интеграле. Пусть φ — регулярное отображение области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ на область $D \subset \mathbb{R}^n$. Пусть, далее, M — жорданово множество, $\bar{M} \subset D$ и $f \in R(M)$. Тогда

$$f \circ \varphi \in R(\varphi^{-1}(M)) \quad \text{и} \quad \int_M f \, dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} (f \circ \varphi) \cdot |\det J_\varphi| \, dt.$$

Довольно часто возникает необходимость замены переменных при помощи отображения, которое не является регулярным на всей области Ω . В этом случае может быть применена следующая теорема.

Вторая теорема о замене переменных в кратном интеграле. Пусть φ — отображение жорданова множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в жорданово множество $D \subset \mathbb{R}^n$. Если существуют такие множества меры нуль $S \subset D$ и $T \subset \Omega$, что:

- 1) $D \setminus S$ и $\Omega \setminus T$ — открытые множества,
- 2) отображение $\varphi: \Omega \setminus T \rightarrow D \setminus S$ регулярно,
- 3) якобиан $\det J_\varphi$ отображения φ определён и ограничен на Ω ,

то для любой функции $f \in R(D)$ функция $(f \circ \varphi) \cdot \det J_\varphi \in R(\Omega)$ и

$$\int_D f(x) dx = \int_\Omega (f \circ \varphi)(t) \cdot |\det J_\varphi(t)| dt.$$

Отметим, что и в первой, и во второй теореме о замене переменных в кратном интеграле утверждается не только равенство исходного и преобразованного интегралов, но и существование преобразованного интеграла, в частности то, что множество изменения новых переменных жорданово. На практике часто существование обоих интегралов устанавливается непосредственно и вопрос стоит только об их равенстве.

Теорема. Пусть Ω и D — открытые множества в \mathbb{R}^n , $\varphi: \Omega \rightarrow D$ — биективное отображение, $\varphi \in C^1(\Omega)$. Если для множества $M \subset D$ оба интеграла

$$\int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(t)) |\det J_\varphi(t)| dt \text{ и } \int_M f(x) dx \text{ существуют, то они равны.}$$

К многомерным кратным интегралам мы обратимся в § 15.4, а начнём практическое изучение данной темы с геометрически более наглядных и применяемых в большинстве приложений двойных и тройных интегралов.

§ 15.2. Двойной интеграл

15.2.1. Сведение двойного интеграла к повторному

В этом параграфе рассматривается интегральное исчисление функций $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, поэтому в большинстве случаев не будет специально оговариваться, что рассматриваемое множество лежит в \mathbb{R}^2 . Функцию $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, будем обозначать также $f(x, y)$; двумерный брус будем называть прямоугольником, в случае равенства его сторон — квадратом; двумерный объём — площадью.

Проиллюстрируем понятия верхней и нижней сумм Дарбу и определение двойного интеграла на примере.

Пример 15.1. Пользуясь непосредственно определением двойного интеграла, вычислим интеграл $\iint_D xy dx dy$, где D — прямоугольник $[1; 2] \times [1; 3]$.

Решение. Обозначим через T_n разбиение D , индуцированное разбиениями

$$T_x: 1 < \frac{n+1}{n} < \frac{n+2}{n} < \dots < \frac{2n-1}{n} < 2 \quad \text{и}$$

$$T_y: 1 < \frac{n+2}{n} < \frac{n+4}{n} < \dots < \frac{3n-2}{n} < 3,$$

DeVU/Wnu8vg9d4=

т. е. разбиение прямоугольника D прямыми $x = 1 + \frac{i}{n}$ и $y = 1 + \frac{2i}{n}$, $1 \leq i \leq n-1$. Поскольку $d_{T_x} = \frac{1}{n}$ и $d_{T_y} = \frac{2}{n}$, получаем $d_{T_n} = \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right\} = \frac{2}{n}$.

Пусть $D_{ij} = \left[\frac{n+i-1}{n}; \frac{n+i}{n} \right] \times \left[\frac{n+2(j-1)}{n}; \frac{n+2j}{n} \right]$. Имеем:

$$D = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^n D_{ij}, \quad |D_{ij}| = \frac{2}{n^2};$$

$$M_{ij} = \sup_{D_{ij}}(xy) = \left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(1 + \frac{2j}{n}\right), \quad m_{ij} = \inf_{D_{ij}}(xy) = \left(1 + \frac{i-1}{n}\right)\left(1 + \frac{2(j-1)}{n}\right);$$

$$\begin{aligned} S(xy, T_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} |D_{ij}| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(1 + \frac{2j}{n}\right) \frac{2}{n^2} = \\ &= \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{2j}{n}\right) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) \left(n + \frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right) = \\ &= \frac{2(2n+1)}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) = \frac{2(2n+1)}{n^2} \left(n + \frac{n(n+1)}{2n}\right) = \frac{(2n+1)(3n+1)}{n^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(xy, T_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} |D_{ij}| = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i-1}{n}\right) \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{2(j-1)}{n}\right) = \\ &= \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i-1}{n}\right) \cdot \left(n + \frac{2n(n-1)}{2n}\right) = \frac{2}{n^2} (2n-1) \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i-1}{n}\right) = \\ &= \frac{2}{n^2} (2n-1) \left(n + \frac{n-1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(3n-1)}{n^2}. \end{aligned}$$

Поскольку $6 = \sup_n s(f, T_n) \leq \sup_T s(f, T) \leq \inf_T S(f, T) \leq \inf_n S(f, T_n) = 6$, получаем $\sup_T s(f, T) = \inf_T S(f, T) = 6$. В силу общего определения делаем вывод: функция $f(x, y) = xy$ интегрируема по Риману на прямоугольнике $D = [1; 2] \times [1; 3]$ и $\iint_D xy \, dx \, dy = 6$. \square

Способ вычисления интеграла по прямоугольнику, рассмотренный в данном примере, удобен для вычисления интеграла программными средствами. Для вычисления двойного интеграла без привлечения компьютера обычно применяют теорему о сведении кратного интеграла к повторному. Рассмотрение этого метода вычисления — основное содержание данного параграфа.

Непосредственно из определения двойного интеграла следует, что если $f \in R(D)$ и множество D симметрично относительно оси Oy , то из равенства $f(x, y) = f(-x, y)$ (чётность функции $f(x, y)$ по переменной x) получаем

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy, \quad \text{где } D_1 = D \cap \{(x, y) : x \geq 0\},$$

а из равенства $f(x, y) = -f(-x, y)$ (нечётность $f(x, y)$ по переменной x) имеем $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = 0$.

Так, например, можно сразу утверждать, что

$$\iint_D x^{13}(1+x^2+y^2)^{22} \, dx \, dy = 0, \quad \text{где } D = \{(x, y) : x^4 + y^4 \leq x^2 + y^2\},$$

а интеграл

$$\iint_D (x^2 + y^2)^2 x^4 y^8 dx dy = 2 \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^2 x^4 y^8 dx dy,$$

где $D = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 \leq 2x^2 y\}$, $D_1 = D \cap \{(x, y) : x \geq 0\}$.

Аналогичные равенства справедливы, если множество D симметрично относительно оси Ox , а функция $f(x, y)$ чётна/нечётна по переменной y .

Множество $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in C[a; b]$, будем называть *фигурой, стандартной относительно оси Ox* ; множество $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$, где $\psi_1, \psi_2 \in C[c; d]$, — *фигурой, стандартной относительно оси Oy* . Фигуру, стандартную относительно одной из осей координат, будем кратко называть стандартной. Плоской *фигурой* (далее — *фигурой*) называется связное множество $D \subset \mathbb{R}^2$, являющееся объединением конечного числа стандартных фигур. Фигуры являются жордановыми множествами. Для стандартной фигуры теорема о сведении двойного интеграла к повторному формулируется следующим образом.

Основная теорема (для двойного интеграла). Пусть D — фигура, стандартная относительно оси Ox , т. е. $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in C[a; b]$ и $f \in R(D)$. Тогда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Если же D является фигурой, стандартной относительно оси Oy , т. е. $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$, где $\psi_1, \psi_2 \in C[c; d]$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

Следствие 1. Пусть D — фигура, стандартная относительно оси Ox , т. е. $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in C[a; b]$ и функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(D)$, зависит только от переменной x : $f(x, y) = f^*(x)$. Тогда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b f^*(x) (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx = \int_a^b f^*(x) \varphi(x) dx,$$

где функция $\varphi(x) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x)$ в каждой точке $x_0 \in [a; b]$ равна длине отрезка, по которому вертикальная прямая $x = x_0$ пересекает фигуру D .

Аналогичное утверждение справедливо и для фигуры, стандартной относительно оси Oy . Таким образом, если подынтегральная функция зависит только от одной переменной, то двойной интеграл по стандартной фигуре сводится к однократному.

Следствие 2. Пусть функция $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ на прямоугольнике $\Pi = [a; b] \times [c; d]$ имеет вид

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y),$$

где $f_1 \in C[a; b]$ и $f_2 \in C[c; d]$. Тогда $\int_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy$.

Геометрически фигура D , стандартная относительно оси Ox , характеризуется так: если отрезок $[a; b]$ есть проекция D на ось Ox , то для любой точки $x_0 \in [a; b]$ вертикаль, проходящая через эту точку (прямая $x = x_0$), пересекается с D по единственному отрезку $[\varphi_1(x_0); \varphi_2(x_0)]$, концы которого, вообще говоря, зависят от x_0 .

Утверждение, сформулированное в теореме о сведении двойного интеграла к повторному, можно описать так: полагая x постоянным, берём интеграл по отрезку $[\varphi_1(x); \varphi_2(x)]$ снизу вверх и получаем функцию $\Phi(x)$, которую интегрируем слева направо по отрезку $[a; b]$ изменения x . Аналогично интерпретируется повторный интеграл по фигуре, стандартной относительно оси Oy .

Представление двойного интеграла в виде повторного

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

или

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

называют *расстановкой пределов интегрирования в определённом порядке*. Задача расстановки пределов интегрирования допускает несколько вариантов.

1. Задан двойной интеграл по множеству D . Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

2. Задан двойной интеграл по множеству D . Расставить пределы интегрирования в порядке, наиболее удобном для вычисления.

3. Задан повторный интеграл $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$. Изменить в нём порядок расстановки пределов интегрирования.

Расстановка пределов интегрирования в обоих порядках

Как следует из вышесказанного, равенство

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

имеет место для множества D , являющегося фигурой, стандартной как относительно оси Ox , так и относительно оси Oy :

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} = \\ &= \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}. \end{aligned}$$

Если D не является таким множеством, то прибегают к его представлению в виде объединения конечного числа неперекрывающихся (без общих внут-

ренных точек) множеств D_j , каждое из которых — фигура, стандартная относительно той или другой оси. Тогда в силу аддитивности интеграла (см. с. 7)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{j=1}^p \iint_{D_j} f(x, y) dx dy.$$

Поскольку фигура, стандартная относительно одной из осей, не обязана быть стандартной относительно другой, представление $D = \bigcup_{j=1}^p D_j$ зависит от порядка расстановки пределов интегрирования. Конечно, желательно, чтобы количество компонент в представлении $D = \bigcup_{j=1}^p D_j$ было минимальным. Но при рассмотрении кратного интеграла по конкретному множеству появляется дополнительное требование: необходимо, чтобы функции, определяющие пределы интегрирования, были не только непрерывными, но и гладкими (говоря нестрого, заданными как можно более простыми выражениями). Это требование, формально не высказанное, но подразумевающееся, может привести к необходимости дополнительного разбиения множества D_j , хотя это множество и является фигурой, стандартной относительно рассматриваемой оси.

Аналитическая запись фигуры D , стандартной относительно оси Ox или оси Oy , состоит в представлении заданных условий на координаты точек этой фигуры системой неравенств специального вида

$$\{a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \quad \text{или} \quad \{c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$

Возможно ли такое представление, или необходимо разложить рассматриваемое множество на составляющие, каков конкретный вид этого представления всего множества или отдельных его частей — ответ на эти вопросы часто существенно упрощается при изображении множества D на рисунке.

Пример 15.2. Множество D лежит в правой полуплоскости ($x \geq 0$) и ограничено кривыми $3y = x^2$, $3y = -x^2$, $x^2 + y^2 = 4$. Расставим пределы интегрирования в том и другом порядке в двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$, $f \in C(D)$.

Решение. Перейдём к неравенствам, которым должны удовлетворять координаты (x, y) точек множества D , без помощи рисунка — аналитически. Используем то, что координаты точек, лежащих по одну сторону от кривой $\psi(x, y) = 0$, удовлетворяют одному из неравенств $\psi(x, y) > 0$ или $\psi(x, y) < 0$. Из неравенства $y < -x^2/3$ следует неравенство $y < x^2/3$, а из неравенства $y > x^2/3$ — неравенство $y > -x^2/3$, поэтому условия на координаты точек рассматриваемой фигуры должны иметь вид $-x^2/3 < y < x^2/3$, в противном случае одна из данных парабол окажется лишней. Если к этому неравенству добавить неравенство $x^2 + y^2 > 4$, то получим неограниченное множество. Учти-
DevU/Wnu8v9d4=

вая, что D лежит в правой полуплоскости, получаем:

$$D = \left\{ (x, y) : x \geq 0, -\frac{x^2}{3} \leq y \leq \frac{x^2}{3}, x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Приводим полученные неравенства к эквивалентной системе неравенств, характеризующей фигуры, стандартные относительно координатных осей:

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 2, \max\left\{-\frac{x^2}{3}, -\sqrt{4-x^2}\right\} \leq y \leq \min\left\{\frac{x^2}{3}, \sqrt{4-x^2}\right\} \right\}$$

или $D = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1, \sqrt{|3y|} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$. Как уже делалось раньше, разобьём отрезки изменения одной координаты на такие промежутки, чтобы границы изменения другой координаты записывались при помощи функций как можно более простого вида. Именно,

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \sqrt{3}, -\frac{x^2}{3} \leq y \leq \frac{x^2}{3} \right\} \cup \\ &\quad \cup \left\{ (x, y) : \sqrt{3} \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \right\}, \\ D &= \left\{ (x, y) : -1 \leq y \leq 0, \sqrt{-3y} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \right\} \cup \\ &\quad \cup \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq 1, \sqrt{3y} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \right\}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{-x^2/3}^{x^2/3} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy = \\ &= \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt{-3y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{3y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx. \quad \square \end{aligned}$$

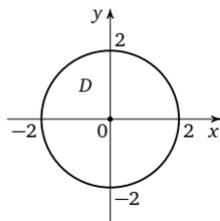
Предлагаем читателю самостоятельно сделать рисунок фигуры D из рассмотренного примера и убедиться, что его использование облегчает переход к повторному интегралу. Вообще, если множество D , по которому берётся интеграл, задано неравенствами на координаты входящих в него точек, то переход к повторному интегралу может быть проведён чисто аналитически, хотя рисунок и в этом случае делает некоторые переходы более наглядными. Если же множество D описано как «фигура, ограниченная данными линиями», то наглядное представление D на рисунке существенно помогает перейти к повторному интегралу или к другой системе координат. При этом подразумеваются следующие важнейшие условия: фигура должна быть ограниченной, т.е. лежать в некотором квадрате; граница фигуры должна содержать не вырожденные в точку дуги всех кривых, указанных в условии, т.е. ни одна кривая в условии не должна являться лишней. Если при этих требованиях фигура всё-таки однозначно не определяется, то либо указывается точка в рассматриваемой фигуре, либо определяется расположение фигуры относительно осей координат. Наконец, если все эти соображения не приводят к однозначному определению фигуры, то следует рассмотреть все возможные варианты.

Пример 15.3. Расставим пределы интегрирования в том и другом порядке в двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$, где $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ и $f \in C(D)$.

РЕШЕНИЕ. Множество D является фигурой, стандартной как относительно оси Ox , так и относительно оси Oy :

$$D = \{(x, y): -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\};$$

$$D = \{(x, y): -2 \leq y \leq 2, -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}.$$



Поэтому

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx. \quad \square$$

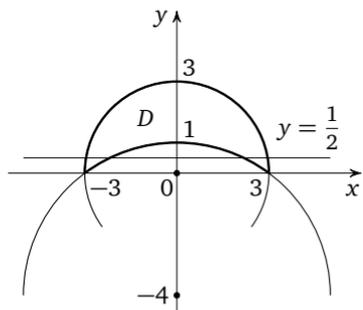
Пример 15.4. В двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$, где $f \in C(D)$ и $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + (y+4)^2 \geq 25\}$, расставим пределы интегрирования в том и другом порядке.

РЕШЕНИЕ. Множество D (см. рис.) является фигурой, стандартной относительно оси Ox :

$$D = \{(x, y): -3 \leq x \leq 3, \sqrt{25-x^2}-4 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}\}.$$

Поэтому

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-3}^3 dx \int_{\sqrt{25-x^2}-4}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy.$$



Множество D не является стандартным относительно оси Oy , поскольку, например, горизонталь $y = 1/2$ пересекается с D по двум непересекающимся отрезкам $[-\frac{\sqrt{35}}{2}, -\frac{\sqrt{19}}{2}]$, $[\frac{\sqrt{19}}{2}, \frac{\sqrt{35}}{2}]$, поэтому для того чтобы расставить пределы интегрирования в другом порядке, необходимо представить множество D в виде объединения множеств: $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, где

$$D_1 = \{(x, y): 1 \leq y \leq 3, -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2}\},$$

$$D_2 = \{(x, y): 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq -\sqrt{9-8y-y^2}\},$$

$$D_3 = \{(x, y): 0 \leq y \leq 1, \sqrt{9-8y-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2}\},$$

к каждому из которых уже применима теорема о сведении двойного интеграла к повторному (каждое D_k , $k = 1, 2, 3$, есть фигура, стандартная относительно оси Oy) и поэтому

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_1^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx + \\ &+ \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{9-8y-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{9-8y-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 15.5. Расставим пределы интегрирования в том и другом порядке в интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$, где $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ и $f \in C(D)$.

РЕШЕНИЕ. Множество D является фигурой, стандартной относительно обеих осей координат (см. рис.):

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 + |x| \leq y \leq 1 - |x|\} = \\ &= \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1, -1 + |y| \leq x \leq 1 - |y|\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

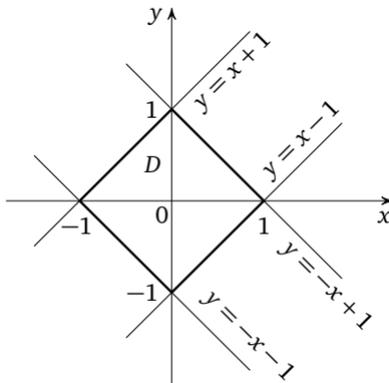
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-1+|x|}^{1-|x|} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-1+|y|}^{1-|y|} f(x, y) dx,$$

но такое представление содержит негладкие функции $1 \pm |x|$ и $1 \pm |y|$. Чтобы избавиться от таких функций, представим D для расстановки пределов интегрирования в порядке x, y в виде $D = D_1 \cup D_2$, где

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, -1 - x \leq y \leq 1 + x\}, \\ D_2 &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -1 + x \leq y \leq 1 - x\}, \end{aligned}$$

и для расстановки в порядке y, x в виде $D = \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2$, где

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1 &= \{(x, y) : -1 \leq y \leq 0, -1 - y \leq x \leq 1 + y\}, \\ \tilde{D}_2 &= \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, -1 + y \leq x \leq 1 - y\}. \end{aligned}$$



В итоге получим:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^{1+x} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-1+x}^{1-x} f(x, y) dy = \\ &= \int_{-1}^0 dy \int_{-1-y}^{1+y} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-1+y}^{1-y} f(x, y) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 15.6. Расставим пределы интегрирования в том и другом порядке в двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$, где $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25, 3x \leq 4|y|\}$ и $f \in C(D)$.

РЕШЕНИЕ. Множество D не является стандартной фигурой. Для каждого из повторных интегралов сделаем своё разбиение множества D .

Представив множество D в виде $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ (см. рис. а), где

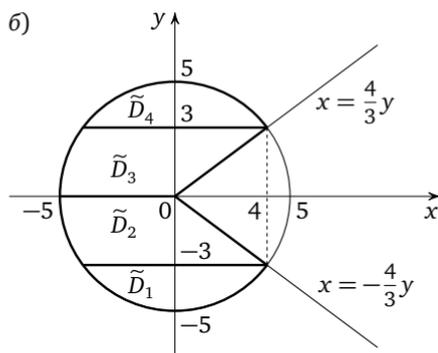
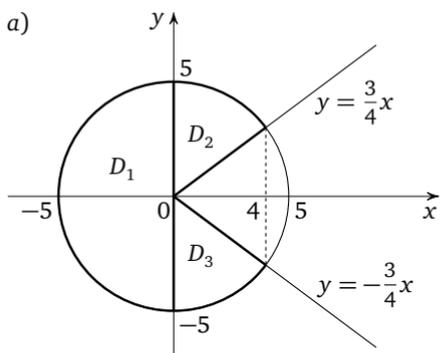
$$D_1 = \{(x, y) : -5 \leq x \leq 0, -\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2}\},$$

$$D_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, \frac{3}{4}x \leq y \leq \sqrt{25-x^2}\},$$

$$D_3 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, -\sqrt{25-x^2} \leq y \leq -\frac{3}{4}x\},$$

получаем:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \\ &= \int_{-5}^0 dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^4 dx \int_{\frac{3x}{4}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^4 dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{-\frac{3x}{4}} f(x, y) dy. \end{aligned}$$



Представив множество D в виде $D = \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \cup \tilde{D}_3 \cup \tilde{D}_4$ (см. рис. б), где

$$\tilde{D}_1 = \{(x, y) : -5 \leq y \leq -3, -\sqrt{25-y^2} \leq x \leq \sqrt{25-y^2}\},$$

$$\tilde{D}_2 = \{(x, y) : -3 \leq y \leq 0, -\sqrt{25-y^2} \leq x \leq -\frac{4}{3}y\},$$

$$\tilde{D}_3 = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 3, -\sqrt{25-y^2} \leq x \leq \frac{4}{3}y\},$$

$$\tilde{D}_4 = \{(x, y) : 3 \leq y \leq 5, -\sqrt{25-y^2} \leq x \leq \sqrt{25-y^2}\},$$

получаем:

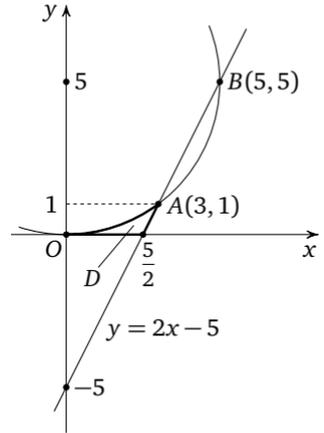
$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{-5}^{-3} dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-3}^0 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{-\frac{4y}{3}} f(x, y) dx + \\ &+ \int_0^3 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\frac{4y}{3}} f(x, y) dx + \int_3^5 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Расстановка пределов интегрирования в порядке, наиболее удобном для вычисления интеграла

Если мы имеем право выбора порядка в повторном интеграле, то естественно стремиться к наиболее простому представлению заданного интеграла. Выбор может определяться как видом множества D , так и свойствами подынтегральной функции, например, расстановка пределов в одном порядке требует разбиения множества D на меньшее число составляющих, чем расстановка в другом порядке, или подынтегральная функция чётна относительно какой-либо координаты и множество D симметрично относительно соответствующей оси и т. п.

Пример 15.7. Расставим пределы интегрирования в интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$, где D — фигура, ограниченная линиями: $y = 2x - 5$, $x^2 + y^2 = 10y$, $y = 0$, и $f \in C(D)$ (см. рис.).

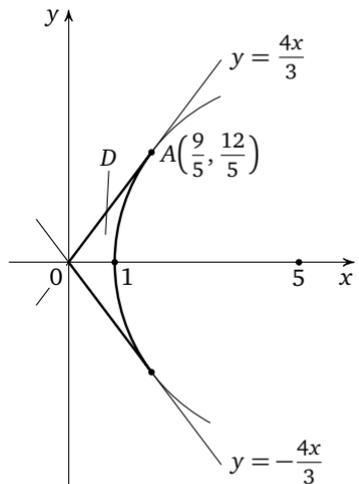
РЕШЕНИЕ. Фигура D стандартна относительно оси Oy и относительно оси Ox . Но для расстановки пределов интегрирования в порядке y, x можно не разбивать D на составляющие фигуры, а для другого порядка расстановки пределов интегрирования такое разбиение необходимо. Исходя из этого выбираем порядок y, x . Самой верхней точкой множества D является нижняя из точек пересечения окружности $x^2 + y^2 = 10y$ и прямой $y = 2x - 5$. Решая систему уравнений $x^2 + y^2 = 10y$, $2x - 5 = y$, получаем координаты точек пересечения: $(3, 1)$ и $(5, 5)$. Следовательно, $D = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq 1, \sqrt{10y - y^2} \leq x \leq \frac{1}{2}(y + 5) \right\}$,



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{10y - y^2}}^{(y+5)/2} f(x, y) dx. \quad \square$$

Пример 15.8. Расставим пределы интегрирования в интеграле $\iint_D f(x^2 + y^2) dx dy$, где D — фигура, ограниченная линиями: $3y - 4x = 0$, $3y + 4x = 0$, $x^2 - 10x + y^2 + 9 = 0$ (см. рис.), и $f \in C[0; 3]$.

РЕШЕНИЕ. Фигура D не стандартна относительно оси Ox , но стандартна относительно оси Oy и симметрична относительно оси Ox . Подынтегральная функция $\varphi(x, y) = f(x^2 + y^2)$ чётна относительно координаты y , поэтому



$$\iint_D f(x^2 + y^2) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x^2 + y^2) dx dy,$$

где $D_1 = D \cap \{(x, y), y \geq 0\}$ — верхняя половина фигуры D . Из системы

$$\begin{cases} 3y - 4x = 0, \\ x^2 - 10x + y^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

находим, что самая верхняя точка множества D_1 есть точка $A(9/5, 12/5)$.

Отсюда получаем, что $D_1 = \{(x, y): 0 \leq y \leq \frac{12}{5}, \frac{3y}{4} \leq x \leq 5 - \sqrt{16 - y^2}\}$ и, следовательно,

$$\iint_D f(x^2 + y^2) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_0^{12/5} dy \int_{3y/4}^{5 - \sqrt{16 - y^2}} f(x^2 + y^2) dx. \quad \square$$

Изменение порядка интегрирования

Для решения задачи изменения порядка интегрирования сначала переходим от заданного повторного интеграла к двойному:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Условия на координаты точек (x, y) множества D получаем исходя из заданного повторного интеграла: $D = \{(x, y): a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$. В полученном двойном интеграле расставляем пределы интегрирования в требуемом порядке. Таким образом, считая для простоты записи, что D — фигура, стандартная относительно обеих осей Ox и Oy , получаем

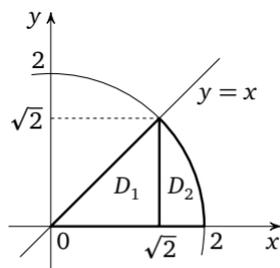
$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

Обычно средний член этого равенства — кратный интеграл — только подразумевается, но не записывается.

Пример 15.9. Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$, где функция f непрерывна на соответствующем замкнутом множестве $D \subset \mathbb{R}^2$.

Решение. Начнём с того, что запишем условие на координаты точек (x, y) из множества D , по которому берётся интеграл: $D = \{(x, y): 0 \leq y \leq \sqrt{2}, y \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\}$. Множество D (см. рис.) есть фигура, стандартная как относительно оси Oy (это видно и из записи повторного интеграла), так и относительно оси Ox :

$$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \min\{x, \sqrt{4 - x^2}\}\}.$$



Поскольку, как указывалось выше, функции, определяющие пределы интегрирования, должны быть гладкими, представим множество D в виде $D = D_1 \cup D_2$, где

$$D_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq x\},$$

$$D_2 = \{(x, y) : \sqrt{2} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}.$$

Итак,

$$\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\sqrt{2}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy. \quad \square$$

Сведение двойного интеграла к однократному

Если подынтегральная функция в двойном интеграле зависит только от одной переменной, то согласно следствию 1 на с.12 при соответствующем порядке расстановки пределов интегрирования двойной интеграл сводится к однократному.

Пример 15.10. Сведём к однократному интеграл $\iint_D f(x) dx dy$, где фигура D ограничена линиями $y = 2x$, $y = x$, $y = 2$ (см. рис.) и $f \in C[0; 2]$.

Решение. В силу следствия 1 из основной теоремы о сведении двойного интеграла к повторному (см. с. 12) получаем

$$\iint_D f(x) dx dy = \int_0^2 f(x) \varphi(x) dx,$$

где $\varphi(a)$ — длина отрезка, по которому прямая $x = a$, $0 \leq a \leq 2$, пересекается с фигурой D . Поскольку

$$\varphi(a) = \begin{cases} 2a - a = a, & 0 \leq a \leq 1, \\ 2 - a, & 1 \leq a \leq 2, \end{cases}$$

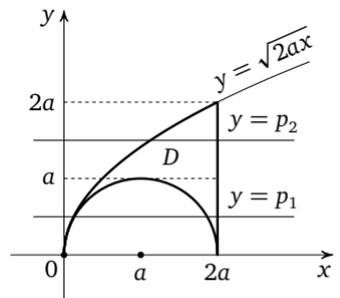
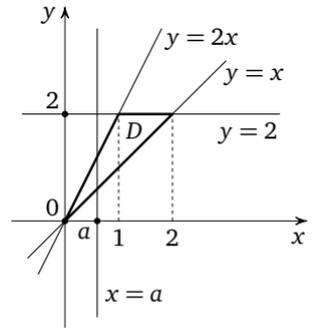
окончательно получаем $\iint_D f(x) dx dy = \int_0^1 x f(x) dx + \int_1^2 f(x)(2-x) dx. \quad \square$

Пример 15.11. Сведём интеграл $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(y) dy$ к однократному ($a > 0$).

Решение. В силу следствия 1 из основной теоремы о сведении двойного интеграла к повторному получаем

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(y) dy = \int_0^{2a} f(y) \varphi(y) dy,$$

где $\varphi(p)$ — длина отрезка, по которому прямая $y = p$, $0 \leq p \leq 2a$, пересекается с фигу-



рой $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2a, \sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax}\}$. Если $0 < p_1 \leq a$, то $\varphi(p_1) = 2a - \frac{p_1^2}{2a} - 2\sqrt{a^2 - p_1^2}$; если $a < p_2 \leq 2a$, то $\varphi(p_2) = 2a - \frac{p_2^2}{2a}$ (см. рис.). Итак,

$$\begin{aligned} \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(y) dy &= \int_0^a \left(2a - \frac{y^2}{2a} - 2\sqrt{a^2 - y^2}\right) f(y) dy + \\ &+ \int_a^{2a} \left(2a - \frac{y^2}{2a}\right) f(y) dy = \int_0^{2a} f(y) \left(2a - \frac{y^2}{2a}\right) dy - 2 \int_0^a f(y) \sqrt{a^2 - y^2} dy. \quad \square \end{aligned}$$

Вычисление интеграла по фигуре, ограниченной параметрически заданной кривой

Рассмотрим теперь двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в случае, когда фигура D ограничена простой замкнутой кривой, заданной *параметрически*:

$$\Gamma = \{(x, y): x = x(t), y = y(t), t \in [T_0; T_1]\},$$

$x \in C^1[T_0; T_1]$, $y \in C^1[T_0; T_1]$, $x(T_0) = x(T_1)$, $y(T_0) = y(T_1)$. Подробно разберём простейший случай: отрезок $[T_0; T_1]$ делится точкой $\tau \in (T_0; T_1)$ так, что на $[T_0; \tau]$ функция $x(t)$ строго убывает, а на $[\tau; T_1]$ — строго возрастает. Тогда кривая Γ состоит из двух ветвей:

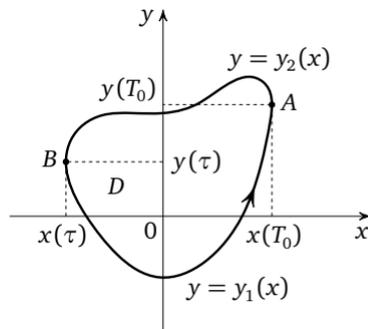
$$\begin{aligned} y &= y_2(x) = y(t(x)), & x \in [x(\tau); x(T_0)], & & t \in [T_0; \tau], \\ y &= y_1(x) = y(t(x)), & x \in [x(\tau); x(T_0)] = [x(\tau); x(T_1)], & & t \in [\tau; T_1]. \end{aligned}$$

Предположим ещё, что $y_2(x) > y_1(x)$ для всех $x \in [x(\tau); x(T_0)]$. При этих условиях кривая Γ проходится так, что фигура D (см. рис.) остаётся слева (положительное направление обхода), когда t возрастает от T_0 до T_1 , и фигура D стандартна относительно оси Ox :

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y): x(\tau) \leq x \leq x(T_0), \\ & y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}. \end{aligned}$$

Пусть $\Phi(x, y)$ есть первообразная функции $f(x, y)$ относительно переменной y , т. е. $\Phi'_y(x, y) = f(x, y)$, тогда

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{x(\tau)}^{x(T_0)} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \\ &= \int_{x(\tau)}^{x(T_0)} (\Phi(x, y_2(x)) - \Phi(x, y_1(x))) dx = \int_{x(\tau)}^{x(T_0)} \Phi(x, y_2(x)) dx - \int_{x(\tau)}^{x(T_0)} \Phi(x, y_1(x)) dx. \end{aligned}$$



В полученных однократных интегралах сделаем замену $x = x(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{\tau}^{T_0} \Phi(x(t), y(t)) x'(t) dt - \int_{\tau}^{T_1} \Phi(x(t), y(t)) x'(t) dt = \\ &= - \int_{T_0}^{T_1} \Phi(x(t), y(t)) x'(t) dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Пример 15.12. Вычислим $\iint_D x \sqrt{2x^2 + xy} dx dy$,

где D — фигура, ограниченная правой петлёй кривой: $\Gamma = \{(x, y) : x = a \cos t, y = a \sin 2t\}, a > 0$.

РЕШЕНИЕ. Правая петля кривой Γ проходуется в положительном направлении при изменении t от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ (см. рис.). Если $(x, y) \in D$, то $|y| \leq 2a \cos t |\sin t| = 2x |\sin t|$, откуда получаем, что $2x^2 + xy \geq 2x^2 - x|y| = 2x^2(1 - |\sin t|) \geq 0$. Таким образом, функция $f(x, y) = x \sqrt{2x^2 + xy}$ определена и непрерывна в D .

Первообразная этой функции по y равна $\frac{2}{3}(2x^2 + xy)^{3/2}$. Поэтому используя формулу (1) и производя замену $1 + \sin t = z^2, \cos t dt = 2z dz$, получаем:

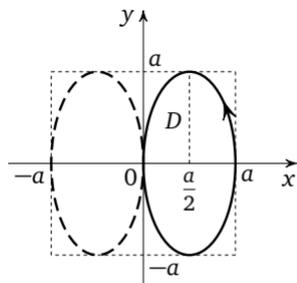
$$\begin{aligned} \iint_D x \sqrt{2x^2 + xy} dx dy &= -\frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2a^2 \cos^2 t + 2a^2 \sin t \cdot \cos^2 t)^{3/2} d(a \cos t) = \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \sin t)^{3/2} \sin t \cdot \cos^3 t dt = \frac{8\sqrt{2}}{3} a^4 \int_0^{\sqrt{2}} z^4 (z^2 - 1)(2z^2 - z^4) dz = \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} a^4 \int_0^{\sqrt{2}} (3z^8 - z^{10} - 2z^6) dz = \frac{8\sqrt{2}}{3} a^4 \left(\frac{1}{3} \cdot 2^{9/2} - \frac{1}{11} \cdot 2^{11/2} - \frac{2}{7} \cdot 2^{7/2} \right) = \\ &= \frac{128}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{11} - \frac{2}{7} \right) a^4 = \frac{2^9}{7 \cdot 9 \cdot 11} a^4. \quad \square \end{aligned}$$

Если простая замкнутая кривая $\Gamma = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in [T_0; T_1]\}$ проходуется в положительном направлении при возрастании параметра t от T_0 до T_1 , т.е. фигура D , ограниченная Γ , остаётся при этом слева, то, повторяя приведённые выше рассуждения, получим формулу

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{T_0}^{T_1} \Psi(x(t), y(t)) y'(t) dt, \quad (2)$$

где $\Psi(x, y)$ — первообразная функции $f(x, y)$ относительно переменной x .

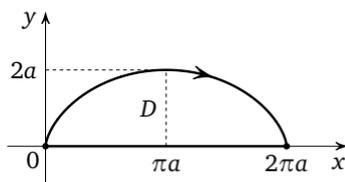
Формула (1) справедлива и тогда, когда фигура D ограничена кривой $\Gamma = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in [T_0; T_1]\}$ и прямой $x = c$, если кривая Γ при возрастании t от T_0 до T_1 проходуется так, что фигура D остаётся слева. Формула (2) справедлива, если фигура D ограничена кривой $\Gamma = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in [T_0; T_1]\}$ и прямой $y = c$ при том же условии прохождения Γ .



Пример 15.13. Вычислим $\iint_D x\sqrt{2a^2-ay} dx dy$, где D — фигура, ограниченная одной аркой циклоиды $\Gamma = \{(x, y) : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0; 2\pi]\}$ ($a > 0$) и осью Ox .

Решение. При возрастании t от 0 до 2π кривая Γ проходит слева направо так, что фигура D остаётся справа от Γ (см. рис.). Поэтому формула принимает вид

$$\iint_D f(x, y) dx dy = - \int_0^{2\pi} \Psi(x(t), y(t)) y'(t) dt.$$



Первообразной для функции $f(x, y) = x\sqrt{2a^2-ay}$ относительно переменной x является функция $\Psi(x, y) = \frac{x^2}{2}\sqrt{2a^2-ay}$. Итак,

$$\begin{aligned} \iint_D x\sqrt{2a^2-ay} dx dy &= - \int_0^{2\pi} \frac{a^2(t-\sin t)^2}{2} \sqrt{a^2+a^2\cos t} \cdot a \sin t dt = \\ &= -\frac{a^4}{2} \int_0^{\pi} t^2 \sqrt{1+\cos t} \sin t dt + a^4 \int_0^{2\pi} t \sin^2 t \sqrt{1+\cos t} dt - \frac{a^4}{2} \int_0^{\pi} \sin^3 t \sqrt{1+\cos t} dt. \end{aligned}$$

Вычислим отдельно каждый из интегралов:

$$I_1 = - \int_0^{2\pi} \sin^3 t \sqrt{1+\cos t} dt = - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t \sqrt{1+\cos t} dt = 0,$$

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_0^{2\pi} t^2 \sqrt{1+\cos t} \sin t dt = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} t^2 d(1+\cos t)^{3/2} = \\ &= \frac{2t^2}{3} (1+\cos t)^{3/2} \Big|_0^{2\pi} - \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} t(1+\cos t)^{3/2} dt. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} t(1+\cos t)^{3/2} dt &= \int_0^{\pi} t(1+\cos t)^{3/2} dt + \int_{\pi}^{2\pi} t(1+\cos t)^{3/2} dt = \\ &= \int_0^{\pi} t(1+\cos t)^{3/2} dt + \int_0^{\pi} (2\pi - z)(1+\cos z)^{3/2} dz = 2\pi \int_0^{\pi} (1+\cos t)^{3/2} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} 2\sqrt{2} \cos^3 \frac{t}{2} dt = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}, \end{aligned}$$

имеем:

$$I_2 = \frac{16\pi^2\sqrt{2}}{3} - \frac{16\pi\sqrt{2}}{9} = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right).$$

Далее¹,

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_0^{2\pi} t \sin^2 t \sqrt{1+\cos t} dt = \int_0^{\pi} t \sin^2 t \sqrt{1+\cos t} dt + \int_{\pi}^{2\pi} t \sin^2 t \sqrt{1+\cos t} dt = \\
 &= \int_0^{\pi} t \sin^2 t \sqrt{1+\cos t} dt + \int_0^{\pi} (2\pi-z) \sin^2 z \sqrt{1+\cos z} dz = 2\pi \int_0^{\pi} \sin^2 t \sqrt{1+\cos t} dt = \\
 &= 16\pi\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = 8\pi\sqrt{2} \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(2)}{\Gamma(7/2)} = \frac{32\sqrt{2}\pi}{15}.
 \end{aligned}$$

Объединяя эти результаты, получаем

$$\begin{aligned}
 \iint_D x \sqrt{2a^2 - ay} dx dy &= a^4 \left(\frac{8\pi^2\sqrt{2}}{3} - \frac{32\pi\sqrt{2}}{9} + \frac{32\pi\sqrt{2}}{15} \right) = \\
 &= \frac{8\pi a^4 \sqrt{2}}{45} (15\pi - 20 + 12) = \frac{8}{45} \sqrt{2}\pi (15\pi - 8) a^4. \quad \square
 \end{aligned}$$

Обратим теперь внимание на наиболее *характерные ошибки* при сведении двойного интеграла к повторному и расстановке пределов:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

1. Неправильно, если при некоторых значениях $x_0 \in [a; b]$ нижний предел во внутреннем интеграле $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ больше верхнего: $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$. Эта ошибка возникает обычно при отсутствии или неправильности рисунка.

2. Следует чётко представлять, что постоянные (не зависящие от x) границы c и d во внутреннем интеграле бывают только тогда, когда соответствующая (верхняя или нижняя) граница множества D представляет собой отрезок прямой, параллельной оси Ox , т. е. одна или обе функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ представляют собой константы. Если же эти линии не являются параллельными оси Ox , то границы интегрирования во внутреннем интеграле обязательно представляют собой функции от x , отличные от постоянных. Если вместо функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ поставить их значения в конечных точках ($\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$ или $\varphi_1(b)$, $\varphi_2(b)$), или $\max \varphi_2(x)$, $x \in [a; b]$, и $\min \varphi_1(x)$, $x \in [a; b]$, т. е. границы проекции D на ось Oy , то расстановка пределов будет ошибочна.

3. Неправильно, если границы внутреннего интеграла $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ зависят не только от x , но и от y , а также если границы внешнего интеграла не являются постоянными. Если при этом провести все указанные операции, то в результате получится не число, а функция от x , или от y , или от обоих переменных x и y в зависимости от допущенной ошибки.

¹ Необходимые сведения об используемых здесь и далее эйлеровых интегралах приведены на с. 3.

4. Если множество D симметрично относительно одной из координатных осей, но не дано условие чётности функции $f(x, y)$ относительно соответствующей переменной, то равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \int_{D_1} f(x, y) dx dy,$$

где D_1 — часть множества D , лежащая по одну сторону от соответствующей оси, вообще говоря, неверно.

5. Если множество D проще представить не в виде объединения стандартных относительно той или иной координатной оси фигур, а в виде разности таковых: $D = D_1 \setminus D_2$, то, вообще говоря, нельзя использовать представление интеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде разности

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy - \iint_{D_2} f(x, y) dx dy,$$

так как условие $f \in R(D)$ не даёт права интегрировать функцию f на множестве $D_1 \supset D$. Если же из условия задачи следует, что $f \in R(D_1)$, то представление

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy - \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

законно и может быть использовано для упрощения вычислений.

15.2.2. Замена переменных в двойном интеграле.

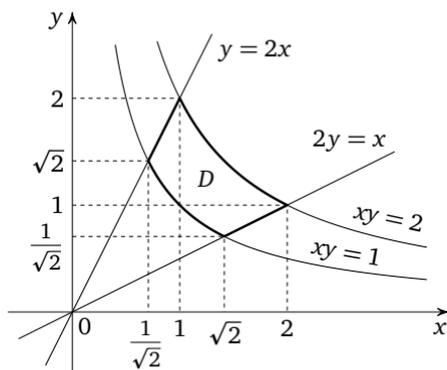
Переход к полярной и обобщённой полярной системам координат

Замена переменных в двойном интеграле приводит как к изменению подынтегрального выражения, так и к изменению множества, по которому берётся интеграл. В отличие от однократного интеграла, где связь двух промежутков интегрирования устанавливается просто, для многомерного интеграла найти множество изменения новых переменных достаточно трудно, поэтому главное внимание при выборе зависимости между новыми и старыми переменными обращается именно на нахождение этого множества. Наиболее простой — тот случай, когда границами множества D , по которому берётся интеграл, являются линии уровня достаточно гладких функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, т. е. $D = \{(x, y) : a \leq u(x, y) \leq b, c \leq v(x, y) \leq d\}$, причём отображение $(x, y) \mapsto (u, v)$ регулярно на D . В этом случае множество D переходит в прямоугольник $\Pi = \{(u, v) : a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$.

Пример 15.14. Вычислим $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где

$$D = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 2, 0 \leq x \leq 2y \leq 4x\}.$$

Решение. Рассмотрим отображение $(x, y) \mapsto (u, v)$, где $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$, и обратное к нему отображение $\varphi : (u, v) \mapsto (x, y)$, где $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$. Из формул, выражающих x и y через u и v , следует, что для множества D , лежащего



в первом квадранте и отделённого от координатных осей, существует область $G_{xy} \supset D$, в которой отображение φ является биективным. Геометрически биективность отображения φ видна из того, что произвольная линия уровня функции v — прямая $y = c_1 x$ и произвольная линия уровня функции u — гипербола $xy = c_2$ — при условии $x > 0$, $y > 0$ пересекаются только в одной точке. Как неравенства $1 \leq xy \leq 2$, $\frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 2$, так и геометрические соображения (прямые $y = c_1 x$ и гиперболы $xy = c_2$ пересекаются с множеством D тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2} \leq c_1 \leq 2$, $1 \leq c_2 \leq 2$) показывают, что прообразом D при отображении φ является прямоугольник $\Pi = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 2, \frac{1}{2} \leq v \leq 2\}$. Далее, для якобиана отображения φ справедливо соотношение

$$\det J_\varphi = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v} \neq 0, \quad (u, v) \in \Pi.$$

Итак, отображение φ регулярно и

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_\Pi \left(\frac{u}{v} + uv \right) \cdot \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 u du \int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{v^2} + 1 \right) dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) u du = \frac{9}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

Разумеется, можно было бы вычислить этот интеграл и не производя замены переменных. Но тогда для представления двойного интеграла в виде повторного следует разбить множество D на три: $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, где

$$D_1 = \left\{ (x, y) : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq 2x \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) : 1 \leq x \leq \sqrt{2}, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) : \sqrt{2} \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{2}{x} \right\}.$$

Если связь между переменными (x, y) и (u, v) задана равенствами вида $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, то для вычисления якобиана $\det J_\varphi$ прямого отображения $\varphi: (u, v) \mapsto (x, y)$ необходимо найти явную зависимость $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Иногда проще найти якобиан $\det J_{\varphi^{-1}}$ обратного отображения $\varphi^{-1}: (x, y) \mapsto (u, v)$ и воспользоваться равенством $\det J_\varphi = \frac{1}{\det J_{\varphi^{-1}}}$.

Пример 15.15. Вычислим

$$\iint_D \frac{x^3 - 3xy^2 + 2y^3}{xy} dx dy,$$

где D — фигура, ограниченная линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{4}{x^2}$, $y = x - 1$, $y = x + 1$.

Решение. Граница фигуры D составлена из линий уровня функций $u = yx^2$ и $v = x - y$:

$$D = \{(x, y): 1 \leq yx^2 \leq 4, -1 \leq x - y \leq 1\}.$$

Более того, каждая точка (x, y) фигуры D лежит только на одной кривой вида $yx^2 = c_1$, $1 \leq c_1 \leq 4$, и только на одной кривой вида

$$x - y = c_2, \quad -1 \leq c_2 \leq 1.$$

Поэтому отображение $\varphi^{-1}: (x, y) \mapsto (u, v)$ является биекцией множества D на прямоугольник

$$\Pi = \{(u, v): 1 \leq u \leq 4, -1 \leq v \leq 1\}.$$

Не выражая явно переменные x и y через u и v (это требует решения кубического уравнения), найдём якобиан $\det J_\varphi$, равный $\frac{1}{\det J_{\varphi^{-1}}}$. Поскольку

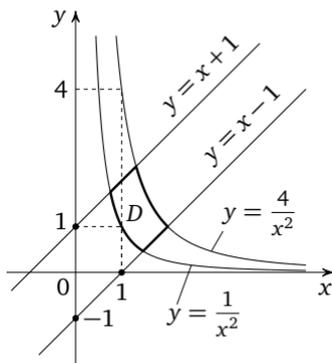
$$\det J_{\varphi^{-1}} = \begin{vmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -x(2y + x) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in D,$$

имеем

$$\det J_\varphi = -\frac{1}{x(2y + x)} = -\frac{1}{x^2(u, v) + 2x(u, v)y(u, v)} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in \Pi,$$

следовательно, условия второй теоремы о замене переменных в кратном интеграле выполнены, и поэтому

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^3 - 3xy^2 + 2y^3}{xy} dx dy &= \iint_D \frac{x(x+2y)}{x^2 y} (x^2 - 2xy + y^2) dx dy = \\ &= \iint_D \frac{v^2(x, y)}{u(x, y)} \cdot (x^2 + 2xy) dx dy = \iint_{\Pi} \frac{v^2}{u} \cdot \frac{x^2(u, v) + 2x(u, v)y(u, v)}{x^2(u, v) + 2x(u, v)y(u, v)} du dv = \\ &= \int_{-1}^1 v^2 dv \int_1^4 \frac{du}{u} = \frac{2}{3} \ln 4. \quad \square \end{aligned}$$



Переход к полярной системе координат

Нахождение прообраза множества D при переходе к полярным координатам на плоскости, т. е. при отображении $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, облегчается простым геометрическим смыслом параметров r и φ . Именно: r есть длина радиус-вектора из начала координат в точку (x, y) , а φ — угол между этим вектором и положительным направлением оси Ox . Из второй теоремы о замене переменных (с. 9) вытекает следующее утверждение о переходе к полярным координатам на плоскости.

Теорема. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — жорданово множество и $f \in C(D)$. Тогда справедливо равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

где $\Omega = \{(r, \varphi) : (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in D, r \geq 0, \alpha \leq \varphi \leq \alpha + 2\pi\}$ — прообраз множества D , $\alpha \in \mathbb{R}$.

Расстановка пределов в полярных координатах часто имеет вид

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r, \varphi) dr,$$

так как зависимость $r(\varphi)$ во многих случаях выражается проще, чем $\varphi(r)$.

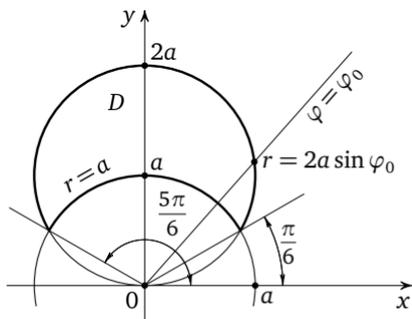
Переход от переменных x и y к переменным r и φ можно рассматривать как переход к смещённой с декартовой полярной системе координат, а не как преобразование множества D . Поэтому для упрощения записи не будем в дальнейшем вводить новое обозначение для множества изменения r и φ , а будем рассматривать множество D как в виде $D = \{(x, y) : \dots\}$, так и в виде $D = \{(r, \varphi) : \dots\}$, где вместо многоточия стоят условия на координаты (x, y) и (r, φ) соответственно. Кроме того, всюду далее в этой главе будем считать, что декартова и полярная системы координат совмещены.

Пример 15.16. В двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$, где

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq a^2, x^2 + y^2 \leq 2ay\}$$

($a > 0$) и $f \in C(D)$, перейдём к полярным координатам и расставим пределы интегрирования в том и другом порядке.

Решение. Запишем условия на координаты точек $(r, \varphi) \in D$ в полярных координатах: $r^2 \geq a^2$, $r^2 \leq 2ar \sin \varphi$, т. е. в силу условия $r \geq 0$ имеем $a \leq r \leq 2a \sin \varphi$. Из рисунка видно, что луч $\varphi = \varphi_0$ пересекается

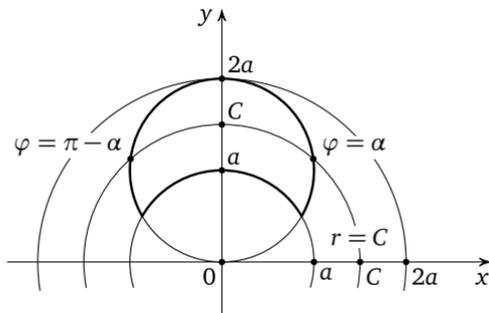


с множеством D тогда и только тогда, когда $\frac{\pi}{6} \leq \varphi_0 \leq \frac{5\pi}{6}$ (см. рис.). Каждый такой луч пересекается с D по отрезку $[a; 2a \sin \varphi_0]$. Таким образом,

$$D = \left\{ (r, \varphi) : \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}, a \leq r \leq 2a \sin \varphi \right\},$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\varphi \int_a^{2a \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Теперь расставим пределы интегрирования в другом порядке (см. рис.). Минимальное расстояние от точек множества D до начала координат равно a , максимальное — $2a$, следовательно, имеем $a \leq r \leq 2a$. При $a < C < 2a$ линия $r = C$ — окружность радиусом C с центром в начале координат — пересекается с D по дуге $[\alpha; \pi - \alpha]$, где $\alpha = \arcsin \frac{C}{2a}$. Итак,

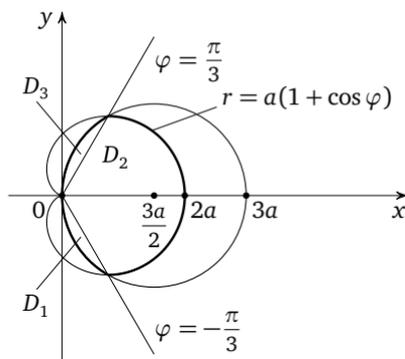


$$D = \left\{ (r, \varphi) : a \leq r \leq 2a, \arcsin \frac{r}{2a} \leq \varphi \leq \pi - \arcsin \frac{r}{2a} \right\},$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^{2a} dr \int_{\arcsin \frac{r}{2a}}^{\pi - \arcsin \frac{r}{2a}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi. \quad \square$$

Пример 15.17. В двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$, где D — множество, лежащее как внутри кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$), так и внутри окружности $x^2 + y^2 = 3ax$, и $f \in C(D)$, перейдём к полярным координатам и расставим пределы интегрирования в том и другом порядке.

Решение. Запишем уравнение окружности в полярных координатах: $r = 3a \cos \varphi$. Фигура ограничена обеими кривыми, поэтому координаты её точек должны одновременно удовлетворять неравенствам: $r \leq a(1 + \cos \varphi)$ и $r \leq 3a \cos \varphi$. Из условия $r \geq 0$ и второго неравенства получаем, что $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Поскольку и первое, и второе неравенства ограничивают r сверху, получаем $0 \leq r \leq \min\{a(1 + \cos \varphi), 3a \cos \varphi\}$ (см. рис.). Как и раньше, разобьём отрезок изменения φ на подотрезки так, чтобы границы изменения r записывались с помощью простого выражения. Для этого найдём, на каких подотрезках отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ функция $\min\{a(1 + \cos \varphi), 3a \cos \varphi\}$ совпадает с функцией $a(1 + \cos \varphi)$ и на каких — с функцией $3a \cos \varphi$. Неравенство $a(1 + \cos \varphi) \leq 3a \cos \varphi$ справедливо для $-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$, а неравенство



с функцией $3a \cos \varphi$ справедливо для $-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$, а неравенство

$a(1 + \cos \varphi) > 3a \cos \varphi$ — для $\frac{\pi}{3} < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\bar{D} = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, где

$$D_1 = \left\{ (r, \varphi) : -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{3}, 0 \leq r \leq 3a \cos \varphi \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (r, \varphi) : -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq r \leq a(1 + \cos \varphi) \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (r, \varphi) : \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 3a \cos \varphi \right\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{-\pi/2}^{-\pi/3} d\varphi \int_0^{3a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \\ &+ \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{3a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \end{aligned}$$

С другой стороны, из исходных неравенств получаем, что $0 \leq r \leq 2a$, $\cos \varphi \geq \max\left\{\frac{r}{3a}, \frac{r}{a} - 1\right\}$ (см. рис.). Опять разобьём отрезок $[0; 2a]$ изменения r на такие подотрезки, на которых функция $\max\left\{\frac{r}{3a}, \frac{r}{a} - 1\right\}$ совпадает с одной из функций $\frac{r}{3a}$ или $\frac{r}{a} - 1$. Получим, что $D = \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2$, где

$$\tilde{D}_1 = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq \frac{3a}{2}, \cos \varphi \geq \frac{r}{3a} \right\},$$

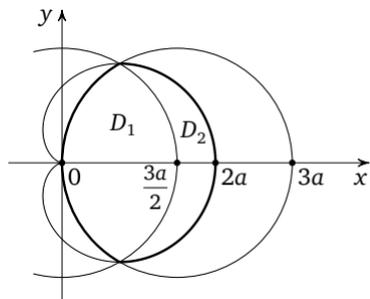
$$\tilde{D}_2 = \left\{ (r, \varphi) : \frac{3a}{2} \leq r \leq 2a, \cos \varphi \geq \frac{r}{a} - 1 \right\},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \\ &= \int_0^{\frac{3a}{2}} dr \int_{-\arccos \frac{r}{3a}}^{\arccos \frac{r}{3a}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi + \int_{\frac{3a}{2}}^{2a} dr \int_{-\arccos \left(\frac{r}{a}-1\right)}^{\arccos \left(\frac{r}{a}-1\right)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi. \end{aligned}$$

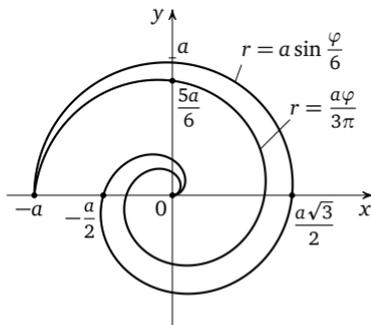
Луч $\varphi = \varphi_0$ пересекает D при $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Если $\frac{\pi}{3} \leq |\varphi_0| \leq \frac{\pi}{2}$, то этот луч пересекается с D по отрезку, начало которого в начале координат, а конец — на окружности $r = 3a \cos \varphi$, т. е. $0 \leq r \leq 3a \cos \varphi$, если же $-\frac{\pi}{3} \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{3}$, то по отрезку, начало которого в начале координат, а конец — на кардиоиде $r = a(1 + \cos \varphi)$, т. е. $0 \leq r \leq a(1 + \cos \varphi)$.

С другой стороны, минимальное расстояние от точек $(r, \varphi) \in D$ до $(0; 0)$ равно нулю, максимальное — $2a$, т. е. $0 \leq r \leq 2a$; окружность $r = c$ пересекается с \bar{D} по дуге, концы которой при $0 \leq c \leq \frac{3a}{2}$ лежат на окружности $r = 3a \cos \varphi$, т. е. $-\arccos \frac{r}{3a} \leq \varphi \leq \arccos \frac{r}{3a}$, а при $\frac{3a}{2} \leq c \leq 2a$ — по дуге, концы которой лежат на кардиоиде $r = a(1 + \cos \varphi)$, т. е. $-\arccos\left(\frac{r}{a} - 1\right) \leq \varphi \leq \arccos\left(\frac{r}{a} - 1\right)$. \square



Пример 15.18. Перейдём к полярным координатам и расставим пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$, где фигура D ограничена кривыми $r = a \sin \frac{\varphi}{6}$, $r = \frac{a\varphi}{3\pi}$, $0 \leq \varphi \leq 3\pi$ ($a > 0$), а $f \in C(D)$.

РЕШЕНИЕ. По рисунку видно, что наиболее простые условия на координаты (r, φ) точек фигуры D выглядят так: $0 < \varphi < 3\pi$, $\frac{a\varphi}{3\pi} < r < a \sin \frac{\varphi}{6}$. Но такая запись формально нарушает требование, чтобы при переходе к полярным координатам длина интервала изменения угла φ не превосходила 2π . Это требование связано с тем, чтобы нарушение биекции при переходе к полярным координатам происходило не более чем на множестве меры нуль. Однако в данном случае, как хорошо видно из рисунка, отображение



$$\Omega = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 3\pi, \frac{a\varphi}{3\pi} \leq r \leq a \sin \frac{\varphi}{6} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow D = \left\{ (x, y) : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, (r, \varphi) \in \Omega \right\}$$

как раз биективно. При этом все условия второй теоремы о замене переменных в кратном интеграле выполнены и, следовательно,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{3\pi} d\varphi \int_{\frac{a\varphi}{3\pi}}^{a \sin \frac{\varphi}{6}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Можно обосновать это равенство и чисто аналитически. Для этого представим множество D как объединение: $D = D_1 \cup D_2$, где

$$D_1 = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{a\varphi}{3\pi} \leq r \leq a \sin \frac{\varphi}{6} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (r, \varphi) : 2\pi \leq \varphi \leq 3\pi, \frac{a\varphi}{3\pi} \leq r \leq a \sin \frac{\varphi}{6} \right\}.$$

Для каждого из этих множеств переход к полярной системе координат уже не имеет формальных препятствий, следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{a\varphi}{3\pi}}^{a \sin \frac{\varphi}{6}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \int_{2\pi}^{3\pi} d\varphi \int_{\frac{a\varphi}{3\pi}}^{a \sin \frac{\varphi}{6}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr, \end{aligned}$$

а поскольку внутренние интегралы в первом и втором слагаемом одинаковы, пользуясь аддитивностью однократного интеграла, получаем:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{3\pi} d\varphi \int_{\frac{a\varphi}{3\pi}}^{a \sin \frac{\varphi}{6}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad \square$$

Переход к обобщённой полярной системе координат

Обобщёнными полярными координатами называется пара (r, φ) , связанная с координатами x, y формулами $x = ar \cos^\alpha \varphi$, $y = br \sin^\alpha \varphi$. При этом $r \geq 0$, а φ пробегает либо отрезок $[0; 2\pi]$ ($[-\pi; \pi]$), либо отрезок $[0; \frac{\pi}{2}]$ в зависимости от значения постоянной α так, чтобы функции $\cos^\alpha \varphi$ и $\sin^\alpha \varphi$ имели смысл и оба равенства $\sin^\alpha \varphi_0 = \sin^\alpha \varphi_1$, $\cos^\alpha \varphi_0 = \cos^\alpha \varphi_1$ одновременно выполнялись только при $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_1 = 2\pi$ ($\varphi_0 = -\pi$, $\varphi_1 = \pi$) или $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

Переход к обобщённым полярным координатам обычно делается, если уравнение кривой, ограничивающей множество интегрирования D , в новых переменных при соответствующем выборе постоянных a, b, α становится существенно более простым. Поскольку обобщённые полярные координаты не имеют наглядного геометрического смысла, границы их изменения для точек (x, y) из данного множества D определяются аналитическим путём. Если при переходе к полярным координатам мы оставляли обозначение множества D без изменения, то теперь, как и в общем случае замены переменных, будем соответствующее множество значений (r, φ) обозначать через Ω . При переходе к обобщённым полярным координатам якобиан равен $aabr \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi$.

Пример 15.19. Вычислим $\iint_D \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^2 dx dy$, где D — фигура, лежащая в первом квадранте ($x \geq 0, y \geq 0$) и ограниченная осями координат и кривой $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^4 = \frac{x^2}{9} + y^2$.

Решение. Положим $x = 2r \cos^2 \varphi$, $y = 5r \sin^2 \varphi$, тогда уравнение заданной кривой примет вид $r^2 = \frac{4}{9} \cos^4 \varphi + 25 \sin^4 \varphi$. Функции $\cos^2 \varphi$ и $\sin^2 \varphi$ имеют смысл при любом $\varphi \in [0; 2\pi]$, но, чтобы их значения не повторялись (как было указано выше), наложим дополнительное условие $\varphi \in [0; \pi/2]$.

Обозначая для упрощения записи $g(\varphi) = \left(\frac{4}{9} \cos^4 \varphi + 25 \sin^4 \varphi\right)^{1/2}$, получаем:

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^2 dx dy &= 5 \cdot 2 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{g(\varphi)} r^3 \cos \varphi \sin \varphi dr = \\ &= 5 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4}{9} \cos^4 \varphi + 25 \sin^4 \varphi\right)^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{80}{81} \int_0^{\pi/2} \cos^9 \varphi \sin \varphi d\varphi + \frac{1000}{9} \int_0^{\pi/2} \cos^5 \varphi \sin^5 \varphi d\varphi + 3125 \int_0^{\pi/2} \sin^9 \varphi \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{8}{81} + \frac{625}{2} + \frac{500}{9} \frac{\Gamma(3)\Gamma(3)}{\Gamma(6)} = \frac{8}{81} + \frac{625}{2} + \frac{50}{27} = \frac{50941}{162}. \end{aligned}$$

□

Пример 15.20. Представим двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$, где D — фигура, ограниченная кривой $\frac{x^{2/3}}{4} + 2y^{2/3} = (2x - y)^{1/3}$, $f \in C(D)$, в виде повторного, предварительно перейдя к обобщённым полярным координатам.

Решение. Положим $x = 8r \cos^3 \varphi$, $y = \frac{r}{2\sqrt{2}} \sin^3 \varphi$, тогда уравнение заданной кривой примет вид $r = r(\varphi) = \left(16 \cos^3 \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{2\sqrt{2}}\right)^{1/2}$. Из определения обобщённых полярных координат (см. с. 33) следует, что $\varphi \in [-\pi; \pi]$. На этом промежутке функция $r(\varphi)$ определена при $-\pi + \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, где $\varphi_0 = \arctg(4/\sqrt[6]{2})$. Значит, прообразом множества D является множество

$$\Omega = \left\{ (r, \varphi) : -\pi + \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0, 0 \leq r \leq \left(16 \cos^3 \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{2\sqrt{2}}\right)^{1/2} \right\},$$

и, следовательно,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 6\sqrt{2} \int_{-\pi + \varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f\left(8r \cos^3 \varphi, \frac{r(\sin^3 \varphi)}{2\sqrt{2}}\right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cdot r dr,$$

$$\text{где } \varphi_0 = \arctg \frac{4}{\sqrt[6]{2}}, \quad r(\varphi) = \left(16 \cos^3 \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{2\sqrt{2}}\right)^{1/2}. \quad \square$$

Если при переходе к обобщённым полярным координатам значение α меньше единицы, то в условиях первой теоремы о замене переменных в кратном интеграле нарушается не только требование биективности отображения, но и требование его гладкости. В этом случае, опять применяя вторую теорему, получаем, вообще говоря, несобственный двойной интеграл по ограниченному жорданову множеству Ω от неограниченной функции

$$\alpha a b r f(a r \cos^\alpha \varphi, b r \sin^\alpha \varphi) \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi.$$

Подробнее вопрос о несобственных кратных интегралах мы рассмотрим в § 15.5, а здесь только заметим, что в данном случае этот интеграл имеет смысл и равен повторному интегралу, причём интеграл по переменной φ будет несобственным. Аналогичным является и общий случай, когда при замене $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ прообразом жорданова множества $D = \{(x, y)\}$ является жорданово множество $\Omega = \{(u, v)\}$, но условия гладкости отображения $\varphi : \Omega \rightarrow D$ нарушаются на множестве объёма нуль. При этом оба одномерных интеграла в повторном могут быть несобственными, но формула замены переменных остаётся справедливой.

Пример 15.21. Вычислим $\iint_D \frac{x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4}{\sqrt{x^6 + y^6}} dx dy$, где D — фигура, ограниченная кривой $(x^6 + y^6)^2 = (x + y)^3$.

Решение. Функция $f(x, y) = \frac{x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4}{\sqrt{x^6 + y^6}}$ формально не определена в начале координат. Положим

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

и проверим, что так определённая функция $F(x, y)$ непрерывна на D . Непрерывность F во всех точках, кроме начала координат, следует непосредственно из её задания. Чтобы проверить непрерывность F в точке $(0, 0)$, проще всего перейти к обычным полярным координатам

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{r(\cos^4 \varphi - \cos^2 \varphi \sin \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - \cos \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi)}{\sqrt{\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi}}.$$

Отсюда получаем оценку

$$|f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)| \leq \frac{5r}{\sqrt{1 - (3/4) \sin^2 2\varphi}} \leq 10r,$$

которая и показывает, что $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 0 = F(0, 0)$.

Таким образом, можно считать, что под знаком интеграла стоит непрерывная функция $F(x, y)$. Положим $x = r \cos^{1/3} \varphi$, $y = r \sin^{1/3} \varphi$, тогда уравнение заданной кривой примет вид $r^3 = \cos^{1/3} \varphi + \sin^{1/3} \varphi$. Так же как и в предыдущем примере, делаем вывод, что $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$, и в качестве прообраза множества D получаем множество

$$\Omega = \left\{ (r, \varphi) : -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r^3 \leq \cos^{1/3} \varphi + \sin^{1/3} \varphi \right\}.$$

Итак,

$$\iint_D \frac{x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - xy^3 + y^4}{\sqrt{x^6 + y^6}} dx dy = \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{(\cos^{1/3} \varphi + \sin^{1/3} \varphi)^{1/3}} g(r, \varphi) dr,$$

где $g(r, \varphi) = \left(\cos^{4/3} \varphi - \cos \varphi \sin^{1/3} \varphi + \cos^{2/3} \varphi \sin^{2/3} \varphi - \cos^{1/3} \varphi \sin \varphi + \sin^{4/3} \varphi \right) \times r^2 \cos^{-2/3} \varphi \sin^{-2/3} \varphi dr$. Вычислим внутренний интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{(\cos^{1/3} \varphi + \sin^{1/3} \varphi)^{1/3}} g(r, \varphi) dr &= \frac{1}{3} (\cos^{5/3} \varphi + \sin^{5/3} \varphi) \cos^{-2/3} \varphi \sin^{-2/3} \varphi = \\ &= \frac{1}{3} \cos \varphi \sin^{-2/3} \varphi + \frac{1}{3} \cos^{-2/3} \varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$

Функция $\frac{1}{3} \cos \varphi \sin^{-2/3} \varphi + \frac{1}{3} \cos^{-2/3} \varphi \sin \varphi$, стоящая под знаком внешнего интеграла, — неограниченная. Вычислим интеграл от первого слагаемого:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \cos \varphi \sin^{-2/3} \varphi d\varphi &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^0 \sin^{-2/3} \varphi d \sin \varphi + \frac{1}{3} \int_0^{3\pi/4} \sin^{-2/3} \varphi d \sin \varphi = \\ &= \sin^{1/3} \varphi \Big|_{-\pi/4}^0 + \sin^{1/3} \varphi \Big|_0^{3\pi/4} = \frac{2}{\sqrt[6]{2}}. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляем интеграл от второго слагаемого, он тоже равен $\frac{2}{\sqrt[6]{2}}$.

Следовательно, $\iint_D \frac{x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - xy^3 + y^4}{\sqrt{x^6 + y^6}} dx dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt[6]{2}} = \frac{2\sqrt[6]{32}}{3}$. \square

Пример 15.22. Вычислим $\iint_D \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} - \left(\frac{y}{b}\right)^3\right) dx dy$, где

$$D = \left\{ (x, y) : x \geq 0, y \geq 0, \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} + \left(\frac{y}{b}\right)^3 \leq 1 \right\}, \quad a > 0, b > 0.$$

Решение. Сделаем замену переменных: $x = au^{2/3}$, $y = bv^{1/3}$. Из условий на координаты точек $(x, y) \in D$ получаем, что множеством изменения переменных (u, v) является $\Omega = \{(u, v) : u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1\}$. Якобиан отображения $\varphi : \Omega \rightarrow D$ равен $\frac{2ab}{9}u^{-1/3}v^{-2/3}$. Следовательно, на отрезках $u = 0$, $0 \leq v \leq 1$ и $v = 0$, $0 \leq u \leq 1$, являющихся прообразами отрезков $x = 0$, $0 \leq y \leq b$, и $y = 0$, $0 \leq x \leq a$, условия гладкости нарушаются. Тем самым такая замена приводит к несобственному интегралу:

$$\begin{aligned} \iint_D \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} - \left(\frac{y}{b}\right)^3\right) dx dy &= \iint_{\Omega} \frac{2ab}{9} (1 - u - v) u^{-1/3} v^{-2/3} du dv = \\ &= \frac{2ab}{9} \int_0^1 u^{-1/3} du \int_0^{1-u} (1 - u - v) v^{-2/3} dv. \end{aligned}$$

В данном случае и внешний, и внутренний интегралы — несобственные. Вычисляя их, одновременно убеждаемся в их существовании:

$$\int_0^{1-u} (1 - u - v) v^{-2/3} dv = 3(1 - u) v^{1/3} \Big|_0^{1-u} - \frac{3}{4} v^{4/3} \Big|_0^{1-u} = \frac{9}{4} (1 - u)^{4/3},$$

$$\frac{2}{9} ab \int_0^1 \frac{9}{4} (1 - u)^{4/3} u^{-1/3} du = \frac{ab}{2} B\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right) = \frac{ab}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{ab}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi ab. \quad \square$$

15.2.3. Площадь плоской фигуры и объём пространственного тела

Площадь плоской фигуры D вычисляется по формуле $|D| = \iint_D dx dy$, как

объём жорданова множества (см. с. 6).

Множество $V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$, где D — плоская фигура, а функции φ_1 и φ_2 непрерывны на D , будем называть *телом*, *стандартным относительно оси Oz*. Аналогично множества

$$V = \{(x, y, z) : (x, z) \in D, \psi_1(x, z) \leq y \leq \psi_2(x, z)\},$$

$$V = \{(x, y, z) : (y, z) \in D, \chi_1(y, z) \leq x \leq \chi_2(y, z)\},$$

где D — плоская фигура, а ψ_1 , ψ_2 , χ_1 и χ_2 — непрерывные функции, будем называть *телами*, *стандартными относительно осей Oy и Ox* соответственно.

Тело, являющееся стандартным относительно одной из осей координат, будем кратко называть *стандартным*. *Телом* (или *объёмной фигурой*) будем называть множество $M \subset \mathbb{R}^3$, являющееся связным объединением конечного числа стандартных тел. Всякое тело является жордановым множеством.

Объём тела V , стандартного относительно оси Oz , находится по формуле

$$|V| = \iint_D (\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)) dx dy.$$

Аналогично находят объёмы тел, стандартных относительно других осей.

Таким образом, вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел сводится к вычислению двойных интегралов, которое подробно было рассмотрено в начале этого параграфа.

Пример 15.23. Найдём площадь фигуры D , находящейся в первом квадранте и ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, $y = 2x$, $y = 3x$.

Решение. *Способ 1.* Фигура D представлена на рис. Найдём точки пересечения прямых с окружностями: $P\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $Q\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$, $R\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $S\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{8}{5}}\right)$. Заметим, что абсциссы точек Q и R одинаковы. Представляя фигуру D в виде объединения двух стандартных относительно Ox фигур (криволинейных треугольников PQR и QSR), находим искомую площадь:

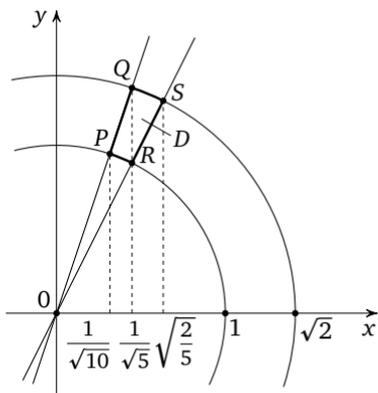
$$\begin{aligned} |D| &= \int_{1/\sqrt{10}}^{1/\sqrt{5}} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{3x} dy + \int_{1/\sqrt{5}}^{\sqrt{2/5}} dx \int_{2x}^{\sqrt{2-x^2}} dy = \\ &= \int_{1/\sqrt{10}}^{1/\sqrt{5}} (3x - \sqrt{1-x^2}) dx + \int_{1/\sqrt{5}}^{\sqrt{2/5}} (\sqrt{2-x^2} - 2x) dx = \\ &= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1}{2} \arcsin x \right) \Big|_{1/\sqrt{10}}^{1/\sqrt{5}} + \left(\frac{x\sqrt{2-x^2}}{2} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} - x^2 \right) \Big|_{1/\sqrt{5}}^{\sqrt{2/5}} = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Способ 2. Граница фигуры D состоит из линий уровня функций $f(x, y) = x^2 + y^2$ и $g(x, y) = y/x$. Введём новые переменные $u = x^2 + y^2$ и $v = y/x$. Отображение φ^{-1} , задаваемое этими формулами, есть биекция фигуры D на прямоугольник $\Pi = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 2, 2 \leq v \leq 3\}$. Поскольку

$$\det J_{\varphi^{-1}} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = 2 + \frac{2y^2}{x^2} = 2 + 2v^2,$$

получаем $\det J_{\varphi} = \frac{1}{2(1+v^2)}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} |D| &= \iint_D dx dy = \iint_{\Pi} \frac{1}{2(1+v^2)} du dv = \int_1^2 du \int_2^3 \frac{1}{2(1+v^2)} dv = \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{7}. \end{aligned}$$



Способ 3. В полярной системе координат имеем

$$D = \{(r, \varphi) : 1 \leq r \leq \sqrt{2}, \arctg 2 \leq \varphi \leq \arctg 3\}.$$

Следовательно,

$$|D| = \int_{\arctg 2}^{\arctg 3} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} r dr = \frac{1}{2}(\arctg 3 - \arctg 2) = \frac{1}{2} \arctg \frac{1}{7}.$$

Из всех предложенных способов третий, как видно, — самый простой. \square

Пример 15.24. Найдём площадь фигуры D , ограниченной кривой $bx^6 + ay^6 = 6c^2x^4y$ ($a, b, c > 0$).

Решение. В силу симметрии кривой, ограничивающей данную фигуру, относительно оси Oy рассмотрим кривую только в первом квадранте (поскольку $y \geq 0$); положим $x = (\sqrt[6]{b})^{-1}r \cos^{1/3} \varphi$, $y = (\sqrt[6]{a})^{-1}r \sin^{1/3} \varphi$, тогда в обобщённой полярной системе координат уравнение данной кривой имеет вид

$$r = 6c^2 \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}} \cos^{4/3} \varphi \frac{1}{\sqrt[6]{a}} \sin^{1/3} \varphi = A \cos^{4/3} \varphi \sin^{1/3} \varphi, \quad \text{где } A = \frac{6c^2}{\sqrt[6]{b^4a}}.$$

Поскольку при переходе к новым координатам якобиан равен

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{a}} r \cos^{-2/3} \varphi \sin^{-2/3} \varphi,$$

получаем

$$\begin{aligned} |D| &= \frac{2}{3\sqrt[6]{ab}} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{A \cos^{4/3} \varphi \sin^{1/3} \varphi} r \cos^{-2/3} \varphi \sin^{-2/3} \varphi dr = \\ &= \frac{2}{3\sqrt[6]{ab}} \cdot \frac{36c^4}{2\sqrt[6]{b^8a^2}} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3\pi c^4}{\sqrt{ab^3}}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 15.25. Найдём объём тела V , ограниченного поверхностями $z = 0$ и $z = c \sin\left(\pi\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right)$ ($a, b, c > 0$), при условии, что $k \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение. Объём данного тела найдём по формуле

$$|V| = \iint_D |z| dx dy, \quad \text{где } D = \{(x, y) : k \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq k+1\}.$$

Введём новые переменные r и φ по формулам $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$. Тогда в силу симметрии фигуры D и чётности функции

$$h(x, y) = \left| c \sin\left(\pi\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right) \right|$$

относительно обеих переменных получаем

$$\begin{aligned} |V| &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} rabc |\sin \pi r^2| dr = 4abc \frac{\pi}{2} \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} r |\sin \pi r^2| dr = \\ &= 2\pi abc \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi} (\cos \pi r^2) \Big|_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} = abc(-1)^{k+1} (\cos \pi(k+1) - \cos \pi k) = \\ &= 2abc(-1)^{k+2} \cos \pi k = 2abc. \quad \square \end{aligned}$$

15.2.4. Площадь поверхности и её вычисление

Определение. Множество $S \subset \mathbb{R}^3$ называется *поверхностью в \mathbb{R}^3* , если для любой точки $s \in S$ существуют такое открытое множество $V(s)$, $s \in V$, и такой гомеоморфизм (т. е. биективное отображение, непрерывное вместе с обратным) $r: \bar{D} \rightarrow r(\bar{D})$, что $r(\bar{D}) = \overline{V(s) \cap S}$, где $\bar{D} = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ — замкнутый круг в \mathbb{R}^2 .

В курсе анализа мы ограничимся рассмотрением более узкого класса — класса кусочно-гладких поверхностей.

Определение. Поверхность S называется *простой гладкой поверхностью*, если S есть образ замыкания области $D \subset \mathbb{R}^2$: $S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}$ и выполнены условия:

- 1) область D жорданова;
- 2) отображение $r: \bar{D} \rightarrow S$ — гомеоморфизм;
- 3) $r \in C^1(D)$, т. е. $x, y, z \in C^1(D)$, где $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$;
- 4) для всех точек $M_0 = (u_0, v_0) \in \bar{D}$ ранг матрицы

$$r'(M_0) = \begin{pmatrix} x'_u(M_0) & y'_u(M_0) & z'_u(M_0) \\ x'_v(M_0) & y'_v(M_0) & z'_v(M_0) \end{pmatrix}$$

равен двум (векторы $\vec{r}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$ и $\vec{r}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$ неколлинеарны).

Отображение $r = r(u, v): \bar{D} \rightarrow S$ называется *параметрическим представлением поверхности S* ; переменные u и v — *параметрами S* ; множество \bar{D} — *множеством значений параметров u, v* . Параметрическое задание поверхности S будем записывать следующим образом: $S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}$ или

$$S = \{(x, y, z) : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v); (u, v) \in \bar{D}\}.$$

Точки $s \in S$, являющиеся образами точек D , будем называть *внутренними точками поверхности S* ; точки $s \in S$, являющиеся образами множества $\partial D = \bar{D} \setminus D$ (границы D), — *граничными точками поверхности S* .

Возникает вопрос: может ли простая гладкая поверхность, рассматриваемая как определённое множество точек трёхмерного пространства, иметь несколько различных параметрических представлений?

Определение. Пусть D и Ω — жордановы области в \mathbb{R}^2 . Отображения $r: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $\rho: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ называются *эквивалентными*, если существует такой диффеоморфизм $\varphi: \bar{D} \rightarrow \bar{\Omega}$, что $\varphi(D) = \Omega$, $\varphi(\bar{D} \setminus D) = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ (внутренние точки переходят во внутренние, граничные — в граничные) и $r(M) = \rho(\varphi(M))$ для любой точки $M \in \bar{D}$.

Из наглядных геометрических соображений можно заключить, что эквивалентные отображения $r: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $\rho: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ задают одну и ту же простую гладкую поверхность. Диффеоморфизм $\varphi: \bar{D} \rightarrow \bar{\Omega}$, осуществляющий эквивалентность r и ρ , назовём *допустимым преобразованием параметров*.

Определение. Поверхность S , являющаяся объединением конечного числа простых гладких поверхностей S_q , $1 \leq q \leq Q$, называется *кусочно-гладкой поверхностью*, если выполнены условия:

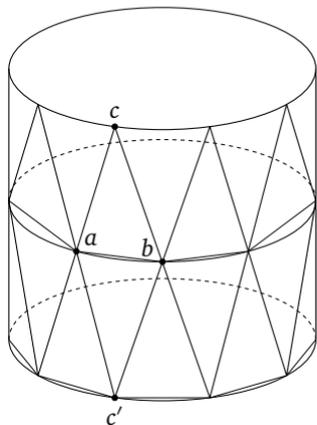
- 1) поверхности S_q и S_p , $p \neq q$, не имеют общих внутренних точек;
- 2) если множество $L_{p,q} = S_p \cap S_q$ содержит более одной точки, то $L_{p,q}$ представляет собой кусочно-гладкую кривую.

Простые гладкие поверхности S_q будем называть *компонентами* S ; кривую $L_{p,q}$ — *линией пересечения компонент* S_p и S_q .

Из определения простой гладкой поверхности $S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}$ следует, что в каждой точке $s_0 \in S$, $s_0 = r(u_0, v_0)$, поверхность S имеет касательную плоскость¹, натянутую на векторы $\vec{r}'_u(u_0, v_0)$ и $\vec{r}'_v(u_0, v_0)$.

По аналогии с определением длины кривой казалась бы естественной аппроксимация площади поверхности площадями «вписанных» в неё многогранных поверхностей, каждая грань которых является треугольником с вершинами, лежащими на этой поверхности. Следующий пример, приведённый Г. Шварцем, показывает, что такой подход даже для очень гладкой поверхности может привести к абсурду.

Пример 15.26. В прямой круговой цилиндр радиусом R и высотой H впишем многогранную поверхность (*сапог Шварца*) следующим образом. Параллельными плоскостями делим цилиндр на m равных цилиндров высотой $\frac{H}{m}$. Каждую из полученных окружностей — оснований цилиндров — делим на n равных частей так, чтобы точки деления на каждой окружности находились над серединами дуг, полученных при делении ближайшей нижней окружности (см. рис.). Возьмём две соседние точки a и b на одной окружности и точку c , лежащую на ближайшей окружности над или под серединой дуги ($a; b$). Обозначим через $T_{a,b,c}$ треугольник с вершинами в точках a, b, c . Совокупность всех таких (равных между собой) треугольников образует многогранную поверхность $P_{n,m}$, «вписанную» в цилиндр. Количество $T_{a,b,c}$, составляющих $P_{n,m}$, равно $2mn$, площадь каждого из них равна $R \left(\sin \frac{\pi}{n} \right) \sqrt{\left(\frac{H}{m} \right)^2 + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}$, следовательно, площадь $P_{n,m}$ равна $2nR \left(\sin \frac{\pi}{n} \right) \sqrt{H^2 + 4m^2 R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}$. Если m и n устремить к бесконечности, то расстояние между отмеченными точками разбиения (триангуляции) поверхности цилиндра будет стремиться к нулю, в то время как предел $\lim_{n,m \rightarrow \infty} |P_{n,m}|$ площадей вписанных многогранных поверхностей не существует. Действительно, если положить $m = n^3$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_{n,n^3}| = \infty$; если же положить $m = kn^2$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_{n,kn^2}| = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{R^2 k^2 \pi^4}{4}}$, что и показывает некорректность рассматриваемой аппроксимации. \square



Пусть $S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}$ — простая гладкая поверхность; $\bar{D} \subset [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ и T_u — разбиение отрезка $[a_1; b_1]$: $a_1 = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n = b_1$,

¹ Касательная плоскость и способы её нахождения при различном задании поверхности рассматривались в т.1 (см. гл. 8, § 8.7).

T_v — разбиение отрезка $[a_2; b_2]$: $a_2 = v_0 < v_1 < \dots < v_m = b_2$, $T = T_u \times T_v$ — разбиение прямоугольника $[a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$.

Возьмём точку $(u_i, v_j) \in D$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq m-1$, и обозначим $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$, $\Delta v_j = v_{j+1} - v_j$. Линейное отображение $r'(u_i, v_j)$ переводит множество векторов плоскости \mathbb{R}^2 , выходящих из точки (u_i, v_j) , в плоскость, касательную к поверхности S в точке $s_{ij} = r(u_i, v_j)$. Прямоугольник $u_i \leq u \leq u_{i+1}$, $v_j \leq v \leq v_{j+1}$ переходит при этом в параллелограмм σ_{ij} , построенный на векторах $\vec{r}'_u(u_i, v_j)\Delta u_i$, $\vec{r}'_v(u_i, v_j)\Delta v_j$. Площадь $|\sigma_{ij}|$ этого параллелограмма равна¹ $|\vec{r}'_u(u_i, v_j) \times \vec{r}'_v(u_i, v_j)|\Delta u_i\Delta v_j$. Обозначим символом $\sum_{i,j}^*$ сумму, распространённую на те и только те индексы i, j , $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq m-1$, для которых $(u_i, v_j) \in D$.

Определение. Площадью $|S|$ поверхности S называется $\lim_{d_T \rightarrow 0} \sum_{i,j}^* |\sigma_{ij}|$, где d_T — диаметр разбиения T .

Из определения вытекает, что $|S| = \iint_D |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv$. Рассмотрим матрицу Грама отображения $r: \mathbb{G} = \begin{pmatrix} \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_u & \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v \\ \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v & \vec{r}'_v \cdot \vec{r}'_v \end{pmatrix}$. Обозначим через φ угол между векторами \vec{r}'_u и \vec{r}'_v . Поскольку

$$\begin{aligned} |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|^2 &= |\vec{r}'_u|^2 |\vec{r}'_v|^2 \sin^2 \varphi = |\vec{r}'_u|^2 |\vec{r}'_v|^2 - |\vec{r}'_u|^2 |\vec{r}'_v|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= |\vec{r}'_u|^2 |\vec{r}'_v|^2 - (\vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v)^2 = \det \mathbb{G}, \end{aligned}$$

площадь поверхности $S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}$ вычисляется также по формуле

$$|S| = \iint_D \sqrt{\det \mathbb{G}} du dv. \quad (1)$$

Отметим, что в этой формуле под знаком интеграла стоит непрерывная функция и интеграл берётся по жордановой области, поэтому в данном случае интеграл существует. Если компоненты матрицы Грама обозначить следующим образом: $\mathbb{G} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, т. е.

$$\begin{aligned} E = |\vec{r}'_u|^2 &= (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2; & G = |\vec{r}'_v|^2 &= (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2; \\ F = \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v &= x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v, \end{aligned}$$

то формула (1) приобретёт вид $|S| = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$.

Площадь кусочно-гладкой поверхности определяется и вычисляется как сумма площадей составляющих её простых гладких поверхностей.

Величина площади поверхности должна быть, конечно, характеристикой внутренней геометрии поверхности, т. е. не зависеть от различных способов её параметризации. Действительно, можно доказать, что при регулярном отображении $\varphi: \bar{D} \rightarrow \bar{D}_1$ величина интеграла в формуле (1) не изменяется. Следовательно, приведённое определение площади поверхности $S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}$ корректно.

¹Здесь и далее $\vec{x} \times \vec{y}$ обозначает векторное произведение векторов \vec{x} и \vec{y} в \mathbb{R}^3 , его также обозначают через $[\vec{x}, \vec{y}]$.

Заметим, что можно дать и другие, эквивалентные приведённому, но более «геометрические» определения площади поверхности.

Пусть $S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}$, отображение $r: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ — гомеоморфизм и на множестве $E \subset \bar{D}$ площади нуль нарушены условия его гладкости. Пользуясь понятием площади простой гладкой поверхности, определяют понятие площади и для поверхностей такого класса. Если при этом интеграл (1) существует хотя бы как несобственный, то его величина равна площади $|S|$ поверхности S . Точно так же допускается не только регулярное преобразование параметров в представлении поверхности, но и такое, при котором условие биекции или условие гладкости нарушаются на множестве площади нуль. При этом интеграл (1) преобразуется в условиях второй теоремы о замене переменных в кратном интеграле (см. с. 9).

Если поверхность S задана явным уравнением: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$, т. е. $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \bar{D}\}$, то формула (1) принимает вид

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy.$$

Пример 15.27. Найдём площадь части поверхности

$$x = a \cos u(1 - \cos v) + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin u \sin v,$$

$$y = a \sin u(1 - \cos v) - \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos u \sin v, \quad z = bu + \frac{a^2 \sin v}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

если $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$ ($a, b > 0$).

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$x'_u = -a \sin u(1 - \cos v) + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos u \sin v,$$

$$x'_v = a \cos u \sin v + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin u \cos v,$$

$$y'_u = a \cos u(1 - \cos v) + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin u \sin v,$$

$$y'_v = a \sin u \sin v - \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos u \cos v, \quad z'_u = b, \quad z'_v = \frac{a^2 \cos v}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$E = a^2(1 - \cos v)^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \sin^2 v + b^2 = \frac{(a^2 + b^2 - a^2 \cos v)^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

$$G = a^2 \sin^2 v + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cos^2 v + \frac{a^4 \cos^2 v}{a^2 + b^2} = a^2,$$

$$F = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin^2 v - \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}} (1 - \cos v) \cos v + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos v = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \frac{a(a^2 + b^2 - a^2 \cos v)}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$|S| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_0^\pi du \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 - a^2 \cos v) dv = \frac{a\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot 2\pi(a^2 + b^2) =$$

$$= 2\pi^2 a \sqrt{a^2 + b^2}. \quad \square$$

Данное выше определение площади двумерной поверхности в \mathbb{R}^3 может быть обобщено на случай k -мерной поверхности в \mathbb{R}^n , $k < n$.

Определение. Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *простой гладкой поверхностью*, если S есть образ замыкания жордановой области $D \subset \mathbb{R}^k$, т. е. $S = \{r(u_1, \dots, u_k) : (u_1, \dots, u_k) \in \bar{D}\}$, причём отображение $r: \bar{D} \rightarrow S$ является гомеоморфизмом, $r \in C^1(D)$ и для любой точки $M_0 \in \bar{D}$ ранг матрицы

$$\bar{r}'(M_0) = \begin{pmatrix} \bar{r}'_{u_1}(M_0) \\ \dots \\ \bar{r}'_{u_k}(M_0) \end{pmatrix} \text{ равен } k.$$

Площадью такой поверхности называется число $|S| = \int_D \sqrt{|\det \mathbb{G}|} du$, где \mathbb{G} — матрица Грама отображения r , т. е.

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} \bar{r}'_{u_1} \cdot \bar{r}'_{u_1} & \bar{r}'_{u_1} \cdot \bar{r}'_{u_2} & \dots & \bar{r}'_{u_1} \cdot \bar{r}'_{u_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{r}'_{u_k} \cdot \bar{r}'_{u_1} & \bar{r}'_{u_k} \cdot \bar{r}'_{u_2} & \dots & \bar{r}'_{u_k} \cdot \bar{r}'_{u_k} \end{pmatrix}.$$

Пример 15.28. Найдём площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, если $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $a^2 + b^2 < R^2$.

Решение. Цилиндр, чьей направляющей является граница прямоугольника $\Pi = \{(x, y) : -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$, вырезает на верхней и нижней полусферах части одинаковой площади. Представим уравнение верхней полусферы в явном виде: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

На прямоугольнике Π функция z гладкая, поэтому искомая площадь равна

$$\begin{aligned} & 2 \iint_{\Pi} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \\ & = 2R \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = 4R \int_{-a}^a \arcsin \frac{b}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \\ & = 4R \left(x \arcsin \frac{b}{\sqrt{R^2 - x^2}} \Big|_{-a}^a - b \int_{-a}^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{R^2 - x^2 - b^2}(R^2 - x^2)} \right) = \\ & = 8aR \arcsin \frac{b}{\sqrt{R^2 - a^2}} + 4bR \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{R^2 - b^2 - x^2}} - \\ & \quad - 2bR^2 \int_{-a}^a \frac{dx}{(R-x)\sqrt{R^2 - b^2 - x^2}} - 2bR^2 \int_{-a}^a \frac{dx}{(R+x)\sqrt{R^2 - b^2 - x^2}} = \\ & = 8aR \arcsin \frac{b}{\sqrt{R^2 - a^2}} + 8bR \arcsin \frac{a}{\sqrt{R^2 - b^2}} - \\ & \quad - 4R^2 \left(\arcsin \frac{b^2 - R^2 + aR}{(R-a)\sqrt{R^2 - b^2}} - \arcsin \frac{b^2 - R^2 - aR}{(R+a)\sqrt{R^2 - b^2}} \right) = \\ & = 4R \left(2a \arcsin \frac{b}{\sqrt{R^2 - a^2}} + 2b \arcsin \frac{a}{\sqrt{R^2 - b^2}} - R \arccos \frac{R^2(R^2 - a^2 - b^2) - a^2 b^2}{(R^2 - b^2)(R^2 - a^2)} \right). \quad \square \end{aligned}$$

Пример 15.29. Найдём площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при условии, что $-1 \leq y + x \leq 5$, $-3 \leq y - x \leq 3$.

Решение. Множество $D = \{-1 \leq x + y \leq 5, -3 \leq y - x \leq 3\}$ представляет собой квадрат с вершинами $A(-2, 1)$, $B(1, 4)$, $C(4, 1)$, $D(1, -2)$. Для поверхности $S = \{(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) : (x, y) \in D\}$ имеем: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

В точке $O(0; 0) \in D$ гладкость отображения $(x, y) \rightarrow (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ нарушается. Но поскольку для любой точки $M(x, y) \in D$, кроме начала координат, имеем $1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 2$, функция $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ доопределяется в начале координат по непрерывности значением $\sqrt{2}$. Таким образом,

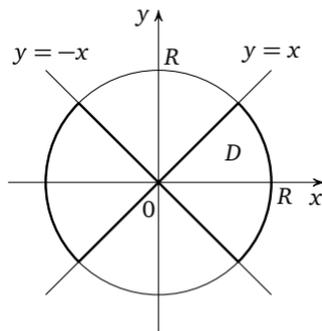
$$\iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2}|D| = \sqrt{2}AB^2 = 18\sqrt{2}$$

и рассматриваемая поверхность имеет площадь $|S| = 18\sqrt{2}$. \square

Пример 15.30. Найдём площадь части конуса $z^2 = x^2 - y^2$, если $2x^2 - z^2 \leq R^2$.

Решение. Как и в примере 15.28, цилиндр $2x^2 - z^2 = R^2$ вырезает на верхней $z \geq 0$, $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, и нижней $z \leq 0$, $z = -\sqrt{x^2 - y^2}$, половинах конуса части одинаковой площади. Поэтому рассмотрим только верхнюю половину. Она задаётся формулой $z = \sqrt{x^2 - y^2}$. Выясним, на какое множество плоскости xOy проецируется данная часть поверхности, т. е. найдём множество D значений параметров x, y в задании рассматриваемой поверхности: $S = \{(x, y, \sqrt{x^2 - y^2}) : (x, y) \in D\}$.

Проекция всей поверхности $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ на плоскость xOy — множество $M = \{(x, y) : |x| \geq |y|\}$. Проекция рассматриваемой части конуса отсекается от множества M проекцией на плоскость xOy линии пересечения конуса $z^2 = x^2 - y^2$ и цилиндра $2x^2 - z^2 = R^2$. Исключая z из системы уравнений $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $2x^2 - z^2 = R^2$, получаем уравнение этой проекции: $x^2 + y^2 = R^2$. Следовательно, $D = \{(x, y) : |x| \geq |y|, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ (см. рис.). Далее,



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

$$1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}} = \frac{\sqrt{2}|x|}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

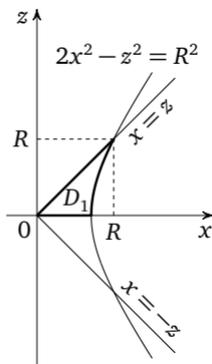
На линиях $y = x$, $y = -x$, являющихся границами D , условия гладкости отображения $(x, y) \rightarrow (x, y, \sqrt{x^2 - y^2})$ нарушаются. Интеграл $\iint_D \frac{\sqrt{2}|x| dx dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ является несобственным. Для его вычисления — и одновременно проверки сходимости — воспользуемся симметрией множества D , чётностью относительно x

подынтегральной функции и перейдём к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\sqrt{2}|x|}{\sqrt{x^2-y^2}} dx dy &= 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^R \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} dr = 2R^2 \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \frac{d \sin \varphi}{\sqrt{1-2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= 2R^2 \arcsin(\sqrt{2} \sin \varphi) \Big|_0^{\pi/4} = \pi R^2. \end{aligned}$$

Итак, площадь данной части конуса равна $2\pi R^2$.

Замечание. Выбор в качестве параметров переменных x и y потребовал некоторых усилий для нахождения множества D их изменения. Обратим внимание: условие $2x^2 - z^2 \leq R^2$, выделяющее рассматриваемую часть поверхности конуса, связывает только переменные x и z . Это подсказывает, что именно переменные x и z удобнее выбрать в качестве параметров. Используя, как и выше, симметрию поверхностей, получаем, что $|S_1|$ — площадь поверхности $S_1 = \{(x, \sqrt{x^2 - z^2}, z) : 2x^2 - z^2 \leq R^2, x \geq z \geq 0\}$ — составляет $1/8$ часть всей искомой площади (см. рис.).



Для $y = \sqrt{x^2 - z^2}$ имеем

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - z^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{-z}{\sqrt{x^2 - z^2}}, \quad \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - z^2}},$$

$$|S| = 8 \iint_{D_1} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - z^2}} dx dz = 8 \int_0^R dz \int_z^{\sqrt{\frac{R^2+z^2}{2}}} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 - z^2}} dx =$$

$$= 8\sqrt{2} \int_0^R \sqrt{x^2 - z^2} \Big|_z^{\sqrt{\frac{R^2+z^2}{2}}} dz = 8 \int_0^R \sqrt{R^2 - z^2} dz = 2\pi R^2. \quad \square$$

Общего правила для перехода от неявного задания поверхности S уравнением вида $F(x, y, z) = 0$ и некоторыми неравенствами на координаты x, y, z к параметрическому заданию $S = \{r(u, v) : (u, v) \in D\}$, вообще говоря, не существует. При таком переходе необходимо учитывать простоту как выражения для отображения $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, так и описания множества D . В рассмотренных примерах неявные уравнения части сферы и конуса приводились к параметрическому представлению просто разрешением этих уравнений относительно выбранной переменной x, y или z . Как было показано в примере, выбор этой переменной определяется удобством представления множества D значений параметров.

Рассмотрим ещё два класса часто встречающихся поверхностей.

а) *Поверхность вращения.* Пусть задана кривая $\Gamma = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), T_0 \leq t \leq T_1\}$ в плоскости xOy , не имеющая самопересечений и лежащая по одну сторону от оси Ox . Поверхность S , полученная вращением этой кривой вокруг оси Ox , чаще всего параметризуется следующим образом:

$$S = \{(x(t), y(t) \cos \varphi, y(t) \sin \varphi) : t \in [T_0, T_1], \varphi \in [0; 2\pi]\}.$$

Параметры t и φ в этом представлении имеют простой геометрический смысл. Значение t_0 определяет положение плоскости, перпендикулярной оси вращения, в которой лежит точка $s_0(t_0, \varphi_0) \in S$, находящаяся на окружности, описанной при вращении точкой $(x(t_0), y(t_0)) \in \Gamma$; значение φ_0 есть угол, на который надо повернуть вокруг оси вращения точку $(x(t_0), y(t_0))$, чтобы получить точку $s_0(t_0, \varphi_0)$.

Для такой параметризации поверхности S имеем: $E = (x'(t))^2 + (y'(t))^2$, $G = y^2(t)$, $F = 0$, следовательно,

$$\sqrt{EG - F^2} dt d\varphi = |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt d\varphi = |y| d\varphi ds,$$

где ds есть дифференциал дуги кривой Γ . Тогда площадь поверхности вращения S равна

$$|S| = \iint_D |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{T_0}^{T_1} |y| ds = 2\pi \int_{T_0}^{T_1} |y| ds,$$

где $\bar{D} = [T_0; T_1] \times [0; 2\pi]$ — множество значений параметров. Последняя формула другим путём была получена при рассмотрении однократного интеграла.

Пример 15.31. Поверхность S получена вращением части трактрисы

$$x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t, \quad x \geq 0, \quad \frac{a}{2} \leq y \leq a, \quad a > 0,$$

относительно оси Ox . Найдём площадь её части S_1 , заданной условием $y \geq \frac{a}{2}$.

РЕШЕНИЕ. Параметризуем поверхность вращения S , как указано выше:

$$S = \left\{ \left(a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), a \sin t \cos \varphi, a \sin t \sin \varphi \right) : \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

Для кривой $x(t) = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right)$, $y(t) = a \sin t$ имеем:

$$x'(t) = \frac{a}{\sin t} - a \sin t = \frac{a \cos^2 t}{\sin t}, \quad y'(t) = a \cos t,$$

$$ds = a \frac{-\cos t}{\sin t} dt, \quad |y(t)| ds = -a^2 \cos t dt.$$

Из условия $y \geq \frac{a}{2}$ получаем, что для S_1 параметры t и φ должны удовлетворять неравенству $\sin t \cos \varphi \geq \frac{1}{2}$. Поскольку $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$, получаем

$$0 \leq \varphi \leq \arccos \frac{1}{2 \sin t}, \quad 2\pi - \arccos \frac{1}{2 \sin t} \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Итак,

$$\begin{aligned} |S_1| &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} dt \int_{-\arccos \frac{1}{2 \sin t}}^{\arccos \frac{1}{2 \sin t}} (-a^2 \cos t) d\varphi = -2a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \arccos \frac{1}{2 \sin t} \cos t dt = \\ &= a^2 \int_1^2 \arccos \frac{1}{z} dz = a^2 \left(z \arccos \frac{1}{z} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} \right) = \left(\frac{2\pi}{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \right) a^2. \quad \square \end{aligned}$$

б) *Цилиндрическая поверхность*. Пусть в плоскости xOy задана кривая $\Gamma = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in [T_0; T_1]\}$. *Цилиндрическая поверхность* (или, коротко, цилиндр) S , образованная прямыми, параллельными оси Oz и проходящими через точки кривой Γ , обычно параметризуется так:

$$S = \{(x(t), y(t), h) : t \in [T_0; T_1], h \in \mathbb{R}\}.$$

Геометрически значение t_0 определяет ту образующую цилиндра, на которой лежит рассматриваемая точка $s_0(t_0, h_0) \in S$, а h_0 — отклонение точки s_0 от начальной (нулевой) плоскости xOy . Для такой параметризации цилиндра S имеем: $E = (x')^2 + (y')^2$, $G = 1$, $F = 0$. Следовательно,

$$\sqrt{EG - F^2} dt dh = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt dh.$$

Таким образом, площадь части цилиндра S , определённой условием $(t, h) \in D$, вычисляется по формуле

$$|S| = \iint_D \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt dh = \iint_D ds dh,$$

поскольку дифференциал ds дуги кривой Γ равен $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$.

Пример 15.32. Найдём площадь части цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, если $x^2 + y^2 - z^2 + a^2 \geq 0$ ($a > 0$).

Решение. Для параметризации кривой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ в плоскости xOy запишем её уравнение в полярных координатах: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, откуда получаем

$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi, \quad y = a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi, \quad ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi = \frac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Итак, данный цилиндр параметризуется следующим образом:

$$\{(a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi, a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi, h) : -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}, h \in \mathbb{R}\},$$

и при этой параметризации $\sqrt{EG - F^2} d\varphi dh = \frac{a d\varphi dh}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$.

Используя симметрию поверхностей, видим, что $|S_1|$ — площадь части данной поверхности, лежащей в первом октанте $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, составляет $1/8$ часть всей искомой площади. Множество значений параметров φ и h для S_1 определяется условиями $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 - z^2 + a^2 \geq 0$, откуда получаем, что $0 \leq \varphi \leq \pi/4, 0 \leq h \leq a\sqrt{1 + \cos 2\varphi}$. Итак,

$$S_1 = \{(a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi, a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi, h) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq h \leq a\sqrt{1 + \cos 2\varphi}\},$$

$$|S| = 8|S_1| = 8 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{1 + \cos 2\varphi}} \frac{a dh}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 8a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 8a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{d(\sqrt{2} \sin \varphi)}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \varphi}} = 8a^2 \arcsin(\sqrt{2} \sin \varphi) \Big|_0^{\pi/4} = 4\pi a^2. \quad \square$$

15.2.5. Механические приложения двойного интеграла

Интегралы

$$I_l^{(k)} = \iint_D \rho(x, y) r^k dx dy, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\rho(x, y)$ — плотность распределения массы фигуры (ρ непрерывна и неотрицательна в D) и $r(x, y)$ — расстояние от точки $M(x, y) \in D$ до прямой l , называются *моментами порядка k фигуры D относительно прямой l* .

Масса M фигуры (пластинки) D с плотностью ρ — момент нулевого порядка — вычисляется по формуле

$$M = I^{(0)} = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

Моменты первого порядка называются *статическими моментами*, моменты второго порядка — *моментами инерции*. Координаты центра масс фигуры D с плотностью $\rho(x, y)$ вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{I_{Oy}^{(1)}}{I^{(0)}} = \frac{1}{M} \iint_D x \rho(x, y) dx dy, \quad y_0 = \frac{I_{Ox}^{(1)}}{I^{(0)}} = \frac{1}{M} \iint_D y \rho(x, y) dx dy.$$

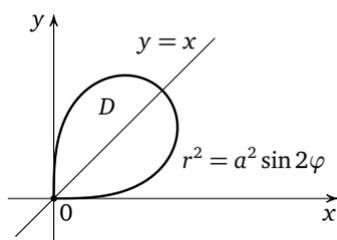
Моменты инерции $I_{Ox}^{(2)}$ и $I_{Oy}^{(2)}$ фигуры D с плотностью $\rho(x, y)$ относительно осей Ox и Oy соответственно находятся по формулам

$$I_{Ox}^{(2)} = \iint_D \rho(x, y) y^2 dx dy \quad \text{и} \quad I_{Oy}^{(2)} = \iint_D \rho(x, y) x^2 dx dy.$$

Иногда в приложениях рассматривается момент инерции относительно начала координат $I_0 = \iint_D \rho(x, y) (x^2 + y^2) dx dy$.

Пример 15.33. Найдём моменты инерции относительно осей координат однородной пластинки плотности ρ , представляющей собой фигуру, определяемую неравенствами $(x^2 + y^2)^2 \leq 2axy$, $x \geq 0$ ($a > 0$).

Решение. Уравнение кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2axy$ (см. рис.), расположенной в первом квадранте, в полярной системе координат, совмещённой с декартовой системой, есть $r = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. В силу симметрии пластинки относительно биссектрисы первого координатного угла имеем:



$$\begin{aligned} I_{Ox}^{(2)} = I_{Oy}^{(2)} &= \rho \iint_D x^2 dx dy = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r^3 \cos^2 \varphi dr = \\ &= \frac{\rho a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \rho a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{\rho}{2} a^4 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{\pi}{32} \rho a^4. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 15.34. Найдём массу и координаты центра масс однородной пластинки плотности ρ , представляющей собой фигуру, определяемую неравенствами $x^2 + y^2 \leq 6y$, $x - y \geq 0$, $x - 2y \leq 0$ (см. рис.).

РЕШЕНИЕ. Перейдём к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тогда, поскольку

$$\angle BOC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}, \quad \angle AOC = \frac{\pi}{4},$$

имеем:

$$\begin{aligned} M &= \rho \iint_D dx dy = \rho \int_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{6 \sin \varphi} r dr = 18\rho \int_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/4} \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= 18\rho \left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/4} = 18\rho \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = 9\rho \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \frac{1}{10} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \rho \iint_D x dx dy = \frac{\rho}{M} \int_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{6 \sin \varphi} r^2 \cos \varphi dr = \\ &= \frac{6^3 \rho}{3M} \int_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/4} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{6^3 \rho}{12M} \sin^4 \varphi \Big|_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/4} = \frac{21}{50} \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \frac{1}{10}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{M} \rho \iint_D y dx dy = \frac{\rho}{M} \int_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{6 \sin \varphi} r^2 \sin \varphi dr = \\ &= \frac{6^3 \rho}{3M} \int_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/4} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{3 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \frac{1}{25}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \frac{1}{10}}. \end{aligned} \quad \square$$

Иногда при решении задач полезно использовать следующие два утверждения — теоремы Гульдина (Гульдина — Паппа).

1. Площадь поверхности, полученной от вращения кривой относительно не пересекающей её оси, равна длине дуги этой кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром масс кривой.

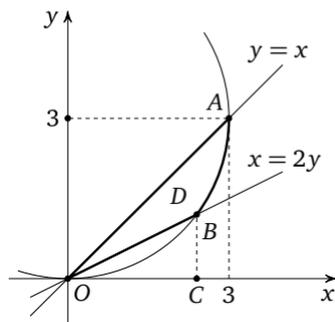
2. Объём тела вращения плоской фигуры относительно не пересекающей её оси равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром масс фигуры.

Пример 15.35. Найдём координаты (α, β) и (ξ, η) центров масс однородной арки циклоиды $L = \{(x, y) : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ($a > 0$) и фигуры, ограниченной ею и осью абсцисс.

РЕШЕНИЕ. Площадь поверхности S , полученной при вращении кривой вокруг оси Ox , есть

DeVU/Wnu8vg9d4=

$$|S| = 2\pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t) \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} 4 \sin^3 \frac{t}{2} dt = \frac{64}{3} \pi a^2.$$



Площадь фигуры S_1 , ограниченной кривой L и осью Ox , есть

$$|S_1| = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2.$$

Длина кривой L есть $|L| = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a$. Объём тела V , полученного при вращении фигуры S_1 относительно оси Ox , есть $|V| = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3$.

Применяя первую теорему Гульдина для нахождения координаты β центра масс дуги, имеем

$$|S| = 2\pi\beta 8a, \quad \text{откуда} \quad \beta = \frac{64\pi a^2/3}{16\pi a} = \frac{4}{3}a.$$

В силу симметрии и однородности циклоиды имеем $\alpha = \pi a$. Следовательно, центр масс кривой L находится в точке $(\pi a, \frac{4}{3}a)$.

Применяя вторую теорему Гульдина для координаты η центра масс фигуры S_1 получаем

$$|V| = 3\pi a^2 2\pi\eta, \quad \text{откуда} \quad \eta = \frac{5\pi^2 a^3}{6\pi^2 a^2} = \frac{5}{6}a.$$

В силу симметрии и однородности площадки имеем $\xi = \pi a$. Итак, центр масс фигуры S_1 находится в точке $(\pi a, \frac{5}{6}a)$.

В тех случаях, когда заранее известно положение центра масс, теоремы Гульдина можно использовать для нахождения площади поверхности вращения и объёма тела вращения.

Пример 15.36. Найдём площадь поверхности и объём тора, т. е. тела, ограниченного поверхностью

$$x = (a + b \cos v) \cos u, \quad y = (a + b \cos v) \sin u, \quad z = b \sin v \quad (a > b > 0).$$

Решение. Это тело получено вращением относительно оси Oz круга с центром в точке $(a, 0, 0)$ и радиусом b . Центр масс окружности лежит в её центре, т. е. в точке $(a, 0, 0)$, длина окружности равна $2\pi b$. Следовательно, по первой теореме Гульдина площадь поверхности тора есть $|S| = 4\pi^2 ab$. Центр масс круга лежит также в его центре, т. е. в точке $(a, 0, 0)$, и при вращении описывает окружность длиной $2\pi a$, площадь круга равна πb^2 . Следовательно, по второй теореме Гульдина объём тора равен $2\pi^2 ab^2$. \square

§ 15.3. Тройной интеграл

15.3.1. Сведение тройного интеграла к повторному

При рассмотрении интегрального исчисления функций $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ проблемы, аналогичные тем, которые были подробно проанализированы в предыдущем параграфе для функций $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, разбираются более бегло, чтобы заострить внимание на особенностях именно тройного интеграла. Функцию

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, где $D \subset \mathbb{R}^3$, будем обозначать $f(x, y, z)$ и по большей части не будем специально оговаривать, что рассматриваемое множество D лежит в \mathbb{R}^3 .

Фактически анализ тройного интеграла мало чем отличается от анализа n -кратного интеграла для любого $n > 3$, так как наглядные геометрические представления в основном уступают место аналитическим соотношениям.

Непосредственно из определения тройного интеграла вытекает, что если $f \in R(D)$ и множество D симметрично относительно плоскости xOy , то из равенства $f(x, y, z) = f(x, y, -z)$ следует, что

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = 2 \iiint_{D_1} f(x, y, z) dx dy dz,$$

$D_1 = D \cap \{(x, y, z) : z \geq 0\}$, а из равенства $f(x, y, z) = -f(x, y, -z)$ следует, что

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = 0.$$

Аналогичная ситуация имеет место для множества D , симметричного относительно плоскости xOz или плоскости yOz .

Вычисление тройного интеграла обычно производится с помощью теоремы о сведении кратного интеграла к повторному. Пространство \mathbb{R}^3 представляется в виде декартова произведения двух пространств меньшей размерности двумя способами: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$. Подробно рассмотрим представления $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times \mathbb{R}_z^1$ и $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_z^1 \times \mathbb{R}_{x,y}^2$, поскольку остальные варианты получаются из этих двух перестановкой координат. Сформулируем теорему о сведении кратного интеграла к повторному для рассматриваемых представлений в простейших условиях на множество интегрирования и интегрируемую функцию. За редким исключением именно эти условия, дополненные свойством аддитивности, применяются для вычислений.

Основная теорема (для $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times \mathbb{R}_z^1$). Пусть $D_0 \subset \mathbb{R}_{x,y}^2$ — замкнутое жорданово множество, $\varphi_1 \in C(D_0)$, $\varphi_2 \in C(D_0)$, $\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$, $(x, y) \in D_0$,

$$D = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_0, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}, f \in C(D).$$

$$\text{Тогда } \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_0} dx dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Отметим, что при данных условиях множество D жорданово (см. свойство 4 на с. 6), интеграл $\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz$ — непрерывная функция на D_0 , поэтому все интегралы, входящие в равенство, имеют смысл.

Следствие. Если в условиях теоремы функция f зависит только от переменных x и y : $f(x, y, z) = f^*(x, y)$, то

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_0} f^*(x, y)(\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)) dx dy.$$

Пример 15.37. Тело D ограничено плоскостями $x=0$, $y=0$, $x+y+z=a$, $x+y-z=a$ ($a>0$). Вычислим тройной интеграл

$$\iiint_D \frac{x+y}{a^2+z^2} dx dy dz,$$

пользуясь его представлением в виде

$$\iint_{D_0} dx dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{x+y}{a^2+z^2} dz.$$

Решение. Пользуясь чётностью подынтегральной функции по переменной z и симметрией множества D относительно плоскости xOy , заключаем, что искомый интеграл равен

$$2 \iiint_{D_1} \frac{x+y}{a^2+z^2} dx dy dz,$$

где $D_1 = D \cap \{(x, y, z) : z \geq 0\}$. Найдём систему неравенств, которой удовлетворяют координаты точек $M(x, y, z) \in D_1$. Плоскости $x+y+z=a$ и $z=0$ пересекаются по прямой $x+y=a$, $z=0$, следовательно, для точек $M(x, y, z) \in D_1$ справедливы или неравенства $x+y \geq a$ и $0 \leq z \leq x+y-a$, или неравенства $x+y \leq a$ и $0 \leq z \leq a-(x+y)$. Неравенства $x+y \geq a$ и $0 \leq z \leq x+y-a$ при любом условии на знак координат x и y определяют неограниченную область, следовательно, для характеристики координат $M(x, y, z) \in D_1$ следует взять неравенства $x+y \leq a$ и $0 \leq z \leq a-(x+y)$. Если при этом хотя бы одна из координат x или y отрицательна, то опять получаем неограниченную область. Таким образом,

$$D_1 = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_0, 0 \leq z \leq a-(x+y)\},$$

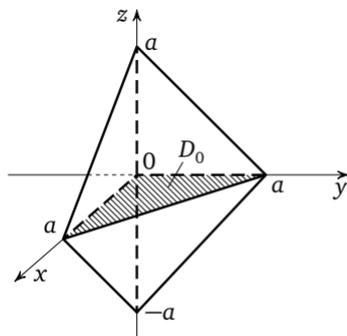
где $D_0 = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq a\}$ (см. рис.).

Применяя основную теорему для $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times \mathbb{R}_z^1$, получаем:

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{x+y}{a^2+z^2} dx dy dz &= 2 \iint_{D_0} dx dy \int_0^{a-(x+y)} \frac{x+y}{a^2+z^2} dz = \\ &= 2 \iint_{D_0} \frac{x+y}{a} \left(\operatorname{arctg} \frac{z}{a} \right) \Big|_0^{a-(x+y)} dx dy = \frac{2}{a} \iint_{D_0} (x+y) \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{x+y}{a} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Сведём теперь двойной интеграл к повторному:

$$\frac{2}{a} \iint_{D_0} (x+y) \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{x+y}{a} \right) dx dy = \frac{2}{a} \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x+y) \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{x+y}{a} \right) dy.$$



Таким образом, остаётся вычислить интегралы:

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{a-x} (x+y) \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{x+y}{a}\right) dy &= \int_x^a 2t \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{t}{a}\right) dt = t^2 \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{t}{a}\right) \Big|_x^a + \\
 &+ \int_x^a \frac{at^2}{a^2 + (a-t)^2} dt = -x^2 \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{x}{a}\right) + a(a-x) - a^2 \ln\left(1 + \left(\frac{a-x}{a}\right)^2\right), \\
 \int_0^a \left((a-x) - \frac{x^2}{a} \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{x}{a}\right) - a \ln\left(1 + \left(\frac{a-x}{a}\right)^2\right) \right) dx &= \left\{ \frac{a-x}{a} = t, dx = -a dt \right\} = \\
 &= a \int_0^1 (at - a(1-t)^2 \operatorname{arctg} t - a \ln(1+t^2)) dt = \\
 &= a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{(1-t)^3}{3} \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{1+t^2} dt - t \ln(1+t^2) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt \right) = \\
 &= a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \int_0^1 (t+3) dt - \ln 2 + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt - \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \right) = \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{\pi}{3} \right) a^2. \quad \square
 \end{aligned}$$

Основная теорема (для $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_z^1 \times \mathbb{R}_{x,y}^2$). Пусть D — тело в \mathbb{R}^3 и $f \in C(D)$. Тогда

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_p^q dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy,$$

где отрезок $[p; q]$ есть ортогональная проекция D на ось Oz ; $D_{z_0} = \{(x, y, z) : (x, y, z) \in D, z = z_0\}$ есть пересечение D с плоскостью $z = z_0$ (сечение D горизонтальной плоскостью $z = z_0$).

Отметим, что при данных условиях множества $D_z, z \in [p; q]$, ограничены кусочно-гладкими замкнутыми кривыми без самопересечений (связность D_z необязательна), следовательно, являются жордановыми множествами, так же как и множество D (см. свойство 6 на с. 6); интеграл $\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$ представляет интегрируемую (необязательно непрерывную) функцию на $[p; q]$, следовательно, все интегралы, входящие в равенство, имеют смысл.

Следствие 1. Если в условиях теоремы функция f зависит только от переменной z : $f(x, y, z) = f^*(z)$, то справедливо равенство

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_p^q f^*(z) |D_z| dz.$$

Таким образом, если подынтегральная функция зависит только от одной переменной, то тройной интеграл по телу сводится к однократному.

Следствие 2. Пусть функция $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ на бруске $\Pi = [a; b] \times [c; d] \times [p; q]$ имеет вид

$$f(x, y, z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z),$$

где $f_1 \in C[a; b]$, $f_2 \in C[c; d]$ и $f_3 \in C[p; q]$. Тогда

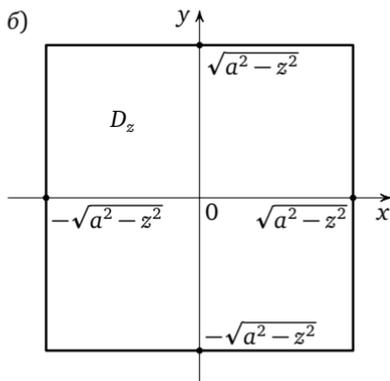
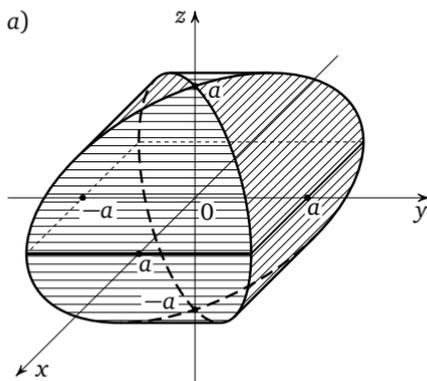
$$\iiint_{\Pi} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy \cdot \int_p^q f_3(z) dz.$$

Пример 15.38. Тело D ограничено цилиндрами $x^2 + z^2 = a^2$ и $y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$). Вычислим тройной интеграл $\iiint_D \frac{dx dy dz}{2a+z}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x, y, z) = \frac{1}{2a+z}$ зависит только от переменной z . Представим данный интеграл в виде $\int_p^q dz \iint_{D_z} \frac{1}{2a+z} dx dy$. Тело D лежит внутри обоих цилиндров, значит, координаты точек $M(x, y, z) \in D$ удовлетворяют неравенствам $x^2 + z^2 \leq a^2$, $y^2 + z^2 \leq a^2$ (рис. а). Отсюда получаем, что ортогональной проекцией D на ось Oz является отрезок $[-a; a]$ и

$$D = \{(x, y, z) : -a \leq z \leq a, (x, y) \in D_z\},$$

где $D_z = \{(x, y, u) : u = z, |x| \leq \sqrt{a^2 - z^2}, |y| \leq \sqrt{a^2 - z^2}\}$ (см. рис. б).



Следовательно, $\iiint_D \frac{dx dy dz}{2a+z} = \int_{-a}^a \frac{dz}{2a+z} \iint_{D_z} dx dy$. Величина $\iint_{D_z} dx dy$ есть площадь квадрата D_z , поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{dz}{2a+z} \iint_{D_z} dx dy &= 4 \int_{-a}^a \frac{a^2 - z^2}{2a+z} dz = \\ &= 4 \int_{-a}^a (2a - z) dz - 12a^2 \int_{-a}^a \frac{dz}{2a+z} = 4(4 - 3 \ln 3)a^2. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 15.39. Тройной интеграл $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$, где D — тело, ограниченное поверхностями $a(x^2 + y^2) = xz(a - z)$, $xz = ay$, $yz = ax$ ($a > 0$) и содержащее точку $M_0\left(\frac{a}{8}, \frac{a}{12}, \frac{a}{2}\right)$, а $f \in C(D)$, представим в виде повторного:

$$\int_p^q dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy.$$

РЕШЕНИЕ. Координаты $x_0 = \frac{a}{8}$, $y_0 = \frac{a}{12}$, $z_0 = \frac{a}{2}$ точки M_0 удовлетворяют неравенствам $a(x_0^2 + y_0^2) < x_0 y_0 (a - z_0)$, $x_0 z_0 < ay_0$, $y_0 z_0 < ax_0$. Поэтому для координат x, y, z любой внутренней точки тела D должны выполняться неравенства: $a(x^2 + y^2) < xz(a - z)$, $xz < ay$, $yz < ax$. Левая часть первого неравенства неотрицательна, значит, или $0 < z < a$ и $x > 0$, или $z \in (-\infty; 0) \cup (a; +\infty)$ и $x < 0$. Условия $x < 0$, $z < 0$, $xz < ay$, $yz < ax$ и $x < 0$, $z > a$, $xz < ay$, $yz < ax$ задают неограниченные области. Следовательно,

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq a, x \geq 0, a(x^2 + y^2) \leq xz(a - z), xz \leq ay, yz \leq ax\}.$$

Отсюда видно, что ортогональной проекцией D на ось Oz является отрезок $0 \leq z \leq a$. Фиксируем $z_0 \in (0; a)$, тогда пересечением тела D с горизонтальной плоскостью $z = z_0$ является (см. рис.) плоская фигура

$$D_{z_0} = \{(x, y, z) : z = z_0, a(x^2 + y^2) \leq xz_0(a - z_0), xz_0 \leq ay, yz_0 \leq ax\},$$

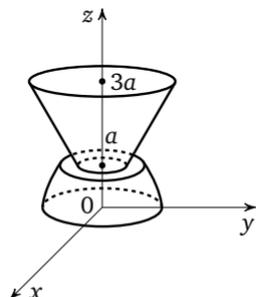
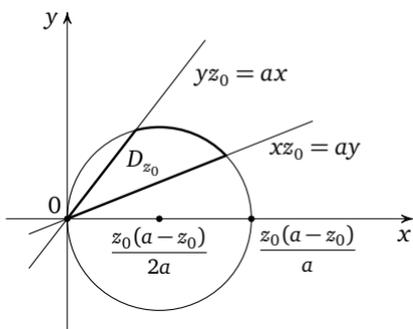
т. е. часть круга с центром в точке $\left(\frac{z_0(a - z_0)}{2a}, 0, z_0\right)$ и радиусом $\frac{z_0(a - z_0)}{2a}$, лежащая в плоскости $z = z_0$ между прямыми $xz_0 = ay$ и $yz_0 = ax$. Итак,

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^a dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy. \quad \square$$

Пример 15.40. Вычислим тройной интеграл

$$\iiint_D z dx dy dz,$$

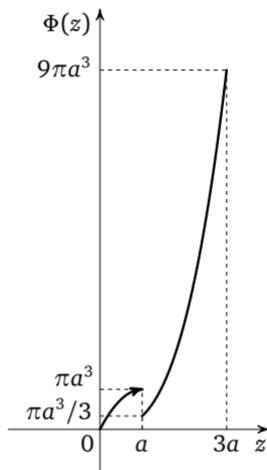
где D — тело, ограниченное плоскостями $z = 0$, $z = a$, $z = 3a$ ($a > 0$), частью параболоида $az + x^2 + y^2 = 2a^2$, лежащей между плоскостями $z = 0$ и $z = a$, и частью конуса $z^2 = 3(x^2 + y^2)$, лежащей между плоскостями $z = a$ и $z = 3a$ (см. рис.).



РЕШЕНИЕ. Из условия вытекает, что ортогональной проекцией множества D на ось Oz является отрезок $[0; 3a]$, а горизонтальная плоскость $z = z_0$ пересекает D по кругу, радиус которого равен $\sqrt{2a^2 - az}$ при $0 \leq z < a$ и $z/\sqrt{3}$ при $a \leq z \leq 3a$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \iint_D z \, dx \, dy = z \iint_D dx \, dy = \\ &= \begin{cases} \pi z(2a^2 - az), & 0 \leq z < a, \\ \pi z^3/3, & a \leq z \leq 3a. \end{cases} \end{aligned}$$

Функция $\Phi(z)$ разрывна в точке $z = a$, но интегрируема на $[0; 3a]$ (см. рис.). Окончательно,



$$\begin{aligned} \iiint_D z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{3a} \Phi(z) \, dz = \\ &= \int_0^a (2\pi a^2 z - \pi a z^2) \, dz + \int_a^{3a} \frac{\pi z^3}{3} \, dz = \pi a^4 - \frac{\pi a^4}{3} + \frac{27\pi a^4}{4} - \frac{\pi a^4}{12} = \frac{22}{3} \pi a^4. \quad \square \end{aligned}$$

Запишем двойной интеграл в представлении тройного интеграла как повторный. Тогда в тройном интеграле

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{D_0} dx \, dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz = \int_p^q dz \iint_{D_z} f(x, y, z) \, dx \, dy$$

можно расставить пределы интегрирования четырьмя способами:

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz = \\ &= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz = \int_p^q dz \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z) \, dy = \\ &= \int_p^q dz \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z) \, dx, \end{aligned}$$

где $x_i, y_i, \varphi_i, i = 1, 2$, — некоторые функции соответствующих аргументов.

Используя представления $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_{y,z}^2 \times \mathbb{R}_x^1$ и $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_{x,z}^2 \times \mathbb{R}_y^1$, можно расставить пределы интегрирования ещё двумя способами:

$$\int_c^d dy \int_{z_1(y)}^{z_2(y)} dz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z) \, dx, \quad \int_a^b dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} dz \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z) \, dy,$$

где $z_i, x_i, y_i, i = 1, 2$, — некоторые функции соответствующих аргументов.

Каждому такому представлению тройного интеграла

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

соответствует определённая форма записи условий на координаты точек $M(x, y, z) \in D$:

$$D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\};$$

$$D = \{(x, y, z) : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y), \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\};$$

$$D = \{(x, y, z) : p \leq z \leq q, x_1(z) \leq x \leq x_2(z), y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\};$$

$$D = \{(x, y, z) : p \leq z \leq q, y_1(z) \leq y \leq y_2(z), x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)\};$$

$$D = \{(x, y, z) : c \leq y \leq d, z_1(y) \leq z \leq z_2(y), x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)\};$$

$$D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, z_1(x) \leq z \leq z_2(x), y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\},$$

и, наоборот, запись тройного интеграла в виде трёх последовательных однократных определяет соответствующие неравенства на координаты точек множества, по которому берётся интеграл.

Представление тройного интеграла в виде указанных повторных интервалов будем называть *расстановкой пределов в тройном интеграле*. При этом, как и в двумерном случае, подразумевается, что функции, определяющие пределы интегрирования однократных интегралов, гладкие.

Каждый повторный интеграл, представляющий данный тройной интеграл, может быть получен двумя путями. Рассмотрим, например, такой повторный интеграл

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Он получается из повторного интеграла

$$\iint_{D_0} dx dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz = \iint_{D_0} \Phi(x, y) dx dy$$

при представлении двойного интеграла $\iint_{D_0} \Phi(x, y) dx dy$ в виде $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \Phi(x, y) dy$ и из повторного интеграла $\int_a^b dx \iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz$ при представлении двойного интеграла $\iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz$ в виде $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz$.

Эта двойственность позволяет свести решение задачи перестановки порядка интегрирования в тройном интеграле к перестановке порядка интегрирования в двойном интеграле. Преимущество такого метода в том, что решение задачи перестановки пределов интегрирования в двойном интеграле

существенно облегчается наглядным геометрическим представлением соответствующего множества на плоскости, а геометрическое изображение пространственной области на плоскости страницы или доски из-за неизбежных искажений часто не облегчает, а затрудняет переход к нужным неравенствам на координаты точек рассматриваемого множества.

Пример 15.41. Расставим пределы интегрирования во всех возможных порядках в интеграле $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$, где $f \in C(D)$, а D — множество, ограниченное поверхностями $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=\sqrt{ax}$, $z=0$, $z=x+y$.

РЕШЕНИЕ. Данные поверхности являются границами ограниченного множества $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{ax}, 0 \leq z \leq x+y\}$. Из этого представления получаем

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax}} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz. \quad (a)$$

Запишем: $D = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_0, 0 \leq z \leq x+y\}$, где $D_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{ax}\}$ и $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, (y, z) \in D_x\}$, где $D_x = \{(y, z) : 0 \leq y \leq \sqrt{ax}, 0 \leq z \leq x+y\}$. Эти представления фигуры D дают нам соответствующие представления тройного интеграла в виде повторных:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_0} dx dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz = \iint_{D_0} \Phi(x, y) dx dy,$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^a dx \iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz.$$

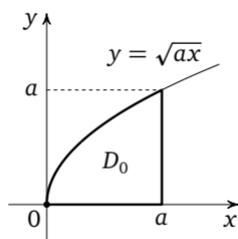
Чтобы изменить порядок интегрирования в интеграле $\iint_{D_0} \Phi(x, y) dx dy$, изобразим множество D_0 (см. рис.) и увидим, что

$$D_0 = \{(x, y) : 0 \leq y \leq a, \frac{y^2}{a} \leq x \leq a\}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{D_0} dx dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz = \\ &= \int_0^a dy \int_{y^2/a}^a dx \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz = \int_0^a dy \iint_{D_y} f(x, y, z) dx dz, \quad (б) \end{aligned}$$

где $D_y = \{(x, z) : \frac{y^2}{a} \leq x \leq a, 0 \leq z \leq x+y\}$.



Изобразив множество D_y (см. рис.), получим, что

$$D_y = \left\{ (x, z) : 0 \leq z \leq y + \frac{y^2}{a}, \frac{y^2}{a} \leq x \leq a \right\} \cup \\ \cup \left\{ (x, z) : y + \frac{y^2}{a} \leq z \leq y + a, z - y \leq x \leq a \right\}$$

и, следовательно,

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \\ = \int_0^a dy \int_0^{y+(y^2/a)} dz \int_{y^2/a}^a f(x, y, z) dx + \int_0^a dy \int_{y+(y^2/a)}^{y+a} dz \int_{z-y}^a f(x, y, z) dx = \\ = \iint_{D_0} dy dz \int_{y^2/a}^a f(x, y, z) dx + \iint_{D_0^*} dy dz \int_{z-y}^a f(x, y, z) dx, \quad (B)$$

где

$$D_0 = \left\{ (y, z) : 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq y + \frac{y^2}{a} \right\}, \\ D_0^* = \left\{ (y, z) : 0 \leq y \leq a, y + \frac{y^2}{a} \leq z \leq y + a \right\}.$$

Изобразим множество D_0 (см. рис.) и увидим, что

$$D_0 = \left\{ (y, z) : 0 \leq z \leq 2a, y(z) \leq y \leq a \right\},$$

где

$$y(z) = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4az} - a)$$

— решение уравнения $y^2 + ay - az = 0$, удовлетворяющее условию $y(z) \geq 0$. Следовательно,

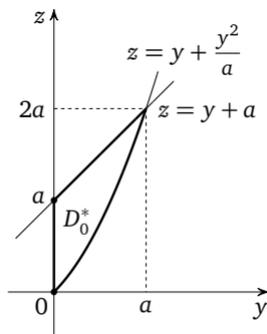
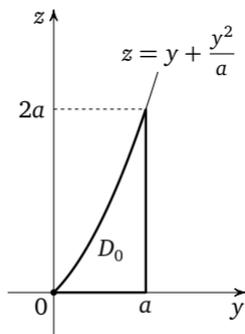
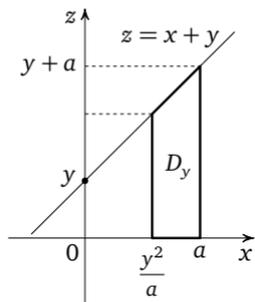
$$\iint_{D_0} dy dz \int_{y^2/a}^a f(x, y, z) dx = \int_0^{2a} dz \int_{y(z)}^a dy \int_{y^2/a}^a f(x, y, z) dx.$$

Изобразим множество D_0^* (см. рис.) и увидим, что

$$D_0^* = \left\{ (y, z) : 0 \leq z \leq a, 0 \leq y \leq y(z) \right\} \cup \\ \cup \left\{ (y, z) : a \leq z \leq 2a, z - a \leq y \leq y(z) \right\}$$

ПОЭТОМУ

$$\iint_{D_0^*} dy dz \int_{z-y}^a f(x, y, z) dx = \\ = \int_0^a dz \int_0^{y(z)} dy \int_{z-y}^a f(x, y, z) dx + \int_a^{2a} dz \int_{z-a}^{y(z)} dy \int_{z-y}^a f(x, y, z) dx.$$



Объединяя полученные равенства, можем записать:

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{D_0} dy dz \int_{y^2/a}^a f(x, y, z) dx + \\ &+ \iint_{D_0^*} dy dz \int_{z-y}^a f(x, y, z) dx = \int_0^{2a} dz \int_{y(z)}^a dy \int_{y^2/a}^a f(x, y, z) dx + \\ &+ \int_0^a dz \int_0^{y(z)} dy \int_{z-y}^a f(x, y, z) dx + \int_a^{2a} dz \int_{z-a}^{y(z)} dy \int_{z-y}^a f(x, y, z) dx. \end{aligned} \quad (г)$$

Возьмём теперь равенство

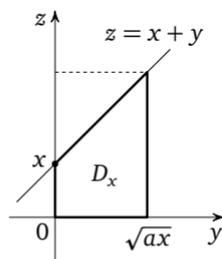
$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^a dx \iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz,$$

где

$$D_x = \{(y, z) : 0 \leq y \leq \sqrt{ax}, 0 \leq z \leq x + y\},$$

и изобразим множество D_x (см. рис.). Из этого рисунка получаем:

$$\begin{aligned} D_x &= \{(y, z) : 0 \leq z \leq x, 0 \leq y \leq \sqrt{ax}\} \cup \\ &\cup \{(y, z) : x \leq z \leq x + \sqrt{ax}, z - x \leq y \leq \sqrt{ax}\} \end{aligned}$$



и, следовательно,

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \int_0^a dx \int_0^x dz \int_0^{\sqrt{ax}} f(x, y, z) dy + \int_0^a dx \int_x^{x+\sqrt{ax}} dz \int_{z-x}^{\sqrt{ax}} f(x, y, z) dy = \\ &= \iint_{D_0} dx dz \int_0^{\sqrt{ax}} f(x, y, z) dy + \iint_{D_0^*} dx dz \int_{z-x}^{\sqrt{ax}} f(x, y, z) dy, \end{aligned} \quad (д)$$

где

$$D_0 = \{(x, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq x\},$$

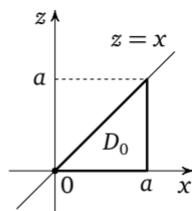
$$D_0^* = \{(x, z) : 0 \leq x \leq a, x \leq z \leq x + \sqrt{ax}\}.$$

Изобразив (см. рис.) множество

$$D_0 = \{(x, z) : 0 \leq z \leq a, z \leq x \leq a\},$$

получаем

$$\iint_{D_0} dx dz \int_0^{\sqrt{ax}} f(x, y, z) dy = \int_0^a dz \int_z^a dx \int_0^{\sqrt{ax}} f(x, y, z) dy.$$



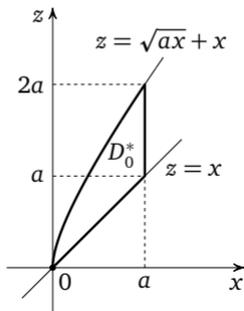
Пользуясь рисунком, на котором изображено множество D_0^* , запишем

$$D_0^* = \{(x, z) : 0 \leq z \leq a, x(z) \leq x \leq z\} \cup \\ \cup \{(x, z) : a \leq z \leq 2a, x(z) \leq x \leq a\},$$

где $x(z) = \frac{1}{2}(2z + a - \sqrt{a^2 + 4az})$ — решение уравнения $x + \sqrt{ax} = z$.

Следовательно,

$$\iint_{D_0^*} dx dz \int_{z-x}^{\sqrt{ax}} f(x, y, z) dy = \\ = \int_0^a dz \int_{x(z)}^z dx \int_{z-x}^{\sqrt{ax}} f(x, y, z) dy + \int_a^{2a} dz \int_{x(z)}^a dx \int_{z-x}^{\sqrt{ax}} f(x, y, z) dy.$$



Объединяя полученные равенства, имеем

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^a dz \int_z^a dx \int_0^{\sqrt{ax}} f(x, y, z) dy + \\ + \int_0^a dz \int_{x(z)}^z dx \int_{z-x}^{\sqrt{ax}} f(x, y, z) dy + \int_a^{2a} dz \int_{x(z)}^a dx \int_{z-x}^{\sqrt{ax}} f(x, y, z) dy. \quad (e)$$

Равенства (a)—(e) и дают все возможные варианты расстановки пределов интегрирования в рассматриваемом тройном интеграле. \square

Пример 15.42. Докажем равенство

$$\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y f(x, y, z) dz = \int_0^a dz \int_z^a dy \int_y^a f(x, y, z) dx,$$

если $f \in C(D)$, где $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq y\}$.

Решение. Задача сводится к изменению порядка интегрирования в тройном интеграле. Если проводить решение методом перестановок соседних переменных, как в предыдущем примере, то потребуется сделать три перестановки: $xuz \rightarrow uxz \rightarrow yuz \rightarrow zyx$. В данном случае, когда промежуточные перестановки нас не интересуют, а условия на переменные x, y, z достаточно просты — все неравенства линейны, — можно провести нужную перестановку аналитически, не прибегая к геометрическим соображениям. Действительно, из совокупности всех трёх неравенств следует, что минимальное возможное значение z есть 0, максимальное — a , т. е. $0 \leq z \leq a$. Из первых двух неравенств получаем, что максимальное значение y есть a , а из третьего — что при фиксированном z должно быть $z \leq y$, поэтому $z \leq y \leq a$. Наконец, из первого и второго неравенств следует, что $y \leq x \leq a$. Итак,

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq a, z \leq y \leq a, y \leq x \leq a\},$$

и, следовательно,

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y f(x, y, z) dz = \int_0^a dz \int_z^a dy \int_y^a f(x, y, z) dx. \quad \square$$

Характерные ошибки в решении задач на расстановку пределов интегрирования те же, что были подробно разобраны при рассмотрении двойного интеграла (см. с. 25–26).

15.3.2. Замена переменных. Переход к цилиндрическим, сферическим и обобщённым сферическим координатам

Так же как и в двойном интеграле, основной проблемой при замене переменных в тройном интеграле является нахождение множества значений новых переменных.

Пример 15.43. Вычислим интеграл Дирихле

$$\iiint_D x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s dx dy dz,$$

где D — тело, ограниченное плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, полагая $x + y + z = u$, $y + z = uv$, $z = uvw$.

РЕШЕНИЕ. Минимальные в D значения x , y и z равны 0, поэтому и минимальные значения u , v и w равны 0. Из соотношений $x + y + z = u$, $x + y + z \leq 1$ следует, что $u \leq 1$. Поскольку минимальное значение x равно 0, при фиксированном u максимальное значение $y + z$ равно u , отсюда и из соотношения $y + z = uv$ следует, что максимальное значение v равно 1. Минимальное значение y равно 0, поэтому максимальное значение z при фиксированных u и v равно uv , отсюда и из соотношения $z = uvw$ получаем, что максимальное значение w равно 1. Таким образом, точкам $(x, y, z) \in D$ соответствует множество точек (u, v, w) :

$$\Pi = \{(u, v, w) : 0 \leq v \leq 1, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}.$$

Выражая x, y, z через u, v, w , получаем, что отображение $\varphi : \Pi \rightarrow D$ есть $x = u(1 - v)$, $y = uv(1 - w)$, $z = uvw$. Якобиан φ равен

$$\begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2 v.$$

Биективность отображения φ нарушается на ребре $y = 0$, $z = 0$, $0 \leq x \leq 1$, пирамиды D , при этом точка $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ является образом квадрата: $u = 0$, $0 \leq v \leq 1$, $0 \leq w \leq 1$, а точка $x = x_0 > 0$, $y = 0$, $z = 0$ — образом отрезка $u = x_0$, $v = 0$, $0 \leq w \leq 1$. Применяя вторую теорему о замене переменных в кратном

интеграле, получаем:

$$\begin{aligned}
 & \iiint_D x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz = \\
 & = \iiint_{\Pi} u^p (1-v)^p u^q v^q (1-w)^q u^r v^r w^r (1-u)^s u^2 v du dv dw = \\
 & = \int_0^1 u^{p+q+r+2} (1-u)^s du \int_0^1 v^{q+r+1} (1-v)^p dv \int_0^1 w^r (1-w)^q dw = \\
 & = \int_0^1 u^{p+q+r+2} (1-u)^s du \int_0^1 B(r+1, q+1) v^{q+r+1} (1-v)^p dv = \\
 & = B(r+1, q+1) \int_0^1 u^{p+q+r+2} (1-u)^s B(q+r+2, p+1) du = \\
 & = B(r+1, q+1) B(q+r+2, p+1) B(p+q+r+3, s+1) = \\
 & = \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)\Gamma(q+r+2)\Gamma(p+1)\Gamma(p+q+r+3)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+q+2)\Gamma(q+r+p+3)\Gamma(p+q+r+s+4)} = \\
 & = \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Замечание. При вычислении интеграла

$$\iiint_{\Pi} u^{p+q+r+2} (1-u)^s v^{q+r+1} (1-v)^p w^r (1-w)^q du dv dw$$

мы пользовались тем, что множители, не зависящие от переменной интегрирования, можно выносить за знак интеграла по этой переменной.

Рассмотрим наиболее часто применяющиеся преобразования переменных в тройном интеграле.

1. Пусть границами множества D являются поверхности уровня трёх независимых функций $\varphi_i(x, y, z) = a_i$ и $\varphi_i(x, y, z) = b_i$, $i = 1, 2, 3$,

$$D = \{(x, y, z) : a_1 \leq \varphi_1(x, y, z) \leq b_1, a_2 \leq \varphi_2(x, y, z) \leq b_2, a_3 \leq \varphi_3(x, y, z) \leq b_3\}$$

и отображение $\psi : u = \varphi_1(x, y, z)$, $v = \varphi_2(x, y, z)$, $w = \varphi_3(x, y, z)$ регулярно (см. с. 9). В этом случае переход к переменным u, v, w переводит множество D в брус $\Pi = \{(u, v, w) : a_1 \leq u \leq b_1, a_2 \leq v \leq b_2, a_3 \leq w \leq b_3\}$ и

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Pi} f^*(u, v, w) |\det J_{\psi^{-1}}| du dv dw,$$

где $f^*(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$.

Пример 15.44. Вычислим тройной интеграл $\iiint_D (x+y) dx dy dz$, где

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y \leq 3x, 0 \leq z \leq 3(x+y) \leq 6z, 1 \leq 4z(x+y) \leq 4\}.$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим отображение

$$\psi: u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{x+y}{z}, \quad w = z(x+y).$$

Тогда $\Pi = \left\{ (u, v, w) : 1 \leq u \leq 3, \frac{1}{3} \leq v \leq 2, \frac{1}{4} \leq w \leq 1 \right\}$, а для якобиана обратного отображения $\psi^{-1}: x = \frac{\sqrt{vw}}{u+1}, y = \frac{u\sqrt{vw}}{u+1}, z = \sqrt{\frac{w}{v}}$ имеем

$$\det J_{\psi^{-1}} = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{vw}}{(u+1)^2} & \frac{1}{2(u+1)}\sqrt{\frac{w}{v}} & \frac{1}{2(u+1)}\sqrt{\frac{v}{w}} \\ \frac{\sqrt{vw}}{(u+1)^2} & \frac{u}{2(u+1)}\sqrt{\frac{w}{v}} & \frac{u}{2(u+1)}\sqrt{\frac{v}{w}} \\ 0 & -\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{w}{v}} & \frac{1}{2\sqrt{vw}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2(u+1)^2}\sqrt{\frac{w}{v}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iiint_D (x+y) dx dy dz &= \iiint_{\Pi} \frac{\sqrt{vw}}{2(u+1)^2} \sqrt{\frac{w}{v}} du dv dw = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{du}{(u+1)^2} \int_{1/3}^2 dv \int_{1/4}^1 w dw = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{u+1} \right) \Big|_1^3 \cdot v \Big|_{1/3}^2 \cdot \frac{w^2}{2} \Big|_{1/4}^1 = \frac{25}{256}. \quad \square \end{aligned}$$

2. Цилиндрическими координатами точки $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ называется тройка чисел r, φ, h , связанная с числами x, y, z формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h.$$

Фактически цилиндрические координаты — это полярные координаты в плоскости xOy и обычная декартова координата в ортогональном дополнении плоскости xOy — оси Oz . Переход к цилиндрическим координатам в тройном интеграле $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ — это переход к полярным координатам

в двойном интеграле $\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$, если тройной интеграл представлен

в виде $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_p^q dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$, или в двойном инте-

грале $\iint_{D_0} \Phi(x, y) dx dy$, если тройной интеграл представлен в виде

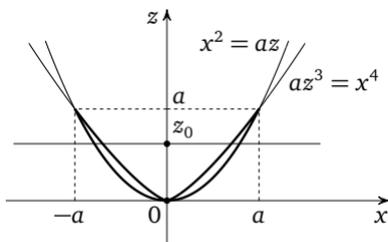
$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_0} dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \iint_{D_0} \Phi(x, y) dx dy.$$

Этот переход ничем не отличается от подробно разобранный в предыдущем параграфе перехода к полярным координатам в двумерном случае. Якобиан перехода к цилиндрическим координатам равен r . Обратим внимание только на то, что если переход делается в интеграле вида $\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$, где множество D_z зависит от z , то и пределы интегрирования по переменным φ и r , вообще говоря, могут зависеть от z .

Пример 15.45. Вычислим тройной интеграл $\iiint_D z(x^2 + y^2) dx dy dz = I$,

где тело D ограничено поверхностями $x^2 + y^2 = az$ и $(x^2 + y^2)^2 = az^3$ ($a > 0$), переходя к цилиндрическим координатам двумя рассмотренными способами.

Решение. Поскольку обе поверхности, ограничивающие тело D , являются поверхностями вращения относительно оси Oz , сделаем чертёж меридионального сечения тела D (см. рис.).



Линией пересечения заданных поверхностей является окружность $z = a$, $x^2 + y^2 = a^2$, ортогональной проекцией D на ось Oz является отрезок $[0; a]$, а на плоскость xOy — круг $x^2 + y^2 \leq a^2$. Горизонтальная плоскость $z = z_0$, $z_0 \in (0; a)$, пересекает D по круговому кольцу с центром на оси Oz , внутренним радиусом $\sqrt[4]{az_0^3}$ и внешним — $\sqrt{az_0}$. Следовательно,

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq a, az^3 \leq (x^2 + y^2)^2 \leq a^2 z^2\} \quad \text{и}$$

$$D = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, \frac{x^2 + y^2}{a} \leq z \leq \sqrt[3]{\frac{(x^2 + y^2)^2}{a}} \right\},$$

откуда получаем

$$I = \int_0^a z dz \iint_{D_z} (x^2 + y^2) dx dy, \quad \text{где } D_z = \{(x, y) : az^3 \leq (x^2 + y^2)^2 \leq a^2 z^2\},$$

$$I = \iint_{D_0} (x^2 + y^2) dx dy \int_{(x^2 + y^2)/a}^{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2/a}} z dz, \quad \text{где } D_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Переходим к цилиндрическим координатам в этих представлениях:

$$I = \int_0^a h dh \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt[4]{ah^3}}^{\sqrt{ah}} r^3 dr, \quad I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr \int_{r^2/a}^{\sqrt[3]{r^4/a}} h dh.$$

Окончательно получаем

$$I = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \int_0^a h(a^2 h^2 - ah^3) dh = \frac{\pi}{2} a^6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{\pi a^6}{40},$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^a r^3 \left(\frac{r^{8/3}}{a^{2/3}} - \frac{r^4}{a^2} \right) dr = \frac{\pi}{2} a^6 \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi a^6}{40}. \quad \square$$

Пример 15.46. Вычислим тройной интеграл $\iiint_D y \, dx \, dy \, dz$, где D — тело, ограниченное поверхностями $a(x^2 + y^2) = xz(a - z)$, $xz = ay$, $yz = ax$ ($a > 0$), и содержащее точку $M_0(a/8, a/12, a/2)$.

Решение. В примере 15.39 (см. с. 55) тройной интеграл по телу D был приведён к виду $\int_0^a dz \iint_{D_z} f(x, y, z) \, dx \, dy$, где

$$D_z = \{(x, y) : a(x^2 + y^2) \leq xz(a - z), xz \leq ay, yz \leq ax\}.$$

Переходя к цилиндрическим координатам, получаем:

$$\begin{aligned} \iiint_D y \, dx \, dy \, dz &= \int_0^a dh \int_{\arctg(h/a)}^{\arctg(a/h)} d\varphi \int_0^{\frac{1}{a}h(a-h)\cos\varphi} r^2 \sin\varphi \, dr = \\ &= \frac{1}{3a^3} \int_0^a dh \int_{\arctg(h/a)}^{\arctg(a/h)} h^3(a-h)^3 \cos^3\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{1}{12a^3} \int_0^a h^3(a-h)^3 \cos^4\varphi \Big|_{\arctg(a/h)}^{\arctg(h/a)} dh = \\ &= \frac{1}{12a^3} \int_0^a h^3(a-h)^3 \left(\frac{1}{(1+h^2/a^2)^2} - \frac{1}{(1+a^2/h^2)^2} \right) dh = \frac{1}{12a^3} \int_0^a h^3(a-h)^3 \frac{a^2-h^2}{a^2+h^2} dh = \\ &= \frac{1}{12a^3} \int_0^a \left(h^6 - 3h^5a + h^4a^2 + 5h^3a^3 - 4h^2a^4 - 4ha^5 + 4a^6 + \frac{4ha^7}{h^2+a^2} - \frac{4a^8}{h^2+a^2} \right) dh = \\ &= \frac{1}{12} a^4 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{5}{4} - \frac{4}{3} - 2 + 4 + 2 \ln 2 - 4 \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{12} \left(\frac{739}{420} + 2 \ln 2 - \pi \right) a^4. \quad \square \end{aligned}$$

3. Сферическими координатами точки $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ называется тройка чисел r, φ, ψ , связанная с числами x, y, z формулами

$$x = r \cos\varphi \cos\psi, \quad y = r \sin\varphi \cos\psi, \quad z = r \sin\psi. \quad (1)$$

Из второй теоремы о замене переменных (с. 9) вытекает следующее утверждение о переходе к сферическим координатам.

Теорема. Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ — жорданово множество и $f \in C(D)$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \iiint_{\Omega} f(r \cos\varphi \cos\psi, r \sin\varphi \cos\psi, r \sin\psi) r^2 \cos\psi \, dr \, d\varphi \, d\psi, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(r, \varphi, \psi) : (r \cos\varphi \cos\psi, r \sin\varphi \cos\psi, r \sin\psi) \in D, r \geq 0, \\ &\quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \alpha \leq \varphi \leq \alpha + 2\pi\} — \text{образ множества } D, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Так же как полярные координаты (r, φ) точки M на плоскости, сферические координаты (r, φ, ψ) точки M в пространстве имеют простой геометрический смысл: r — длина радиус-вектора из начала координат в точку M , ψ —

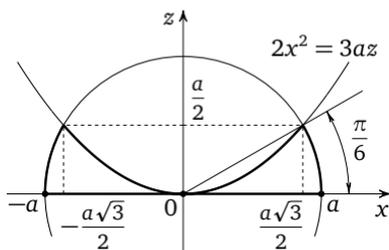
угол этого вектора с плоскостью xOy (широта), φ — угол проекции радиус-вектора на плоскость xOy с положительным направлением оси Ox (долгота).

Переход к цилиндрическим или сферическим координатам в пространстве, так же как переход к полярным координатам на плоскости, можно рассматривать как переход к согласованным с декартовой цилиндрической или сферической системам координат. Поэтому, как и в предыдущем параграфе, для множеств значений r, φ, h и r, φ, ψ не будем вводить нового обозначения, а будем рассматривать множество D как в виде $D = \{(x, y, z) : \dots\}$, так и в виде $D = \{(r, \varphi, h) : \dots\}$ и $D = \{(r, \varphi, \psi) : \dots\}$ с указанием условий на соответствующие координаты.

Пример 15.47. Расставим пределы интегрирования в сферической системе координат в интеграле $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$, где $f \in C(D)$, D — тело, ограниченное сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, параболоидом $2(x^2 + y^2) = 3az$ и плоскостью $z = 0$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку все поверхности, ограничивающие тело D , являются поверхностями вращения относительно оси Oz , сделаем чертёж меридионального сечения D (см. рис.). Тело D лежит выше плоскости $z = 0$, вне параболоида $2(x^2 + y^2) = 3az$ и внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, т. е.

$$D = \{(x, y, z) : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, 2(x^2 + y^2) \geq 3az\}.$$



Перейдём в неравенствах, определяющих условия на декартовы координаты точек тела D , к сферическим координатам. Получаем, что r, φ, ψ должны удовлетворять неравенствам: $r \sin \psi \geq 0$, $r^2 \leq a^2$, $2r^2 \cos^2 \psi \geq 3ar \sin \psi$.

Дополнительных ограничений на угол φ эти неравенства не дают, следовательно, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, — геометрически это видно из того, что рассматриваемое тело есть тело вращения относительно оси Oz . Следовательно, если M — точка тела D , то и все точки M_1 , для которых радиус-вектор OM_1 получается поворотом радиус-вектора OM относительно оси Oz , также принадлежит D . Поскольку $r \geq 0$ и $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$, система неравенств эквивалентна системе $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \psi \leq \pi/2$, $2r \cos^2 \psi \geq 3a \sin \psi$. Первое и третье неравенства могут выполняться одновременно только при условии $2 \cos^2 \psi \geq 3 \sin \psi$, откуда следует, что $\sin \psi \leq 1/2$. Учитывая второе неравенство, получаем:

$$D = \left\{ (r, \varphi, \psi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{6}, \frac{3a \sin \psi}{2 \cos^2 \psi} \leq r \leq a \right\}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/6} d\psi \int_0^a f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r^2 \cos \psi dr. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 15.48. Расставим пределы интегрирования в сферической системе координат в интеграле $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$, где $f \in C(D)$ и

$$D = \{(x, y, z) : x \geq 0, (x^2 + y^2 + z^2)^3 \leq a^2 z^2 (x^2 - y^2), x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\} \quad (a > 0).$$

РЕШЕНИЕ. Перейдём в неравенствах, определяющих условия на декартовы координаты точек множества D , к сферическим координатам. Учитывая условие $r \geq 0$, получаем систему неравенств:

$$r^2 \leq a^2 \sin^2 \psi \cos 2\varphi, \quad \cos^2 \psi \leq \sin^2 \psi, \quad \sin \psi \geq 0, \quad \cos \varphi \cos \psi \geq 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\cos 2\varphi \geq 0$, и, учитывая условия $r \geq 0$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$, получаем, что

$$D = \{(r, \varphi, \psi) : -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq a \sin \psi \sqrt{\cos 2\varphi}\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\psi \int_0^{a \sin \psi \sqrt{\cos 2\varphi}} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r^2 \cos \psi dr. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 15.49. Вычислим интеграл $\iiint_D x^2 dx dy dz$, где D — тело, лежащее внутри обеих сфер $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$ ($a > 0$), пользуясь переходом к сферическим координатам.

РЕШЕНИЕ. Точки тела D лежат внутри обеих сфер, поэтому их декартовы координаты должны удовлетворять неравенствам

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2ax, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2ay.$$

Перейдём в этих неравенствах к сферическим координатам. Учитывая условие $r \geq 0$, получаем систему неравенств

$$0 \leq r \leq 2a \cos \varphi \cos \psi, \quad 0 \leq r \leq 2a \sin \varphi \cos \psi.$$

В силу условия $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ имеем $\cos \psi \geq 0$, следовательно, угол φ должен удовлетворять неравенствам $\cos \varphi > 0$, $\sin \varphi > 0$, откуда получаем, что $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Наконец, поскольку оба неравенства ограничивают r сверху, этой системе эквивалентно неравенство $0 \leq r \leq 2a \cos \psi \min\{\sin \varphi, \cos \varphi\}$. Чтобы

границы интегрирования выражались гладкими функциями, как и выше, разобьём отрезок $[0; \frac{\pi}{2}]$ изменения угла φ на подотрезки, где функция $\min\{\cos \varphi, \sin \varphi\}$ совпадает с одной из функций $\cos \varphi$ или $\sin \varphi$. Окончательно получаем:

$$D = \left\{ (r, \varphi, \psi) : -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2a \sin \varphi \cos \psi \right\} \cup \\ \cup \left\{ (r, \varphi, \psi) : -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi \cos \psi \right\}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \iiint_D x^2 dx dy dz &= \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2a \sin \varphi \cos \psi} r^4 \cos^2 \varphi \cos^3 \psi dr + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi \cos \psi} r^4 \cos^2 \varphi \cos^3 \psi dr = \\ &= \frac{32}{5} a^5 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8 \psi d\psi \int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi \sin^5 \varphi d\varphi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8 \psi d\psi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^7 \varphi d\varphi \right) = \\ &= \frac{32}{5} a^5 \frac{\Gamma(\frac{9}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(5)} \left(\int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi \sin^5 \varphi d\varphi + \int_0^{\pi/4} \sin^7 \varphi d\varphi \right) = \\ &= -\frac{32\pi a^5}{5 \cdot 24} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (1 - \cos^2 \varphi)^2 d \cos \varphi = \frac{7\pi a^5}{4} \int_{\sqrt{2}/2}^1 (1 - t^2)^2 dt = \\ &= \frac{7\pi a^5}{4} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} \right) \right) = \frac{7(64 - 43\sqrt{2})}{480} \pi a^5. \quad \square \end{aligned}$$

4. *Обобщёнными сферическими координатами* точки $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ называется тройка чисел r, φ, ψ , связанная с числами x, y, z формулами

$$x = ar \cos^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, \quad y = br \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, \quad z = cr \sin^\beta \psi.$$

При этом $r \geq 0$, угол φ меняется на отрезке $[0; 2\pi]$ или $[0; \pi/2]$, угол ψ — на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ или $[0; \pi/2]$ в зависимости от параметров α и β аналогично тому, как зависел промежуток изменения угла φ в обобщённых полярных координатах (см. с. 33). Так же как в двойном интеграле, при переходе к обобщённым сферическим координатам может возникнуть несобственный интеграл от неограниченной функции по жорданову множеству (который всегда сходится). Якобиан при переходе к обобщённым сферическим координатам равен $abca\beta r^2 \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \sin^{\beta-1} \psi \cos^{2\beta-1} \psi$.

Пример 15.50. Вычислим интеграл $\iiint_D z dx dy dz$, где D — фигура, лежащая в первом октанте и ограниченная координатными плоскостями и поверхностью

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}.$$

РЕШЕНИЕ. Положим $x = ar \cos^2 \varphi \cos^2 \psi$, $y = br \sin^2 \varphi \cos^2 \psi$, $z = cr \sin^2 \psi$. В переменных r, φ, ψ уравнение данной поверхности примет вид

$$r = \left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi - \frac{b}{k} \sin^2 \varphi \right) \cos^2 \psi.$$

Дополнительных условий на угол ψ нет, значит, $\psi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Угол φ должен удовлетворять двум условиям: $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\frac{a}{h} \cos^2 \varphi - \frac{b}{k} \sin^2 \varphi \geq 0$, поэтому $\varphi \in [0; \varphi_0]$, где $\varphi_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\frac{a}{h} \cos^2 \varphi_0 - \frac{b}{k} \sin^2 \varphi_0 = 0$.

Следовательно, прообразом множества D при переходе к обобщённым полярным координатам является множество

$$\Omega = \left\{ (r, \varphi, \psi) : 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, 0 \leq r \leq r(\varphi, \psi) \right\},$$

где для краткости произведение $\left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi - \frac{b}{k} \sin^2 \varphi \right) \cos^2 \psi$ обозначено через $r(\varphi, \psi)$, и, таким образом,

$$\begin{aligned} \iiint_D z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{\varphi_0} d\varphi \int_0^{r(\varphi, \psi)} cr \sin^2 \psi \, 4abc r^2 \cos \varphi \sin \varphi \sin \psi \cos^2 \psi \, dr = \\ &= 4abc^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \psi \sin^3 \psi \, d\psi \int_0^{\varphi_0} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{r(\varphi, \psi)} r^3 \, dr = \\ &= abc^2 \int_0^{\pi/2} \cos^{11} \psi \sin^3 \psi \, d\psi \int_0^{\varphi_0} \left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi - \frac{b}{k} \sin^2 \varphi \right)^4 \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{abc^2}{4} \frac{\Gamma(6)\Gamma(2)}{\Gamma(8)} \int_0^{\varphi_0} \left(\frac{a}{h} - \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right) \sin^2 \varphi \right)^4 d(\sin^2 \varphi) = \\ &= \frac{abc^2}{4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5} \frac{1}{\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right)} \left(\frac{a}{h} - \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right) \sin^2 \varphi \right)^5 \Big|_{\varphi_0}^0 = \frac{a^2 b c^2 k}{840(ak + bh)}. \quad \square \end{aligned}$$

15.3.3. Объём тела

Объём $|V|$ произвольного тела V вычисляется по формуле

$$|V| = \iiint_V dx \, dy \, dz, \quad \text{как объём жорданового множества.}$$

Пример 15.51. Найдём объём тела V , находящегося в первом октанте и ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $2(x^2 + y^2) = z$, $x = y$, $y = 2x$, $z = h$.

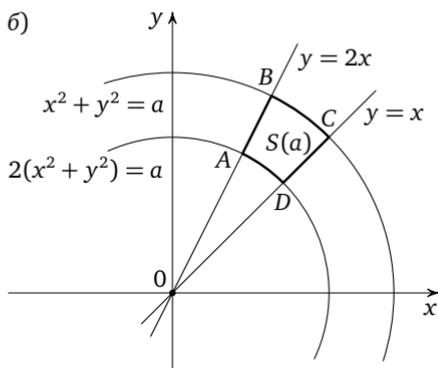
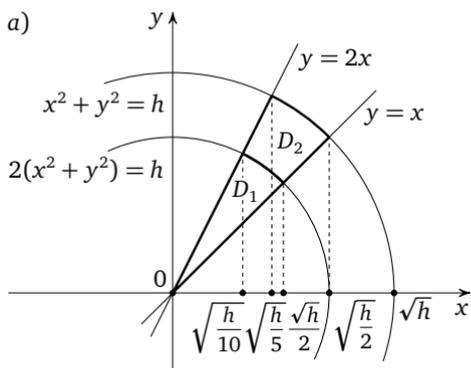
РЕШЕНИЕ. Рассмотрим четыре способа решения этой задачи.

Способ I. Проекцию тела на плоскость xOy см. на рис. а.

Разобьём тело V на два тела V_1 и V_2 :

$$V_1 = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in D_1, x^2 + y^2 \leq z \leq 2(x^2 + y^2) \right\} \quad \text{и}$$

$$V_2 = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in D_2, x^2 + y^2 \leq z \leq h \right\},$$



где фигура D_1 ограничена линиями $y = x$, $y = 2x$ и $2(x^2 + y^2) = h$, а фигура D_2 ограничена линиями $y = x$, $y = 2x$, $x^2 + y^2 = h$ и $2(x^2 + y^2) = h$.

Фигуру D_1 представим как объединение двух фигур D_1^1 и D_1^2 :

$$D_1^1 = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{h}{10}}, x \leq y \leq 2x \right\},$$

$$D_1^2 = \left\{ (x, y) : \sqrt{\frac{h}{10}} \leq x \leq \sqrt{\frac{h}{4}}, x \leq y \leq \sqrt{\frac{h}{2} - x^2} \right\},$$

а фигуру D_2 — как объединение трёх фигур

$$D_2^1 = \left\{ (x, y) : \sqrt{\frac{h}{10}} \leq x \leq \sqrt{\frac{h}{5}}, \sqrt{\frac{h}{2} - x^2} \leq y \leq 2x \right\},$$

$$D_2^2 = \left\{ (x, y) : \sqrt{\frac{h}{5}} \leq x \leq \sqrt{\frac{h}{4}}, \sqrt{\frac{h}{2} - x^2} \leq y \leq \sqrt{h - x^2} \right\},$$

$$D_2^3 = \left\{ (x, y) : \sqrt{\frac{h}{4}} \leq x \leq \sqrt{\frac{h}{2}}, x \leq y \leq \sqrt{h - x^2} \right\}.$$

Теперь объём тела V найдём следующим образом:

$$\begin{aligned} |V| = & \int_0^{\sqrt{h/10}} dx \int_x^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz + \int_{\sqrt{h/10}}^{\sqrt{h/4}} dx \int_x^{\sqrt{h/2-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz + \\ & + \int_{\sqrt{h/10}}^{\sqrt{h/5}} dx \int_{\sqrt{h/2-x^2}}^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^h dz + \int_{\sqrt{h/5}}^{\sqrt{h/4}} dx \int_{\sqrt{h/2-x^2}}^{\sqrt{h-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^h dz + \int_{\sqrt{h/4}}^{\sqrt{h/2}} dx \int_x^{\sqrt{h-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^h dz. \end{aligned}$$

Отсюда уже можно, даже не вычисляя интегралов, сделать вывод о нерациональности предложенного способа решения.

Способ II. Сечением данного тела плоскостью $z = a$, $0 < a < h$, является фигура $ABCD = S(a)$, представленная на рис. б.

Тогда искомый объём найдём по формуле $|V| = \int_0^h da \iint_{S(a)} dx dy$.

Интеграл $\iint_{S(a)} dx dy$ равен $|S(a)|$ — площади $S(a)$. Эту площадь можно вычислить как разность площадей двух круговых секторов с центральным углом $\varphi = \arctg 2 - \pi/4$ и радиусами \sqrt{a} и $\sqrt{a/2}$ соответственно, т. е.

$$|S(a)| = \frac{1}{2} \left(a - \frac{a}{2} \right) \left(\arctg 2 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a}{4} \arctg \frac{1}{3}.$$

Следовательно, $|V| = \int_0^h \frac{a}{4} \arctg \frac{1}{3} da = \frac{h^2}{8} \arctg \frac{1}{3}$.

Замечание. Поскольку границами фигуры $S(a)$ являются линии уровня функций $u = x^2 + y^2$ и $v = \frac{y}{x}$, для вычисления $\iint_{S(a)} dx dy$ можно сделать замену

$x^2 + y^2 = u$, $\frac{y}{x} = v$. Отображение $\varphi: u = x^2 + y^2$, $v = \frac{y}{x}$ есть биекция области $D = \left\{ (x, y) : \frac{a}{2} < x^2 + y^2 < a, 1 < \frac{y}{x} < 2 \right\}$ на область $\Pi = \left\{ (u, v) : \frac{a}{2} < u < a, 1 < v < 2 \right\}$. Поскольку $\det J_\varphi = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 + 2\frac{y^2}{x^2}$, имеем $\det J_{\varphi^{-1}} = \frac{1}{2 + 2v^2}$ и

$$\begin{aligned} |V| &= \int_0^h da \iint_{S(a)} dx dy = \int_0^h da \int_1^2 \frac{dv}{2 + 2v^2} \int_{a/2}^a du = \frac{1}{2} \int_0^h \left(\arctg 2 - \frac{\pi}{4} \right) \frac{a}{2} da = \\ &= \frac{h^2}{8} \left(\arctg 2 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{h^2}{8} \arctg \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Способ III. Перейдя к цилиндрическим координатам, имеем:

$$\begin{aligned} |V| &= \int_{\pi/4}^{\arctg 2} d\varphi \int_0^{\sqrt{h/2}} r dr \int_{r^2}^{2r^2} dz + \int_{\pi/4}^{\arctg 2} d\varphi \int_{\sqrt{h/2}}^{\sqrt{h}} r dr \int_{r^2}^h dz = \\ &= \left(\arctg 2 - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{h/2}} + \left(\frac{hr^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_{\sqrt{h/2}}^{\sqrt{h}} \right) = \\ &= \left(\arctg 2 - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{h^2}{16} + \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{16} \right) = \frac{h^2}{8} \left(\arctg 2 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{h^2}{8} \arctg \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Способ IV. Сделаем замену переменных $x^2 + y^2 = u$, $\frac{x^2 + y^2}{z} = v$, $\frac{y}{x} = w$.

Отображение $\varphi: u = x^2 + y^2$, $v = \frac{x^2 + y^2}{z}$, $w = \frac{y}{x}$ является биекцией данной области V на область

$$\Omega = \left\{ (u, v, w) : 0 < u < h, 1 < w < 2, u < \frac{u}{v} < \min\{2u, h\} \right\},$$

$$\det J_\varphi = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 0 \\ \frac{2x}{z} & \frac{2y}{z} & -\frac{(x^2 + y^2)}{z^2} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \end{vmatrix} = \frac{2(x^2 + y^2)}{z^2} \left(2 + \frac{2y^2}{x^2} \right) = \frac{2(1 + w^2)v^2}{u}.$$

Условие $u < \frac{u}{v} < \min\{2u, h\}$ эквивалентно условиям $\frac{1}{2} < v < 1$, если $0 < u \leq \frac{h}{2}$; $\frac{u}{h} < v < 1$, если $\frac{h}{2} \leq u < h$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |V| &= \int_0^{h/2} du \int_{1/2}^1 dv \int_0^2 dw \frac{u}{2v^2(1+w^2)} + \int_{h/2}^h du \int_{u/h}^1 dv \int_1^2 dw \frac{u}{2v^2(1+w^2)} = \\ &= \left(\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}\right)(2-1) \frac{1}{2} \frac{h^2}{8} + \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}\right) \int_{h/2}^h \left(\frac{h}{u} - 1\right) u du = \frac{h^2}{8} \operatorname{arctg} \frac{1}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 15.52. Найдём объём тела V , ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \alpha^2\right)^2 = 4\frac{z^2}{c^2} \quad (\alpha^2 < 1, a, b, c > 0).$$

Решение. В силу симметрии тела относительно координатных плоскостей рассмотрим $1/8$ его часть, находящуюся в первом октанте. Перейдём к обобщённым цилиндрическим координатам ($x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, $z = z$, якобиан равен abr), тогда имеем

$$\left(r^2 + \alpha^2 + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = 4\frac{z^2}{c^2}, \quad \text{т. е.} \quad r^2 + \alpha^2 + \frac{z^2}{c^2} = \frac{2z}{c},$$

откуда $r = \sqrt{\frac{2z}{c} - \frac{z^2}{c^2} - \alpha^2}$. Из условия $\frac{2z}{c} - \frac{z^2}{c^2} - \alpha^2 \geq 0$ следует, что $-\frac{z^2}{c^2} + \frac{2z}{c} \geq \alpha^2$, т. е. $1 - \sqrt{1 - \alpha^2} \leq \frac{z}{c} \leq 1 + \sqrt{1 - \alpha^2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} |V| &= 8 \int_{c-c\sqrt{1-\alpha^2}}^{c+c\sqrt{1-\alpha^2}} dz \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{2z/c - (z^2/c^2) - \alpha^2}} r dr = \\ &= 8ab \cdot \frac{\pi}{4} \int_{c-c\sqrt{1-\alpha^2}}^{c+c\sqrt{1-\alpha^2}} \left(\frac{2z}{c} - \frac{z^2}{c^2} - \alpha^2\right) dz = \\ &= 2\pi ab \left(\frac{z^2}{c} - \frac{z^3}{3c^2} - \alpha^2 z\right) \Big|_{c-c\sqrt{1-\alpha^2}}^{c+c\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{8\pi}{3} abc(1-\alpha^2)^{3/2}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 15.53. Найдём объём тела V , находящегося в первом октанте и ограниченного поверхностями

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^6 = \left(\frac{x}{h} - \frac{y}{k}\right)^5, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Решение. Положим $x = ar \cos^2 \varphi \cos^2 \psi$, $y = br \sin^2 \varphi \cos^2 \psi$, $z = cr \sin^2 \psi$. Тогда $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^6 = r^6$, $\frac{x}{h} - \frac{y}{k} = r\left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi - \frac{b}{k} \sin^2 \varphi\right) \cos^2 \psi$. Из условия $\frac{x}{h} - \frac{y}{k} \geq 0$ получим условие на угол φ : $\frac{a}{h} \cos^2 \varphi - \frac{b}{k} \sin^2 \varphi \geq 0$, т. е. $|\operatorname{tg} \varphi| \leq \sqrt{\frac{ak}{bh}}$, а, следовательно, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, где $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \sqrt{ak/bh}$. Для краткости обозначим $\left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi - \frac{b}{k} \sin^2 \varphi\right)^5 \cos^{10} \psi$ через $r_0(\varphi, \psi)$.

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
 |V| &= 4abc \int_0^{\varphi_0} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{r_0(\varphi, \psi)} r^2 \cos^3 \psi \cos \varphi \sin \varphi \sin \psi dr = \\
 &= \frac{4abc}{3} \int_0^{\varphi_0} d\varphi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi - \frac{b}{k} \sin^2 \varphi \right)^{15} \cos^{33} \psi \cos \varphi \sin \varphi \sin \psi d\psi = \\
 &= \frac{4abc}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^{33} \psi \sin \psi d\psi \times \\
 &\quad \times \int_0^{\varphi_0} \left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi - \frac{b}{k} \sin^2 \varphi \right)^{15} d \left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi - \frac{b}{k} \sin^2 \varphi \right) \frac{1}{-2 \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right)} = \\
 &= \frac{-hk}{2(ak+bh)} \frac{4abc}{3 \cdot 34 \cdot 16} \left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi - \frac{b}{k} \sin^2 \varphi \right)^{16} \Big|_0^{\varphi_0} = \frac{abc}{24 \cdot 34} \frac{1}{\frac{a}{h} + \frac{b}{k}} \left(\frac{a}{h} \right)^{16}. \quad \square
 \end{aligned}$$

15.3.4. Механические приложения тройного интеграла

Пусть скалярная величина $P(V)$ распределена на теле (объёмной фигуре) V с плотностью $\rho(x, y, z)$, являющейся непрерывной функцией, тогда

$$P(V) = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Если масса распределена на теле V с плотностью ρ , то по этой формуле вычисляется масса тела.

Статическими моментами тела V относительно координатных плоскостей yOz , xOz и xOy называются соответственно интегралы

$$I_{yz}^{(1)} = \iiint_V \rho(x, y, z) x dx dy dz, \quad I_{xz}^{(1)} = \iiint_V \rho(x, y, z) y dx dy dz,$$

$$I_{xy}^{(1)} = \iiint_V \rho(x, y, z) z dx dy dz.$$

Координаты центра масс тела V массой M вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{I_{yz}^{(1)}}{M}, \quad y_0 = \frac{I_{xz}^{(1)}}{M}, \quad z_0 = \frac{I_{xy}^{(1)}}{M}.$$

Если $r(x, y, z)$ — расстояние от точки (x, y, z) тела V до некоторой точки, прямой или плоскости Q , то интеграл

$$I_Q^{(2)} = \iiint_V \rho(x, y, z) r^2(x, y, z) dx dy dz,$$

называется моментом инерции тела V относительно Q .

Ньютонов потенциал $U(x, y, z)$ тела V в точке $P(x, y, z)$ — это интеграл

$$U(x, y, z) = \iiint_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r},$$

где $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность тела и $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

Материальная точка массой m притягивает тело с силой $\vec{F} = \gamma m \operatorname{grad} U$, где γ — постоянная закона тяготения (гравитационная постоянная), $\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \iiint_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\xi - x}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \iiint_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \iiint_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta d\zeta.$$

Пример 15.54. Найдём координаты центра масс однородного тела плотности ρ , ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z$, $x + y + z = 0$.

Решение. Проекцией данного тела на плоскость xOy является фигура

$$D = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq -x - y \right\}, \quad \text{т. е. круг} \quad \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Поэтому в силу симметрии тела относительно плоскости $x = y$ имеем $x_0 = y_0$.

Положим $x = r \cos \varphi - 1/2$, $y = r \sin \varphi - 1/2$. Масса данного тела равна

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V \rho dx dy dz = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} dr \cdot r \int_{r^2 - r(\cos \varphi + \sin \varphi) + 1/2}^{1 - r(\cos \varphi + \sin \varphi)} dz = \\ &= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} r \left(1 - r(\cos \varphi + \sin \varphi) - r^2 + r(\cos \varphi + \sin \varphi) - \frac{1}{2} \right) dr = \\ &= 2\pi \rho \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(r - r^3 - \frac{1}{2}r \right) dr = 2\pi \rho \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi \rho}{8}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} x_0 = y_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho x dx dy dz = \frac{1}{M} \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} r \left(r \cos \varphi - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) dr = \\ &= \frac{1}{M} \rho \cdot 2\pi \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(r^2 - r^3 \right) dr = -\frac{\pi \rho}{M} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho z dx dy dz = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} dr \int_{r^2 - r(\cos \varphi + \sin \varphi) + 1/2}^{1 - r(\cos \varphi + \sin \varphi)} rz dz = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} r \left(1 - 2r(\cos \varphi + \sin \varphi) + r^2 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - r^2 - \frac{1}{2} \right) dr = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(r - r \left(r^2 + \frac{1}{2} \right)^2 \right) dr = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Итак, координаты центра масс: $x_0 = y_0 = -\frac{1}{2}$, $z_0 = \frac{5}{6}$. □

Пример 15.55. Для однородного тела плотности ρ , ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$ и $x^2 + y^2 = z^2$, найдём его массу и момент инерции относительно прямой $x = 0, z = 4$.

РЕШЕНИЕ. Находим массу тела $M = \rho \iiint_V dx dy dz$:

$$M = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{r^2/2}^r r dz = 2\pi\rho \int_0^2 \left(r^2 - \frac{r^3}{2}\right) dr = 2\pi\rho \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{8}\right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}\pi\rho.$$

Момент инерции I данного тела найдём по формуле $I = \iiint_V \rho r^2 dx dy dz$, где r — расстояние от точки (x, y, z) тела V до прямой $x = 0, z = 4$. Квадрат этого расстояния находится по формуле $r^2 = x^2 + (z - 4)^2$, поэтому

$$\begin{aligned} I &= \rho \iiint_V (x^2 + (z - 4)^2) dx dy dz = \\ &= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{r^2/2}^r r (r^2 \cos^2 \varphi + (z - 4)^2) dz = \\ &= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \left(r^4 \cos^2 \varphi - \frac{r^5}{2} \cos^2 \varphi + r \frac{(r - 4)^3}{3} - r \frac{\left(\frac{r^2}{2} - 4\right)^3}{3} \right) = \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5} r^5 \cos^2 \varphi - \frac{r^6}{12} \cos^2 \varphi + \frac{(r - 4)^5}{15} + \frac{4(r - 4)^4}{4 \cdot 3} - \frac{\left(\frac{r^2}{2} - 4\right)^4}{3 \cdot 4} \right) \Big|_0^2 d\varphi = \frac{40}{3}\pi\rho. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 15.56. Найдём ньютонов потенциал в точке $P(0, 0, a)$, $a > R$, шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, если плотность его $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ пропорциональна квадрату расстояния от точки (ξ, η, ζ) до плоскости xOy , т. е. $\rho = k\zeta^2$.

РЕШЕНИЕ. Потенциал найдём по формуле

$$U(0, 0, a) = k \iiint_V \zeta^2 \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2}}.$$

Переходя в данном интеграле к сферическим координатам $\xi = r \cos \varphi \cos \psi$, $\eta = r \sin \varphi \cos \psi$, $\zeta = r \sin \psi$, имеем:

$$\begin{aligned} U(0, 0, a) &= k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^R \frac{r^4 \sin^2 \psi \cos \psi dr}{\sqrt{r^2 \cos^2 \psi + (r \sin \psi - a)^2}} = \\ &= 2\pi k \int_0^R r^4 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi d(\sin \psi)}{\sqrt{r^2 - 2ar \sin \psi + a^2}}. \end{aligned}$$

Далее находим, полагая $t = \sin \psi$, а затем $z^2 = r^2 + a^2 - 2art$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2art}} &= \int_{a-r}^{a+r} \frac{(r^2 + a^2 - z^2)^2}{4a^3 r^3} dz = \\ &= \frac{1}{4a^3 r^3} \left((r^2 + a^2)^2 \cdot 2r - \frac{2}{3} (r^2 + a^2) ((a+r)^3 - (a-r)^3) + \frac{1}{5} ((a+r)^5 - (a-r)^5) \right) = \\ &= \frac{1}{2a^3 r^2} \left(r^4 + 2r^2 a^2 + a^4 - \frac{2}{3} (3a^2 r^2 + 3a^4 + r^4 + a^2 r^2) + \frac{1}{5} (5a^4 + 10a^2 r^2 + r^4) \right) = \\ &= \frac{1}{2a^3 r^2} \left(r^4 \frac{8}{15} + r^2 a^2 \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{a^3} \left(\frac{4}{15} r^2 + \frac{2}{3} a^2 \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$U(0, 0, a) = \frac{4\pi k}{a^3} \int_0^R r^4 \left(\frac{2}{15} r^2 + \frac{a^2}{3} \right) dr = \frac{4\pi k}{a^3} \left(\frac{2}{15} \cdot \frac{R^7}{7} + \frac{a^2 R^5}{15} \right) = \frac{4k\pi}{15a^3} \left(\frac{2}{7} R^7 + a^2 R^5 \right).$$

□

§ 15.4. Многомерный кратный интеграл

15.4.1. Сведение кратного интеграла к повторному

Основная теорема (для промежутков). Пусть X — брус в \mathbb{R}^n , Y — брус в \mathbb{R}^k и $f \in R(X \times Y)$. Обозначим через $\Psi(x)$ функцию $\Psi: X \rightarrow \mathbb{R}$, равную $\int_Y f(x, y) dy$

для тех значений $x \in X$, при которых этот интеграл существует, и равную произвольному числу из отрезка $\left[(L) \int_Y f(x, y) dy; (U) \int_Y f(x, y) dy \right]$ для тех

$x \in X$, при которых интеграл $\int_Y f(x, y) dy$ не существует. Обозначим через

$\Phi(y)$ функцию $\Phi: Y \rightarrow \mathbb{R}$, равную $\int_X f(x, y) dx$ для тех значений $y \in Y$, при которых этот интеграл существует, и равную произвольному числу из отрезка $\left[(L) \int_X f(x, y) dx; (U) \int_X f(x, y) dx \right]$ для тех $y \in Y$, при которых интеграл

$\int_X f(x, y) dx$ не существует. Тогда $\Phi(y) \in R(Y)$, $\Psi(x) \in R(X)$ и

$$\iint_{X \times Y} f(x, y) dx dy = \int_Y \Phi(y) dy = \int_X \Psi(x) dx.$$

Чтобы отличить кратный интеграл по $(n+k)$ -мерному промежутку $X \times Y$ от последовательно вычисляемых интегралов

$$\int_Y \Phi(y) dy \quad \text{и} \quad \int_X \Psi(x) dx$$

соответственно по брусам X и Y , принято эти интегралы называть *повторными интегралами* от функции $f(x, y)$ и записывать в виде

$$\int_Y \Phi(y) dy = \int_Y dy \int_X f(x, y) dx \quad \text{и} \quad \int_X \Psi(x) dx = \int_X dx \int_Y f(x, y) dy.$$

Если $n = k = 1$, то основная теорема сводит вычисление двойного интеграла к последовательному вычислению двух одномерных интегралов. В общем случае повторное применение этой теоремы сводит вычисление n -мерного интеграла к последовательному вычислению n одномерных интегралов:

$$\int_{\Pi_{a,b}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n.$$

Можно сформулировать теорему о сведении кратного интеграла к повторному и тогда, когда интегрирование производится не по брусу $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+k}$, а по произвольному жорданову множеству $D \subset \mathbb{R}^{n+k}$, но формулировка становится чрезвычайно громоздкой. Поэтому ограничимся формулировкой частного, но наиболее широко используемого случая.

Основная теорема (для жордановых множеств). Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое жорданово множество, функции $\varphi_1 \in C(D)$, $\varphi_2 \in C(D)$, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, $x \in D$, множество

$$M = \{t : t = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, \varphi_1(x) \leq x_{n+1} \leq \varphi_2(x)\}.$$

Если $f \in C(M)$, то

$$\begin{aligned} \int_M f(x) dx &= \int_M f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) dx_1 dx_2 \dots dx_n dx_{n+1} = \\ &= \int_P dx_1 dx_2 \dots dx_n \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) dx_{n+1}. \end{aligned}$$

Заметим, что в условиях теоремы множество M жорданово (см. свойство 4 жордановых множеств, с. 6), интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) dx_{n+1}$ существует для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ и является непрерывной функцией на D , поэтому все входящие в формулировку теоремы интегралы существуют.

Следствие 1. Пусть $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in [a; b], (x_2, \dots, x_n) \in D_{x_1}\}$ — жорданово множество в \mathbb{R}^n , где D_{x_1} — жорданово множество в \mathbb{R}^{n-1} при любом $x_1 \in [a; b]$, и функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ зависит только от переменной x_1 : $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*(x_1)$. Тогда справедливо равенство

$$\int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_a^b f^*(x_1) |D_{x_1}| dx_1.$$

Таким образом, в этом случае кратный интеграл сводится к однократному.

Следствие 2. Пусть функция $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ на брусе $\Pi = \prod_{i=1}^n [a_i; b_i]$ имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n),$$

где $f_i \in C[a_i; b_i]$ для всех i , $1 \leq i \leq n$. Тогда $\int_{\Pi} f(x) dx = \prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} f_i(x_i) dx_i$.

Пример 15.57. Вычислим $\int_M (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$, где

$$M = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq x_4 \leq x_1 + x_2 + x_3\} \subset \mathbb{R}^4.$$

РЕШЕНИЕ. $I = \int_M (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 =$

$$= \int_{\Pi} dx_1 dx_2 dx_3 \int_{x_1+x_2-x_3}^{x_1+x_2+x_3} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) dx_4,$$

где Π есть трёхмерный брус: $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1$. Поскольку

$$\int_{x_1+x_2-x_3}^{x_1+x_2+x_3} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) dx_4 = \\ = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot 2x_3 + \frac{1}{2}((x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 + x_2 - x_3)^2) = \\ = 2x_3(x_1 + x_2 + x_3) + 2(x_1 + x_2)x_3 = 4x_3(x_1 + x_2) + 2x_3^2,$$

получаем

$$I = \int_{\Pi} (4x_3(x_1 + x_2) + 2x_3^2) dx_1 dx_2 dx_3 = 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 \left((x_1 + x_2)x_3^2 + \frac{x_3^3}{3} \right) \Big|_0^1 dx_2 = \\ = 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 \left(x_1 + x_2 + \frac{1}{3} \right) dx_2 = \frac{1}{3} \int_0^1 (6x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2) \Big|_0^1 dx_1 = \\ = \frac{1}{3} \int_0^1 (6x_1 + 5) dx_1 = \frac{1}{3} (3x_1^2 + 5x_1) \Big|_0^1 = \frac{8}{3}. \quad \square$$

Пример 15.58. Вычислим $\int_{\Pi} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n$, где $\Pi = \{(x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$.

РЕШЕНИЕ. Применяя следствие 2, получаем:

$$\int_{\Pi} x_i^2 dx = \int_0^1 x_i^2 dx_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \int_0^1 dx_k = \int_0^1 x_i^2 dx_i = \frac{1}{3}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\int_{\Pi} x_i x_j dx = \int_0^1 x_i dx_i \int_0^1 x_j dx_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^n \int_0^1 dx_k = \int_0^1 x_i dx_i \int_0^1 x_j dx_j = \frac{1}{4}, \quad i \neq j.$$

Отсюда находим

$$\int_{\Pi} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Pi} x_i^2 dx + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \int_{\Pi} x_i x_j dx = \\ = \frac{n}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{3} + \frac{n^2 - n}{4} = \frac{3n^2 + n}{12}. \quad \square$$

15.4.2. Многомерные полярные координаты

Переход в кратном интеграле $\int_M f dx = \int_M f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ ($n \geq 3$) к переменным $r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$, связанным с переменными x_1, x_2, \dots, x_n формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, & x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\dots\dots\dots & & \\ x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

называется переходом к n -мерным полярным координатам, а переменные $r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ — многомерными полярными (сферическими) координатами в \mathbb{R}^n . Сравнивая эти формулы с формулами связи декартовых и сферических координат в трёхмерном пространстве (см. с. 66), мы видим, что сферические координаты переходят в трёхмерные полярные координаты преобразованием $x_1 = z, x_2 = x, x_3 = y, \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \psi, \varphi_2 = \varphi$.

Задаваемое формулами (1) отображение $\psi: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ множества

$$T = \{(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : r \geq 0, 0 \leq \varphi_i \leq \pi (1 \leq i \leq n-2), 0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi\}$$

не биективно, например, образом подмножества $T \cap \{(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : r = 0\}$ является единственная точка $O(0, 0, \dots, 0)$. Якобиан отображения ψ , равный $r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1} \varphi_i$, обращается в нуль на множестве

$$T \setminus \{(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : r > 0, 0 < \varphi_i < \pi (1 \leq i \leq n-2)\}.$$

Всё это показывает, что для произвольного жорданова множества M отображение ψ не удовлетворяет условиям первой теоремы о замене переменных в кратном интеграле.

Для обоснования возможности перехода к полярным координатам в кратном интеграле отметим следующие свойства.

1. Множество

$$T^* = T \setminus \{(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : r > 0, 0 < \varphi_i < \pi (1 \leq i \leq n-2), 0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi\}$$

есть множество меры нуль.

2. Отображение $\psi: T \setminus T^* \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \psi(T^*)$ регулярно.

3. Образом жорданова множества $T_a = T \cap \{(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : r < a\}$ для любого $a > 0$ является открытое жорданово множество

$$M_a = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i^2 < a^2\}.$$

4. Множество $T_a^* = T^* \cap \{(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : r \leq a\}$ замкнуто, следовательно, в силу непрерывности отображения ψ , множество $\psi(T_a^*)$ также замкнуто, поэтому по свойству 3 множество $M_a^* = M_a \setminus \psi(T_a^*)$ открыто.

5. Множество $\psi(T^*)$ — множество меры нуль.

Последнее свойство следует из теоремы Сарда: если D — открытое множество в \mathbb{R}^n , отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(D)$ и $S = \{x \in D: \det J_f(x) = 0\}$, то $f(S)$ есть множество меры нуль. Но для отображения ψ вместо ссылки на теорему Сарда можно просто заметить, что $\psi(T^*)$ есть подмножество множества $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$, где $E_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i = 0\}$ (гиперплоскость в \mathbb{R}^n), и поскольку все множества E_i имеют меру нуль, заключаем, что E и его подмножество $\psi(T^*)$ есть множества меры нуль.

Рассмотрим теперь интеграл $\int_M f dx$. Множество M жорданово, поэтому найдётся такой открытый шар $M_a = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): \sum_{i=1}^n x_i^2 < a^2\}$, что $M \subset M_a$. Пусть $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in M, \\ 0, & x \in M_a \setminus M, \end{cases}$ тогда $\int_M f dx = \int_{M_a} g dx$. Из свойств 1–5 отображения ψ следует, что множество M_a и отображение $\psi: T_a \rightarrow M_a$ удовлетворяют условиям второй теоремы о замене переменных в кратном интеграле. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_M f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n &= \int_{M_a} g(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{T_a} g^*(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1} \varphi_i dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} = \\ &= \int_{M^*} f^*(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1} \varphi_i dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}, \end{aligned}$$

где $M^* \subset T$ есть прообраз M и

$$\begin{aligned} g^*(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) &= g(r \cos \varphi_1, r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \dots, r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1}), \\ f^*(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) &= f(r \cos \varphi_1, r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \dots, r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1}). \end{aligned}$$

Предыдущие рассуждения остаются в силе, если основным промежутком изменения угла φ_{n-1} является не $[0; 2\pi]$, а $[\alpha; \alpha + 2\pi]$ при любом α .

Пример 15.59. Вычислим $\int_M (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$, где $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 2ax_1, x_3 \geq 0\}$ ($a > 0$).

Решение. Множество M жорданово, так как часть шара в трёхмерном пространстве: $D = \{x = (x_2, x_3, x_4): x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq a^2, x_3 \geq 0\}$ является жордановым множеством и

$$\begin{aligned} M &= \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4): m = (x_2, x_3, x_4) \in D, \\ & a - \sqrt{a^2 - (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)} \leq x_1 \leq a + \sqrt{a^2 - (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)}\} \end{aligned}$$

(см. свойства 4 и 6 жордановых множеств, с. 6). Перейдём в данном интеграле к полярным координатам:

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \varphi_1, & x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\x_3 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, & x_4 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3.\end{aligned}$$

Из условий на переменные x_1, x_2, x_3, x_4 , учитывая, что $r \geq 0$, $0 \leq \varphi_1 \leq \pi$, $0 \leq \varphi_2 \leq \pi$, получим условия для переменных $r, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$: $r \leq 2a \cos \varphi_1$, $\cos \varphi_1 \geq 0$, $\cos \varphi_3 \geq 0$. Если основным промежутком изменения угла φ_3 выбран отрезок $[0; 2\pi]$, то условие $\cos \varphi_3 \geq 0$ выполняется на двух отделённых друг от друга промежутках $[0; \pi/2]$ и $[3\pi/2; 2\pi]$; если же взять в качестве основного промежутка изменения φ_3 отрезок $[-\pi; \pi]$, то условие $\cos \varphi_3 \geq 0$ выполняется на связном множестве — промежутке $[-\pi/2; \pi/2]$. Это делает выкладки более удобными. Итак, в качестве прообраза множества M при переходе к полярным координатам выбираем множество

$$M^* = \left\{ (r, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : 0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi_2 \leq \pi, \right. \\ \left. -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_3 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi_1 \right\}$$

и получаем, что

$$\int_M (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int_{M^*} r^2 \cdot r^3 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 dr d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3.$$

Поскольку $M^* = \{(r, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : m = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \Pi, 0 \leq r \leq r(m)\}$, где

$$\begin{aligned}\Pi &= \left\{ (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : 0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi_2 \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_3 \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \\ r(m) &= r(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 2a \cos \varphi_1,\end{aligned}$$

в силу теоремы о сведении кратного интеграла к повторному имеем

$$\begin{aligned}\int_{M^*} r^5 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 dr d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 &= \int_{\Pi} \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 \int_0^{2a \cos \varphi_1} r^5 dr = \\ &= \frac{32a^6}{3} \int_{\Pi} \sin^2 \varphi_1 \cos^6 \varphi_1 \sin \varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3.\end{aligned}$$

Применяя следствие 2 из этой теоремы к брусу Π , получаем окончательно:

$$\begin{aligned}\int_M (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 &= \\ &= \frac{32a^6}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi_1 \cos^6 \varphi_1 d\varphi_1 \int_0^{\pi} \sin \varphi_2 d\varphi_2 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi_3 = \frac{32a^6}{3} \cdot \frac{5\pi}{2^8} \cdot 2\pi = \frac{5}{12} \pi^2 a^6.\end{aligned}$$

□

Пример 15.60. Найдём объём n -мерного шара радиусом R :

$$D^{(n)} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2 \right\}.$$

РЕШЕНИЕ. Отрезок $D^{(1)} = \{x_1 : x_1^2 \leq R^2\}$ — жорданово множество. Двумерный круг $D^{(2)} = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$ — объединение двух жордановых множеств:

$$D_1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 \leq R^2, 0 \leq x_2 \leq \sqrt{R^2 - x_1^2}\},$$

$$D_2 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 \leq R^2, -\sqrt{R^2 - x_1^2} \leq x_2 \leq 0\}$$

(см. свойство 3 жордановых множеств), следовательно, жорданово множество. Рассуждая по индукции, получаем, что n -мерный шар $D^{(n)}$ — жорданово множество. Прообразом шара $D^{(n)}$ при переходе к полярным координатам является брус $\Pi = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi_i \leq \pi, 1 \leq i \leq n-1, 0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi\}$. Применяя следствие 2 теоремы о сведении кратного интеграла к повторному, находим

$$|D^{(n)}| = \int_{D^{(n)}} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\Pi} r^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1} \varphi_i \right) dr d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{n-1} =$$

$$= \int_0^R r^{n-1} dr \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \int_0^{\pi} \sin^{n-i-1} \varphi_i d\varphi_i = \frac{2\pi R^n}{n} \prod_{i=1}^{n-2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i+1}{2}\right)} = \frac{2\pi^{n/2} R^n}{n \Gamma(n/2)}. \quad \square$$

Пример 15.61. Найдём площадь поверхности $(n-1)$ -мерной сферы в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, заданной уравнением $\sum_{i=1}^n x_i^2 = a^2$ ($a > 0$).

РЕШЕНИЕ. Переход к n -мерным полярным координатам, описанный на с. 80, подсказывает нам следующую параметризацию сферы:

$$S = \{r(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : 0 \leq \varphi_i \leq \pi (1 \leq i \leq n-2), 0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi\}, \quad \text{где}$$

$$r(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = (a \cos \varphi_1, a \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \dots,$$

$$\dots, a \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, a \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}).$$

Тогда

$$\vec{r}'_{\varphi_i} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, -a \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{i-1} \sin \varphi_i, a \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{i-1} \cos \varphi_i \cos \varphi_{i+1}, \dots,$$

$$\dots, a \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{i-1} \cos \varphi_i \sin \varphi_{i+1} \dots \sin \varphi_{n-1}), \quad 1 \leq i \leq n-2,$$

$$\vec{r}'_{\varphi_{n-1}} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, -a \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1}, a \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}).$$

Для нахождения площади используем формулу $|S| = \int_D \sqrt{|\det \mathbb{G}|} du$ (см. с. 43).

Найдём попарные скалярные произведения полученных выше векторов и вычислим определитель матрицы Грама \mathbb{G} :

$$\vec{r}'_{\varphi_i} \cdot \vec{r}'_{\varphi_i} = a^2 \sin^2 \varphi_1 \dots \sin^2 \varphi_{i-1},$$

$$\vec{r}'_{\varphi_i} \cdot \vec{r}'_{\varphi_j} = 0 \quad (i \neq j), \quad \det \mathbb{G} = a^{2(n-1)} \prod_{i=1}^{n-2} (\sin \varphi_i)^{2(n-1-i)}.$$

В итоге

$$\begin{aligned}
 |S| &= a^{n-1} \int_0^\pi d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} \left| \prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-1-i} \varphi_i \right| d\varphi_{n-1} = \\
 &= 2\pi a^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \left(\int_0^\pi \sin^{n-1-i} \varphi_i d\varphi_i \right) = 2\pi a^{n-1} \prod_{k=2}^{n-1} \left(2 \int_0^{\pi/2} \sin^{k-1} \theta d\theta \right) = \\
 &= 2\pi a^{n-1} \prod_{k=2}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k-1}{2} + 1)} = 2\pi a^{n-1} \pi^{\frac{n-2}{2}} \prod_{k=2}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k+1}{2})} = \frac{2\pi^{n/2} a^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \quad \square
 \end{aligned}$$

§ 15.5. Несобственный кратный интеграл

Определение 1. *Исчерпанием множества $D \subset \mathbb{R}^n$ называется такая последовательность $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ жордановых множеств, что $\bigcup_{m=1}^\infty D_m = D$ и $D_m \subset D_{m+1}$ для любого $m \in \mathbb{N}$.*

Определение 2. *Если функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ неинтегрируема в смысле Римана на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, но для любого исчерпания $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ множества D , удовлетворяющего условию $f \in R(D_m)$ при всех $m \in \mathbb{N}$, существует*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{D_m} f dx, \quad (1)$$

то этот предел обозначается символом $\int_D f dx$ и называется *сходящимся несобственным интегралом от функции f по множеству D* .

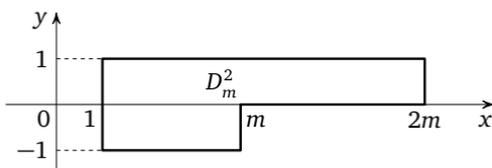
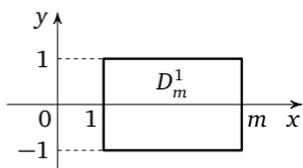
При этом говорят также, что «интеграл $\int_D f dx$ сходится», «интеграл $\int_D f dx$ существует в несобственном смысле» и «функция f интегрируема в несобственном смысле на D ».

Определение 3. *Если условия предыдущего определения не выполняются, т. е. существует такое исчерпание $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ множества D , что $f \in R(D_m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$, но предел (1) не существует, то говорят, что *несобственный интеграл $\int_D f dx$ расходится*.*

Замечание 1. Чтобы определение несобственного интеграла было корректным, формально надо было бы добавить требование независимости величины предела от выбора исчерпания $\{D_m\}$. Однако это требование излишне, так как если для двух исчерпаний $\{D_m^1\}$ и $\{D_m^2\}$ существуют несовпадающие пределы $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{D_m^1} f dx$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{D_m^2} f dx$, то найдётся такое исчерпание $\{D_m\}$, для которого предел (1) не существует.

Пример 15.62. Исследуем на сходимость интеграл $\iint_D \frac{y}{x} dx dy$, где

$$D = \{(x, y) : x \geq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$



Решение. Последовательность $\{D_m^1\}$, $D_m^1 = \{(x, y) : 1 \leq x \leq m, -1 \leq y \leq 1\}$, и последовательность $\{D_m^2\}$, $D_m^2 = D_m^1 \cup \{(x, y) : m \leq x \leq 2m, 0 \leq y \leq 1\}$ (см. рис.), являются исчерпаниями множества D , причём $f \in R(D_m^1)$ и $f \in R(D_m^2)$ для любого $m \in \mathbb{N}$, где $f(x, y) = \frac{y}{x}$. Но

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \iint_{D_m^1} \frac{y}{x} dx dy = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^m \frac{dx}{x} \int_{-1}^1 y dy = 0,$$

$$\text{а } \lim_{m \rightarrow \infty} \iint_{D_m^2} \frac{y}{x} dx dy = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\iint_{D_m^1} \frac{y}{x} dx dy + \int_m^{2m} \frac{dx}{x} \int_0^1 y dy \right) = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Несовпадение этих пределов уже говорит о том, что интеграл $\iint_D \frac{y}{x} dy dx$ расходится. Рассмотрим последовательность $\{D_m\} : D_{2k-1} = D_{2k}^1, D_{2k} = D_{2k}^2$. Эта последовательность является исчерпанием D ; $f \in R(D_m)$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \iint_{D_m} \frac{y}{x} dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_{2k}} \frac{y}{x} dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_{2k}^2} \frac{y}{x} dx dy = \frac{1}{2} \ln 2,$$

$$\underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \iint_{D_m} \frac{y}{x} dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_{2k-1}} \frac{y}{x} dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_{2k-1}^1} \frac{y}{x} dx dy = 0,$$

т. е. предела последовательности $\iint_{D_m} \frac{y}{x} dx dy$ не существует. \square

Замечание 2. Если для функции $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, не существует ни одного такого исчерпания $\{D_m\}$ множества D , что $f \in R(D_m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$, то вопрос, сходится или расходится интеграл $\int_D f dx$, не имеет смысла; в таких случаях применим только термин «функция неинтегрируема в несобственном смысле на D ».

Если $\{D_m\}$ — такое исчерпание множества D , что $f \in R(D_m)$ для любого m , то множество M_m точек разрыва функции f на D_m есть множество меры

нуль. Поскольку $D = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$, множество точек разрыва f на D есть $M = \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m$. Следовательно, M есть множество меры нуль. Поэтому неинтегрируемость по Риману функции f на D может быть, как и в одномерном случае, обусловлена только двумя причинами: или множество D не жорданово, в частности неограниченно, или функция f неограниченна на D . Обе эти особенности могут иметь место и одновременно.

Замечание 3. Если $f \in R(D)$, то предел (1) существует для любого исчерпания множества D и равен $\int_D f dx$.

Таким образом, понятие несобственного интеграла является обобщением понятия интеграла Римана.

Множество функций, интегрируемых на D в смысле Римана или в несобственном смысле, обозначим через $\tilde{R}(D)$. Множество $\tilde{R}(D)$ есть линейное пространство и функционал $\varphi(f) = \int_D f dx$ линеен, т. е. для любых двух функций $f_1 \in \tilde{R}(D)$, $f_2 \in \tilde{R}(D)$ и любых двух чисел α, β

$$\alpha f_1 + \beta f_2 \in \tilde{R}(D) \quad \text{и} \quad \int_D (\alpha f_1 + \beta f_2) dx = \alpha \int_D f_1 dx + \beta \int_D f_2 dx.$$

Сравнивая определение кратного ($n \geq 2$) и одномерного несобственного интегралов, видим, что в одномерном случае в качестве множества D берётся только промежутки, а исчерпание D производится только отрезками. Это связано с тем, что в одномерном пространстве (на прямой) только ограниченные промежутки являются ограниченными связными множествами и тем самым естественно выделяются из остальных жордановых множеств. Выделение более узкого класса исчерпаний приводит в одномерном случае к более широкому классу функций, интегрируемых в несобственном смысле, именно: появляется понятие условно сходящегося интеграла.

В многомерном же случае ($n \geq 2$) справедлив следующий факт.

Теорема. Если для функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), сходится интеграл $\int_D f dx$, то сходится и интеграл $\int_D |f| dx$.

Смысл этой теоремы в том, что в n -мерном ($n \geq 2$) пространстве понятие сходимости и абсолютной сходимости несобственного интеграла совпадают, т. е. отсутствует понятие условной сходимости.

В одномерном случае сформулированная теорема выглядит так.

Пусть функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, и последовательность $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ жордановых множеств удовлетворяют условиям:

1) $f \in R(D_m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$; 2) $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_m \subset \dots \subset D$, $\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m = D$.

Если для любой такой последовательности $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ существует $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{D_m} f dx$, то существует и $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{D_m} |f| dx$.

Заметим, что символ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ имеет два различных определения:

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx \quad \text{и} \quad \lim_{D_m} \int f(x) dx,$$

где $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ — исчерпание луча $[a; +\infty)$.

Чтобы пояснить разницу между исчерпанием луча промежутками и произвольными жордановыми множествами, рассмотрим следующий пример.

Пример 15.63. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [n-1; n-\frac{1}{2}), \\ -\frac{1}{n}, & x \in [n-\frac{1}{2}; n), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для $B > 0$ имеем:

$$0 \leq \int_0^B f(x) dx = \int_0^{[B]} f(x) dx + \int_{[B]}^B f(x) dx = 0 + \int_{[B]}^B f(x) dx \leq \frac{1}{[B]+1},$$

следовательно, $\lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B f(x) dx = 0$, т. е. интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ сходится. С другой стороны, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, поэтому существует такая возрастающая последовательность целых чисел $p(m)$, что $p(1) = 0$ и $\sum_{k=p(m)+1}^{p(m+1)} \frac{1}{k} > m$. Положим

$$D_1 = \bigcup_{k=1}^{p(2)} [k-1; k-\frac{1}{2}], \quad D_m = [0; p(m)] \cup \left(\bigcup_{k=p(m)+1}^{p(m+1)} [k-1; k-\frac{1}{2}] \right), \quad m \geq 2.$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ множество D_m жорданово, как объединение конечного числа отрезков, $D_{m-1} \subset [0; p(m)] \subset D_m$. Следовательно, $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ есть исчерпание луча $D = [0; +\infty)$. Поскольку

$$\int_{D_m} f(x) dx = \int_0^{p(m)} f(x) dx + \sum_{k=p(m)+1}^{p(m+1)} \int_{k-1}^{k-1/2} f(x) dx = 0 + \frac{1}{2} \sum_{k=p(m)+1}^{p(m+1)} \frac{1}{k} > \frac{m}{2},$$

последовательность $\int_{D_m} f(x) dx$ расходится. □

Для многомерного случая имеет смысл только абсолютная сходимость несобственного интеграла, поэтому далее все свойства этого интеграла формулируются для неотрицательных функций $f: D \rightarrow \mathbb{R}^+$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$).

Теорема. Если $f: D \rightarrow \mathbb{R}^+$, $D \subset \mathbb{R}^n$, то из существования предела для одного исчерпания $\{D_m\}$ множества D следует его существование для любого другого исчерпания, т. е. сходимость интеграла $\int_D f dx$.

Теорема сравнения (мажорантный признак сходимости несобственного интеграла). Если функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}^+$, $D \subset \mathbb{R}^n$, интегрируемы на одних и тех же жордановых подмножествах множества D и $f(x) \leq g(x)$, $x \in D$, то из сходимости интеграла $\int_D g dx$ следует сходимость интеграла $\int_D f dx$.

Пример 15.64. Исследуем на сходимость интеграл

$$\iiint_D \frac{f(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} dx dy dz,$$

где $D = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$, $f \in C(D)$ и $0 \leq M_1 \leq |f(x, y, z)| \leq M_2$ для всех $(x, y, z) \in D$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку

$$\frac{M_1}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} \leq \frac{|f(x, y, z)|}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} \leq \frac{M_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^p},$$

рассматриваемый интеграл и интеграл $\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^p}$ или оба сходятся, или оба расходятся. Последовательность $\{D_m\}_{m=1}^\infty$, $D_m = \{(x, y, z): 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq m^2\}$ является исчерпанием множества D . Переходя к сферическим координатам, получаем:

$$\iiint_{D_m} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_1^m \frac{dr}{r^{2p-2}} = 4\pi \int_1^m \frac{dr}{r^{2p-2}},$$

следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \iiint_{D_m} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} = \lim_{m \rightarrow \infty} 4\pi \int_1^m \frac{dr}{r^{2p-2}} = 4\pi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}},$$

откуда следует, что рассматриваемый интеграл сходится при $p > 3/2$ и расходится при $p \leq 3/2$. \square

Пример 15.65. Исследуем на сходимость интеграл $\iint_D \frac{f(x, y) dx dy}{(x^2 + y^2)^p}$, $f \in C(D)$,

где $D = \{(x, y): 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ и $0 < M_1 \leq |f(x, y)| \leq M_2$ для всех $(x, y) \in D$.

РЕШЕНИЕ. Так же как и в предыдущем примере, рассматриваемый интеграл сходится или расходится одновременно с интегралом $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p}$.

Последовательность $D_m = \{(x, y): \frac{1}{m^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ является исчерпанием множества D . Переходя к полярным координатам, получаем:

$$\iint_{D_m} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1/m}^1 \frac{dr}{r^{2p-1}} = 2\pi \int_{1/m}^1 \frac{dr}{r^{2p-1}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \iint_{D_m} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p} = \lim_{m \rightarrow \infty} 2\pi \int_{1/m}^1 \frac{dr}{r^{2p-1}} = 2\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-1}},$$

т. е. рассматриваемый интеграл сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$. \square

Теорема о замене переменных в несобственном интеграле. Пусть φ — отображение открытого множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ в открытое множество $D_x \subset \mathbb{R}^n$. Если существуют такие множества $S_t \subset D_t$ и $S_x \subset D_x$ меры нуль, что

- 1) множества $D_t \setminus S_t$ и $D_x \setminus S_x$ открыты,
- 2) отображение $\varphi: D_t \setminus S_t \rightarrow D_x \setminus S_x$ регулярно,
- 3) якобиан $\det J_\varphi$ отображения φ определён на D_t ,

то для любой функции $f: D_x \rightarrow \mathbb{R}_+$ из сходимости интеграла $\int_{D_x} f dx$ следует сходимость интеграла $\int_{D_t} (f \circ \varphi) \cdot |\det J_\varphi| dt$ и их равенство.

Пример 15.66. Найдём условие на параметры p и q , при котором интеграл $\iint_D \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$, где $D = \{(x, y) : 0 < |x| + |y| < 1\}$, сходится.

РЕШЕНИЕ. В силу симметрии множества D и чётности подынтегральной функции как по x , так и по y сходимость данного интеграла эквивалентна сходимости интеграла $\iint_{D_1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$, где

$$D_1 = \{(x, y) : 0 < |x| + |y| < 1, x > 0, y > 0\}.$$

Если хотя бы одно из чисел p и q неположительно, то функция $f(x, y) = \frac{1}{|x|^p + |y|^q}$ непрерывна и ограничена на жордановом множестве D_1 , следовательно, интегрируема в смысле Римана на D_1 ; поэтому будем рассматривать данный интеграл при условии $p > 0, q > 0$. Для любой такой пары (p, q) существует такое число $a > 0$, что кривая $|x|^p + |y|^q = a$ лежит в множестве D .

Пусть $\tilde{D} = \{(x, y) : |x|^p + |y|^q \leq a, x > 0, y > 0\}$. При $(x, y) \in D_1 \setminus \tilde{D}$ имеем $|x|^p + |y|^q \geq a$, поэтому функция $f(x, y) = \frac{1}{|x|^p + |y|^q}$ интегрируема в смысле Римана на $D_1 \setminus \tilde{D}$, следовательно, сходимость рассматриваемого интеграла эквивалентна сходимости интеграла $\iint_{\tilde{D}} \frac{dx dy}{x^p + y^q}$.

Перейдём к переменным r, φ по формулам $x = (r \cos^2 \varphi)^{1/p}, y = (r \sin^2 \varphi)^{1/q}$:

$$\iint_{\tilde{D}} \frac{dx dy}{x^p + y^q} = \frac{2}{pq} \iint_G r^{1/p+1/q-2} \cos^{2/p-1} \varphi \sin^{2/q-1} \varphi d\varphi dr,$$

где $G = \{(r, \varphi) : 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < r \leq a\}$.

Последовательность $\{G_n\}$, $G_n = \left\{ (r, \varphi) : \frac{1}{2n} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{a}{2n} \leq r < a \right\}$, является исчерпанием множества G . Поскольку

$$\begin{aligned} \iint_{G_n} \cos^{2/p-1} \varphi \sin^{2/q-1} \varphi r^{1/p+1/q-2} d\varphi dr &= \\ &= \left(\int_{1/(2n)}^{\pi/2-1/(2n)} \cos^{2/p-1} \varphi \sin^{2/q-1} \varphi d\varphi \right) \int_{a/(2n)}^a r^{1/p+1/q-2} dr, \end{aligned}$$

получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} r^{1/p+1/q-2} \cos^{2/p-1} \varphi \sin^{2/q-1} \varphi d\varphi dr$$

существует, если сходятся интегралы

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2/p-1} \varphi \sin^{2/q-1} \varphi d\varphi \text{ и } \int_0^a r^{1/p+1/q-2} dr.$$

Первый интеграл является сходящимся интегралом для любой пары (p, q) , $p > 0$, $q > 0$. Для второго интеграла необходимым и достаточным условием сходимости является выполнение неравенства $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 2 > -1$ ($p > 0$, $q > 0$).

Итак, интеграл $\iint_D \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$ сходится, если $\min\{p, q\} \leq 0$ или $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, и расходится, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ и $\min\{p, q\} > 0$. \square

Повторный интеграл $\int_M dx \int_{M(x)} f(x, y) dy$ называется *сходящимся*, если интеграл $\int_{M(x)} f(x, y) dy$ сходится для всех $x \in M \setminus E$, где $E \subset M$ — множество меры нуль, и сходится интеграл $\int_M \Phi(x) dx$, где

$$\Phi(x) = \begin{cases} \int_{M(x)} f(x, y) dy, & x \in M \setminus E, \\ 0, & x \in E. \end{cases}$$

Теорема (сведение несобственного кратного интеграла к повторному). Пусть $D = \{(x, y) : x \in M, y \in M(x)\}$ и $f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D$. Тогда равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_M dx \int_{M(x)} f(x, y) dy \quad (2)$$

справедливо в том смысле, что либо кратный и повторный интегралы одновременно расходятся, либо одновременно сходятся и равны по величине.

DeVU/Wnu8vg9d4=

Итак, для неотрицательной функции переход от несобственного кратного интеграла к повторному даёт возможность или вычислить кратный интеграл, или установить его расходимость.

Пример 15.67. Вычислим или установим расходимость интеграла

$$\iint_D \frac{y \, dx \, dy}{\sqrt{y+y^3}(x^2+y^2)}, \quad \text{где } D = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in (0; +\infty)\}.$$

РЕШЕНИЕ. Функция $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{y+y^3}(x^2+y^2)}$ неотрицательна на множестве D . В силу предыдущей теоремы

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y \, dx \, dy}{\sqrt{y+y^3}(x^2+y^2)} &= \int_0^{+\infty} \frac{y \, dy}{\sqrt{y+y^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2} = \int_0^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{y+y^3}} \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Big|_{-\infty}^{+\infty} dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\pi \, dy}{\sqrt{y+y^3}} = \frac{\pi}{2} B\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл $\iint_D \frac{y \, dx \, dy}{\sqrt{y+y^3}(x^2+y^2)}$ сходится и равен $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$. \square

Пример 15.68. Вычислим или установим расходимость интеграла

$$\iiint_D \frac{dx \, dy \, dz}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)},$$

где $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < z^2, z > 0\}$.

РЕШЕНИЕ. Функция $f(x, y, z)$ неотрицательна на множестве D . По теореме о сведении несобственного кратного интеграла к повторному

$$\iiint_D \frac{dx \, dy \, dz}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)} = \int_0^{+\infty} dz \iint_{D(z)} \frac{dx \, dy}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)},$$

где $D(z) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq z^2\}$, и поскольку интеграл

$$\iint_{D(z)} \frac{dx \, dy}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z \frac{dr}{r(z^2+r^2 \cos^2 \varphi)(z^2+r^2 \sin^2 \varphi)}$$

расходится, заключаем, что расходится и интеграл

$$\iiint_D \frac{dx \, dy \, dz}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)}. \quad \square$$

Если функция $f(x, y)$ на множестве D не сохраняет знака, то расходимость повторного интеграла в равенстве (2) показывает, что и кратный интеграл расходится, а сходимость повторного показывает только то, что в случае сходимости кратного интеграла его величина равна повторному. Поэтому в таком случае необходимо убедиться в сходимости кратного интеграла. Наиболее простым и распространённым методом для этого является рассмотрение интеграла $\int_D |f(x, y)| \, dx \, dy$ в силу теоремы о сходимости кратного интеграла и абсолютной его сходимости. Интеграл от неотрицательной функции $|f(x, y)|$ исследуется на сходимость или сведением к повторному, как было рассмотрено выше, или применением мажорантного признака.

Пример 15.69. Исследуем на сходимость интеграл $\iint_D \frac{\cos(x+y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy$, где $D = \{(x, y) : x + y > 1\}$.

Решение. Сделаем поворот осей координат так, чтобы косинус стал функцией одного аргумента; а именно, положим $x + y = u\sqrt{2}$, $x - y = v\sqrt{2}$. Поворот — изометрическое преобразование плоскости, и сумма квадратов координат является инвариантом этого преобразования, поэтому

$$\iint_D \frac{\cos(x+y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy = \iint_{\Omega} \frac{\cos(\sqrt{2}u)}{(u^2+v^2)^p} du dv,$$

где $\Omega = \{(u, v) : u \in (\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty), v \in \mathbb{R}\}$. Интеграл $\iint_{\Omega} \frac{\cos(\sqrt{2}u)}{(u^2+v^2)^p} du dv$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int_{\sqrt{2}/2}^{+\infty} |\cos \sqrt{2}u| du \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(u^2+v^2)^p}$.

Делая в интеграле $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(u^2+v^2)^p}$ замену $v = u \operatorname{tg} t$, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(u^2+v^2)^p} = \frac{K(p)}{u^{2p-1}}, \quad \text{где } K(p) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2p-2} t dt.$$

Последний интеграл сходится тогда и только тогда, когда $2 - 2p < 1$, т. е. $p > 1/2$. Значит, при $p \leq 1/2$ исходный интеграл расходится, а при $p > 1/2$:

$$\iint_{\Omega} \frac{|\cos \sqrt{2}u|}{(u^2+v^2)^p} du dv = K(p) \int_{\sqrt{2}/2}^{+\infty} \frac{|\cos \sqrt{2}u|}{u^{2p-1}} du.$$

Этот интеграл сходится тогда и только тогда, когда $2p - 1 > 1$, т. е. $p > 1$. Итак, интеграл $\iint_D \frac{\cos(x+y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. \square

Замечание 1. Обратим внимание, что повторный интеграл

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{+\infty} \cos(\sqrt{2}u) du \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(u^2+v^2)^p} = \int_{1/\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{2}u)}{u^{2p-1}} K(p) du$$

сходится при $p > 1/2$, но при $1/2 < p \leq 1$ интеграл $\int_{1/\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{2}u)}{u^{2p-1}} K(p) du$

сходится условно. Здесь опять играет роль отсутствие условной сходимости в n -кратном ($n \geq 2$) несобственном интеграле.

Замечание 2. Используя мажорантный признак: $\frac{|\cos(x+y)|}{(x^2+y^2)^p} \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^p}$, получаем, что рассматриваемый интеграл сходится при $p > 1$, так как интеграл $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^p}$ сходится при $p > 1$ (см. выше). Но таким образом нельзя проверить, что этот интеграл расходится для $p < 1$. Мажорантный признак в данном случае даёт только достаточное условие сходимости интеграла.

Пример 15.70. Вычислим или установим расходимость интегралов

$$\text{а) } \iint_D \frac{x-y}{x^2+y^2} dx dy; \quad \text{б) } \iint_D \frac{x-y}{x^4+y^4} dx dy,$$

где $D = \{(x, y) : x + y > 1, x > 0, y > 0\}$.

Решение. Последовательность $\{D_n\}$, где

$$D_n = \{(x, y) : x + y > 1, 0 < x < n, 0 < y < n\},$$

является исчерпанием множества D . Множества D_n симметричны относительно прямой $y=x$, а подынтегральные функции как в первом, так и во втором интеграле меняют знак при перестановке местами переменных x и y , поэтому

$$\iint_{D_n} \frac{x-y}{x^2+y^2} dx dy = \iint_{D_n} \frac{x-y}{x^4+y^4} dx dy = 0$$

и, следовательно, если данный интеграл сходится, то он равен нулю. Значит, для решения задачи осталось исследовать на сходимость интегралы

$$I_1 = \iint_D \frac{|x-y|}{x^2+y^2} dx dy \quad \text{и} \quad I_2 = \iint_D \frac{|x-y|}{x^4+y^4} dx dy.$$

В силу указанной выше симметрии имеем:

$$I_1 = 2 \iint_{D_1} \frac{x-y}{x^2+y^2} dx dy, \quad I_2 = 2 \iint_{D_1} \frac{x-y}{x^4+y^4} dx dy,$$

где $D_1 = \{(x, y) : x + y > 1, x > 0, 0 < y < x\}$.

Поскольку подынтегральные функции в обоих интегралах непрерывны при $(x, y) \in D_1$, сходимость этих интегралов эквивалентна соответственно сходимости интегралов

$$\tilde{I}_1 = \iint_{D_2} \frac{x-y}{x^2+y^2} dx dy \quad \text{и} \quad \tilde{I}_2 = \iint_{D_2} \frac{x-y}{x^4+y^4} dx dy,$$

где $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1, x > 0, 0 < y < x\}$.

Переходя к полярным координатам, получаем, что

$$\tilde{I}_1 = \int_0^{\pi/4} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi \int_1^{\infty} dr - \text{интеграл расходится,}$$

$$\tilde{I}_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \varphi - \sin \varphi}{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi} d\varphi \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^2} - \text{интеграл сходится.}$$

Итак, интеграл $\iint_D \frac{x-y}{x^2+y^2} dx dy$ расходится, а интеграл $\iint_D \frac{x-y}{x^4+y^4} dx dy$ сходится и равен нулю. □

Пример 15.71. Вычислим или установим расходимость интеграла

$$\iiint_D e^{-x^2(y^2+z^2)} \sin x \, dx \, dy \, dz, \quad \text{где } D = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Решение. Рассмотрим повторный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx \iint_{y>0, z>0} e^{-x^2(y^2+z^2)} \, dy \, dz = \int_0^{+\infty} \sin x \, dx \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-x^2 r^2} r \, dr.$$

Интеграл $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-x^2 r^2} r \, dr$ сходится для всех $x > 0$ и равен $\frac{\pi}{4x^2}$, а интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sin x}{x^2} \, dx$ расходится вместе с интегралом $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, так как $\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0+$. Итак, рассматриваемый интеграл расходится. \square

Пример 15.72. Вычислим или установим расходимость интеграла

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} \cos(x+y-z) \, dx \, dy \, dz.$$

Решение. Начнём с проверки сходимости этого интеграла. Поскольку $|e^{-(x^2+y^2+z^2)} \cos(x+y-z)| \leq e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ и интеграл

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^2 \, dr$$

сходится, заключаем, что сходится и интеграл

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} \cos(x+y-z) \, dx \, dy \, dz.$$

Сделаем поворот координатных осей так, чтобы косинус зависел только от одной переменной, т. е. ось Ou берётся перпендикулярно к плоскости $x+y-z=0$, а оси Ov и Ow берутся по любой паре ортогональных векторов в плоскости $x+y-z=0$. Поворот координат — изометрическое преобразование пространства, и сумма квадратов координат является инвариантом этого преобразования, поэтому

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} \cos(x+y-z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(u^2+v^2+w^2)} \cos(u\sqrt{3}) \, du \, dv \, dw.$$

Переходя к повторному интегралу, получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(u^2+v^2+w^2)} \cos(u\sqrt{3}) \, du \, dv \, dw &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cos(u\sqrt{3}) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r \, dr = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cos(u\sqrt{3}) \, du = \pi \sqrt{\pi} e^{-3/4}. \end{aligned}$$

Последний интеграл вычисляется методом дифференцирования по параметру, описанным в томе 2 (см. пример 12.36). \square

Задачи¹

✓ 15.1. Вычислить $\iint_D (x+y) dx dy$, где $D = [1; 2] \times [1; 3]$, рассмотрев интегральные суммы, соответствующие разбиению D на прямоугольники размером $1/n$ на $2/n$ с отмеченными точками в правых верхних вершинах этих прямоугольников.

Для указанной функции f вычислить $\iint_D f(x, y) dx dy$, где $D = [0; 1] \times [0; 1]$, рассмотрев верхние и нижние суммы Дарбу, соответствующие разбиению D на квадраты со стороной $1/n$ (15.2–15.4).

15.2. $f(x, y) = 2x - y$. ✓ 15.3. $f(x, y) = xy$. 15.4. $f(x, y) = x^2 + y^2$.

В двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$, где $f \in C(D)$, расставить пределы интегрирования в том и в другом порядке для указанной фигуры D (15.5–15.34).

✓ 15.5°: D — плоский треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(1, 0)$.

15.6°: D — плоский треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(1, -1)$.

✓ 15.7°: $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq x\}$.

15.8°: $D = \{(x, y) : |x - 2| + |y - 2| \leq 2\}$.

✓ 15.9. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.

✓ 15.10. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 2x + 2y - 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

15.11. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 2x + 2y - 1, 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

✓ 15.12. $D = \{(x, y) : 0 < xy \leq 1, y \geq 0, x \geq 0, y - 2x \leq 0, 2y - x \geq 0\}$.

15.13. $D = \{(x, y) : y \geq x^2, 2y \leq x^2 + 1\}$.

15.14. $D = \{(x, y) : y \geq x^2, 2y \leq x^2 + 1, 2y \geq -2x^2 + 1, x \geq 0\}$.

15.15. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, (x - 2)^2 + y^2 \geq 1, (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \geq 1, x^2 + (y - 2)^2 \geq 1\}$.

15.16. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4a^2, (x - a)^2 + y^2 \geq a^2, (x + a)^2 + y^2 \geq a^2\}$.

15.17. $D = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 8a^2, x^2 - y^2 \geq 2a^2\}$, $M(2a, 0) \in D$.

✓ 15.18. $D = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 16a^2, x^2 - y^2 \leq a^2\}$.

15.19. D ограничена линиями $2x = \sin \pi y$, $y = (1 + x)^2$, $y = 0$.

15.20. D ограничена линиями $x = \cos \pi y$, $y^2 - \frac{1}{4} - x = 0$.

15.21. D ограничена линиями $x = |y|$, $y^2 = 4(x - 1)$, $M(\frac{1}{2}, 0) \in D$.

15.22. D ограничена линиями $y = |x| - 1$, $y = \cos \frac{\pi x}{2}$.

✓ 15.23. D ограничена линиями $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$.

15.24. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2, (x - a)^2 + (y - a)^2 \leq a^2\}$.

15.25. $D = \{(x, y) : x - y - 1 \leq 0, x + y - 1 \leq 0, y^2 \leq 2x + 1\}$.

¹ Все буквенные параметры в дальнейшем считаются положительными.

- 15.26. $D = \{(x, y) : (x+1)^2 + y^2 \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
- ✓ 15.27. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq a^2, y^2 \leq a^2 - \frac{ax}{2}\}$.
- 15.28. $D = \{(x, y) : y^2 \leq x+2, y \geq x\}$.
- 15.29. $D = \{(x, y) : (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 1, x+y-1 \leq 0, y \geq 0\}$.
- 15.30. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x+y-1 \leq 0, y \geq 0\}$.
- 15.31. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x+y-1 \leq 0, x+y+1 \geq 0\}$.
- 15.32. $D = \{(x, y) : -x \leq 2y \leq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- 15.33. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 1, y \geq 0\}$.
- 15.34. $D = \{(x, y) : y^2 \leq 2x+4, y^2 \geq 4x+4\}$.

Изменить порядок интегрирования в интеграле (15.35–15.59).

- ✓ 15.35°: $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy$.
- 15.36°: $\int_0^4 dx \int_{1+x/2}^{7-x} f(x, y) dy$.
- 15.37. $\int_0^6 dx \int_{x^2/6-1}^{x-1} f(x, y) dy$.
- 15.38. $\int_0^2 dy \int_{4-2y^2}^{4-y^2} f(x, y) dx$.
- 15.39°: $\int_0^1 dx \int_{x^4}^{x^2} f(x, y) dy$.
- ✓ 15.40. $\int_0^1 dy \int_0^{2y-y^2} f(x, y) dx$.
- 15.41. $\int_0^1 dy \int_{-1+\sqrt{y}}^{\cos(\pi y/2)} f(x, y) dx$.
- 15.42. $\int_0^2 dx \int_0^{(x-1)^2} f(x, y) dy$.
- 15.43. $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy$.
- ✓ 15.44. $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{3\sqrt{x}} f(x, y) dy$.
- 15.45. $\int_{-7}^1 dy \int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x, y) dx$.
- 15.46. $\int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx$.
- ✓ 15.47. $\int_0^1 dy \int_{y^2/9}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{y^2/9}^1 f(x, y) dx$.
- ✓ 15.48. $\int_3^7 dy \int_{9/y}^3 f(x, y) dx + \int_7^9 dy \int_{9/y}^{10-y} f(x, y) dx$.
- 15.49. $\int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1/\sqrt{2}}^0 dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$.
- 15.50. $\int_0^2 dx \int_{(x-1)^2}^{\sqrt{5-x^2}} f(x, y) dy$.
- 15.51. $\int_{-a}^a dx \int_{\frac{4a}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{x}{a} \right|}^{2a/(a^2+x^2)} f(x, y) dy$.

$$15.52. \int_{\pi/4}^{5\pi/4} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x, y) dy.$$

$$15.53. \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx.$$

$$15.54. \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

$$\sqrt{15.55.} \int_0^3 dy \int_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$15.56. \int_{a/2}^a dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$15.57. \int_0^a dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$\sqrt{15.58.} \int_0^{a/2} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{a/2}^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$15.59. \int_0^a dy \int_{y^2/4a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx + \int_a^{2a\sqrt{2}} dy \int_{y^2/4a}^{2a} f(x, y) dx.$$

Изменив порядок интегрирования, вычислить интеграл (15.60–15.63).

$$\sqrt{15.60.} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} e^{-x^2+2x+1} dx.$$

$$15.61. \int_0^2 x^2 dx \int_x^2 \ln(1+y^2) dy.$$

$$15.62. \int_0^{\pi} x dx \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy.$$

$$15.63. \int_0^1 x dx \int_{x^2}^x \frac{y^2 dy}{x^4+y^4}.$$

Вычислить интеграл (15.64–15.74).

$$15.64^{\circ} \text{ а) } \int_0^1 dx \int_0^2 \frac{x^2 dy}{1+y^2}; \quad \text{б) } \int_0^2 dx \int_0^1 \frac{x^2 dy}{1+y^2}.$$

$$15.65. \text{ а) } \int_1^2 dx \int_3^4 \frac{dy}{(x+y)^2}; \quad \text{б) } \int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}.$$

$$\sqrt{15.66.} \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

$$\sqrt{15.67.} \int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} xy dy.$$

$$\sqrt{15.68.} \iint_D x^3 y^5 dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}.$$

$$15.69^{\circ} \iint_D x^2 dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}.$$

$$\sqrt{15.70.} \iint_D xy dx dy, \text{ где фигура } D \text{ ограничена осями координат и кривой}$$

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$15.71. \iint_D ([x] + [y]) dx dy, \text{ где фигура } D \text{ есть плоский квадрат с вершинами } O(0, 0), A(0, 2), B(2, 0), C(2, 2).$$

$$\sqrt{15.72.} \iint_D \operatorname{sgn}(x^2 + y^2 - 4) dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

$$15.73. \iint_D \sqrt{|x - y^2|} dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : |y| \leq 1, 0 \leq x \leq 2\}.$$

$$15.74. \iint_D [\sqrt{x^2 + y^2}] dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

В двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам r и φ , полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, и записать интеграл в виде $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r, \varphi) dr$ (15.75—15.100).

$$\sqrt{15.75^\circ} D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}. \quad \sqrt{15.76^\circ} D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}.$$

$$15.77^\circ D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2, y \leq 0\}.$$

$$15.78. D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq ax\}. \quad \sqrt{15.79.} D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq ay\}.$$

$$\sqrt{15.80.} D = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \right\}.$$

$\sqrt{15.81.} D$ — плоский треугольник с вершинами $O(0, 0)$ и а) $A(1, 0), B(0, 1);$
б) $A(1, 1), B(-1, 1);$ в) $A(1, 0), B(1, 1)$.

$$15.82. D$$
 — квадрат с вершинами $O(0, 0), A(0, 1), B(1, 0), C(1, 1)$.

$$15.83. D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y - 2x \leq 0, 2y - x \geq 0, x \geq 0\}.$$

$$15.84. D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}.$$

$$15.85. D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}.$$

$$15.86. D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq x \leq 2\}.$$

$$\sqrt{15.87.} D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

$\sqrt{15.88.} D$ — фигура, лежащая внутри окружности $x^2 + y^2 = 1$ и вне кривой $r = \cos 3\varphi$.

15.89. D — фигура, лежащая вне окружности $x^2 + y^2 = a^2$ и внутри кривой а) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2);$ б) $r = 2a \sin 3\varphi;$ в) $r = 2a(1 + \cos \varphi)$.

$$15.90. D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

$$15.91. D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y - x \leq 0, 2y - x \geq 0\}.$$

$$15.92. D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}.$$

$$15.93. D = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, -1 \leq x \leq 0\}.$$

$$15.94. D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y + x \geq 0\}.$$

$$\sqrt{15.95.} D = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 \leq a^2 xy\}.$$

$$15.96. D = \{(x, y) : |x - 1| + |y| \leq 1\}.$$

$$15.97. D = \{(x, y) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq a(y + \sqrt{x^2 + y^2})\}.$$

$$15.98. D = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{a^2 y^2}{x^2} \leq 3a^2, x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

$$15.99. D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \max\{2ax, 2ay\}\}.$$

$$15.100. D = \{(x, y) : \min\{a(\sqrt{x^2 + y^2} + x), 3a(\sqrt{y^2 + x^2} - x)\} \leq x^2 + y^2 \leq 4a^2\}.$$

DeVU/Wnu8vg9d4=

Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл (15.101—15.106).

$$\sqrt{15.101^\circ} \iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

$$15.102. \iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq a^2\}.$$

$$15.103. \iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2} dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq ax\}.$$

$$15.104. \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq ay\}.$$

$$15.105. \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

$$\checkmark 15.106. \iint_D \frac{x dx dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \text{ где } D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq ax\}.$$

Ввести новые переменные u и v и вычислить интеграл (15.107–15.115).

$$15.107. \iint_D (x^2y^2+y^2) dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}, x \leq y \leq 3x\}.$$

$$\checkmark 15.108. \iint_D \frac{(x+y)^2}{x} dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : 1-x \leq y \leq 3-x, \frac{x}{2} \leq y \leq 2x\}.$$

$$\checkmark 15.109. \iint_D (x^3+y^3) dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 3x^2, \frac{1}{x} \leq 2y \leq \frac{3}{x}\}.$$

$$\checkmark 15.110. \iint_D xy(x+y) dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : -1 \leq x-y \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}\}.$$

$$15.111. \iint_D x^2 dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : x^3 \leq y \leq 2x^3, x \leq 2y \leq 6x\}.$$

$$15.112. \iint_D xy(x+y) dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : x-1 \leq y \leq x+1, -x-1 \leq y \leq -x+1\}.$$

$$15.113. \iint_D xy dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : ax^3 \leq y \leq bx^3, px \leq y^2 \leq qx\}.$$

$$15.114. \iint_D xy dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : ax^2 \leq y^3 \leq bx^2, ax \leq y \leq \beta x\}.$$

$$\checkmark 15.115. \iint_D \frac{x^2 \sin xy}{y} dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) : ay \leq x^2 \leq by, px \leq y^2 \leq qx\}.$$

$$\checkmark 15.116. \text{ Вычислить } \iint_D \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^3 dx dy, \text{ где фигура } D \text{ ограничена кри-}$$

вой $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ и осями координат.

$$15.117. \text{ Вычислить } \iint_D xy dx dy, \text{ где } D \text{ — фигура, ограниченная петлёй кри-}$$

вой $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2y}{c^3}$, находящейся в первом координатном угле.

$$15.118. \text{ Вычислить } \iint_D \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} dx dy, \text{ где } D \text{ — фигура, ограниченная}$$

осями координат и кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

15.119. Доказать, что если $\varphi(u)$ — непрерывная на $[0; 1]$ функция, то

$$\iint_D \varphi(x+y)x^{p-1}y^{q-1} dx dy = B(p, q) \int_0^1 \varphi(u)u^{p+q-1} du,$$

где D есть плоский треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

15.120. Вычислить $\iint_D x^p y^q (1-x-y)^r dx dy$, где фигура D ограничена осями координат и прямой $x+y=1$.

15.121*. Доказать, что $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos(2z \sin \varphi \sin \theta) d\varphi d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} \cos(z \sin \lambda) d\lambda \right)^2$.

Переходя к полярным координатам $x=r \cos \varphi$, $y=r \sin \varphi$ либо обобщённым полярным координатам $x=ar \cos^\alpha \varphi$, $y=br \sin^\alpha \varphi$, вычислить площадь фигуры D , ограниченной указанными кривыми (15.122–15.141).

15.122°. $(x^2+y^2)^2=2ax^3$. **15.123°.** $(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)$.

15.124. $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$.

15.125. $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=by$, $M\left(\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}, \frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}\right) \in D$.

✓ **15.126.** $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$.

✓ **15.127.** $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2$.

15.128. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{c^2}$.

15.129. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3 = \frac{x^4 y}{c^5}$.

15.130. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3 = \frac{x^4}{h^4} + \frac{y^4}{k^4}$.

✓ **15.131.** $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2 y}{c^3}$.

15.132. $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$.

15.133. $\frac{x^6}{a^6} + \frac{y^6}{b^6} = \frac{y^4}{h^4} + \frac{y^4}{k^4}$.

✓ **15.134.** $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$, $y=0$.

15.135. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x^2}{h^2}$, $y=0$.

15.136*. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}$, $y=0$.

15.137*. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^5 = \frac{x^3}{h^3} - \frac{y^3}{k^3}$, $y=0$.

15.138. $\sqrt[n]{\frac{x}{a}} + \sqrt[n]{\frac{y}{b}} = 1$, $x=0$, $y=0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

15.139. $2^{2n+1} \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2} + 2^{2n+1} \sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)^2} = 1$. **15.140.** $bx^{2n} + ay^{2n} = c^3(xy)^{n-1}$.

15.141. $bx^{2n} + ay^{2n} = c^3x^{2n-2} + d^3y^{2n-2}$.

Найти площадь петли кривой (15.142–15.144).

15.142. $(x+y)^4 = ax^2y$. ✓ **15.143.** $(x+y)^3 = axy$. **15.144.** $(x+y)^5 = ax^2y^2$.

Производя подходящую замену переменных, найти площадь, ограниченную указанными кривыми, если $0 < a < b$, $0 < c < d$, $0 < p < q$ (15.145–15.156).

15.145°. $xy=p$, $xy=q$, $y^2=ax$, $y^2=bx$.

✓ **15.146°.** $xy=p$, $xy=q$, $y=ax$, $y=bx$.

15.147°. $x^2=py$, $x^2=qy$, $y=ax$, $y=bx$.

15.148. $y=ax^3$, $y=bx^3$, $y^2=px$, $y^2=qx$.

15.149. $y = \frac{x^5}{a^4}$, $y = \frac{x^5}{b^4}$, $x = \frac{y^5}{c^4}$, $x = \frac{y^5}{d^4}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

- 15.150. $y = \frac{x^2}{a}$, $y = \frac{x^2}{b}$, $y^2 = \frac{x^3}{c}$, $y^2 = \frac{x^3}{d}$.
- 15.151. $y = \frac{x^3}{a^2}$, $y = \frac{x^3}{b^2}$, $y = \frac{x^2}{c}$, $y = \frac{x^2}{d}$.
- 15.152. $y = \frac{x^4}{a^3}$, $y = \frac{x^4}{b^3}$, $xy = c^2$, $xy = d^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
- ✓ 15.153. $x^2 + y^2 = ay$, $x^2 + y^2 = by$, $x = cy$, $x = dy$.
- 15.154. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{b}$, $y = px$, $y = qx$.
- ✓ 15.155. $(x + 2y - 1)^2 + (2x + y - 2)^2 = 9$.
- 15.156. $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$.
- Найти объём тела, заданного неравенствами (15.157–15.201).
- 15.157. $0 \leq z \leq x^2$, $x + y \leq 5$, $x - 2y \geq 2$, $y \geq 0$.
- ✓ 15.158°. $x + y + z \leq a$, $3x + y \geq a$, $3x + 2y \leq 2a$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
- ✓ 15.159°. $x + y \leq 1$, $z \leq x^2 + y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
- 15.160. $x + y \leq a$, $0 \leq 2bz \leq y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
- 15.161. $z^2 \leq 2px$, $y \leq x \leq a$, $y \geq 0$.
- 15.162. $z^2 \geq 2px$, $z^2 \geq 2qy$, $0 \leq z \leq a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
- 15.163. $y^2 \leq 2q(a - x)$, $z^2 \leq 2px$. 15.164. $0 \leq az \leq xy$, $x + y \leq a$.
- ✓ 15.165°. $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, $x + y + z - 4a \leq 0$.
- ✓ 15.166. $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x + y + z \leq a$, $z \geq 0$.
- ✓ 15.167. $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq az \leq a^2 - 2y^2$.
- 15.168°. $(x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)$, $0 \leq bz \leq x^2 + y^2$.
- 15.169. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1$. 15.170. $4x \geq y^2$, $4y \geq x^2$, $0 \leq z \leq y$.
- 15.171. $z \geq 0$, $x + z \leq 1$, $x \geq y^2$.
- ✓ 15.172. $ax \leq x^2 + y^2 \leq 2ax$, $0 \leq b^3z \leq x^2y^2$.
- ✓ 15.173. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$, $x^2 + y^2 \leq 2az$.
- 15.174°. $x^2 + y^2 \leq az \leq h^2$. 15.175. $0 \leq z \leq x$, $x^2 + y^2 \leq 2ax$.
- 15.176. $x^2 \leq by \leq b^2$, $0 \leq az \leq x^2 + y^2$.
- 15.177. $-x \leq y \leq x$, $x^2 + y^2 \leq az \leq 2x^2 + 2y^2$, $z \leq h$.
- 15.178. $x^2 \leq ay \leq bx$, $x^2 + y^2 \leq hz \leq 2x^2 + 2y^2$.
- ✓ 15.179. $x^2 + y^2 \leq az \leq a\sqrt{x^2 + y^2}$. 15.180. $0 \leq z \leq x^2 - y^2$, $2x + y \leq 1$.
- 15.181. $0 \leq z \leq 4 - x^2$, $x^2 - y^2 \geq 0$, $x \geq 0$.
- 15.182. $3x + 4y \leq 12a$, $0 \leq az \leq a^2 - y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
- 15.183. $(x - a)^2 + y^2 \leq az \leq 2a^2 - 2ax$.
- 15.184. $0 \leq z \leq 1 - y^2$, $0 \leq x \leq 2 - z$. 15.185. $x^2 \leq az \leq 4a^2 - x^2 - y^2$.
- 15.186. $0 \leq az \leq 4a^2 - x^2 - y^2$, $az + x^2 \leq a^2$.
- 15.187. $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, $x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, $x \geq 0$.
- 15.188. $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $x^2 + y^2 \geq a(a - 2z)$.
- 15.189. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2cz$, $x^2 + y^2 \geq 2az$, если а) $a < c \leq 2a$; б) $c \geq 2a$.
- 15.190°. $0 \leq z \leq c \exp\left(-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq R^2$.
- 15.191°. $0 \leq z \leq c \sin\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \pi$.
- 15.192. $0 \leq z \leq c \sin\left(\pi \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right)$, $4(n - 1)^2 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq (2n - 1)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

$$15.193. \frac{y^2}{b^2} \leq \left(1 - \frac{z}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad x \geq 0, z \geq 0.$$

$$15.194. 0 \leq z \leq c \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad |x| \leq a, |y| \leq b.$$

$$15.195. 0 \leq z \leq \frac{1}{(x+a)^k (y+b)^l}, \quad 0 \leq x \leq 2a, 0 \leq y \leq 2b, k > 1, l > 1.$$

$$15.196. 0 \leq z \leq xy \exp(-x^4 - y^4), \quad x^4 + y^4 \leq R^4.$$

$$15.197. 0 \leq z \leq (x+y) \exp(-x^3 - y^3), \quad x^3 + y^3 \leq R^3, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$15.198. 0 \leq z \leq y \sin\left(\pi\left(\frac{x}{y}\right)^4\right), \quad nx \leq y^2 \leq mx, \beta y \leq x \leq \alpha y,$$

$$m > n > 0, 0 < \beta < \alpha < 1.$$

$$15.199. 0 \leq c^2 z \leq \frac{x^3}{y^2} (x^2 + y^2), \quad \alpha y \leq x^2 \leq \beta y, m \leq y \leq n, 0 < \alpha < \beta, 0 < m < n.$$

$$15.200. r \leq a \sin 3\varphi, r^2 \leq a^2 - z^2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$15.201. \text{ а) } r \leq a \sqrt{\cos 2\varphi}, 0 \leq az \leq a^2 - r^2, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\text{ б) } r \leq a \sqrt{2 \cos 2\varphi}, 0 \leq az \leq a^2 - r^2, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Найти площадь поверхности (15.202–15.234).

$$15.202^\circ. z^2 = 2xy, \text{ если } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b.$$

$$\checkmark 15.203^\circ. z = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ если } x^2 + y^2 \leq 2ax.$$

$$\checkmark 15.204^\circ. 2z = x^2, \text{ если } x \leq 2y \leq 4x, x \leq 2\sqrt{2}.$$

$$15.205. cz = xy, \text{ если } (x^2 + y^2)^2 \leq 2c^2 xy, z \geq 0.$$

$$15.206. (x^2 + y^2)^3 = c^2 z^4, \text{ если } x^2 + y^2 \leq \frac{c^2}{16}.$$

$$15.207. 2az = x^2 + y^2, \text{ если } (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2), x \geq 0.$$

$$15.208. 2az = x^2 + y^2, \text{ если } x^2 + y^2 \leq a^2, y \leq x, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$\checkmark 15.209. 2az = x^2 + y^2, \text{ если } x^2 + y^2 + z^2 \leq 2cz, c > a.$$

$$15.210. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \text{ если } x + y \leq a, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$15.211. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \text{ если } x^2 + y^2 \leq z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha, z \geq 0.$$

$$15.212. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \text{ если } (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(y^2 - x^2).$$

$$15.213^*. x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz, \text{ если } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}.$$

$$15.214. z^2 = x^2 + a^2, \text{ если } y^2(2x^2 + a^2) \leq a^2 x^2, 0 \leq x \leq a.$$

$$15.215. y^2 + z^2 = 2ax, \text{ если } y^2 \leq ax \leq a^2.$$

$$\checkmark 15.216. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \text{ если } x^4 \leq a^2 x^2 - b^2 y^2, a < b.$$

$$15.217. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \text{ если } y^2 \geq a(a+x).$$

$$15.218. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \text{ если } x^3 + by^2 \leq a^2 x, b \geq a.$$

$$\checkmark 15.219. x^2 + y^2 = 2ax, \text{ если } z^2 \leq x^2 + y^2.$$

$$\checkmark 15.220. y^2 + x^2 = 2ax, \text{ если } 0 \leq az \leq x^2 + y^2.$$

$$15.221. x^2 = y^2 + z^2, \text{ если } x^2 - y^2 \leq a^2, |y| \leq b.$$

$$15.222. x^2 = y^2 + z^2, \text{ если } x^2 + y^2 \leq a^2. \quad 15.223. x^2 = y^2 + z^2, \text{ если } x^2 \leq ay.$$

$$15.224. x^2 + z^2 = 2ax, \text{ если } y^2 \leq 2px.$$

$$15.225. x^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}, \text{ если } y^2 \leq 2px.$$

$$15.226. x^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}, \text{ если } y^{2/3} + x^{2/3} \leq a^{2/3}.$$

$$15.227. x^2 = 2c(c-z), \text{ если } 0 \leq y \leq \alpha x, z \geq 0.$$

$$15.228. x^2 = 2c(c-z), \text{ если } z \geq 0, x^2 y^2 \leq a^2 x^2 - c^2 y^2.$$

$$15.229. x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = h\varphi, \text{ если}$$

$$\text{ а) } 0 \leq \varphi \leq r, 0 \leq r \leq 1; \quad \text{ б) } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \varphi.$$

$$\sqrt{15.230.} \quad x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = 4v, \quad x^2 + y^2 \leq 9, \quad 0 \leq z \leq 8\pi.$$

$$\sqrt{15.231.} \quad x = (a + b \cos v) \cos u, \quad y = (a + b \cos v) \sin u, \quad z = b \sin v; \quad 0 \leq v \leq u, \\ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \quad (a > b).$$

$$\sqrt{15.232.} \quad x = a \cos^3 u \cos \varphi, \quad y = a \cos^3 u \sin \varphi, \quad z = a \sin^3 u, \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \cos u.$$

$$15.233. \quad x = a \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + \cos t \right), \quad y = a \sin t \cos \varphi, \quad z = a \sin t \sin \varphi, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$15.234. \quad x = 3u + 3uv^2 - u^3, \quad y = v^3 - 3v - 3u^2v, \quad z = 3(u^2 - v^2), \quad 0 \leq v \leq 1, \\ 0 \leq u \leq v.$$

Найти объём и площадь поверхности тела, заданного неравенствами (15.235—15.239).

$$\sqrt{15.235.} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, \quad x^2 + y^2 \leq 2ax \quad (\text{тело Вивiani}).$$

$$\sqrt{15.236.} \quad x^2 + z^2 \leq a^2, \quad z^2 + y^2 \leq a^2.$$

$$15.237. \quad 0 \leq z \leq a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \quad x \geq 0.$$

$$15.238^*. \quad x^2 + y^2 \leq 2ax, \quad x^2 \geq y^2 + z^2.$$

$$15.239. \quad x^2 + y^2 \leq z^2, \quad az \leq 2a^2 - (x^2 + y^2).$$

Найти массу пластинки плотности ρ , ограниченной указанными линиями (15.240—15.246).

$$15.240^\circ. \quad y = x^2, \quad x + y = 2, \quad y - x = 2 \quad (x \geq 0), \quad \text{если } \rho = x + 2.$$

$$15.241^\circ. \quad x = y, \quad x - 3y = 1, \quad y = 1, \quad y = 3, \quad \text{если } \rho = y.$$

$$15.242. \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad x^2 + y^2 = 4y \quad (xy \geq 0), \quad \text{если } \rho = x.$$

$$15.243^\circ. \quad y^2 = x + 4, \quad y^2 = 4 - x, \quad y = 0 \quad (y \geq 0), \quad \text{если } \rho = y.$$

$$15.244. \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1, \quad \text{если } \rho = 4x^2 + 9y^2.$$

$$15.245. \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0), \quad \text{если } \rho = x + y.$$

$$15.246. \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (x \geq 0), \quad \text{если } \rho = x^2.$$

$\sqrt{15.247.}$ Найти массу круглой пластинки радиусом R , если плотность этой пластинки в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до центра пластинки и равна ρ_0 на краю пластинки.

$\sqrt{15.248.}$ Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны 1 и 3. Зная, что плотность материала пропорциональна расстоянию от центра окружностей, найти массу кольца, если его плотность на внутренней окружности равна единице.

15.249. Найти массу пластинки, имеющей форму кольца, радиусы внутренней и внешней окружности которого равны соответственно r и R , если плотность пластинки в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до центра кольца.

$\sqrt{15.250.}$ Найти массу квадратной пластинки со стороной a , если плотность пластинки в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от этой точки до одной из вершин квадрата и равна ρ_0 в центре квадрата.

15.251. Найти статические моменты однородного прямоугольника плотности ρ со сторонами a и b относительно его сторон.

15.252. Найти статический момент однородной пластинки плотности ρ , занимающей фигуру, ограниченную одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и отрезком прямой $y = 0$, относительно оси Ox .

15.253. Найти статический момент однородной пластинки плотности ρ , представляющей собой фигуру, ограниченную линиями $y = x^2$ и $y = \frac{2}{1+x^2}$, относительно оси Ox .

✓ **15.254.** Вычислить момент инерции однородного круга массой M и радиусом R , относительно точки на его окружности.

Вычислить момент инерции относительно заданной прямой однородной пластинки массой M , ограниченной указанными линиями (15.255—15.263).

15.255. $x^2 + y^2 = R^2$ относительно прямой, проходящей через центр круга и лежащей в его плоскости.

✓ **15.256.** $x^2 + y^2 = R^2$ относительно касательной к окружности этого круга.

15.257. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно большой и малой осей.

✓ **15.258.** $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, $y = 0$ относительно прямой $y = 1$.

15.259. $ay = x^2$, $x + y = 2a$ относительно каждой из осей координат.

15.260. $x^2 = 2py$, $y^2 = 2px$ относительно каждой из осей координат.

✓ **15.261.** $r = a(1 + \cos \varphi)$ относительно полярной оси.

15.262. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ относительно полярной оси.

15.263. $xy = 4$, $xy = 8$, $x = 2y$, $x = y$ ($y > 0$) относительно оси Oy .

15.264. Плотность в каждой точке прямоугольника пропорциональна квадрату расстояния от этой точки до одной из его вершин. Найти момент инерции этого прямоугольника относительно его сторон, проходящих через эту вершину, длины которых равны a и b .

15.265°. Найти момент инерции относительно начала координат однородной пластинки плотности ρ , представляющей собой фигуру, ограниченную линиями $x^2 + y^2 = 9$, $x + y = 0$, $x - y = 0$ ($x \geq 0$).

15.266. Найти координаты центра масс однородной пластинки, представляющей собой фигуру, ограниченную линиями: $y = x$, $y = -x$, $x = 1$, если плотность пластинки в каждой её точке численно равна расстоянию от этой точки до начала координат.

15.267. Найти координаты центра масс однородной пластинки, имеющей форму кругового сектора с углом α и радиусом R .

Найти координаты центра масс однородной пластинки плотности ρ , ограниченной линиями (15.268—15.291).

15.268. $y = x^2$, $y = 3x^2$, $y = 3x$. **15.269.** $y = 2x - 1$, $y^2 = x$, $y = 0$.

15.270. $y = 4 - x^2$, $y + 2x = 4$. **15.271.** $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$.

15.272. $y = 2x + 2$, $y^2 = -2x + 4$. **15.273°.** $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$.

15.274°. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

15.275. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$ ($y \geq 0$).

15.276. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $3x + 2y = 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$$15.277. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \frac{3x}{a} = \frac{y}{b}. \quad 15.278. y^2 = ax^3 - x^4.$$

$$15.279. x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, x = 0, y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

$$15.280. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), y = 0, x = \pi a \quad (0 \leq x \leq \pi a).$$

$$\checkmark 15.281. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), y = 0, 0 \leq x \leq 2\pi a.$$

$$15.282. (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$15.283. x^3 + y^3 = 3axy, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$15.284. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{xy}{ab}, x \geq 0, y \geq 0. \quad 15.285. \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2 y}{c^3}, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$15.286. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3 = \frac{x^4 y}{c^5}, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$15.287. r = a(1 + \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq \pi, \varphi = 0.$$

$$15.288. r = a(1 + \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad 15.289. r = a \sin 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$15.290. r = 9 \cos \varphi, r = 4 \cos \varphi. \quad 15.291. r^2 = a^2 \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

15.292. Найти массу пластинки в форме прямоугольного треугольника с катетами a и b ($a > b$), если плотность в каждой её точке численно равна расстоянию до меньшего катета. Найти координаты центра масс, если больший катет лежит на положительной полуоси Ox , а меньший — на положительной полуоси Oy .

15.293. На пластинке в форме фигуры D распределён электрический заряд с поверхностной плотностью σ . Найти полный заряд пластинки, если D ограничена линиями:

$$a) x = 2, y^2 = 2x \text{ и } y = 0 \quad (y \geq 0), \text{ а } \sigma = x + y/2;$$

$$б) x = 1, y = 0 \text{ и } y = 2\sqrt{x}, \text{ а } \sigma = 7x + y.$$

15.294. Пластика имеет форму фигуры D , ограниченной линиями $y = 0$, $y = 2$, $x = 0$, $x + y = 4$. Удельная теплоёмкость пластинки меняется по закону $c = 2x + 3y$. Найти количество тепла, получаемое пластинкой при её нагревании от температуры $t_1 = 10^\circ$ до температуры $t_2 = 20^\circ$.

\checkmark 15.295. Пластика в форме треугольника погружена вертикально в воду так, что её основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки a , высота h . Вычислить силу давления воды на каждую из сторон пластинки. Плотность воды считать равной 1.

15.296. Пластика, имеющая форму полукруга радиусом a , погружена вертикально в жидкость так, что горизонтальный диаметр AB , служащий её основанием, находится внутри жидкости, а вершина O полукруга соприкасается с поверхностью жидкости. Вычислить давление на пластинку, если плотность жидкости равна ρ_0 .

15.297. Определить силу давления воды на боковую стенку $x \geq 0$ цилиндрического сосуда $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, если уровень воды $z = H$.

В тройном интеграле расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в декартовой системе координат¹ (15.298—15.305).

$$\checkmark 15.298^\circ: \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz. \quad \checkmark 15.299^\circ: \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(x, y, z) dz.$$

¹ Всюду далее функция $f(x, y, z)$ предполагается непрерывной на соответствующем множестве.

$$\begin{aligned}
 15.300. & \int_{-1}^1 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{4-x-y} f(x, y, z) dz. & 15.301. & \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^{1-|y-1|} f(x, y, z) dx. \\
 \sqrt{15.302.} & \int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^{2-|x-1|} f(x, y, z) dy. \\
 \sqrt{15.303.} & \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz. \\
 15.304. & \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz. \\
 \sqrt{15.305.} & \int_0^R dz \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-y^2}} f(x, y, z) dx.
 \end{aligned}$$

В интеграле $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в цилиндрической системе координат, если тело V задано неравенствами (15.306—15.311).

$$\begin{aligned}
 15.306. & x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H. & 15.307. & x^2 + y^2 \leq k^2 z^2, 0 \leq z \leq H. \\
 15.308. & x^2 + y^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2. \\
 \sqrt{15.309.} & x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, x^2 + y^2 \leq z^2. \\
 \sqrt{15.310.} & x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2, z \geq R. \\
 15.311* & x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2, x^2 + y^2 \leq 2Rx.
 \end{aligned}$$

В интеграле $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в сферической системе координат, если тело V задано неравенствами (15.312—15.314).

$$\begin{aligned}
 \sqrt{15.312.} & x^2 + y^2 + z^2 \leq 4az, x^2 + y^2 \leq 3z^2. \\
 15.313. & x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq \frac{R}{3}. \\
 15.314. & x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H (H \geq R).
 \end{aligned}$$

Записать интеграл $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ в виде одного из повторных в цилиндрической системе координат, если тело V задано неравенствами (15.315—15.321).

$$\begin{aligned}
 \sqrt{15.315.} & \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0. \\
 15.316. & x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq z \leq H. & 15.317. & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1. \\
 \sqrt{15.318.} & (x-R)^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + (y-R)^2 + z^2 \leq R^2. \\
 \sqrt{15.319.} & x^2 + y^2 \leq 2ax, x^2 + y^2 \leq a^2 - az, z \geq 0. \\
 15.320. & 4x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 48, 0 \leq 2z \leq 4x^2 + 3y^2. \\
 15.321. & |z| \leq 5 - \sqrt{3x^2 + 3y^2}, z^2 \leq x^2 + y^2 + 1.
 \end{aligned}$$

В задачах 15.322—15.328 записать интеграл $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ в виде одного из повторных в сферической системе координат, если тело V задано неравенствами.

$$15.322. \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$15.323. x^2 + y^2 + z^2 \leq 4Rz, x^2 + y^2 + z^2 \geq Rz, x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{3}.$$

$$\sqrt{15.324. x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2zR.}$$

$$\sqrt{15.325. x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2zR.}$$

$$15.326. x^2 + y^2 + z^2 \leq 2yR, x^2 + y^2 \leq z^2.$$

$$\sqrt{15.327. x^2 + y^2 + z^2 \leq 2yR, x^2 + y^2 \geq z^2.}$$

$$15.328. x^2 + y^2 + z^2 \leq 8z - 8, 3(x^2 + y^2) \leq z^2.$$

Записать тройной интеграл $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ в виде одного из повторных в одной из систем координат — декартовой, цилиндрической или сферической, если тело V задано неравенствами (15.329—15.347).

$$15.329. 0 \leq z \leq 4 - x^2, x^2 - y^2 \geq 0, x \geq 0.$$

$$\sqrt{15.330. 0 \leq z \leq 4 - x, y^2 \leq 2x + 2.}$$

$$15.331. x + y + z \leq 2, 0 \leq 4z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$15.332. 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, |x + y| \leq 2.$$

$$15.333. x^2 \leq y^2 + z^2, 5x \geq 4 + y^2 + z^2.$$

$$15.334. (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2), 0 \leq az \leq 4(x^2 + y^2), x \geq 0.$$

$$\sqrt{15.335. 0 \leq z \leq 4xy, x + 4y + z \leq 1.}$$

$$15.336. 0 \leq z \leq 3 - \sqrt{x^2 + 2y^2}, x \leq y. \quad \sqrt{15.337. y^2 \leq z \leq 4, x^2 + y^2 \leq 16.}$$

$$15.338. 0 \leq z \leq x^2 - y^2, x \leq 0, y \geq 2x - 1.$$

$$15.339. a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, x^2 - y^2 - z^2 \geq 0, x \leq 0.$$

$$\sqrt{15.340. x^2 + y^2 \geq 3z^2, x^2 + y^2 - z^2 \leq 2.}$$

$$15.341. 3x^2 - y^2 + 3z^2 \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2ay.$$

$$15.342. x^2 + y^2 + z^2 \leq 2ax, x^2 + y^2 \leq a^2.$$

$$15.343. 4(x^2 + y^2) \leq z^2, 0 \leq z \leq 1 + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$15.344. 4(x^2 + y^2) \leq z^2, x^2 + y^2 - z^2 + 2z - 1 \geq 0.$$

$$15.345. x^2 + y^2 + z^2 \leq 3R^2, Rx \leq 2(y^2 + z^2).$$

$$\sqrt{15.346. x^2 + y^2 + ax - xz \leq 0, z \geq 0.} \quad 15.347. y^2 + z + x \leq a, x \geq z \geq 0.$$

Вычислить интеграл (15.348—15.364).

$$15.348. \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 xyz dz.$$

$$15.349. \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} (x + y + z) dz.$$

$$15.350. \int_1^2 dy \int_y^2 dx \int_0^{1/(xy)} \frac{dz}{x(1 + x^2 y^2 z^2)}.$$

$$15.351. \int_{-1}^0 dy \int_y^0 dz \int_0^{zy} y^2 \cos x dx.$$

$$15.352. \int_0^4 dz \int_{-z}^z dx \int_0^{\sqrt{z^2 - x^2}} z^2 xy^2 dy. \quad \sqrt{15.353. \int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} dy \int_0^{3-y-z} \frac{1}{(x+y+z)^2} dx.}$$

$$15.354^\circ: \iiint_V (x^2 - 4xy + y^2) dx dy dz,$$

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

$$15.355^\circ: \iiint_V x dx dy dz, \quad V = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq h, x + z \leq a, x \geq 0, z \geq 0\}.$$

$$15.356. \iiint_V xyz dx dy dz,$$

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a\sqrt{3}x, x^2 + y^2 + z^2 \leq ay, z \geq 0\}.$$

$$\checkmark 15.357. \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, y^2 + z^2 \leq x^2, x \geq 0\}.$$

$$15.358^\circ: \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2z, 0 \leq z \leq 2\}.$$

$$\checkmark 15.359. \iiint_V z dx dy dz, \quad V = \{(x, y, z) : z^2 \geq \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq h\}.$$

$$15.360. \iiint_V z^m dx dy dz,$$

$$V = \{(x, y, z) : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq \left(\frac{z}{c}\right)^2, 0 \leq z \leq c, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$\checkmark 15.361. \iiint_V z dx dy dz, \quad V = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0\}.$$

$$15.362. \iiint_V \frac{z^2}{b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2} dx dy dz, \quad V = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

$$15.363. \iiint_V z^2 dx dy dz,$$

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}.$$

$$15.364. \iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz,$$

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2az, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2\}.$$

15.365. Вычислить интеграл $\iiint_V xyz dx dy dz$, где V — тело, ограниченное поверхностями:

$$yz = ax, \quad yz = a_1x, \quad zx = by, \quad zx = b_1y, \quad xy = cz, \quad xy = c_1z,$$

$$a > a_1 > 0, \quad b > b_1 > 0, \quad c > c_1 > 0,$$

полагая $u = \frac{yz}{x}$, $v = \frac{zx}{y}$, $w = \frac{xy}{z}$.

$$\checkmark 15.366. \text{Вычислить интеграл } \iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s (x+y+z)^2 dx dy dz,$$

где V — тело, ограниченное плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, полагая $x + y + z = u$, $y + z = uv$, $z = uvw$.

15.367. Вычислить интеграл $\iiint_V x dx dy dz$, где $V = \{(x, y, z) : a \leq xyz \leq b, pz \leq yz \leq qx, my \leq x \leq ny, y > 0\}$.

Переставив пределы интегрирования надлежащим образом, вычислить интеграл (15.368–15.370).

$$15.368. \int_0^{\sqrt[3]{\pi/6}} dx \int_x^{\sqrt[3]{\pi/6}} dy \int_y^{\sqrt[3]{\pi/6}} \sin z^3 dz. \quad \sqrt{15.369.} \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^1 \frac{\sin \pi z}{z} dz.$$

$$15.370. \text{ а) } \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 e^{z^3} dz; \quad \text{ б) } \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 \frac{\arctg x}{z} dz.$$

Найти объём тела, заданного неравенствами (15.371–15.375).

$$\sqrt{15.371.} x^2 + 2y^2 - z^2 \leq a^2, x^2 + 2y^2 \geq 4z^2.$$

$$\sqrt{15.372.} 2(x^2 + 2y^2) \leq 2az \leq 3a\sqrt{a^2 - x^2 - 2y^2}.$$

$$\sqrt{15.373.} x^2 + 4y^2 \leq z^2, a^2 \leq x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9a^2.$$

$$15.374. x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz, z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \leq x^2 + y^2 \leq z^2 \operatorname{tg}^2 \beta, 0 < \alpha < \beta < \pi/2.$$

$$15.375. x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz.$$

Найти объём тела, ограниченного поверхностями (15.376–15.412).

$$15.376. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z. \quad \sqrt{15.377.} (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 xyz.$$

$$15.378. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz. \quad 15.379. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = az(x^2 + y^2).$$

$$15.380. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 z^4. \quad 15.381. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = az(x^2 + y^2)^2.$$

$$15.382. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 y^2 z^2. \quad 15.383. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 (x^3 + y^3).$$

$$\sqrt{15.384.} (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 z(x^2 - y^2). \quad 15.385. (x^2 + y^2 + z^2)^4 = a^3 z(x^4 + y^4).$$

$$15.386. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

$$15.387. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^6 \sin^2 \frac{\pi z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$15.388. (x^2 + y^2)^2 + z^4 = za^3. \quad 15.389. (x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3(y - x).$$

$$15.390. (x^2 + y^2)^3 + z^6 = 3a^3 z^3. \quad \sqrt{15.391.} (x^2 + y^2)^3 + z^6 = a^3 xyz.$$

$$15.392. (x + y + z)^2 = ay, x = 0, y = 0, z = 0 (x > 0, z > 0).$$

$$\sqrt{15.393.} (x^2 + y^2 + z^4)^2 = z^2. \quad 15.394. \left(\frac{x^4}{k^4} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{p^2}.$$

$$15.395. ((x^2 + y^2)^3 + z^6)^2 = a^6(x^2 + y^2)^3.$$

$$15.396. ((x^2 + y^2)^2 + z^4)^2 = a^3 z(x^2 + y^2)^2.$$

$$15.397. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{h^3}. \quad 15.398. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = \frac{x}{k}.$$

$$15.399. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{z}{k} \sin \frac{\pi z}{c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}.$$

$$15.400. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^4 = \frac{z^4}{k^4 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}. \quad 15.401. \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}\right)^6 = \frac{z}{h}.$$

$$15.402. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^3 = \sin \frac{\pi \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}, x = 0, y = 0, z = 0 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

$$15.403. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^3 = \exp\left(-\frac{z}{k\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)}\right) \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

$$15.404. \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2 + \frac{z}{c} = 1, \quad x=0, y=0, z=0 \quad (z \geq 0).$$

$$15.405. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^3 = \frac{z^2}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}, \quad \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 3\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right) \quad (z \geq 0).$$

$$\sqrt{15.406.} \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1.$$

$$15.407. (x+y)^2 + z^2 = x-y, \quad x=0, y=0, z=0 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

$$15.408. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}, \quad x=0, y=0, z=0 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

$$15.409. \left(\frac{x^2}{3} + y^2\right)^3 + z^6 = z(x^2 - y^2). \quad 15.410. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3 + \frac{z^6}{c^6} = \frac{z}{p}\left(\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}\right).$$

$$\sqrt{15.411.} \quad x+y+z=a, \quad x+y+z=2a, \quad x+y=z, \quad x+y=2z, \quad x=y, \quad y=3x.$$

$$15.412. \quad xy=a^2, \quad xy=b^2, \quad xy=pz, \quad xy=qz, \quad y=\alpha x, \quad y=\beta x, \quad 0 < a < b, \quad 0 < p < q, \quad 0 < \alpha < \beta.$$

Найти объём тела, ограниченного указанной поверхностью, заданной своим уравнением в сферических координатах (15.413–15.415).

$$\sqrt{15.413.} \quad r = a \sin \varphi (1 + \cos \psi). \quad 15.414. \quad r = a \sin \varphi \sqrt[3]{\cos \psi}.$$

$$15.415. \quad r = \sin \varphi (a \sin^2 \psi + b \cos^2 \psi).$$

Найти массу тела V плотности ρ , ограниченного указанными поверхностями (15.416–15.423).

$$\sqrt{15.416.} \quad z = x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}, \quad \text{если } \rho = z.$$

$$15.417. \quad z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}, \quad z = 3, \quad \text{если } \rho = x^2.$$

$$15.418. \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 2y, \quad \text{если } \rho = y.$$

$$\sqrt{15.419.} \quad x+y+z=2, \quad x=0, y=0, z=0, \quad \text{если } \rho = x+y+z.$$

$$15.420. \quad x = y^2, \quad x=4, \quad z=2, \quad z=5, \quad \text{если } \rho = |y|.$$

$$15.421. \quad z = 6 - x^2 - y^2, \quad z^2 = x^2 + y^2 \quad (z \geq 0), \quad \text{если } \rho = z.$$

$$15.422. \quad 2x+z=2a, \quad x+z=a, \quad y^2=ax, \quad y=0 \quad (y \geq 0), \quad \text{если } \rho = y.$$

$$15.423. \quad 2x^2 + 2y^2 - 4ax - 4ay + az + a^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + az = 0, \quad z=0, \quad M(a, a, a) \in V, \quad \text{если } \rho = z^2.$$

$\sqrt{15.424.}$ Найти массу куба со стороной a , если плотность его в каждой точке равна квадрату расстояния от этой точки до фиксированной вершины куба.

15.425. Найти массу шара радиусом R , если плотность его в каждой точке равна удвоенному расстоянию от этой точки до поверхности шара.

$\sqrt{15.426.}$ Найти массу сферического слоя между сферами $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от точки до начала координат и на внешней сфере равна ρ_0 .

15.427. Найти массу конуса $\frac{(z-H)^2}{H^2} \geq \frac{x^2+y^2}{R^2}$, $0 \leq z \leq H$, если плотность равна $\rho = |xy|$.

DeVU/Wnu8vg9dI4=

15.428. Найти массу прямого кругового цилиндра, высота которого равна H , а радиус основания R , если плотность в любой точке равна квадрату расстояния этой от точки до центра основания цилиндра.

✓ 15.429. Найти статический момент относительно плоскости xOy однородного тела плотностью ρ , ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \beta \quad \left(0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right).$$

15.430. Найти статический момент относительно плоскости xOy однородного тела плотности ρ , ограниченного плоскостями

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Найти моменты инерции относительно заданных осей однородного тела плотностью ρ , ограниченного указанными поверхностями (15.431—15.443).

15.431. $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$ относительно осей координат.

15.432. $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, z + x = 4$ относительно осей координат.

15.433. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ относительно осей координат.

15.434. $x^2 + y^2 - ax = 0, z^2 = 2ax, z = 0 (z \geq 0)$ относительно осей координат.

✓ 15.435. $z = \frac{1}{2}(y^2 + x^2), z = 1$ относительно оси Ox .

15.436. $x + y + z = 2, z = 0, x^2 + y^2 = 2 (z \geq 0)$ относительно оси Oz .

15.437. $x^2 + y^2 = cz, z = c$ относительно оси Oz .

15.438. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ относительно оси Oz .

15.439. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1$ относительно оси Oz .

15.440. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha (z \geq 0, x^2 + y^2 \leq z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha, \alpha < \frac{\pi}{2})$ относительно оси Oz .

15.441. $x^2 + y^2 + z^2 = 3, x^2 + y^2 = 2z, z \geq 0$, относительно оси Oz .

15.442. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$ относительно оси Oz .

15.443. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyza^3 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ относительно оси Oz .

15.444. Найти момент инерции однородного тела плотностью ρ , ограниченного поверхностью тора $x = (a + r \cos u) \cos v, y = (a + r \cos u) \sin v, z = r \sin u, 0 \leq r \leq b < a, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$, относительно осей координат.

Найти момент инерции относительно заданных плоскостей однородного тела плотностью ρ , ограниченного заданными поверхностями (15.445—15.450).

15.445. $x^2 + y^2 = k^2 z^2, z = h$ относительно плоскостей xOz и xOy .

15.446. $az = a^2 - x^2 - y^2, z = 0$ относительно плоскостей xOz и xOy .

15.447. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ относительно плоскости yOz .

15.448. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy, x > 0, y > 0$ относительно плоскости xOy .

15.449. $a^2 = x^2 + y^2 + z^2, b^2 = x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0 (x^2 + y^2 \leq z^2)$ относительно плоскости xOy .

15.450. $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 = 3z^2 (x^2 + y^2 \leq 3z^2)$ относительно плоскости xOy .

DeVU/Wnu8v9gd4=

15.451. Найти момент инерции однородного прямого кругового конуса плотностью ρ , радиус основания которого равен R , а высота равна H , относительно его оси.

✓ 15.452. Найти момент инерции однородного шара массой M и радиусом R относительно точки на его сфере.

15.453. Найти момент инерции относительно начала координат тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$), если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от начала координат.

✓ 15.454. Найти момент инерции относительно оси симметрии кругового конуса, если высота конуса — H , радиус основания — R ; плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до оси симметрии конуса.

Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного указанными поверхностями (15.455—15.471).

15.455. $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$.

✓ 15.456. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

15.457. $x + y = 1$, $z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

15.458. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

15.459. $x^2 + y^2 = 3z^2$, $z = H$.

15.460. $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \pm 1$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \pm 1$, $z = 0$.

15.461. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

15.462. $z = x^2 + y^2$, $2z = x^2 + y^2$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$.

15.463. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

15.464. $z^2 = xy$, $x = a$, $y = b$, $z = 0$ ($z > 0$).

15.465. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = a(a - 2z)$ ($x^2 + y^2 < a(a - 2z)$).

15.466. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ ($z \geq 0$).

15.467. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$). 15.468. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$.

15.469°. $x + y + z = 2a$, $x = a$, $y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

15.470. $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, $x^2 + y^2 = 2az$ ($x^2 + y^2 \leq 2az$).

15.471. $x^2 + y^2 = z$, $x^2 + y^2 = 2z$, $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 2x$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

15.472. Найти положение центра масс однородного шарового сегмента плотностью ρ , радиус основания которого равен r_0 , а высота равна h .

15.473. Найти координаты центра масс однородного прямого кругового конуса плотностью ρ , радиус основания которого равен R , а высота равна H : $R^2(z - H)^2 \geq H^2(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq H$.

15.474. Для шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ найти массу и определить положение центра масс, если плотность в точках шара обратно пропорциональна:

а) расстоянию от этих точек до начала координат;

б) квадрату расстояния от этих точек до начала координат.

15.475. Найти силу, с которой однородный цилиндр плотностью ρ притягивается к центру своего основания, если радиус основания цилиндра равен R и высота равна H .

15.476. Найти силу, с которой однородный конус плотностью ρ притягивается его вершиной, если радиус основания конуса равен R , а длина образующей равна l .

Вычислить интеграл (15.477—15.482).

$$\sqrt{15.477}: \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

$$\sqrt{15.478}. \int \dots \int_{\substack{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

$$15.479. \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

$$15.480. \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

$$15.481. \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \dots x_n dx_n.$$

$$15.482. \int \dots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}}.$$

$\sqrt{15.483}$. Пусть $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — непрерывная функция на множестве $\{(x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_i \leq x \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$. Доказать равенство

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \dots \int_{x_2}^x f dx_1.$$

$\sqrt{15.484}$. Доказать для непрерывной на $[0; t]$ функции f равенство

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)^n.$$

15.485. Доказать для непрерывной на $[0; x]$ функции f равенство

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du.$$

$\sqrt{15.486}$. Доказать формулу Лиувилля:

$$\int \dots \int_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n = \\ = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1 + p_2 + \dots + p_n - 1} du,$$

где f — непрерывная на $[0; 1]$ функция, $p_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$.

15.487. Найти объём части n -мерного шара ($n > 2$)

$$B = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2, x_n^2 + x_{n-1}^2 \leq 3x_{n-2}^2, x_{n-2} \geq 0\}.$$

15.488. Найти объём n -мерной пирамиды

$$P = \{(x_1, \dots, x_n) : \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1, x_k \geq 0 (k = 1, 2, \dots, n)\}.$$

15.489. Найти объём части $(n+1)$ -мерного конуса

$$K = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leq x_{n+1}^2 \leq H^2\}, \quad H > 0.$$

15.490. Найти площадь поверхности n -мерного тора T в \mathbb{R}^{2n} (тора Клиффорда): $T = \{(x_1, \dots, x_{2n}) = r(\varphi_1, \dots, \varphi_n) : 0 \leq \varphi_i \leq 2\pi (1 \leq i \leq n)\}$, где

$$r(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (a_1 \cos \varphi_1, a_1 \sin \varphi_1, a_2 \cos \varphi_2, a_2 \sin \varphi_2, \dots, a_n \cos \varphi_n, a_n \sin \varphi_n),$$

$a_i > 0 (1 \leq i \leq n)$.

Исследовать на сходимость интеграл (15.491–15.498).

$$\sqrt{15.491.} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^p} dx dy. \quad \sqrt{15.492.} \iint_{x^2 + y^2 < 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^p} dx dy.$$

$$15.493. \iiint_{|x| + |y| + |z| < 1} \frac{x + y + z + 2}{|x|^p + |y|^q + |z|^r} dx dy dz \quad (p > 0, q > 0, r > 0).$$

$$\sqrt{15.494.} \iint_{-x < y < x, x > 0} \frac{4x^2 - y^2}{(2x + y + 1)^p} dx dy.$$

$$\sqrt{15.495.} \iiint_D \frac{\cos(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} dx dy dz,$$

$$D = \{(x, y, z) : x + y + z > 1, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

$$15.496. \iiint_D \frac{(x + y + z) dx dy dz}{(x^p + y^q + z^r) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$D = \{(x, y, z) : x + y + z > 1, x > 0, y > 0, z > 0\} \quad (p > 0, q > 0, r > 0).$$

$$\sqrt{15.497.} \iiint_D \frac{x + y - z}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| < 1\}.$$

$$\sqrt{15.498.} \iiint_D \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{2p}}, \quad D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{a^2 z^2}{x^2 + y^2}\}.$$

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость (15.499–15.520).

$$15.499. \iint_D \frac{y}{x} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x > 1, -1 < xy < 1\}.$$

$$\sqrt{15.500.} \iint_D \frac{x^3 - y^3}{x^5 + y^5} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y > 1\}.$$

$$\sqrt{15.501.} \iint_D \frac{x^3 - y^3}{x^6 + y^6} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y > 1\}.$$

$$15.502. \iint_D \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x > 0, 0 < xy < 1\}.$$

$$15.503. \iint_D \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x > 0, 0 < x^2 y < 1\}.$$

$$\checkmark 15.504. \iint_D e^{-x^2 y} \sin(2xy) dx dy, \quad D = \{(x, y) : x > 1, y > 0\}.$$

$$\checkmark 15.505. \iint_D e^{-xy} \sin(2xy) dx dy, \quad D = \{(x, y) : x > 1, y > 0\}.$$

$$15.506. \iint_D \frac{x^3 + y}{x^6 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x > 0, mx < y < nx\}, 0 < m < n.$$

$$\checkmark 15.507. \iint_D \frac{x^3 + y}{x^6 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}.$$

$$15.508. \iiint_{x^2 + y^2 < az - a} \frac{x - y}{z^3} dx dy dz. \quad 15.509. \iiint_{x > 1, y > 1, z > 1} \frac{x - y}{z^3} dx dy dz.$$

$$15.510. \iiint_D \frac{1 - x - y - z}{\sqrt{xyz}} dx dy dz,$$

$$D = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\}.$$

$$15.511. \iiint_D \frac{1 - x - y - z}{xyz} dx dy dz,$$

$$D = \{(x, y, z) : x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

$$\checkmark 15.512. \iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt[4]{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{a^2 z^2}{x^2 + y^2}\}.$$

$$\checkmark 15.513. \iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{a^2 z^2}{x^2 + y^2}\}.$$

$$15.514. \iiint_{x > 0, y > 0, z > 0} e^{-(x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2)} dx dy dz.$$

15.515*: $\iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{yz}}$, D — часть тела, полученного при вращении трактрисы $x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right)$, $y = a \sin t$ относительно оси Ox , лежащая в первом октанте.

$$15.516. \iiint_D yx^2 e^{xyz} dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) : y > 1, x > 1, 0 < xyz < 1\}.$$

$$\checkmark 15.517. \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1 - \cos(x + y - z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} dx dy dz. \quad \checkmark 15.518. \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(x + y + z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}} dx dy dz.$$

$$\checkmark 15.519. \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(x + y + z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz.$$

DeVU/Wnu8vg9d4=

$$15.520. \iiint_D \sqrt{\frac{1 + x^2 + y^2 + z^2}{1 - x^2 - y^2 - z^2}} dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

Ответы и указания

$$15.1. 7. \quad 15.2. \frac{1}{2}. \quad 15.3. \frac{1}{4}. \quad 15.4. \frac{2}{3}. \quad 15.5. \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f dx.$$

$$15.6. \int_0^1 dx \int_{-x}^x f dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^1 f dx + \int_0^1 dy \int_0^1 f dx. \quad 15.7. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f dy = \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{1/2-\sqrt{1/4-y^2}}^{1/2+\sqrt{1/4-y^2}} f dx.$$

$$15.8. \int_0^2 dx \int_{2-x}^{2+x} f dy + \int_2^4 dx \int_{x-2}^{6-x} f dy = \int_0^2 dy \int_{2-y}^{2+y} f dx + \int_2^4 dy \int_{y-2}^{6-y} f dx.$$

$$15.9. \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 f dx. \quad 15.10. \int_0^1 dx \int_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} f dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt{1-(y-1)^2}} f dx.$$

$$15.11. \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} f dy = \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-(y-1)^2}}^2 f dx.$$

$$15.12. \int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_{x/2}^{2x} f dy + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x/2}^{1/x} f dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_{y/2}^{2y} f dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y/2}^{1/y} f dx.$$

$$15.13. \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{(x^2+1)/2} f dy = \int_0^{1/2} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f dx + \int_{1/2}^1 dy \int_{-\sqrt{2y-1}}^1 f dx + \int_{1/2}^1 dy \int_{\sqrt{2y-1}}^{\sqrt{y}} f dx.$$

$$15.14. \int_0^{1/2} dx \int_{1/2-x^2}^{(x^2+1)/2} f dy + \int_{1/2}^1 dx \int_{x^2}^{(x^2+1)/2} f dy = \int_{1/4}^{1/2} dy \int_{\sqrt{1/2-y}}^{\sqrt{y}} f dx + \int_{1/2}^1 dy \int_{\sqrt{2y-1}}^{\sqrt{y}} f dx.$$

$$15.15. \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-\sqrt{1-x^2}} f dy + \int_1^2 dx \int_{\sqrt{1-(x-2)^2}}^{2-\sqrt{1-(x-2)^2}} f dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{2-\sqrt{1-y^2}} f dx + \int_1^2 dy \int_{\sqrt{1-(y-2)^2}}^{2-\sqrt{1-(y-2)^2}} f dx.$$

$$15.16. \int_{-2a}^0 dx \int_{-\sqrt{4a^2-x^2}}^{-\sqrt{a^2-(x+a)^2}} f dy + \int_{-2a}^0 dx \int_{\sqrt{a^2-(x+a)^2}}^{\sqrt{4a^2-x^2}} f dy + \int_0^{2a} dx \int_{-\sqrt{4a^2-x^2}}^{-\sqrt{a^2-(x-a)^2}} f dy + \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}^{\sqrt{4a^2-x^2}} f dy =$$

$$= \int_{-2a}^{-a} dy \int_{-\sqrt{4a^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-y^2}} f dx + \int_{-a}^a dy \int_{-\sqrt{4a^2-y^2}}^{-a-\sqrt{a^2-y^2}} f dx + \int_{-a}^a dy \int_{-a+\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-y^2}} f dx +$$

$$+ \int_{-a}^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-y^2}} f dx + \int_a^{2a} dy \int_{-\sqrt{4a^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-y^2}} f dx.$$

$$15.17. \int_{a\sqrt{2}}^{2a} dx \int_{-\sqrt{x^2-2a^2}}^{\sqrt{x^2-2a^2}} f dy + \int_{2a}^{2a\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{4a^2-x^2}/2}^{\sqrt{4a^2-x^2}/2} f dy = \int_{-a\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{8a^2-2y^2}} f dx.$$

$$15.18. \int_{-a\sqrt{6}}^{-a} dx \int_{-\sqrt{8a^2-x^2}/2}^{-\sqrt{x^2-a^2}} f dy + \int_{-a\sqrt{6}}^a dx \int_{\sqrt{x^2-a^2}}^{\sqrt{8a^2-x^2}/2} f dy + \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{8a^2-x^2}/2}^{\sqrt{8a^2-x^2}/2} f dy +$$

$$+ \int_a^{a\sqrt{6}} dx \int_{-\sqrt{x^2-a^2}}^{-\sqrt{8a^2-x^2}/2} f dy + \int_a^{a\sqrt{6}} dx \int_{\sqrt{x^2-a^2}}^{\sqrt{8a^2-x^2}/2} f dy =$$

$$= \int_{-2a\sqrt{2}}^{-a\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{16a^2-2y^2}}^{\sqrt{16a^2-2y^2}} f dx + \int_{-a\sqrt{5}}^{a\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{a^2+y^2}}^{\sqrt{a^2+y^2}} f dx + \int_{a\sqrt{5}}^{2a\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{16a^2-2y^2}}^{\sqrt{16a^2-2y^2}} f dx.$$

$$15.19. \int_0^1 dy \int_{-1+\sqrt{y}}^{(1/2)\sin\pi y} f dx = \int_{-1}^0 dx \int_0^{(1+x)^2} f dy + \int_0^{1/2} dx \int_{(1/\pi)\arcsin 2x}^{1-(1/\pi)\arcsin 2x} f dy.$$

$$15.20. \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{y^2-1/4}^{\cos\pi y} f dx = \int_{-1/4}^0 dx \int_{-\sqrt{x+1/4}}^{\sqrt{x+1/4}} f dy + \int_0^1 dx \int_{-(1/\pi)\arccos x}^{(1/\pi)\arccos x} f dy.$$

$$15.21. \int_0^1 dx \int_{-x}^x f dy + \int_1^2 dx \int_{-x}^{-2\sqrt{x-1}} f dy + \int_1^2 dx \int_{2\sqrt{x-1}}^x f dy =$$

$$= \int_{-2}^0 dy \int_{-y}^{(y^2+4)/4} f dx + \int_0^2 dy \int_y^{(y^2+4)/4} f dx.$$

$$15.22. \int_{-1}^0 dx \int_{-x-1}^{\cos(\pi x/2)} f dy + \int_0^1 dx \int_{x-1}^{\cos(\pi x/2)} f dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-1-y}^{y+1} f dx + \int_0^1 dy \int_{-(2/\pi)\arccos y}^{(2/\pi)\arccos y} f dx.$$

$$15.23. \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} f dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{1-(y-1)^2}} f dx.$$

$$15.24. \int_0^a dx \int_{a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f dy = \int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-(y-a)^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f dx.$$

$$15.25. \int_{-1/2}^0 dx \int_{-\sqrt{2x+1}}^{\sqrt{2x+1}} f dy + \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f dy = \int_{-1}^0 dy \int_{(y^2-1)/2}^{y+1} f dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f dx.$$

$$15.26. \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt{1-(x+1)^2}}^1 f dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^1 f dy = \int_0^1 dy \int_{-1+\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f dx.$$

$$15.27. \int_{a/2}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-ax}/2}^{-\sqrt{a^2-x^2}} f dy + \int_{a/2}^a dx \int_{\sqrt{a^2-ax}/2}^{\sqrt{a^2-ax}/2} f dy + \int_a^{2a} dx \int_{-\sqrt{a^2-ax}/2}^{\sqrt{a^2-ax}/2} f dy =$$

$$= \int_{-a\sqrt{3}/2}^{a\sqrt{3}/2} dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{(2a^2-2y^2)/a} f dx.$$

$$15.28. \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f dy + \int_{-1}^2 dx \int_x^{\sqrt{x+2}} f dy = \int_{-1}^2 dy \int_{-1}^y f dx.$$

$$15.29. \int_{-1}^0 dx \int_0^{1-\sqrt{1-(x+1)^2}} f dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f dy = \int_0^1 dy \int_{-1+\sqrt{1-(y-1)^2}}^{1-y} f dx.$$

$$15.30. \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f dx.$$

$$15.31. \int_{-1}^0 dx \int_{-x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f dx.$$

$$15.32. \int_0^1 dx \int_{-x/2}^{x/2} f dy + \int_1^{2/\sqrt{3}} dx \int_{-x/2}^{-\sqrt{x^2-1}} f dy + \int_1^{2/\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{x^2-1}}^{x/2} f dy = \\ = \int_{-1/\sqrt{3}}^0 dy \int_{-2y}^{\sqrt{1+y^2}} f dx + \int_0^{1/\sqrt{3}} dy \int_{2y}^{\sqrt{1+y^2}} f dx.$$

$$15.33. \int_{-1}^0 dx \int_0^{1-\sqrt{1-(x+1)^2}} f dy + \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f dy = \int_0^1 dy \int_{-1+\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f dx.$$

$$15.34. \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2x+4}}^{\sqrt{2x+4}} f dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{4x+4}}^{-\sqrt{4x+4}} f dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{4x+4}}^{\sqrt{2x+4}} f dy = \int_{-2}^2 dy \int_{(y^2-4)/2}^{(y^2-4)/4} f dx.$$

$$15.35. \int_0^a dy \int_y^a f dx. \quad 15.36. \int_1^3 dy \int_0^{2y-2} f dx + \int_3^7 dy \int_0^{7-y} f dx.$$

$$15.37. \int_{-1}^5 dy \int_{y+1}^{\sqrt{6y+6}} f dx. \quad 15.38. \int_{-4}^0 dx \int_{\sqrt{2-x/2}}^2 f dy + \int_0^4 dx \int_{\sqrt{2-x/2}}^{\sqrt{4-x}} f dy.$$

$$15.39. \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} f dx. \quad 15.40. \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x}}^1 f dy.$$

$$15.41. \int_{-1}^0 dx \int_0^{(1+x)^2} f dy + \int_0^1 dx \int_0^{(2/\pi)\arccos x} f dy. \quad 15.42. \int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt{y}} f dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{y}}^2 f dx.$$

$$15.43. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f dx.$$

$$15.44. \int_0^1 dy \int_{y^2/9}^{1-\sqrt{1-y^2}} f dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f dx + \int_1^{3\sqrt{2}} dy \int_{y^2/9}^2 f dx.$$

$$15.45. \int_{-2}^6 dx \int_{-3-\sqrt{16-(x-2)^2}}^{-3+\sqrt{16-(x-2)^2}} f dy. \quad 15.46. \int_{\text{De } \frac{10}{9} / \text{Wnu } 8 \text{vg } 9 \text{d } 4 =}^{1/2} dx \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{2}} f dy + \int_{1/2}^1 dx \int_0^1 f dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f dy.$$

$$15.47. \int_0^1 dx \int_x^{3\sqrt{x}} f dy. \quad 15.48. \int_1^3 dx \int_{9/x}^{10-x} f dy.$$

15.49. $\int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_{-x}^x f dy + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f dy.$ 15.50. $\int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f dx + \int_1^{\sqrt{5}} dy \int_0^{\sqrt{5-y^2}} f dx.$

15.51. $\int_0^a dy \int_{-a \operatorname{tg}(\pi y/4a)}^{a \operatorname{tg}(\pi y/4a)} f dx + \int_a^{2a} dy \int_{-\sqrt{2a^3/y-a^2}}^{\sqrt{2a^3/y-a^2}} f dx.$

15.52. $\int_{-1}^{-1/\sqrt{2}} dy \int_{\arccos y}^{2\pi-\arccos y} f dx + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dy \int_{\arccos y}^{1/\sqrt{2}-\arccos y} f dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f dx.$

15.53. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^3 dx \int_1^{(3-x)/2} f dy.$ 15.54. $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f dx.$

15.55. $\int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^3 f dy + \int_3^4 dx \int_0^3 f dy + \int_4^5 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f dy.$

15.56. $\int_0^{a\sqrt{3}/2} dy \int_{a/2}^a f dx + \int_{a\sqrt{3}/2}^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^a f dx.$

15.57. $\int_0^a dy \int_0^{a-\sqrt{a^2-x^2}} f dx + \int_a^{2a} dy \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f dx.$ 15.58. $\int_0^a dx \int_{(a^2-x^2)/2a}^{\sqrt{a^2-x^2}} f dy.$

15.59. $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f dy.$ 15.60. $\frac{e^2-e}{2}.$ 15.61. $\frac{1}{12}(15 \ln 5 - 4).$ 15.62. $\frac{\pi}{2}.$

15.63. $\frac{1}{4} \ln 2.$ 15.64. а) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 2;$ б) $\frac{2\pi}{3}.$ 15.65. а) $\ln \frac{25}{24};$ б) $\ln \frac{25}{24}.$ 15.66. $\ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$

15.67. $-\frac{1}{24}.$ 15.68. 0. 15.69. $\frac{1}{3}.$ 15.70. $\frac{1}{80} a^4.$ 15.71. 4. 15.72. $\pi.$

15.73. $\frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.$ 15.74. $9 - \frac{5\pi}{4}.$

В ответах к задачам 15.75—15.100 через f^* обозначено $f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$

15.75. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r f^* dr.$ 15.76. $\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a r f^* dr.$ 15.77. $\int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^a r f^* dr.$

15.78. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r f^* dr.$ 15.79. $\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a \sin \varphi} r f^* dr.$

15.80. $\int_0^{\pi} d\varphi \int_{\sin \varphi}^1 r f^* dr + \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r f^* dr.$

15.81. а) $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/(\cos \varphi + \sin \varphi)} r f^* dr;$ б) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\sin \varphi} r f^* dr;$ в) $\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos \varphi} r f^* dr.$

15.82. $\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos \varphi} r f^* dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sin \varphi} r f^* dr.$

15.83. $\int_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int_0^1 r f^* dr.$ 15.84. $\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} r f^* dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r f^* dr.$

$$15.85. \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rf^* dr + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} rf^* dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rf_1^*(r, \varphi) dr.$$

$$15.86. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rf^* dr. \quad 15.87. \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rf^* dr.$$

$$15.88. \int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int_{\cos 3\varphi}^1 rf^* dr + \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 rf^* dr + \int_{\pi/2}^{5\pi/6} d\varphi \int_{\cos 3\varphi}^1 rf^* dr + \int_{5\pi/6}^{7\pi/6} d\varphi \int_0^1 rf^* dr + \\ + \int_{7\pi/6}^{3\pi/2} d\varphi \int_{\cos 3\varphi}^1 rf^* dr + \int_{3\pi/2}^{11\pi/6} d\varphi \int_0^1 rf^* dr.$$

$$15.89. \text{ а) } \int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} rf^* dr + \int_{5\pi/6}^{7\pi/6} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} rf^* dr;$$

$$\text{ б) } \int_{\pi/18}^{5\pi/18} d\varphi \int_a^{2a\sin 3\varphi} rf^* dr + \int_{13\pi/18}^{17\pi/18} d\varphi \int_a^{2a\sin 3\varphi} rf^* dr + \int_{25\pi/18}^{29\pi/18} d\varphi \int_a^{2a\sin 3\varphi} rf^* dr;$$

$$\text{ в) } \int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} d\varphi \int_a^{2a(1+\cos\varphi)} rf^* dr.$$

$$15.90. \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^{1/\cos\varphi} rf^* dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_1^{1/\sin\varphi} rf^* dr. \quad 15.91. \int_{\arctg(1/2)}^{\pi/4} d\varphi \int_1^2 rf^* dr.$$

$$15.92. \int_0^{\pi/6} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} rf^* dr + \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 rf^* dr + \int_{5\pi/6}^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} rf^* dr.$$

$$15.93. \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} rf^* dr. \quad 15.94. \int_{-\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rf^* dr.$$

$$15.95. \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin(2\varphi)/2}} rf^* dr + \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin(2\varphi)/2}} rf^* dr.$$

$$15.96. \int_{-\pi/4}^0 d\varphi \int_0^{2/(\cos\varphi - \sin\varphi)} rf^* dr + \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2/(\cos\varphi + \sin\varphi)} rf^* dr. \quad 15.97. \int_0^{\pi} d\varphi \int_a^{a(1+\sin\varphi)} rf^* dr.$$

$$15.98. \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_0^{a\operatorname{tg}\varphi} rf^* dr. \quad 15.99. \int_{-\pi/2}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} rf^* dr + \int_{\pi/4}^{\pi} d\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} rf^* dr.$$

$$15.100. \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_{3a(1-\cos\varphi)}^{2a} rf^* dr + \int_{\pi/3}^{5\pi/3} d\varphi \int_{a(1+\cos\varphi)}^{2a} rf^* dr. \quad 15.101. \pi \sin a^2.$$

$$15.102. \pi((1+a^2)\ln(1+a^2) - a^2). \quad 15.103. \frac{3}{16}\pi a^2. \quad 15.104. \frac{4}{9}a^3.$$

$$15.105. \pi(1 - e^{-R^2}). \quad 15.106. \frac{2}{3}a^2. \quad 15.107. \frac{3}{2} + \frac{7}{6}\ln 3. \quad 15.108. \frac{26}{3}\ln 2.$$

$$15.109. \frac{17}{18}. \quad 15.110. 3. \quad 15.111. \frac{215}{27}. \quad 15.112. 0.$$

$$15.113. \frac{5}{48}(a^{-6/5} - b^{-6/5})(q^{8/5} - p^{8/5}). \quad 15.114. \frac{1}{40}(b^4 - a^4)(\alpha^{-10} - \beta^{-10}).$$

$$15.115. \frac{1}{3}\left(\frac{\sin pb - \sin pa}{p} - \frac{\sin qb - \sin qa}{q}\right). \quad 15.116. \frac{2}{21}ab. \quad 15.117. \frac{1}{840} \cdot \frac{a^{10}b^6}{c^{12}}.$$

- 15.118. $\frac{4}{27}$. 15.120. $\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+3)}$. 15.122. $\frac{5}{8}\pi a^2$. 15.123. $\frac{3}{4}\pi a^2$.
- 15.124. $\frac{1}{2}\pi a^2$. 15.125. $\frac{\pi a^2}{8} + \frac{b^2 - a^2}{4} \arctg \frac{a}{b} - \frac{ab}{4}$. 15.126. $\frac{a^2 b^2}{2c^2}$. 15.127. $\frac{\pi}{2} ab(a^2 + b^2)$.
- 15.128. $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^3 b}{c^2}$. 15.129. $\frac{7\pi}{512} \cdot \frac{a^9 b^3}{c^{10}}$. 15.130. $\frac{3}{8} \pi ab \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right)$. 15.131. $\frac{\pi \sqrt{2}}{16} \cdot \frac{a^5 b^3}{c^6}$.
- 15.132. $\frac{\pi ab}{\sqrt{2}} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right)$. 15.133. $\frac{2}{3} \pi ab \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right)$. 15.134. $\frac{1}{12} ab$. 15.135. $\frac{1}{10} \cdot \frac{a^5 b}{h^4}$.
- 15.136. $\frac{a^3 bk}{2h(ak + bh)}$.
- 15.137. $\frac{a^3 bk}{4h^3(ak + bh)^3} (a^2 k^2 + 3abhk + 3b^2 h^2)$ или $\frac{ab}{4} \left(\frac{a^3}{h^3} - \frac{a^3}{h^3} \left(1 + \frac{ak}{bh} \right)^{-4} + \frac{b^3}{k^3} \left(1 + \frac{bh}{ak} \right)^{-4} \right)$.
- 15.138. $\frac{(n!)^2}{(2n)!} ab$. 15.139. $\frac{(2n+1)!!}{4^n (2n)!!} \pi ab$.
- 15.140. $\frac{\pi}{n} \cdot \frac{c^3}{\sqrt{ab}}$, $n = 2k - 1$; $\frac{\pi}{2n} \cdot \frac{c^3}{\sqrt{ab}}$, $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 15.141. $\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2n}} \left(\frac{c^3}{b} \left(\frac{b}{a} \right)^{1/(2n)} + \frac{d^3}{a} \left(\frac{a}{b} \right)^{1/(2n)} \right)$. 15.142. $\frac{1}{210} a^2$. 15.143. $\frac{1}{60} a^2$.
- 15.144. $\frac{1}{1260} a^2$. 15.145. $\frac{1}{3} (q - p) \ln \frac{b}{a}$. 15.146. $\frac{1}{2} (q - p) \ln \frac{b}{a}$.
- 15.147. $\frac{1}{6} (q^2 - p^2) (b^3 - a^3)$. 15.148. $\frac{5}{12} (q^{4/5} - p^{4/5}) (a^{-3/5} - b^{-3/5})$.
- 15.149. $\frac{2}{3} (a - b)(c - d)$. 15.150. $\frac{1}{15} (a^5 - b^5) \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{c^3} \right)$.
- 15.151. $\frac{1}{12} (a^6 - b^6) \left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{c^4} \right)$. 15.152. $\frac{3}{15} (c^2 - d^2) \ln \frac{a}{b}$.
- 15.153. $\frac{1}{4} (b^2 - a^2) \left(\arctg d - \arctg c - \frac{c}{1+c^2} + \frac{d}{1+d^2} \right) =$
 $= \frac{1}{4} (b^2 - a^2) \left(\frac{(d-c)(1-cd)}{(1+c^2)(1+d^2)} + \arctg \frac{d-c}{1+cd} \right)$.
- 15.154. $\frac{b^2 - a^2}{6} \left(\frac{1+3\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^3} - \frac{1+3\sqrt{q}}{(1+\sqrt{q})^3} \right)$.
- 15.155. 3π. Указание. Сделать замену $x + 2y = v$, $2x + y = u$. 15.156. 10π .
- 15.157. $\frac{83}{4}$. 15.158. $\frac{a^3}{18}$. 15.159. $\frac{1}{6}$. 15.160. $\frac{a^4}{24b}$. 15.161. $\frac{2}{5} a^2 \sqrt{2ap}$.
- 15.162. $\frac{1}{20} \cdot \frac{a^5}{pq}$. 15.163. $\frac{\pi \sqrt{pq}}{2} a^2$. 15.164. $\frac{a^3}{24}$. 15.165. $4\pi a^3$. 15.166. $\frac{9\pi + 10}{12} a^3$.
- 15.167. $\left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) a^3$. 15.168. $\frac{\pi}{8} \cdot \frac{a^4}{b}$. 15.169. $\frac{16}{3} ab^2$. 15.170. $\frac{48}{5}$. 15.171. $\frac{8}{15}$.
- 15.172. $\frac{147}{512} \cdot \frac{\pi a^6}{b^3}$. 15.173. $2\pi a^3 \left(\sqrt{3} - \frac{5}{6} \right)$. 15.174. $\frac{\pi h^4}{2a}$. 15.175. πa^3 .
- 15.176. $\frac{88}{105} \cdot \frac{b^4}{a}$. 15.177. $\frac{1}{16} \pi ah^2$. 15.178. $\frac{b^5}{140a^3 h} (7a^2 + 5b^2)$. 15.179. $\frac{1}{6} \pi a^3$.
- 15.180. $\frac{1}{27}$. 15.181. 8. 15.182. $\frac{7}{3} a^3$. 15.183. $\frac{1}{2} \pi a^3$. 15.184. $\frac{32}{15}$. 15.185. $4\sqrt{2} \pi a^3$.
- 15.186. $\frac{8\pi - 6\sqrt{3}}{3} a^3$. 15.187. $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (b^3 - a^3) \Gamma^2 \left(\frac{3}{4} \right)$. 15.188. $\frac{5}{12} \pi a^3$.
- 15.189. а) $\frac{4}{3} \pi (c - a)^3$; б) $\frac{4}{3} \pi (c - a)^3$. 15.190. $\pi abc(1 - e^{-R^2})$. 15.191. $2\pi abc$.
- 15.192. $(8n - 6)abc$. 15.193. $\frac{\pi}{4} abc$. 15.194. $\frac{8}{\pi^2} abc$. 15.195. $\frac{(1 - 3^{1-k})(1 - 3^{1-l})}{(k-1)(l-1)a^{k-1}b^{l-1}}$.
- 15.196. $\frac{\pi}{8} (1 - e^{-R^4})$. 15.197. $\frac{4\pi}{9\sqrt{3}} (1 - e^{-R^3})$. 15.198. $\frac{m^3 - n^3}{12\pi} (\cos(\pi\beta^4) - \cos(\pi\alpha^4))$.
- 15.199. $\frac{(\beta^3 - \alpha^3)(n^2 - m^2) + (n^3 - m^3)(\beta^2 - \alpha^2)}{12c^2}$. 15.200. $\frac{3\pi - 4}{27} a^3$.
- 15.201. а) $\frac{8 - \pi}{16} a^3$; б) $\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) a^3$. 15.202. $\frac{4\sqrt{2}}{3} (a + b) \sqrt{ab}$. 15.203. $\sqrt{2} \pi a^2$.

- 15.204. $13 \cdot \frac{20-3\pi}{9}c^2$. 15.205. $\frac{1423}{9720}\pi c^2$. 15.207. $\frac{20-3\pi}{18}a^2$.
- 15.208. $\frac{2\sqrt{2}-1}{12}\pi a^2$.
- 15.209. $\frac{2}{3}\pi a^2 \left(\left(\frac{4c}{a} - 3 \right)^{3/2} - 1 \right)$ при $c > a$; при $c \leq a$ нет точек поверхности в указанной области.
- 15.210. $(\sqrt{2}-1)\pi a^2$. 15.211. $4\pi a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. 15.212. $8 \left(1 - \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \right) a^2$.
- 15.213. $\frac{4\pi ab R^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}$. 15.214. $4(\sqrt{2}-1)a^2$. 15.215. $\frac{3\sqrt{3}-1}{3}\pi a^2$.
- 15.216. $8a \left(a \arcsin \frac{a}{b} - b + \sqrt{b^2-a^2} \right)$. 15.217. $(2\pi-4)a^2$.
- 15.218. $2a \left((2a-b) \arcsin \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{a(b-a)} \right)$. 15.219. $16a^2$. 15.220. $4\pi a^2$.
- 15.221. $8\sqrt{2}ab$. 15.222. $2\pi a^2$. 15.223. $\frac{1}{\sqrt{2}}\pi a^2$. 15.224. $16a\sqrt{ap}$.
- 15.225. $\frac{24}{7}a\sqrt{2ap}$. 15.226. $\frac{24}{5}a^2$. 15.227. $\frac{3\sqrt{3}-1}{3}ac^2$. 15.228. $4ac$.
- 15.229. а) $\frac{1}{3}((1+h^2)^{3/2}-h^3)$;
 б) $\frac{h^3}{3} + \frac{1}{6} \left(h^2 + \frac{\pi^2}{16} \right)^{3/2} + \frac{\pi h^2}{8} \ln \left(\frac{\pi}{4h} + \sqrt{\frac{\pi^2}{16h^2} + 1} \right) - \frac{h^2}{2} \sqrt{h^2 + \frac{\pi^2}{16}}$.
- 15.230. $(15+16\ln 2)\pi$. 15.231. $\frac{\pi^2}{8}ab+b^2$. 15.232. $\frac{1}{2}\pi a^2$. 15.233. $\frac{1}{2}\pi a^2$.
- 15.234. $\frac{133}{10}$. 15.235. $V = \frac{16}{9}(3\pi-4)a^3$; $S = 8\pi a^2$. 15.236. $V = \frac{16}{3}a^3$; $S = 16a^2$.
- 15.237. $V = \frac{1}{16}\pi^2 a R^2$; $S = \frac{\pi}{4} \left(R\sqrt{a^2+R^2} + a^2 \ln \frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a} + \frac{1}{2}\pi R a + 2R a + R^2 \right)$.
- 15.238. $V = \frac{7\sqrt{2}}{6}\pi a^3$; $S = (3+2\sqrt{2})\pi a^2$. 15.239. $V = \frac{5}{6}\pi a^3$; $S = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1) \right) \pi a^2$.
- 15.240. $\frac{79}{12}$. 15.241. $\frac{64}{3}$. 15.242. $2\pi-4$. 15.243. 8 . 15.244. 324π .
- 15.245. $\frac{52}{3}$. 15.246. $\frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \right) a^3 b$. 15.247. $\frac{2\pi}{3}\rho_0 R^2$. 15.248. $\frac{52\pi}{3}$.
- 15.249. $2\pi k(R-r)$, где k — коэффициент пропорциональности.
- 15.250. $\frac{4}{3}\rho_0 a^2$. 15.251. $\frac{1}{2}\rho ab^2$; $\frac{1}{2}\rho a^2 b$. 15.252. $\frac{5}{2}\pi \rho a^3$. 15.253. $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{5} \right) \rho$.
- 15.254. $\frac{3}{2}MR^2$. 15.255. $\frac{1}{4}MR^2$. 15.256. $\frac{5}{8}MR^2$. 15.257. $\frac{1}{4}Mb^2$; $\frac{1}{4}Ma^2$.
- 15.258. $\frac{44-9\pi}{36}M$. 15.259. $\frac{47}{14}Ma^2$; $\frac{7}{10}Ma^2$. 15.260. $\frac{36}{35}Mp^2$; $\frac{36}{35}Mp^2$.
- 15.261. $\frac{7}{16}Ma^2$. 15.262. $\frac{3\pi-8}{48}Ma^2$. 15.263. $\frac{6M}{\ln 2}$.
- 15.264. $k \left(\frac{a^5 b}{5} + \frac{a^3 b^3}{9} \right)$; $k \left(\frac{b^5 a}{5} + \frac{a^3 b^3}{9} \right)$, где k — коэффициент пропорциональности.
- 15.265. $\frac{81}{8}\pi\rho$. 15.266. $\left(\frac{3}{4}, 0 \right)$.
- 15.267. На оси симметрии сектора на расстоянии $\frac{4R}{3a} \sin \frac{\alpha}{2}$ от вершины.
- 15.268. $\left(\frac{13}{8}, \frac{39}{10} \right)$. 15.269. $\left(\frac{23}{50}, \frac{2}{5} \right)$. 15.270. $\left(1, \frac{12}{5} \right)$. 15.271. $\left(1, \frac{4}{3\pi} \right)$.
- 15.272. $\left(0, -\frac{1}{2} \right)$. 15.273. $\left(\frac{45}{28}, \frac{279}{70} \right)$. 15.274. $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi} \right)$. 15.275. $\left(0, \frac{4b}{3\pi} \right)$.
- 15.276. $\left(\frac{4}{3\pi-6}, \frac{2}{\pi-2} \right)$. 15.277. $\left(\frac{7a}{12}, \frac{35b}{36} \right)$. 15.278. $\left(\frac{5a}{8}, 0 \right)$.
- 15.279. $\left(\frac{256a}{315\pi}, \frac{256a}{315\pi} \right)$. 15.280. $\left(\frac{\pi a}{2} + \frac{8a}{9\pi}, \frac{5a}{6} \right)$. 15.281. $\left(\pi a, \frac{5a}{6} \right)$.
- 15.282. $\left(\frac{\pi a}{8}, \frac{\pi a}{8} \right)$. 15.283. $\left(\frac{4\sqrt{3}\pi a}{27}, \frac{4\sqrt{3}\pi a}{27} \right)$. 15.284. $\left(\frac{3\pi a}{64}, \frac{3\pi b}{64} \right)$.

15.285. $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \cdot \frac{a^3b}{c^3}, \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2b^2}{c^3}\right)$. 15.286. $\left(\frac{64}{147\pi} \cdot \frac{a^5b}{c^5}, \frac{33}{448} \cdot \frac{a^4b^2}{c^5}\right)$. 15.287. $\left(\frac{5a}{6}, \frac{16a}{9\pi}\right)$.

15.288. $\left(\frac{5a}{6}, 0\right)$. 15.289. $\left(\frac{128a}{105\pi}, \frac{128a}{105\pi}\right)$. 15.290. $\left(\frac{133}{26}, 0\right)$. 15.291. $\left(\frac{\sqrt{2}\pi a}{8}, 0\right)$.

15.292. $\frac{a^2b}{6}; \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{4}\right)$. 15.293. а) $\frac{21}{5}$; б) $\frac{33}{5}$. 15.294. $\frac{1040}{3}$.

В ответах к задачам 15.295–15.297 через g обозначено ускорение свободного падения.

15.295. $\frac{agh^2}{6}$. 15.296. $g\rho a^3\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)$. 15.297. $\frac{\pi}{4}gaH^2$.

15.298.
$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^{1-x-z} f dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int_0^{1-x-y} f dx = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} f dz =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-x-z} f dy = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-z-y} f dx.$$

15.299.
$$\int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x f dy = \int_0^1 dy \int_y^1 dx \int_0^y f dz = \int_0^1 dy \int_0^y dz \int_y^1 f dx =$$

$$= \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_z^x f dy = \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_y^1 f dx.$$

15.300.
$$\int_{-1}^1 dx \int_0^{4-x} dz \int_0^{4-x-z} f dy = \int_0^3 dy \int_{-1}^1 dx \int_0^{4-x-y} f dz + \int_3^5 dy \int_{-1}^{-1} dx \int_0^{4-x-y} f dz =$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_0^{4-x-z} f dy + \int_3^5 dz \int_{-1}^{-1} dx \int_0^{4-z-x} f dy =$$

$$= \int_0^3 dy \int_0^{3-y} dz \int_{-1}^1 f dx + \int_0^3 dy \int_{3-y}^1 dz \int_{-1}^1 f dx + \int_3^5 dy \int_0^3 dz \int_{-1}^{4-y-z} f dx =$$

$$= \int_0^3 dz \int_0^{3-z} dy \int_{-1}^1 f dx + \int_0^3 dz \int_{3-z}^1 dy \int_{-1}^1 f dx + \int_3^5 dz \int_0^3 dy \int_{-1}^{4-z-y} f dx.$$

15.301.
$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^y f dz = \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_z^{2-z} f dy =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_z^{2-z} f dy = \int_0^1 dz \int_z^{2-z} dy \int_0^1 f dx = \int_0^1 dy \int_0^1 dx \int_0^y f dz + \int_1^2 dy \int_0^1 dx \int_0^{2-y} f dz =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^y dz \int_0^1 f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} dz \int_0^1 f dx.$$

15.302.
$$\int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^{x+1} f dz + \int_1^2 dx \int_0^3 dy \int_0^{3-x} f dz = \int_0^1 dx \int_0^{1+x} dz \int_0^3 f dy + \int_1^2 dx \int_0^{3-x} dz \int_0^3 f dy =$$

$$= \int_0^3 dy \int_0^1 dz \int_0^2 f dx + \int_0^3 dy \int_0^1 dz \int_{z-1}^{3-z} f dx = \int_0^3 dy \int_0^1 dx \int_0^{x+1} f dz + \int_0^3 dy \int_0^1 dx \int_0^{3-x} f dz =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^2 dx \int_0^3 f dy + \int_1^2 dz \int_{z-1}^3 dx \int_0^3 f dy = \int_0^2 dz \int_0^3 dy \int_0^1 f dx + \int_1^2 dz \int_0^3 dy \int_{z-1}^3 f dx.$$

$$\begin{aligned}
 15.303. \quad & \int_0^R dx \int_0^{x^2} dz \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f dy + \int_0^R dx \int_{x^2}^{R^2} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f dy = \int_0^R dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} dx \int_0^{x^2+y^2} f dz = \\
 & = \int_0^R dy \int_0^{y^2} dz \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f dx + \int_0^R dy \int_{y^2}^{R^2} dz \int_{\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f dx = \int_0^R dz \int_0^{\sqrt{z}} dx \int_{\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f dy + \int_0^R dz \int_{\sqrt{z}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f dy = \\
 & = \int_0^{R^2} dz \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f dx + \int_0^{R^2} dz \int_{\sqrt{z}}^R dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f dx.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15.304. \quad & \int_{-R}^R dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx \int_0^{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f dz + \int_{-R}^R dx \int_0^{R-\sqrt{R^2-x^2}} dz \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f dy + \\
 & + \int_{-R}^R dx \int_{R-\sqrt{R^2-x^2}}^R dz \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{-\sqrt{R^2-x^2-(R-z)^2}} f dy + \int_{-R}^R dx \int_{R-\sqrt{R^2-x^2}}^R dz \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-(R-z)^2}} f dy = \\
 & = \int_{-R}^R dy \int_0^{R-\sqrt{R^2-y^2}} dz \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f dx + \int_{-R}^R dy \int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^R dz \int_{-\sqrt{R^2-y^2-(R-z)^2}}^{-\sqrt{R^2-y^2}} f dx + \\
 & + \int_{-R}^R dy \int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^R dz \int_{\sqrt{R^2-y^2-(R-z)^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f dx = \int_0^R dz \int_{-R}^{-\sqrt{R^2-(R-z)^2}} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f dy + \\
 & + \int_0^R dz \int_{-\sqrt{R^2-(R-z)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-z)^2}} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{-\sqrt{R^2-(z-R)^2-x^2}} f dy + \int_0^R dz \int_{\sqrt{R^2-(z-R)^2}}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f dy + \\
 & + \int_0^R dz \int_{-\sqrt{R^2-(z-R)^2}}^{\sqrt{R^2-(z-R)^2}} dx \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f dy = \int_0^R dz \int_{-R}^{-\sqrt{R^2-(R-z)^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f dx + \\
 & + \int_0^R dz \int_{-\sqrt{R^2-(R-z)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-z)^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f dx + \int_0^R dz \int_{\sqrt{R^2-(z-R)^2}}^R dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f dx + \\
 & + \int_0^R dz \int_{-\sqrt{R^2-(z-R)^2}}^{\sqrt{R^2-(z-R)^2}} dy \int_{\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-(z-R)^2-y^2}} f dx.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15.305. \quad & \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f dz = \int_{-R}^R dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f dz = \\
 & = \int_0^R dz \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-z^2}} f dy = \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dz \int_{-\sqrt{R^2-x^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-z^2}} f dy = \\
 & = \int_{-R}^R dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} dz \int_{-\sqrt{R^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} f dx.
 \end{aligned}$$

Далее через f^* обозначено $f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ в ответах ко всем задачам, где делается замена переменных вида $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$.

$$15.306. \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r f^* dr = \int_0^H dz \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} f^* d\varphi = \int_0^H d\varphi \int_0^R r dr \int_0^H f^* dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \int_0^R r f^* dr = \int_0^R r dr \int_0^H dz \int_0^{2\pi} f^* d\varphi = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H f^* dz.$$

$$15.307. \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{kz} r f^* dr = \int_0^H dz \int_0^{kz} r dr \int_0^{2\pi} f^* d\varphi = \int_0^H d\varphi \int_0^R r dr \int_{r/k}^H f^* dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \int_0^{kz} r f^* dr = \int_0^R r dr \int_0^H d\varphi \int_{r/k}^H f^* dz = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r/k}^H f^* dz.$$

$$15.308. \int_{-2R}^{-\sqrt{3}R} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^* dr + \int_{-\sqrt{3}R}^{\sqrt{3}R} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r f^* dr + \int_{\sqrt{3}R}^{2R} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^* dr =$$

$$= \int_{-2R}^{-\sqrt{3}R} dz \int_0^{2\pi} r dr \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} f^* d\varphi + \int_{-\sqrt{3}R}^{\sqrt{3}R} dz \int_0^{2\pi} dr \int_0^R r f^* d\varphi + \int_{\sqrt{3}R}^{2R} dz \int_0^{2\pi} r dr \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} f^* d\varphi =$$

$$= \int_0^R r dr \int_{-\sqrt{4R^2-r^2}}^{\sqrt{4R^2-r^2}} dz \int_0^{2\pi} f^* d\varphi = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\sqrt{4R^2-r^2}}^{\sqrt{4R^2-r^2}} f^* dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{-\sqrt{4R^2-r^2}}^{\sqrt{4R^2-r^2}} f^* dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-2R}^{-\sqrt{3}R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^* dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\sqrt{3}R}^{\sqrt{3}R} dz \int_0^R r f^* dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{3}R}^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^* dr.$$

$$15.309. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} f^* dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dz \int_0^z r f^* dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} dz \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} r f^* dr =$$

$$= \int_0^a dz \int_0^z r dr \int_0^{2\pi} f^* d\varphi + \int_a^{2a} dz \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} r dr \int_0^{2\pi} f^* d\varphi =$$

$$= \int_0^a dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z r f^* dr + \int_a^{2a} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} r f^* dr = \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} f^* dz =$$

$$= \int_0^a r dr \int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} dz \int_0^{2\pi} f^* d\varphi.$$

$$15.310. \int_R^{2R} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^* dr = \int_R^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r dr \int_0^{2\pi} f^* d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}R} r dr \int_R^{\sqrt{4R^2-r^2}} f^* dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^* dr = \int_0^{\sqrt{3}R} r dr \int_R^{\sqrt{4R^2-r^2}} dz \int_0^{2\pi} r f^* d\varphi =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}R} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{\sqrt{4R^2-r^2}} f^* dz.$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{15.311.} \quad & \int_0^{2R} r \, dr \int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} d\varphi \int_{-\sqrt{4R^2-r^2}}^{\sqrt{4R^2-r^2}} f^* \, dz = \int_0^{2R} r \, dr \int_{-\sqrt{4R^2-r^2}}^{\sqrt{4R^2-r^2}} dz \int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} f^* \, d\varphi = \\
 & = \int_{-2R}^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r \, dr \int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} f^* \, d\varphi = \int_{-2R}^{2R} dz \int_{-\pi/2}^{2R \cos \varphi} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r f^* \, dz + \int_{-2R}^{2R} dz \int_{-\beta(z)}^{\beta(z)} d\varphi \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^* \, dr = \\
 & = \int_{-2R}^{2R} dz \int_{\beta(z)}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r f^* \, dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r \, dr \int_{-\sqrt{4R^2-r^2}}^{\sqrt{4R^2-r^2}} f^* \, dz = \\
 & = \int_{-\pi/2}^0 d\varphi \int_{-2R}^{2R \sin \varphi} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^* \, dr + \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{-2R}^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^* \, dr + \int_{-\pi/2}^0 d\varphi \int_{2R \sin \varphi}^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^* \, dr + \\
 & + \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{-2R \sin \varphi}^{2R \cos \varphi} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^* \, dr + \int_{-\pi/2}^0 d\varphi \int_{-2R \sin \varphi}^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^* \, dr + \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{2R \sin \varphi}^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^* \, dr, \\
 & \text{где } \alpha(r) = \arccos \frac{r}{2R}, \beta(z) = \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{z}{2R}\right)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{15.312.} \quad & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \int_0^{4a \sin \psi} r^2 f^* \, dr = \\
 & = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2a} r^2 \, dr \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \psi f^* \, d\psi + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{2a}^{4a} r^2 \, dr \int_{\arcsin(r/(4a))}^{\pi/2} \cos \psi f^* \, d\psi = \\
 & = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{4a \sin \psi} r^2 f^* \, dr = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \int_0^{4a \sin \psi} r^2 \, dr \int_0^{2\pi} f^* \, d\varphi = \\
 & = \int_0^{2a} r^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \psi f^* \, d\psi + \int_{2a}^{4a} r^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(r/(4a))}^{\pi/2} \cos \psi f^* \, d\psi = \\
 & = \int_0^{2a} r^2 \, dr \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \int_0^{2\pi} f^* \, d\varphi + \int_{2a}^{4a} r^2 \, dr \int_{\arcsin(r/(4a))}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \int_0^{2\pi} f^* \, d\varphi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{15.313.} \quad & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(1/3)}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \int_{R/(3 \sin \varphi)}^R r^2 f^* \, dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R/3}^R r^2 \, dr \int_{\arcsin(R/3r)}^{\pi/2} \cos \psi f^* \, d\psi = \\
 & = \int_{\arcsin(1/3)}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R/(3 \sin \varphi)}^R r^2 f^* \, dr = \int_{\arcsin(1/3)}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \int_{R/(3 \sin \varphi)}^R r^2 \, dr \int_0^{2\pi} f^* \, d\varphi = \\
 & = \int_{R/3}^R r^2 \, dr \int_{\arcsin(R/(3r))}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \int_0^{2\pi} f^* \, d\varphi = \int_{R/3}^R r^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(R/(3r))}^{\pi/2} \cos \psi f^* \, d\psi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{15.314.} \quad & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arctg(H/R)} \cos \psi \, d\psi \int_0^{R/\cos \psi} r^2 f^* \, dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arctg(H/R)}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \int_0^{H/\sin \psi} r^2 f^* \, dr = \\
 & = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \, dr \int_0^{\pi/2} \cos \psi f^* \, d\psi + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^H r^2 \, dr \int_{\arccos(R/r)}^{\pi/2} \cos \psi f^* \, d\psi +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_H^{\sqrt{R^2+H^2}} r^2 dr \int_{\arccos(R/r)}^{\arcsin(H/r)} \cos \psi f^* d\psi = \\
 = & \int_0^{\operatorname{arctg}(H/R)} \cos \psi d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R/\cos \psi} r^2 f^* dr + \int_{\operatorname{arctg}(H/R)}^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R/\sin \psi} r^2 f^* dr = \\
 = & \int_0^{\operatorname{arctg}(H/R)} \cos \psi d\psi \int_0^{R/\cos \psi} r^2 dr \int_0^{2\pi} f^* d\varphi + \int_{\operatorname{arctg}(H/R)}^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_0^{H/\sin \psi} r^2 dr \int_0^{2\pi} f^* d\varphi = \\
 = & \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \psi f^* d\psi + \int_R^H r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arccos(R/r)}^{\pi/2} \cos \psi f^* d\psi + \\
 & + \int_H^{\sqrt{H^2+R^2}} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arccos(R/r)}^{\arcsin(H/r)} \cos \psi f^* d\psi = \\
 = & \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_0^{2\pi} f^* d\varphi + \int_R^H r^2 dr \int_{\arccos(R/r)}^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_0^{2\pi} f^* d\varphi + \\
 & + \int_H^{\sqrt{H^2+R^2}} r^2 dr \int_{\arccos(R/r)}^{\arcsin(H/r)} \cos \psi d\psi \int_0^{2\pi} f^* d\varphi.
 \end{aligned}$$

15.315. $\int_0^4 dz \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{3(4-z)/(6\cos\varphi+4\sin\varphi)} rf^* dr.$

15.316. $\int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{z}} rf^* dr.$ 15.317. $\int_0^1 dz \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} rf^* dr + \int_0^1 dz \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sin\varphi} rf^* dr.$

15.318. $\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2R\sin\varphi} r dr \int_{-\sqrt{2rR\sin\varphi-r^2}}^{\sqrt{2rR\sin\varphi-r^2}} f^* dz + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r dr \int_{-\sqrt{2rR\cos\varphi-r^2}}^{\sqrt{2rR\cos\varphi-r^2}} f^* dz.$

15.319. $\int_{-\pi/2}^{-\pi/3} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r dr \int_0^{(a^2-r^2)/a} f^* dz + \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_0^a r dr \int_0^{(a^2-r^2)/a} f^* dz +$
 $+ \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r dr \int_0^{(a^2-r^2)/a} f^* dz.$

15.320. $\int_0^6 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{2z/(3+\cos^2\varphi)}}^{\sqrt{(48-z^2)/(3+\cos^2\varphi)}} rf^* dr.$

15.321. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{-\sqrt{r^2+1}}^{\sqrt{r^2+1}} f^* dz + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{3}}^{5/\sqrt{3}} r dr \int_{r\sqrt{3}-5}^{5-r\sqrt{3}} f^* dz.$

15.322. $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_0^{12/(6\cos\varphi\cos\psi+4\sin\varphi\cos\psi+3\sin\psi)} r^2 f^* dr.$

15.323. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_{R\sin\psi}^{4R\sin\psi} r^2 f^* dr.$

$$15.324. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/6} \cos \psi d\psi \int_0^{2R \sin \psi} r^2 f^* dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_0^R r^2 f^* dr.$$

$$15.325. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_R^{2R \sin \psi} r^2 f^* dr.$$

$$15.326. \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \cos \psi d\psi \int_0^{2R \sin \varphi \cos \psi} r^2 f^* dr + \int_0^{\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_0^{2R \sin \varphi \cos \psi} r^2 f^* dr.$$

$$15.327. \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \psi d\psi \int_0^{2R \sin \varphi \cos \psi} r^2 f^* dr. \quad 15.328. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_{4 \sin \psi - \sqrt{16 \sin^2 \psi - 8}}^{4 \sin \psi + \sqrt{16 \sin^2 \psi - 8}} r^2 f^* dr.$$

$$15.329. \int_0^2 dx \int_{-x}^x dy \int_0^{4-x^2} f(x, y, z) dz. \quad 15.330. \int_{-1}^4 dx \int_{-\sqrt{2x+2}}^{\sqrt{2x+2}} dy \int_0^{4-x} f(x, y, z) dz.$$

$$15.331. \int_0^2 dx \int_0^{2-\sqrt{4-(x-2)^2}} dy \int_0^{(4-x^2-y^2)/4} f(x, y, z) dz + \int_0^2 dx \int_{2-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} f(x, y, z) dz.$$

$$15.332. \int_{-2}^0 dx \int_{-2-x}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{4-x^2-y^2} f(x, y, z) dz + \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{2-x} dy \int_0^{4-x^2-y^2} f(x, y, z) dz.$$

При замене $x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$ имеем $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} du \int_{-\sqrt{4-u^2}}^{\sqrt{4-u^2}} dv \int_0^{4-u^2-v^2} f^* dz.$

15.333. При замене $x = x$, $y = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$ имеем

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^4 r dr \int_{(4+r^2)/5}^r f(r, \varphi, x) dx \text{ или } \int_1^4 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_x^{\sqrt{5x-4}} r f(r, \varphi, x) dr.$$

$$15.334. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr \int_0^{4r^2/a} f^* dz.$$

$$15.335. \int_0^1 dx \int_0^{(1-x)/(4(1+x))} dy \int_0^{4xy} f(x, y, z) dz + \int_0^1 dx \int_{(1-x)/(4(1+x))}^{(1-x)/4} dy \int_0^{1-x-4y} f(x, y, z) dz.$$

$$15.336. \int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int_0^{3/\sqrt{1+\sin^2 \varphi}} r dr \int_0^{3-r\sqrt{1+\sin^2 \varphi}} f^* dz.$$

При замене $x = 3r \cos \varphi$, $y = \frac{3}{\sqrt{2}} r \sin \varphi$ имеем $\frac{9}{\sqrt{2}} \int_{\arctg \sqrt{2}}^{\pi + \arctg \sqrt{2}} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{3-3r} f^* dz.$

$$15.337. \int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} dx \int_{y^2}^4 f(x, y, z) dz.$$

$$15.338. \int_0^{1/3} dx \int_{-x}^x dy \int_0^{x^2-y^2} f(x, y, z) dz + \int_{1/3}^1 dx \int_{2x-1}^x dy \int_0^{x^2-y^2} f(x, y, z) dz.$$

$$15.339. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_a^b r dr \int_{-r\sqrt{\cos 2\varphi}}^{r\sqrt{\cos 2\varphi}} f^* dz.$$

$$15.340. \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-z\sqrt{3}}^{\sqrt{2+z^2}} r f^* dz + \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z\sqrt{3}}^{\sqrt{2+z^2}} r f^* dz \text{ при переходе к цилиндриче-}$$

ским координатам или $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/6} \cos \psi d\psi \int_0^1 r^2 f^* dr$ при переходе к сферическим.

15.341. При замене $y = r \sin \psi$, $x = r \cos \psi \cos \varphi$, $z = r \cos \psi \sin \varphi$ имеем

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} \cos \psi d\psi \int_0^{2a \sin \psi} r^2 f^* dr.$$

$$15.342. \int_{-\pi/2}^{-\pi/3} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r dr \int_{-\sqrt{2a \cos \varphi - r^2}}^{\sqrt{2a \cos \varphi - r^2}} f^* dz + \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-\sqrt{2a \cos \varphi - r^2}}^{\sqrt{2a \cos \varphi - r^2}} f^* dz +$$

$$+ \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r dr \int_{-\sqrt{2a \cos \varphi - r^2}}^{\sqrt{2a \cos \varphi - r^2}} f^* dz.$$

$$15.343. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{2r}^{1+r} f^* dz.$$

$$15.344. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arctg 2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_{1/(\sin \psi + \cos \psi)}^{1/(\sin \psi - \cos \psi)} r^2 f^* dr \text{ или } \int_{2/3}^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1-z}^{z/2} r f^* dr + \int_1^2 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z-1}^{z/2} r f^* dr.$$

$$15.345. \int_{-R\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3R^2-x^2}} r f^* dr + \int_0^{3R/2} dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{Rx/2}}^{\sqrt{3R^2-x^2}} r f^* dr.$$

$$15.346. \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^{-a \cos \varphi} r dr \int_0^{(r+a \cos \varphi)/\cos \varphi} f^* dz \text{ или } \int_0^a dz \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^{-(a-z)\cos \varphi} r f^* dr.$$

$$15.347. \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} dy \int_0^{(a-y^2)/2} dx \int_0^x f(x, y, z) dz + \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} dy \int_{(a-y^2)/2}^{a-y^2} dx \int_0^{a-x-y^2} f(x, y, z) dz.$$

15.348. $\frac{9}{2}$. 15.349. $\frac{7}{36}$. 15.350. $\frac{\pi}{8}(1 - \ln 2)$. 15.351. $\frac{1}{2}(1 - \sin 1)$. 15.352. 0.

15.353. $2 \ln 3 - \frac{4}{3}$. 15.354. $-\frac{1}{3}$. 15.355. $\frac{1}{6}ha^3$. 15.356. $\frac{9}{10 \cdot 2^{10}}a^6$.

15.357. $\frac{2-\sqrt{2}}{5}\pi R^5$. 15.358. $\frac{16\pi}{3}$. 15.359. $\frac{\pi}{4}R^2h^2$. 15.360. $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{abc^{m+1}}{m+3}$.

15.361. $\frac{\pi}{4}abc^2$. 15.362. $\frac{4\pi c^3}{9ab}(6\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-7)$. 15.363. $\frac{709}{480}\pi R^5$.

15.364. $\frac{\pi}{5}(18\sqrt{3}-\frac{97}{6})a^5$. 15.365. $\frac{1}{32}(a^2-a_1^2)(b^2-b_1^2)(c^2-c_1^2)$.

15.366. $\frac{(p+q+r+4)(p+q+r+3)\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+6)}$.

15.367. $\frac{2}{3}(b\sqrt{b}-a\sqrt{a})\left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{q}}\right)\ln \frac{n}{m}$. 15.368. $\frac{2-\sqrt{3}}{12}$. 15.369. $\frac{1}{4}$.

15.370. а) $\frac{1}{6}(e-1)$; б) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$. 15.371. $\frac{2\sqrt{6}}{9}\pi a^3$. 15.372. $\frac{15\sqrt{2}}{64}\pi a^3$.

- 15.373. $\frac{26}{3}(2 - \sqrt{2})\pi a^3$. 15.374. $\frac{4}{3}\pi R^3(\cos^4 \alpha - \cos^4 \beta)$. 15.375. $\frac{5}{12}\pi R^3$.
 15.376. $\frac{1}{3}\pi a^3$. 15.377. $\frac{1}{6}a^3$. 15.378. $\frac{1}{360}a^3$. 15.379. $\frac{1}{60}\pi a^3$. 15.380. $\frac{4}{21}\pi a^3$.
 15.381. $\frac{1}{168}\pi a^3$. 15.382. $\frac{32}{315}a^3$. 15.383. $\frac{5\sqrt{2}}{24}\pi a^3$. 15.384. $\frac{1}{3}a^3$. 15.385. $\frac{1}{12}\pi a^3$.
 15.386. $\frac{\pi}{3}(1 - e^{-1})a^3$. 15.387. $\frac{8}{3}a^3$. 15.388. $\frac{1}{6}\pi^2 a^3$. 15.389. $\frac{2}{3}\pi a^3$.
 15.390. $\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi^2 a^3$. 15.391. $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi a^3$. 15.392. $\frac{1}{60}a^3$. 15.393. $\frac{3}{5}\pi$.
 15.394. $\frac{3\pi ab}{5p} \sqrt[3]{\frac{k^8}{p^2}}$. 15.395. $\frac{4}{9}\pi^2 a^3$. 15.396. $\frac{1}{12}\pi^2 a^3$. 15.397. $\frac{1}{360} \cdot \frac{a^4 b^4 c^4}{h^9}$.
 15.398. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a^2 bc}{k}$. 15.399. $\frac{4}{3} \cdot \frac{abc^2}{k}$. 15.400. $\frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{abc^3}{k^2}$. 15.401. $\frac{\pi}{80} \cdot \frac{abc^2}{h}$.
 15.402. $\frac{abc}{3}$. 15.403. $\frac{abk^2}{3c} \left(\frac{c}{k} - 1 + e^{-\frac{c}{k}} \right)$. 15.404. $\frac{1}{18}abc$. 15.405. πabc^2 .
 15.406. $\frac{4\pi}{35}abc$. 15.407. $\frac{\pi}{64}$. 15.408. $\frac{\pi}{64}abc \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right) \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right)$.
 15.409. $\frac{2}{9}\pi(\pi + 6\sqrt{3})$. 15.410. $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{abc^2}{p} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right)$. 15.411. $\frac{49}{864}a^3$.
 15.412. $\frac{1}{4}(b^4 - a^4) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \ln \frac{\beta}{\alpha}$. 15.413. $\frac{5\pi + 16}{6}a^3$. 15.414. $\frac{2}{9}\pi a^3$.
 15.415. $\frac{8}{315}(5a^3 + 6a^2b + 8ab^2 + 16b^3)$. 15.416. $\frac{11\pi}{3}$. 15.417. 54π .
 15.418. $\frac{\pi}{2}$. 15.419. $\frac{4}{3}$. 15.420. 24 . 15.421. $\frac{92\pi}{3}$. 15.422. $\frac{1}{12}a^4$. 15.423. $\frac{37}{8}\pi a^5$.
 15.424. a^5 . 15.425. $\frac{3}{4}\pi R^4$. 15.426. $12\pi\rho_0 a^3$. 15.427. $\frac{1}{10}R^4 H$.
 15.428. $\frac{\pi}{6}(3R^2 + 2H^2)R^2 H$. 15.429. $\frac{4\pi}{3}(\cos^6 \alpha - \cos^6 \beta)\rho a^4$. 15.430. $\frac{1}{24}\rho$.
 15.431. $M = abc\rho$; $I_{Ox} = \frac{M}{3}(b^2 + c^2)$; $I_{Oy} = \frac{M}{3}(a^2 + c^2)$; $I_{Oz} = \frac{M}{3}(a^2 + b^2)$.
 15.432. $I_{Ox} = \frac{2^9 \cdot 19}{189}\rho$; $I_{Oy} = \frac{2^{11} \cdot 23}{945}\rho$; $I_{Oz} = \frac{2^9 \cdot 41}{315}\rho$.
 15.433. $M = \frac{4}{3}\pi\rho abc$; $I_{Ox} = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2)$; $I_{Oy} = \frac{1}{5}M(a^2 + c^2)$; $I_{Oz} = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2)$.
 15.434. $M = \frac{8\sqrt{2}}{15}\rho a^3$; $I_{Ox} = \frac{2^7\sqrt{2}}{945}\rho a^5$; $I_{Oy} = \frac{2^6\sqrt{2}}{315}\rho a^5$; $I_{Oz} = \frac{2^5\sqrt{2}}{135}\rho a^5$.
 15.435. $I_{Ox} = \frac{5}{6}\pi\rho$. 15.436. $I_{Oz} = 4\pi\rho$. 15.437. $I_{Oz} = \frac{\pi}{6}\rho c^5$. 15.438. $\frac{\rho}{60}abc(a^2 + b^2)$.
 15.439. $I_{Oz} = \frac{4\pi\rho}{715}abc(a^2 + b^2)$. 15.440. $I_{Oz} = \frac{1}{15}(1 - \sin \alpha)^2(2 + \sin \alpha)\rho R^5$.
 15.441. $I_{Oz} = \frac{2(6\sqrt{3} - 10)}{15}\pi\rho$. 15.442. $\frac{9\pi}{140}\rho a^5$.
 15.443. $M = \frac{1}{8}\rho a^3$; $I_{Oz} = \frac{2}{405} \sqrt[3]{9}\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)$.
 15.444. $M = 2\pi^2\rho a^2 b$; $I_{Oz} = \frac{1}{8}\pi^2\rho ab^2(8a^2 + 9b^2)$; $I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{1}{12}\pi^2\rho ab^2(6a^2 + 13b^2)$.
 15.445. $M = \frac{\pi}{3}\rho k^2 h^3$; $I_{xy} = \frac{3}{5}h^2 M$; $I_{xz} = \frac{3}{20}h^2 k^2 M$.
 15.446. $M = \frac{1}{2}\pi\rho a^3$; $I_{xz} = I_{xy} = \frac{1}{6}Ma^2$. 15.447. $M = \frac{1}{6}\rho abc$; $I_{yz} = \frac{1}{10}Ma^2$.
 15.448. $M = \frac{\sqrt{\pi}}{648}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\rho a^3$; $I_{xy} = \frac{3}{10} \cdot 2^{-10}\sqrt{\pi}\rho a^5$.
 15.449. $M = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}\pi\rho(b^3 - a^3)$; $I_{xy} = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{30}\rho(b^5 - a^5)$.
 15.450. $M = \frac{5}{4}\pi\rho a^3$; $I_{xy} = \frac{51}{40}Ma^2$. 15.451. $M = \frac{1}{3}\pi\rho R^2 H$; $I = \frac{1}{10}MR^2$.
 15.452. $I = \frac{48}{25}MR^2$.

15.453. $M = \frac{2\pi k}{3}$, $I = 2M$, где k — коэффициент пропорциональности.

15.454. $M = \pi kHR$, $I = \frac{R^2 M}{6}$, где k — коэффициент пропорциональности.

15.455. $(\frac{4}{3}, 0, \frac{10}{9})$. 15.456. $(0, 0, \frac{a}{3})$. 15.457. $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{30})$. 15.458. $(\frac{3}{8}R, \frac{3}{8}R, \frac{3}{8}R)$.

15.459. $(0, 0, \frac{2}{3}H)$. 15.460. $(0, 0, \frac{7}{30}c)$. 15.461. $(\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}b, \frac{1}{4}c)$. 15.462. $(0, 0, \frac{7}{20})$.

15.463. $(\frac{21}{128}a, \frac{21}{128}b, \frac{21}{128}c)$. 15.464. $(\frac{3}{5}a, \frac{3}{5}b, \frac{9}{32}\sqrt{ab})$. 15.465. $(0, 0, \frac{1}{2}a)$.

15.466. $(0, 0, \frac{3}{8}a(1 + \cos \alpha))$. 15.467. $(\frac{9\pi a}{448}, \frac{9\pi a}{448}, \frac{9\pi a}{448})$. 15.468. $(0, 0, \frac{9a}{20})$.

15.469. $(\frac{5a}{12}, \frac{5a}{12}, \frac{7}{12}a)$. 15.470. $(0, 0, \frac{5}{83}(6\sqrt{3} + 5)a)$.

15.471. $M = \frac{45\rho}{16}$, $(\frac{124}{675}(11\sqrt{2} - 8), \frac{248}{675}(\sqrt{2} + 4), \frac{21\ln 2}{90}(15 + 16\ln 2))$.

15.472. На перпендикуляре, опущенном из центра шара на основание сегмента, на расстоянии $r_0^2/2h$ от центра шара.

15.473. $x_0 = y_0 = 0$; $z_0 = \frac{H}{4}$.

15.474. а) $M = \frac{4}{3}\pi k a^2$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = \frac{4}{5}a$, где k — коэффициент пропорциональности;

б) $M = 2\pi k a$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = \frac{a}{2}$, где k — коэффициент пропорциональности.

15.475. $F_x = F_y = 0$, $F_z = 2\pi\rho(R + H - \sqrt{R^2 + Hh^2})$. 15.476. $F_z = 2\pi\rho h(1 - \frac{h}{l})$.

15.477. $\frac{n}{3}$. 15.478. $\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}$. 15.479. $\frac{n(n-1)}{8}$. 15.480. $\frac{n(3n+1)}{12}$.

15.481. $\frac{1}{2^n n!}$. 15.482. $\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$. 15.487. $\frac{\pi^{n/2} a^n}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$. 15.488. $\frac{1}{n!} a_1 a_2 \cdots a_n$.

15.489. $\frac{2\pi^{n/2} H^{n+1}}{n(n+1)\Gamma(n/2)} a_1 \cdots a_n$. 15.490. $(2\pi)^n \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$.

15.491. Сходится при $1 < p < 2$, расходится при $p \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

15.492. Сходится при $p < 2$, расходится при $p \geq 2$.

15.493. Сходится при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$, расходится при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$.

15.494. Сходится при $p > 3$, расходится при $p \leq 3$.

15.495. Сходится при $p > \frac{3}{2}$, расходится при $p \leq \frac{3}{2}$.

15.496. Сходится при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, расходится при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$.

15.497. Сходится при $p < 2$, расходится при $p \geq 2$.

15.498. Сходится при $-\frac{1}{4} < p < \frac{1}{2}$, расходится при $p \in (-\infty; -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$.

15.499. 0. 15.500. Рас. 15.501. 0. 15.502. $2\sqrt{\pi}$. 15.503. Рас. 15.504. $\frac{\ln 5}{4}$.

15.505. Рас. 15.506. $\pi(\sqrt{2n} - \sqrt{2m})$. 15.507. Рас. 15.508. 0. 15.509. Рас.

15.510. $\frac{8\pi}{15}$. 15.511. Рас. 15.512. $\frac{\sqrt{\pi}}{3}\Gamma^2(\frac{1}{4})a^{3/2}$. 15.513. Рас.

15.514. $\frac{\sqrt{\pi}}{16}\Gamma^3(\frac{1}{4})$. 15.515. $\frac{\sqrt{\pi}}{8}\Gamma^2(\frac{1}{4})a^2$. 15.516. $\frac{e}{2} - 1$.

15.517. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi^2$. Указание. Использовать равенство $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a$.

15.518. 0. 15.519. Рас. 15.520. $\frac{2\pi}{3}(3\pi^2 + \Gamma^4(\frac{1}{4}))$.

§ 15.6. Теоретические задачи

Пример T15.1. Пусть функция $f: I = [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию: для любых $x, x', y, y' \in [0; 1]$ из неравенств $x \leq x', y \leq y'$ следует неравенство $f(x, y) \leq f(x', y')$. Докажем, что $f \in R(I)$.

РЕШЕНИЕ. Из условия следует, что $f(0, 0) \leq f(x, y) \leq f(1, 1)$ при всех $(x, y) \in \Pi$, поэтому достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение T квадрата Π , для которого $S(f, T) - s(f, T) < \varepsilon$.

Возьмём разбиение T , индуцированное разбиением отрезков $[0; 1]$ осей Ox и Oy на n равных частей, и обозначим

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad y_q = \frac{q}{n}, \quad \Pi_{k,q} = [x_{k-1}; x_k] \times [y_{q-1}; y_q], \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq q \leq n.$$

По условию существуют

$$M_{k,q} = \sup_{x \in \Pi_{k,q}} f(x) = f(x_k, y_q), \quad m_{k,q} = \inf_{x \in \Pi_{k,q}} f(x) = f(x_{k-1}, y_{q-1}).$$

Получаем

$$S(f, T) - s(f, T) = \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^n (M_{k,q} - m_{k,q}) |\Pi_{k,q}| = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^n (f(x_k, y_q) - f(x_{k-1}, y_{q-1})).$$

Преобразуем повторную сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^n (f(x_k, y_q) - f(x_{k-1}, y_{q-1})) &= \\ &= f(1, 1) - f(0, 0) + \sum_{k=1}^{n-1} (f(x_k, 1) - f(x_k, 0)) + \sum_{q=1}^{n-1} (f(1, y_q) - f(0, y_q)). \end{aligned}$$

Поскольку $f(x, 1) - f(x, 0) \leq f(1, 1) - f(0, 0)$ для всех $x \in [0; 1]$ и, кроме того, $f(1, y) - f(0, y) \leq f(1, 1) - f(0, 0)$ для всех $y \in [0; 1]$, получаем

$$S(f, T) - s(f, T) \leq \frac{1}{n^2} 2n(f(1, 1) - f(0, 0)) = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

что и доказывает требуемое утверждение. \square

Пример T15.2. Покажем, что существует открытое связное ограниченное множество $D \subset \mathbb{R}^2$, не являющееся жордановым.

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся примером T7.11 (т. 1, с. 310), где было построено множество $K_{1/3}$, обладающее следующими свойствами (см. также задачу T2.158, т. 1, с. 73):

- 1) $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} U_{i,j}$, где $U_{i,j}$ — непересекающиеся интервалы и $|U_{i,j}| = 3^{-i-1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $1 \leq j \leq 2^{i-1}$;
- 2) множество $P = K_{1/3}$ — множество граничных точек множества G .

Рассмотрим множество $D = (G \times (0; 1)) \cup \left((0; 1) \times \left(0; \frac{1}{3}\right) \right)$. Это множество открытое и ограниченное, покажем, что оно линейно связно. Действительно, пусть $m_1 = (x_1, y_1) \in D$ и $m_2 = (x_2, y_2) \in D$. Если точки x_1, x_2 лежат в одном интервале $U_{i,j}$, то отрезок $[m_1; m_2]$ лежит в соответствующем прямоугольнике $U_{i,j} \times (0; 1)$, следовательно, целиком входит в D ; если точки x_1 и x_2 лежат в разных интервалах множества G , то ломаная с вершинами m_1 ,

$c_1 = \left(x_1, \frac{1}{6}\right)$, $c_2 = \left(x_2, \frac{1}{6}\right)$, m_2 целиком входит в D . Если $x_1 \in G$, а $x_2 \notin G$, то $m_2 \in (0; 1) \times \left(0; \frac{1}{3}\right)$ и ломаная с вершинами m_1 , $c = \left(x_1, \frac{1}{6}\right)$, m_2 целиком входит в D ; аналогично строится ломаная с концами m_1 и m_2 , входящая в D , если $x_1 \notin G$, $x_2 \in G$. Наконец, если и $x_1 \notin G$ и $x_2 \notin G$, то $m_1 \in (0; 1) \times \left(0; \frac{1}{3}\right)$, $m_2 \in (0; 1) \times \left(0; \frac{1}{3}\right)$ и отрезок $[m_1; m_2]$ целиком входит в D .

Множеством граничных точек D является замкнутое множество $F = [0; 1] \times [0; 1] \setminus D$. Покажем, что F не является множеством меры нуль. Действительно, предположим, что существует не более чем счётное покрытие множества F открытыми прямоугольниками Π_k , $k \in \mathbb{N}$, с условием $\sum_{k=1}^{\infty} |\Pi_k| < \frac{1}{3}$, тогда совокупность открытых прямоугольников Π_k , $U_{i,j} \times (0; 1)$, $(0; 1) \times \left(0; \frac{1}{3}\right)$, образует открытое покрытие квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$. Выберем из этой системы конечное подпокрытие и обозначим прямоугольники из этого конечного подпокрытия, входящие в совокупность Π_k , через J_k , $1 \leq k \leq k_0$, и прямоугольники вида $U_{i,j} \times (0; 1)$ через V_p , $1 \leq p \leq p_0$. Конечное объединение прямоугольников

$$\left(\bigcup_{k=1}^{k_0} J_k\right) \cup \left(\bigcup_{p=1}^{p_0} V_p\right) \cup \left((0; 1) \times \left(0; \frac{1}{3}\right)\right)$$

покрывает весь квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$, поэтому $\sum_{k=1}^{k_0} |J_k| + \sum_{p=1}^{p_0} |V_p| + \frac{1}{3} \geq 1$. Но

$$\sum_{k=1}^{k_0} |J_k| < \sum_{k=1}^{\infty} |\Pi_k| < \frac{1}{3}, \quad \sum_{p=1}^{p_0} |V_p| < \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^i-1} |U_{i,j}| = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{3},$$

следовательно, $\sum_{k=1}^{k_0} |J_k| + \sum_{p=1}^{p_0} |V_p| + \frac{1}{3} < 1$. Полученное противоречие показывает, что множество $F = \partial D$ не является множеством меры нуль и, следовательно, D есть открытое связное ограниченное подмножество \mathbb{R}^2 , не являющееся жордановым. \square

Полезно сравнить этот результат с тем, что в одномерном пространстве \mathbb{R} непустым открытым связным ограниченным подмножеством является только интервал, т. е. жорданово множество.

Пример Т15.3. Покажем, что существование и равенство повторных интегралов $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy$ и $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx$ не достаточно для интегрируемости функции f на $[a; b] \times [c; d]$.

Решение. Вначале установим взаимно однозначное соответствие между множеством всех рациональных чисел интервала $(0; 1)$ и множеством всех нечётных натуральных чисел M и обозначим через r_m число, соответствующее элементу $m \in M$. Положим $x_{n,p,q} = \frac{p}{2^n} + \frac{1}{q^{2^{n+1}}}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in M$, $q \in M$;

$$a_{n,p,q} = r_q + \frac{p\sqrt{2}}{2^n}; \quad y_{n,p,q} = \begin{cases} a_{n,p,q}, & \text{если } a_{n,p,q} < 1, \\ a_{n,p,q} - 1, & \text{если } a_{n,p,q} > 1. \end{cases}$$

Покажем, что тройка $\{n, p, q\}$ однозначно определяется как для $x_{n,p,q}$, так и для $y_{n,p,q}$.

1) Предположим, что

$$x_{n_1, p_1, q_1} = \frac{p_1}{2^{n_1}} + \frac{1}{q_1 2^{n_1+1}} = \frac{p_2}{2^{n_2}} + \frac{1}{q_2 2^{n_2+1}} = x_{n_2, p_2, q_2}. \quad (1)$$

Возьмём $n = \max\{n_1, n_2\} + 1$, тогда, умножив равенство (1) на $q_1 2^n$, получим, что отношение q_1/q_2 есть целое число. Умножив это равенство на $q_2 2^n$, получим, что отношение q_2/q_1 также целое число, следовательно, $q_1 = q_2 = q$. Умножив равенство (1) на $q 2^n$, приходим к равенству

$$p_1 q 2^{n-n_1} + 2^{n-n_1-1} = p_2 q 2^{n-n_2} + 2^{n-n_2-1}.$$

Если $n_1 \neq n_2$, то одна из частей этого равенства чётное число, а другая — нечётное, что невозможно, следовательно $n_1 = n_2 = n$. Из равенства (1) и полученных равенств $q_1 = q_2$, $n_1 = n_2$ следует и равенство $p_1 = p_2 = p$.

2) Предположим, что $y_{n_1, p_1, q_1} = y_{n_2, p_2, q_2}$. Тогда $r_{q_1} + \frac{p_1 \sqrt{2}}{2^{n_1}} = r_{q_2} + \frac{p_2 \sqrt{2}}{2^{n_2}} + \delta$, где δ принимает одно из значений $0, 1, -1$. Поэтому число $\sqrt{2} \left(\frac{p_1}{2^{n_1}} - \frac{p_2}{2^{n_2}} \right)$ рационально, что возможно только при условии $\frac{p_1}{2^{n_1}} = \frac{p_2}{2^{n_2}}$, откуда в силу нечётности p_1, p_2 следует, что $n_1 = n_2$, $p_1 = p_2$.

Тем самым установлено биективное соответствие

$$x_{n,p,q} \leftrightarrow (n, p, q) \leftrightarrow y_{n,p,q}. \quad (2)$$

Рассмотрим множество $E = \{(x_{n,p,q}, y_{n,p,q}) : n \in \mathbb{N}, q \in M, p \in M; p < 2^n\}$. По построению $E \subset \Pi = [0; 1] \times [0; 1]$ и в силу биективного соответствия (2) каждая вертикаль $x = x_0$, $0 < x_0 < 1$, и каждая горизонталь $y = y_0$, $0 < y_0 < 1$, пересекается с E не более чем в одной точке.

Возьмём произвольный прямоугольник $J = (\alpha; \beta) \times (\gamma; \delta) \subset \Pi$. Фиксируем такие p_0 и n_0 , что $x_{n_0, p_0, q} \in (\alpha; \beta)$ для всех $q \in M$. Тогда множество $\{y_{n_0, p_0, q} : q \in M\}$ — это лежащая в интервале $(0; 1)$ часть множества, полученного из множества $\{r_q\} \cup \{r_q - 1\}$ сдвигом вправо на $\frac{p_0 \sqrt{2}}{2^{n_0}}$, следовательно, в интервале $(\gamma; \delta)$ содержится бесконечно много чисел вида $y_{n_0, p_0, q}$. Таким образом, прямоугольник J содержит бесконечно много точек множества E , откуда следует, что $\Pi = \bar{E}$. Множество E счётно, поэтому оно не имеет внутренних точек, значит, $\partial E = \bar{E} = \Pi$, следовательно, E не жорданово множество. Тогда характеристическая функция χ_E множества E неинтегрируема на Π . В то же время, поскольку для всех $x_0 \in (0; 1)$ и $y_0 \in (0; 1)$ функции $\chi(x_0, y)$ и $\chi(x, y_0)$ отличны от нуля не более чем в одной точке, оба повторных интеграла $\int_0^1 dx \int_0^1 \chi(x, y) dy$ и $\int_0^1 dy \int_0^1 \chi(x, y) dx$ существуют и равны нулю. \square

Т15.1. Доказать, что замыкание жорданова множества объёма нуль есть жорданово множество объёма нуль.

Т15.2. Привести пример ограниченного множества меры нуль, замыкание которого не является множеством меры нуль.

Т15.3. Доказать, что компакт меры нуль есть жорданово множество объёма нуль.

T15.4. Привести пример несчётного множества, не являющегося жордановым, замыкание которого жорданово.

✓ **T15.5.** Доказать, что множество всех внутренних точек жорданова множества жорданово.

T15.6. Привести пример такой отличной от нуля на множестве мощности континуума функции $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, где $\Pi = [0; 1] \times [0; 1]$, что $\int_D f dx = 0$ для любого жорданова множества $D \subset \Pi$.

T15.7. Привести пример такой непрерывной, не равной тождественно нулю функции $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, где $\Pi = [0; 1] \times [0; 1]$, что $\int_{\Pi} f dx = 0$.

✓ **T15.8.** Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на жордановом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, $|D| \neq 0$, и не равна тождественно нулю. Доказать, что найдётся такое жорданово множество $M \subset D$, что $\int_M f dx \neq 0$.

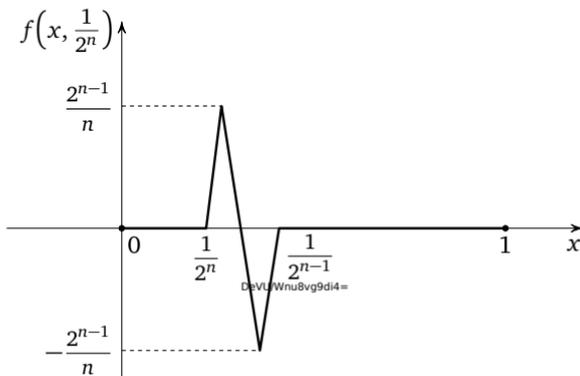
✓ **T15.9.** Доказать, что для непрерывной и неотрицательной на жордановом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ из равенства $\int_D f dx = 0$ следует, что или $|D| = 0$, или f тождественно равна нулю на D .

T15.10. Доказать, что если $f \in R(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $|D| > 0$ и $f(x) > 0$, $x \in D$, то $\int_D f dx > 0$.

T15.11. Пусть $f \in R(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Пусть x_0 — внутренняя точка D , f — непрерывна в x_0 , $\{E_\alpha\}$ — совокупность жордановых подмножеств D , для каждого из которых точка x_0 внутренняя, и $d(E_\alpha) = \sup\{\|x_1 - x_2\| : x_1, x_2 \in E_\alpha\}$. Доказать, что $\lim_{d(E_\alpha) \rightarrow 0} \frac{1}{|E_\alpha|} \int_{E_\alpha} f dx = f(x_0)$.

✓ **T15.12.** Функция $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, $\Pi = [0; 1] \times [0; 1]$, определяется так:

- 1) $f(x, \frac{1}{2^n}) = 0$, если $x \in [0; \frac{1}{2^n}] \cup [\frac{1}{2^{n-1}}; 1]$, $n \in \mathbb{N}$;
- 2) $f(\frac{5}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}) = \frac{2^{n-1}}{n}$, $f(\frac{7}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}) = -\frac{2^{n-1}}{n}$;
- 3) $f(x, \frac{1}{2^n})$ линейна на отрезках $[\frac{1}{2^n}; \frac{5}{2^{n+2}}]$, $[\frac{5}{2^{n+2}}; \frac{7}{2^{n+2}}]$ и $[\frac{7}{2^{n+2}}; \frac{1}{2^{n-1}}]$ (см. рис.);



4) $f(x, y) = 0$, если $y \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+2}}; \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+2}} \right)$ и $x \in [0; 1]$;

5) функция $f(x_0, y)$ линейна на отрезках $\left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+2}}; \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+2}} \right]$.

(Обратите внимание: для любого $x_0 \in [0; 1]$ функция $f(x_0, y)$ может быть отлична от нуля не более чем на одном отрезке вида $\left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+2}}; \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+2}} \right]$ для каждого $x_0 \in [0; 1]$.)

Доказать, что:

а) функция $f(x, y)$ непрерывна и неограничена на $D = (0; 1] \times (0; 1]$;

б) для каждого $x_0 \in [0; 1]$ и каждого $y_0 \in [0; 1]$ функции $f(x_0, y)$ и $f(x, y_0)$ интегрируемы на $[0; 1]$;

в) функции $\Phi(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$ и $\Psi(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$ непрерывны на $[0; 1]$ и $\int_0^1 \Phi(x) dx = \int_0^1 \Psi(y) dy = 0$.

✓ **T15.13.** Привести пример таких областей $D_t \subset \mathbb{R}^2$, $D_x \subset \mathbb{R}^2$ и отображения $\psi: D_t \rightarrow D_x$, что $\varphi \in C^1(\bar{D}_t)$, якобиан отображения φ отличен от нуля для всех $t \in \bar{D}_t$, но φ не является диффеоморфизмом.

T15.14. Доказать, что для многомерных полярных координат в \mathbb{R}^n , определённых формулами (1) на с. 80, якобиан равен $r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1} \varphi_i$.

T15.15. Показать, что функция f из задачи T15.12 интегрируема в несобственном смысле на $\Pi = [0; 1] \times [0; 1]$, и вычислить $\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$.

T15.16. Показать, что характеристическая функция χ_D множества D , определённого в примере T15.2 (с. 132), интегрируема на $\Pi = [0; 1] \times [0; 1]$ в несобственной смысле, и вычислить $\iint_{\Pi} \chi_D dx dy$.

✓ **T15.17.** Пусть $\Pi = [0; 1] \times [0; 1]$,

$$D_n^+ = \left(\frac{1}{2^n}; \frac{5}{2^{n+2}} \right) \times \left(\frac{1}{2^n}; \frac{5}{2^{n+2}} \right) \cup \left(\frac{3}{2^{n+2}}; \frac{1}{2^n} \right) \times \left(\frac{3}{2^{n+2}}; \frac{1}{2^n} \right),$$

$$D_n^- = \left(\frac{1}{2^n}; \frac{5}{2^{n+2}} \right) \times \left(\frac{3}{2^{n+2}}; \frac{1}{2^n} \right) \cup \left(\frac{3}{2^{n+2}}; \frac{1}{2^n} \right) \times \left(\frac{1}{2^n}; \frac{5}{2^{n+2}} \right)$$

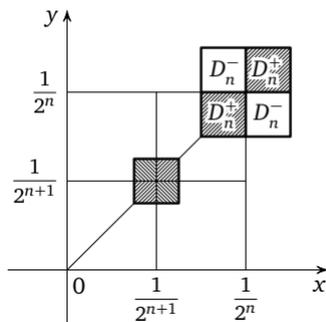
(см. рис.) и

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{2n}, & (x, y) \in D_n^+; \\ -2^{2n}, & (x, y) \in D_n^-; \\ 0, & (x, y) \in \Pi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n^+ \cup D_n^-). \end{cases}$$

Доказать, что

а) интеграл $\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$ расходится;

б) для любого $x_0 \in [0; 1]$ и любого $y_0 \in [0; 1]$ функции $f(x_0, y)$ и $f(x, y_0)$ интегрируемы на $[0; 1]$;



в) $\int_0^1 f(x_0, y) dy = 0$ для любого $x_0 \in [0; 1]$ и $\int_0^1 f(x, y_0) dx = 0$ для любого $y_0 \in [0; 1]$.

Ответы и указания

T15.2. Например, множество всех точек квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$, обе координаты которых рациональны.

T15.4. Например, множество M всех точек квадрата $\Pi = [0; 1] \times [0; 1]$, обе координаты которых иррациональны, поскольку замыкание M есть квадрат Π , а характеристическая функция χ_M не интегрируема на Π (проверьте!).

T15.5. Указание. Воспользоваться включением $\partial(\partial M) \subset \partial M$, где ∂M — множество граничных точек множества M .

T15.6. Например, $f(x, y) = 0$, $x \in [0; 1]$, $y \neq 1/2$ и $f(x, 1/2) = 1$, $x \in [0; 1]$.

T15.7. Например, $f(x, y) = x - y$.

T15.8. Указание. Показать, что множество D имеет внутренние точки.

T15.9. Указание. Воспользоваться задачей T15.8 и аддитивностью интеграла.

T15.10. Указание. Применить критерий Лебега и провести рассуждение, аналогичное решению задачи T15.8.

T15.11. Указание. Применить теорему о среднем.

T15.12. Указание. При фиксированном $x_0 \in (0; 1)$ построить график функции $f(x_0, y)$, а при фиксированном $y_0 \in (0; 1)$ — график функции $f(x, y_0)$.

T15.13. Например, $D_x = \{(x, y) : \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4\}$, $D_t = \{(t, s) : \frac{1}{2} < t < 2, -\pi < s < 3\pi\}$,
 $\varphi : x = t \cos s, y = t \sin s$.

T15.15. 0. **T15.16.** $4/9$.

T15.17. Указание. Показать, что $f \in R(E_n)$ для любого $E_n = (1/2^n; 1] \times (1/2^n; 1]$, $n \in \mathbb{N}$,

и $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} |f(x, y)| dx dy = \infty$.

Криволинейные и поверхностные интегралы. Векторный анализ. Дифференциальные формы

Предварительные сведения

Напомним для удобства читателя некоторые определения и факты, относящиеся к материалу первого тома.

Образ промежутка $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ при непрерывном отображении в \mathbb{R}^3 или в \mathbb{R}^2 , т. е. множество $L = \{(x, y, z) : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in \langle a; b \rangle\}$ или $L = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in \langle a; b \rangle\}$, где $x, y, z \in C\langle a; b \rangle$, называется *кривой* или *линией*, соответственно *пространственной* или *плоской* (см. т. 1, гл. 5, п. 5.2.1).

Плоская кривая может рассматриваться как частный случай пространственной (при $z(t) \equiv 0$ на $\langle a; b \rangle$), поэтому общие свойства и понятия будем далее формулировать для пространственных кривых.

Тройка $(x(t), y(t), z(t))$ называется *параметризацией кривой* L . Далее мы рассматриваем только такие кривые и такие их параметризации, что лишь конечное число точек кривой может иметь более одного прообраза на $\langle a; b \rangle$ при рассматриваемой параметризации и прообраз каждой такой точки — конечное множество. Такие точки называются *точками самопересечения кривой*. Кривая без точек самопересечения, для которой $\langle a; b \rangle = [a; b]$, т. е. образ отрезка при непрерывной биекции, называется *дугой* (см. т. 1, гл. 7, § 7.4).

Точки $(x(a), y(a), z(a))$ и $(x(b), y(b), z(b))$, если они принадлежат кривой L и различны, называются её *граничными (краевыми, концевыми) точками*; точки кривой, не являющиеся граничными, называются её *внутренними точками*. Кривая L называется *замкнутой*, если промежуток $\langle a; b \rangle$ является отрезком $[a; b]$, а граничные точки совпадают. Замкнутую кривую, которая после удаления любой своей точки («разрезания» кривой в этой точке) становится незамкнутой кривой без самопересечений, часто называют *контуром*.

Кривая L называется *гладкой*, если она имеет касательную в каждой своей внутренней точке, т. е. если при каждом $t \in (a; b)$ функции x, y, z имеют производные $x'(t), y'(t), z'(t)$, хотя бы одна из которых отлична от нуля (см. т. 1, гл. 5, п. 5.2.1). Кривая L называется *кусочно-гладкой*, если она не имеет касательной не более чем в конечном числе своих внутренних точек. В этом томе мы, как правило, будем иметь дело с *простыми* гладкими кривыми, т. е. с гладкими кривыми, у которых $\langle a; b \rangle = [a; b]$ и $x, y, z \in C^1[a; b]$, и с соответствующими кусочно-гладкими кривыми.

Определения, касающиеся поверхностей в \mathbb{R}^3 , см. в п. 15.2.4 этого тома.

Всякое отображение $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^3$, т. е. всякая числовая функция на M , называется *скалярным полем на множестве* M . Всякое отображе-

ние $\vec{F}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M \subset \mathbb{R}^3$, т. е. $\vec{F} = (P, Q, R)$, где функции P , Q и R являются отображениями из M в \mathbb{R} , называется *векторным полем на M* . Аналогично определяются скалярное $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ и векторное поле $\vec{F}: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = (P, Q)$, для $M \subset \mathbb{R}^2$. Гладкость векторного поля определяется минимальной гладкостью его координат, т. е. поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ называется *гладким* или *полем класса C^1 в области D* , если $P, Q, R \in C^1(D)$, дважды гладким, если $P, Q, R \in C^2(D)$, и т. д. Градиентом скалярного поля f , заданного в области $D \subset \mathbb{R}^3$ или $D \subset \mathbb{R}^2$, называется векторное поле $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ или, соответственно, $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$, см. т. 1, гл. 8, § 8.7.

В § 8.1 (т. 1, с. 325) отмечалось, что \mathbb{R}^m часто понимается не только как линейное, но и как аффинное пространство, состоящее из точек, а не из векторов, поэтому над элементами \mathbb{R}^m стрелка обычно не ставится. Здесь, следуя главе 8, мы будем ставить стрелку только в тех случаях, когда желаем подчеркнуть, что данные элементы рассматриваются как векторы — когда к ним применяются векторные операции (модуль вектора, скалярное или векторное произведение и т. п.) или когда это соответствует их геометрическому смыслу (касательные и нормальные векторы к кривым и поверхностям, векторные поля и т. п.).

§ 16.1. Криволинейный интеграл первого рода

Понятие криволинейного интеграла первого рода

Определение. Пусть $L = \overset{\sim}{AB}$ — кусочно-гладкая кривая в \mathbb{R}^3 с конечными точками A и B . Набор несовпадающих точек этой кривой A_0, A_1, \dots, A_n , занумерованных в порядке следования от A к B : $A_0 = A, A_n = B$ или от B к A : $A_0 = B, A_n = A$, называется *разбиением кривой L* и обозначается T .

Пусть функция $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ определена и ограничена на кусочно-гладкой кривой $L \subset \mathbb{R}^3$ и $T = \{A_k\}_{k=0}^n$ — разбиение L . Введём обозначения: $L_i = A_{i-1} \tilde{A}_i$, $|L_i|$ — длина¹ дуги L_i , $M_i = \sup_{P \in L_i} f(P)$, $m_i = \inf_{P \in L_i} f(P)$,

$$S(f, T) = \sum_{i=1}^n M_i |L_i| \quad \text{— верхняя сумма Дарбу,}$$

$$s(f, T) = \sum_{i=1}^n m_i |L_i| \quad \text{— нижняя сумма Дарбу,}$$

$$\bar{I}(f, L) = \inf_T S(f, T) \quad \text{— верхний интеграл Дарбу,}$$

$$\underline{I}(f, L) = \sup_T s(f, T) \quad \text{— нижний интеграл Дарбу.}$$

Определение. Функция $f: L \rightarrow \mathbb{R}$, определённая и ограниченная на кусочно-гладкой кривой $L \subset \mathbb{R}^3$, *интегрируема по кривой L* , если $\bar{I}(f, L) = \underline{I}(f, L)$. Общее значение интегралов Дарбу называется *криволинейным интегралом 1-го рода функции f по кривой $L = \overset{\sim}{AB}$* и обозначается $\int_L f ds$ или $\int_{\overset{\sim}{AB}} f ds$.

¹ Определение длины дуги и способы её вычисления рассматривались в § 7.4 (т. 1, с. 286).

Обратите внимание: в определении сумм Дарбу используются длины дуг $A_{i-1}A_i$, поэтому эти суммы не зависят от того, в каком порядке следования нумеровались точки кривой $L = \overset{\curvearrowright}{AB}$ при её разбиении — от A к B или от B к A . Отсюда вытекает, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от выбора направления (от A к B или от B к A), в котором нумеруются точки разбиения, или, как принято говорить, не зависит от ориентации кривой L : $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f ds = \int_{\overset{\curvearrowleft}{BA}} f ds$. Заметим, что для интеграла Римана по отрезку $[a; b] \subset \mathbb{R}$ принято по определению, что $\int_b^a f dx = - \int_a^b f dx$ (см. т. 1, § 7.1).

Отметим также, что если $f(x) = 1$ для всех $x \in L$, то $S(f, T) = s(f, T) = |L|$ и $\bar{I}(f, L) = \underline{I}(f, L) = |L|$. Поэтому $|L| = \int_L 1 ds$.

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода

1 (*Аддитивность интеграла*). Пусть для кривых L , L_1 и L_2 выполнены условия: $L = L_1 \cup L_2$, множество $L_1 \cap L_2$ непусто и конечно (т. е. кривые L_1 и L_2 не перекрываются), пусть также функция f интегрируема по кривым L_1 и L_2 . Тогда f интегрируема по кривой L и

$$\int_L f ds = \int_{L_1} f ds + \int_{L_2} f ds.$$

2 (*Линейность интеграла*). Если функции f и g интегрируемы по кривой L , то для любых постоянных λ и μ функция $\lambda f + \mu g$ также интегрируема по L , причём

$$\int_L (\lambda f + \mu g) ds = \lambda \int_L f ds + \mu \int_L g ds.$$

3 (*Монотонность*). Если функции f и g интегрируемы по кривой L и $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ на L , то $\int_L f ds \leq \int_L g ds$.

4 (*Интегрируемость модуля*). Если функция f интегрируема по кривой L , то функция $|f|$ интегрируема по L и

$$\left| \int_L f ds \right| \leq \int_L |f| ds.$$

5 (*Интегрируемость произведения*). Если функции f и g интегрируемы по кривой L , то и их произведение fg интегрируемо по кривой L .

6 (*Теорема о среднем*). Если функции f и g интегрируемы по кривой L , $g(P) \geq 0$ для всех $P \in L$, $m = \inf_{P \in L} f(P)$, $M = \sup_{P \in L} f(P)$, то

$$m \int_L g ds \leq \int_L fg ds \leq M \int_L g ds,$$

в частности, $m|L| \leq \int_L f ds \leq M|L|$. Если к тому же функция f непрерывна вдоль кривой L , т. е. $\lim_{P \rightarrow P_0, P \in L} f(P) = f(P_0)$ для каждой точки $P_0 \in L$, то существует такая точка $C \in L$, что $\int_L gf ds = f(C) \int_L g ds$.

7 (Интегрируемость непрерывной функции). Если функция f непрерывна вдоль кривой L , имеющей конечную длину, то функция f интегрируема по L .

Отметим, что из непрерывности функции f в области D следует, что f непрерывна вдоль любой кривой $L \subset D$, причём обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Сведение криволинейного интеграла первого рода к интегралу Римана

Пусть $L = \{(x, y, z) : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [a; b]\}$ — простая гладкая кривая и функция f непрерывна вдоль L . Тогда

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt,$$

$$\int_L f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Если ввести обозначения $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, то последняя формула записывается короче:

$$\int_L f ds = \int_a^b f(r(t)) |\vec{r}'(t)| dt.$$

Для плоской кривой $L = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in [a; b]\}$ имеем

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad \text{и} \quad \int_L f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

В случае задания кривой графиком функции $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, или в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, можно пользоваться формулами $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ и $ds = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$ соответственно (см. т. 1, § 7.4, с. 287).

Пример 16.1. Вычислим $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, где

$$L = \{(x, y, z) : x = a(t \cos t - \sin t), y = a(t \sin t + \cos t), z = bt^2, t \in [0; 2\pi]\}.$$

РЕШЕНИЕ. Поскольку

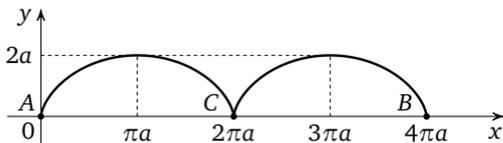
$$x' = -at \sin t, \quad y' = at \cos t, \quad z' = 2bt, \quad t \geq 0,$$

мы получаем $ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt = \sqrt{a^2 + 4b^2} \cdot t dt$, поэтому

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds &= \int_0^{2\pi} (a^2 + a^2 t^2 + b^2 t^4) \sqrt{a^2 + 4b^2} \cdot t dt = \\ &= \sqrt{a^2 + 4b^2} \left(2a^2 \pi^2 + 4a^2 \pi^4 + \frac{32}{3} b^2 \pi^6 \right). \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.2. Вычислим криволинейный интеграл 1-го рода $\int_L (x+y) ds$, где $L = \overset{\frown}{AB}$ — дуга циклоиды:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad A = (0, 0), \quad B = (4\pi a, 0).$$



РЕШЕНИЕ. Имеем: $ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = a\sqrt{2-2\cos t} dt = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt$,

$$(x+y) ds = 2a^2 \left(t - 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right) \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt.$$

Кривая L состоит из двух гладких кусков — дуг циклоиды $L_1 = \overset{\frown}{AC}$ и $L_2 = \overset{\frown}{CB}$, где $C(2\pi a, 0)$ (см. рис.), на каждой из которых модуль раскрывается однозначно. Поскольку $t \in [0; 2\pi]$ на L_1 и $t \in [2\pi; 4\pi]$ на L_2 , получаем

$$\begin{aligned} \int_L (x+y) ds &= \int_{L_1} (x+y) ds + \int_{L_2} (x+y) ds = \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} \left(t - 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right) \sin \frac{t}{2} dt - \\ &\quad - 2a^2 \int_{2\pi}^{4\pi} \left(t - 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right) \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 8a^2 \left(\int_0^{\pi} 2z \sin z dz - 2 \int_0^{\pi} \sin^2 z \cos z dz + 2 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 z) \sin z dz \right) + 16\pi a^2 = \\ &= 8a^2 \left(2\pi + \frac{8}{3} \right) + 16\pi a^2 = \frac{32}{3} (3\pi + 2) a^2. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.3. Вычислим криволинейный интеграл 1-го рода $\int_L y ds$, где $L = \overset{\frown}{AB}$ — дуга кривой

$$y = x^2 + |x^2 - x|,$$

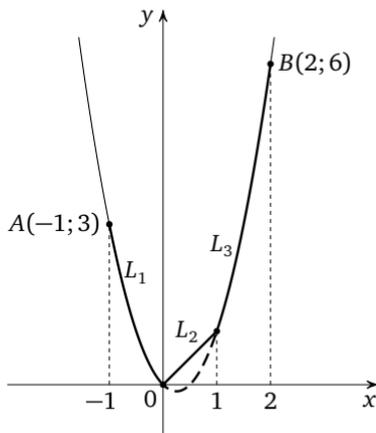
$A(-1, 3)$, $B(2, 6)$.

РЕШЕНИЕ. Дуга L — кусочно-гладкая. Представим её как объединение неперекрывающихся гладких кривых: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, где

$$L_1 = \{(x, y) : y = 2x^2 - x, x \in [-1; 0]\},$$

$$L_2 = \{(x, y) : y = x, x \in [0; 1]\},$$

$$L_3 = \{(x, y) : y = 2x^2 - x, x \in [1; 2]\}.$$



По свойству аддитивности имеем $\int_L y ds = \int_{L_1} y ds + \int_{L_2} y ds + \int_{L_3} y ds$. Вычислим интегралы по простым гладким кривым L_1, L_2, L_3 , сводя их к интегралу Римана:

$$\begin{aligned} \int_{L_1} y ds &= \int_{-1}^0 (2x^2 - x) \sqrt{1 + (4x - 1)^2} dx = \frac{1}{32} \int_{-5}^{-1} (t^2 - 1) \sqrt{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{32 \cdot 8} \left((2t^3 - 3t) \sqrt{t^2 + 1} - 5 \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \right) \Big|_{-5}^{-1} = \\ &= \frac{1}{2^8} (\sqrt{2} - 5 \ln(\sqrt{2} - 1) + 235 \sqrt{26} + 5 \ln(\sqrt{26} - 5)); \end{aligned}$$

$$\int_{L_2} y ds = \int_0^1 x \sqrt{1 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\begin{aligned} \int_{L_3} y ds &= \int_1^2 (2x^2 - x) \sqrt{1 + (4x - 1)^2} dx = \frac{1}{32} \int_3^7 (t^2 - 1) \sqrt{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{2^8} (665 \sqrt{50} - 5 \ln(7 + \sqrt{50}) - 45 \sqrt{10} + 5 \ln(3 + \sqrt{10})). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\int_L y ds = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2^8} (235 \sqrt{26} + 3326 \sqrt{2} - 45 \sqrt{10}) - 5 \ln((\sqrt{26} + 5)(3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{10} - 3)). \quad \square$$

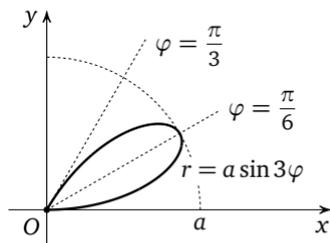
Пример 16.4. Вычислим $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, где L — петля кривой $r = a \sin 3\varphi$, лежащая в первом квадранте (декартова и полярная системы координат совмещены).

Решение. Пользуясь формулами связи совмещённых декартовых и полярных координат, находим параметрическое выражение кривой L :

$$L = \left\{ (x, y) : x = a \sin 3\varphi \cos \varphi, y = a \sin 3\varphi \sin \varphi, \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{3} \right] \right\}.$$

Поскольку $ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi = a \sqrt{\sin^2 3\varphi + 9 \cos^2 3\varphi} d\varphi$, получаем

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \int_0^{\pi/3} a^2 \sin 3\varphi \sqrt{1 + 8 \cos^2 3\varphi} d\varphi = \frac{a^2}{3} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 8z^2} dz = \\ &= \frac{a^2}{6\sqrt{2}} \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{a^2}{6\sqrt{2}} \left(\frac{t}{2} \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \right) \Big|_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln(3 + 2\sqrt{2}) \right) a^2. \end{aligned}$$



Обратите внимание: вычисляя ds по формуле $ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} d\varphi$, получим, конечно, то же выражение $a\sqrt{\sin^2 3\varphi + 9\cos^2 3\varphi} d\varphi$, но применение формулы $ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$ существенно сокращает выкладки. \square

Некоторые методы параметризации кривых

Приведённые примеры показывают, что для вычисления криволинейного интеграла первого рода необходимо уметь представлять кривую, по которой ведётся интегрирование, в параметрическом виде. Рассмотрим некоторые наиболее часто употребляемые методы параметризации.

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ разрешимо относительно одной из переменных, т. е. приводится к виду $y = y(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$, или $x = x(y)$, $y \in \langle c; d \rangle$. Тогда в качестве параметра обычно берётся аргумент полученной явной функции. В первом случае $y = y(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$, получаем параметрическое представление $L = \{(x, y) : x = x, y = y(x), x \in \langle a; b \rangle\}$, во втором — параметрическое представление $L = \{(x, y) : x = x(y), y = y, y \in \langle c; d \rangle\}$.

Пусть функция $F(x, y)$ представляет собой линейную комбинацию двух однородных алгебраических функций от x и y . Тогда, обозначая через t отношение y/x , получаем параметрическое представление координат x и y кривой L как алгебраических функций $x = x(t)$, $y = y(t)$. При этом необходимо только проверить, что не потеряны точки вида $(0, y_0)$, принадлежащие L . Такая точка может соответствовать несобственному значению параметра: $0 = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, $y_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ ($t \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow -\infty$).

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ после перехода к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ или обобщённым полярным координатам $x = ar \cos^\alpha \varphi$, $y = br \sin^\alpha \varphi$ разрешается относительно r , т. е. приводится к виду $r = r(\varphi)$, $\varphi \in \langle \varphi_0; \varphi_1 \rangle$. Тогда, принимая в качестве параметра переменную φ и подставляя выражение r через φ в формулы перехода к этим координатам, получаем параметрическое представление кривой

$$L = \{(x, y) : x = r(\varphi) \cos \varphi, y = r(\varphi) \sin \varphi, \varphi \in \langle \varphi_0; \varphi_1 \rangle\} \quad \text{или}$$

$$L = \{(x, y) : x = ar(\varphi) \cos^\alpha \varphi, y = br(\varphi) \sin^\alpha \varphi, \varphi \in \langle \varphi_0; \varphi_1 \rangle\}.$$

Насколько полученная параметризация кривой L удобна для вычислений, зависит от конкретного вида функции $F(x, y)$.

Пример 16.5. Найдём параметрическое представление кривой L , заданной уравнением $\ln x - y + \sin y = 0$.

Решение. Уравнение $\ln x - y + \sin y = 0$ разрешимо относительно x , получаем $x = e^{y - \sin y}$. Таким образом, $L = \{(x, y) : x = e^{y - \sin y}, y = y, y \in \mathbb{R}\}$. \square

Пример 16.6. Найдём параметрическое представление эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение. Положим $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, тогда уравнение эллипса примет вид $r = 1$. Обратный переход к x и y даёт параметрическое представление эллипса: $L = \{(x, y) : x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi, \varphi \in [0; 2\pi]\}$; в частности, про-

стейшее параметрическое представление окружности радиусом a с центром в начале координат: $L = \{(x, y) : x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, \varphi \in [0; 2\pi]\}$. \square

Пример 16.7. Найдём параметрическое представление кривой L , заданной уравнением $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

РЕШЕНИЕ. В данном случае удобнее перейти к обобщённой полярной системе координат. Положим $x = ar \cos^3 \varphi$, $y = ar \sin^3 \varphi$, тогда уравнение кривой L примет вид $r = 1$. Обратный переход к x и y даёт параметрическое представление кривой: $L = \{(x, y) : x = a \cos^3 \varphi, y = a \sin^3 \varphi, \varphi \in [0; 2\pi]\}$. \square

Пример 16.8. Найдём параметрическое представление кривой L , заданной уравнением $x(x - y)^2 + y = 0$ и условием $x \geq 0$.

РЕШЕНИЕ. Функция $F(x, y) = x(x - y)^2 + y$ является суммой двух однородных многочленов от x и y — третьей и первой степеней. Поскольку равенство $x(x - y)^2 + y = 0$ и условие $x \geq 0$ показывают, что значения y неположительны, введём параметр t следующим образом: $y = -tx$, $t \geq 0$. Тогда переменные x и t связаны равенством $x^3(1 + t)^2 = xt$, или $x^2 = \frac{t}{(1+t)^2}$. Учитывая условие $x \geq 0$, отсюда получаем параметрическое представление

$$L = \left\{ (x, y) : x = \frac{\sqrt{t}}{1+t}, y = \frac{-t\sqrt{t}}{1+t}, t \geq 0 \right\}.$$

Точка $(0, 0)$ соответствует значению $t = 0$. \square

Пример 16.9. Найдём параметрическое представление кривой L , заданной уравнением $x^3 + 2x^2 + y^2 = 3$ и условием $y \geq 0$.

РЕШЕНИЕ. Условие $y \geq 0$ позволяет явно выразить y : $y = \sqrt{3 - x^3 - 2x^2}$. Многочлен $3 - x^3 - 2x^2$ убывает на луче $(-\infty; -\frac{3}{4}]$, в точке $-\frac{3}{4}$ принимает положительное значение, затем возрастает на отрезке $[-\frac{3}{4}; 0]$ и убывает на луче $[0; +\infty)$. Этот многочлен обращается в нуль при $x = 1$ и его значения меньше нуля при $x > 1$, поэтому функция $y(x)$ определена только при $x \leq 1$. Итак, $L = \{(x, y) : x = x, y = \sqrt{3 - x^3 - 2x^2}, x \in (-\infty; 1]\}$. \square

Пример 16.10. Найдём параметрическое представление кривой L , заданной уравнением $x^4 - y^4 - 6x^2y = 0$ и условиями $x \leq 0$, $y \leq 0$.

РЕШЕНИЕ. Функция $F(x, y) = x^4 - y^4 - 6x^2y$ является суммой двух однородных многочленов от x и y — четвёртой и третьей степеней. Введём параметр t следующим образом: $y = tx$, $t > 1$, получаем связывающее x и t равенство: $x^4(1 - t^4) = 6x^3t$, откуда следует, что $x(t) = \frac{6t}{1-t^4}$, $y(t) = \frac{6t^2}{1-t^4}$. Условия $x \leq 0$, $y \leq 0$ выполняются при $t > 1$, а точка $(0, 0)$ кривой L соответствует несобственному значению $t: 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t), 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$. Итак,

$$L = \left\{ (x, y) : x(t) = \frac{6t}{1-t^4}, y(t) = \frac{6t^2}{1-t^4}, t > 1 \right\}.$$

DeVU/Wnu8v9d4=

Параметрическое представление L можно получить и переходом к полярным координатам. Замена $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ превращает уравнение $x^4 - y^4 - 6x^2y = 0$ в уравнение $r^4 \cos 2\varphi - 3r^3 \sin 2\varphi \cos \varphi = 0$. Следовательно,

в совмещённой полярной системе координат кривая L задаётся уравнением $r = 3 \operatorname{tg} 2\varphi \cos \varphi$. Делая обратное преобразование, получаем

$$x = \frac{3}{2} \operatorname{tg} 2\varphi (1 + \cos 2\varphi), \quad y = \frac{3}{2} \operatorname{tg} 2\varphi \sin 2\varphi.$$

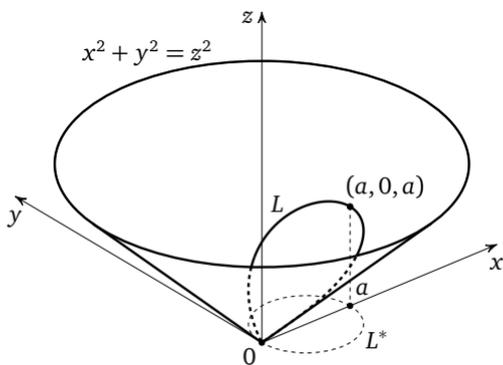
Поскольку $x(\varphi)$ и $y(\varphi)$ — периодические функции с периодом π , достаточно рассматривать значения φ из промежутка $[0; \pi)$. Условия $x \leq 0$, $y \leq 0$ выполняются, если $\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Получаем параметрическое представление

$$L = \left\{ (x, y) : x = \frac{3}{2} (\operatorname{tg} 2\varphi + \sin 2\varphi), y = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}, \varphi \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \right\}. \quad \square$$

Пусть кривая $L \subset \mathbb{R}^3$ задана системой $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$ т. е. является линией пересечения двух поверхностей. Чаще всего для параметризации заданной таким образом кривой исключают одну из переменных. Геометрически это означает, что находится проекция L^* кривой L на одну из координатных плоскостей. Плоскую кривую L^* параметризуют методами, рассмотренными выше, после чего параметрическое представление третьей координаты получают из наиболее подходящего уравнения системы, определяющей кривую L .

Пример 16.11. Найдём параметрическое представление кривой L , заданной уравнениями $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = z^2$ и условием $z \geq 0$ ($a > 0$).

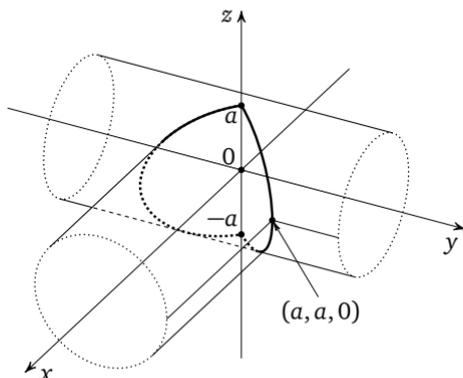
Решение. Исключая переменную z из системы $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2ax, \\ x^2 + y^2 = z^2, \end{cases}$ получаем, что x и y связаны уравнением $x^2 + y^2 = ax$, т. е. проекцией кривой L на плоскость xOy является окружность L^* : $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ (см. рис.). Простейшая параметрическая запись окружности L^* есть $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t$, $y = \frac{a}{2} \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.



Из уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ и условия $z \geq 0$ находим $z = \sqrt{\frac{a^2}{2}(1 + \cos t)} = a \left| \cos \frac{t}{2} \right|$. Чтобы получить гладкое представление переменной z , заметим, что в параметрическом задании окружности L^* можно взять в качестве промежутка изменения параметра t любой промежуток длиной 2π ; если $t \in [-\pi; \pi]$, то $\cos \frac{t}{2} \geq 0$ и, следовательно, $z = a \cos \frac{t}{2}$. Итак,

$$L = \left\{ (x, y, z) : x = \frac{a}{2}(1 + \cos t), y = \frac{a}{2} \sin t, z = a \cos \frac{t}{2}, -\pi \leq t \leq \pi \right\}. \quad \square$$

Пример 16.12. Найдём параметрическое представление кривой L , заданной уравнениями $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ и условием $x \geq 0$.



РЕШЕНИЕ. Поскольку каждое из уравнений, задающих кривую L , содержит только две переменные, каждое из них есть уравнение проекции L на координатные плоскости: первое — на плоскость xOz , второе — на плоскость yOz (см. рис.). На переменные y и z не наложено дополнительных условий, поэтому окружность $y^2 + z^2 = a^2$ параметризуется простейшим образом: $y = a \cos t$, $z = a \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$. Из первого уравнения с учётом условия $x \geq 0$ получаем $x = a|\cos t|$. В отличие от предыдущего примера в данном случае не удалось избежать негладкого представления переменной x . Итак,

$$L = \{(x, y, z) : x = a|\cos t|, y = a \cos t, z = a \sin t, t \in [0; 2\pi]\}. \quad \square$$

Пример 16.13. Найдём параметрическое представление кривой L , заданной уравнениями $z^2 = y^2 + x^2$, $ax = zu$ и условиями $y \geq 0$, $z \geq 0$.

РЕШЕНИЕ. Исключая переменную x из системы $\begin{cases} z^2 = y^2 + x^2, \\ ax = zu, \end{cases}$ заключаем, что z и y связаны соотношением $a^2 z^2 = a^2 y^2 + z^2 y^2$, т. е. проекцией L на плоскость yOz является кривая $L^* = \{(z, y) : a^2 z^2 = a^2 y^2 + z^2 y^2\}$. Учитывая условия $z \geq 0$, $y \geq 0$, получаем, что кривая L^* записывается явным уравнением $y = \frac{az}{\sqrt{a^2 + z^2}}$. Из уравнения $ax = zu$ находим $x = \frac{z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}}$. Итак,

$$L = \{(x, y, z) : x = \frac{z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}}, y = \frac{az}{\sqrt{a^2 + z^2}}, z = z, z \geq 0\}. \quad \square$$

Покажем на примере, как переход к параметрическому заданию кривой позволяет вычислить криволинейный интеграл первого рода.

Пример 16.14. Вычислим $\int_L \sqrt{2a - x} ds$, где

$$L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2ax, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}.$$

РЕШЕНИЕ. Кривая L параметризована в примере 16.11:

$$L = \{(x, y, z) : x = \frac{a}{2}(1 + \cos t), y = \frac{a}{2} \sin t, z = a \cos \frac{t}{2}, -\pi \leq t \leq \pi\}.$$

Тогда

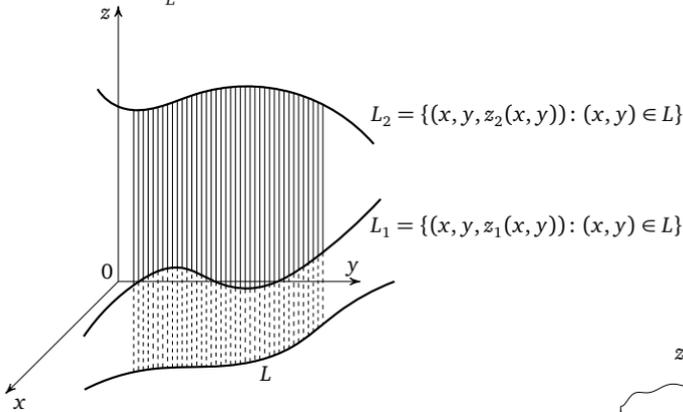
$$2a - x = 2a - a \cos^2 \frac{t}{2} = a \left(1 + \sin^2 \frac{t}{2}\right),$$

$$dx = -\frac{a}{2} \sin t dt, \quad dy = \frac{a}{2} \cos t dt, \quad dz = -\frac{a}{2} \sin \frac{t}{2} dt \quad \text{и} \quad ds = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} dt,$$

$$\text{поэтому} \int_L \sqrt{2a - x} ds = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^{3/2}}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{t}{2}\right) dt = \frac{a^{3/2}}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (3 - \cos t) dt = \frac{3}{2} \pi a^{3/2}. \quad \square$$

Приложения криволинейного интеграла первого рода

Пусть $L = \{(x, y, 0) : x = x(t), y = y(t), t \in [a; b]\}$ — кусочно-гладкая кривая в плоскости xOy , $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ — непрерывные на L функции, удовлетворяющие условию $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$. Тогда площадь части цилиндрической поверхности $S = \{(x, y, z) : (x, y) \in L, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$ (см. рис.) вычисляется по формуле $|S| = \int_L (z_2(x, y) - z_1(x, y)) ds$.



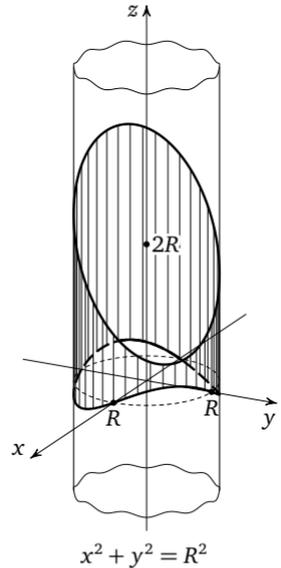
Пример 16.15. Найдём площадь цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченной снизу поверхностью $z = \frac{xy}{2R}$, а сверху плоскостью $x + y + z = 2R$.

Решение. Параметризуем окружность $x^2 + y^2 = R^2$ обычным образом: $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Тогда $ds = R d\varphi$. Теперь можно убедиться, что плоскость $z = 2R - x - y$ действительно лежит выше поверхности $z = \frac{xy}{2R}$ в точках данной окружности:

$$\begin{aligned} 2R - x - y - \frac{xy}{2R} &= R \left(2 - \cos \varphi - \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi \sin \varphi\right) = \\ &= R \left(2 - (\sin \varphi + \cos \varphi) - \frac{1}{4} \sin 2\varphi\right) \geq \\ &\geq R \left(2 - \sqrt{2} - \frac{1}{4}\right) > R \left(2 - \frac{7}{4}\right) = \frac{R}{4} > 0. \end{aligned}$$

Тогда искомая площадь поверхности $|S|$ равна

$$\int_{x^2+y^2=R^2} \left((2R - x - y) - \frac{xy}{2R}\right) ds = R^2 \int_0^{2\pi} \left(2 - \cos \varphi - \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi\right) d\varphi = 4\pi R^2. \quad \square$$



Пусть некоторая скалярная величина $P(L)$ (масса, заряд, количество теплоты и т. п.) распределена на кривой L с линейной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$, тогда $P(L) = \int_L \rho(x, y, z) ds$.

Если ρ — плотность распределения массы на кривой L , то интегралы

$$I_{yz}^{(1)} = \int_L x\rho(x, y, z) ds, \quad I_{xz}^{(1)} = \int_L y\rho(x, y, z) ds, \quad I_{xy}^{(1)} = \int_L z\rho(x, y, z) ds$$

называются *статическими моментами* или *моментами первого порядка* кривой L относительно соответствующих координатных плоскостей. Можно считать, что масса кривой является моментом нулевого порядка:

$$M = I^{(0)} = \int_L \rho(x, y, z) ds.$$

С помощью статических моментов можно вычислить координаты x_0, y_0, z_0 центра масс кривой L с заданной плотностью:

$$x_0 = \frac{I_{yz}^{(1)}}{M}, \quad y_0 = \frac{I_{xz}^{(1)}}{M}, \quad z_0 = \frac{I_{xy}^{(1)}}{M}.$$

Если $r(x, y, z)$ — расстояние от точки $(x, y, z) \in L$ до некоторой точки, прямой или плоскости Q , то интеграл

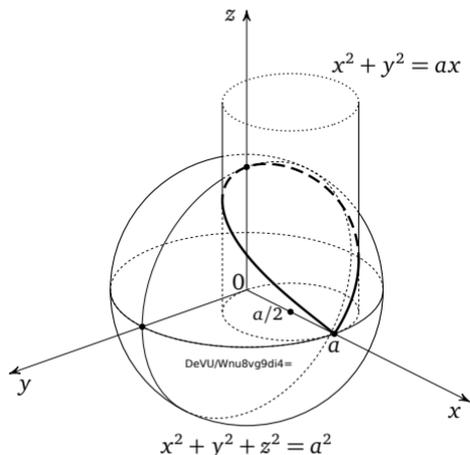
$$I_Q^{(2)} = \int_L r^2(x, y, z) \rho(x, y, z) ds$$

называется *моментом инерции* или *моментом второго порядка* кривой L относительно Q . Таким образом, в примере 16.1 (с. 141) был вычислен момент инерции указанной там кривой относительно начала координат при $\rho = 1$.

Пример 16.16. Найдём координаты центра масс кривой Вивини

$$L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = ax, x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}, \quad \text{см. рис.},$$

если её плотность в каждой точке пропорциональна аппликате.



РЕШЕНИЕ. Запишем данную кривую в параметрическом виде. Кривая лежит на цилиндре $x^2 + y^2 = ax$, поэтому начнём со стандартной параметризации цилиндра: окружность $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$ может быть параметризована равенствами $x = a \cos^2 t$, $y = a \cos t \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, и, следовательно, параметрическое задание цилиндра может быть записано в виде

$$x = a \cos^2 t, \quad y = a \cos t \sin t, \quad z = z, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \quad z \in \mathbb{R}.$$

Поскольку кривая Вивиани лежит и на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, имеем $z^2 = a^2 - a^2 \cos^2 t = a^2 \sin^2 t$ и, таким образом, получаем параметрическое представление кривой L :

$$L = \left\{ (x, y, z) : x = a \cos^2 t, \quad y = a \cos t \sin t, \quad z = a |\sin t|, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

Из этого представления находим $x' = -a \sin 2t$, $y' = a \cos 2t$, $z' = a \operatorname{sgn}(\sin t) \cos t$,

$$ds = \sqrt{a^2 + a^2 \cos^2 t} dt = a \sqrt{1 + \cos^2 t} dt.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\rho(x, y, z) = z$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I^{(0)} = M &= \int_L \rho ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 |\sin t| \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = 2a^2 \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du = \\ &= a^2 (u \sqrt{1 + u^2} + \ln(u + \sqrt{1 + u^2})) \Big|_0^1 = a^2 (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yz}^{(1)} &= \int_L \rho x ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 \cos^2 t |\sin t| \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = \\ &= 2a^3 \int_0^1 u^2 \sqrt{1 + u^2} du = \frac{a^3}{4} ((2u^3 + u) \sqrt{1 + u^2} - \ln(u + \sqrt{1 + u^2})) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{a^3}{4} (3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})), \end{aligned}$$

$$I_{xz}^{(1)} = \int_L \rho y ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 \cos t \sin t |\sin t| \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = 0,$$

$$\begin{aligned} I_{xy}^{(1)} &= \int_L \rho z ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 \sin^2 t \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = 2a^3 \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 + u^2} du = \\ &= 2a^3 \int_0^1 \sqrt{1 - u^4} du = \frac{a^3}{2} \int_0^1 v^{-3/4} (1 - v)^{1/2} dv = \\ &= \frac{a^3}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^3}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} = \frac{a^3}{4} \sqrt{\pi} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{a^3 \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{3\sqrt{2}\pi}. \end{aligned}$$

Итак,

$$x_0 = \frac{a(3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))}{4(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \frac{a\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{3\sqrt{2}\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))}. \quad \square$$

Пример 16.17. Найдём момент инерции кривой

$$L = \left\{ (x, y, z) : x = x, y = 2 \cos x, z = \sin 2x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

с плотностью $\rho(x, y, z) = z$ относительно плоскости xOz .

РЕШЕНИЕ. Расстояние от точки $m = (x, y, z)$ до плоскости xOz равно $|y|$,

поэтому $I_{xz}^{(2)} = \int_L zy^2 ds$. Для данной кривой находим

$$ds = \sqrt{1 + 4 \sin^2 x + 4 \cos^2 2x} dx = \sqrt{3 - 2 \cos 2x + 4 \cos^2 2x} dx.$$

Следовательно, полагая $t = \cos 2x$, имеем

$$\begin{aligned} \int_L zy^2 ds &= \int_0^{\pi/2} \sin 2x \cdot 4 \cos^2 x \cdot \sqrt{3 - 2 \cos 2x + 4 \cos^2 2x} dx = \\ &= \int_{-1}^1 (t+1) \sqrt{4t^2 - 2t + 3} dt = \\ &= \frac{1}{96} (32t^2 + 44t + 9) \sqrt{4t^2 - 2t + 3} \Big|_{-1}^1 + \frac{55}{64} \ln \left(2t - \frac{1}{2} + \sqrt{4t^2 - 2t + 3} \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{1}{192} (18 + 170\sqrt{5} + 165 \ln(3 + 2\sqrt{5})). \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.18. Найдём силу, с которой окружность $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ массой M , распределённой равномерно, притягивает материальную точку A массой m , имеющую координаты $(0, 0, b)$ ($a > 0$, $b > 0$).

РЕШЕНИЕ. Согласно физическому закону материальная точка A массой M_1 притягивает материальную точку B массой M_2 с силой

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = gM_1M_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3},$$

где g — гравитационная постоянная и $\vec{r} = \overrightarrow{BA}$.

В нашем случае из соображений симметрии можно сделать вывод, что $F_x = 0$, $F_y = 0$, так как точка $A(0, 0, b)$ одинаково удалена от всех точек однородной окружности. В силу этого вектор \vec{F} направлен вдоль оси Oz в отрицательном направлении. Пусть точка $B(x, y)$ принадлежит элементу окружности ds . Этот элемент действует на точку A с силой, вертикальная составля-

ющая которой равна $\frac{g \frac{M}{2\pi a} ds mb}{(b^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}$.

Суммируя по всем элементам ds , получаем $|\vec{F}| = \frac{gMmb}{2\pi a} \int_L \frac{ds}{(b^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}$,

где $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 = a^2\}$. Переходя к параметрическому заданию окружности $L = \{(x, y) : x = a \cos t, y = a \sin t, t \in [0; 2\pi]\}$, находим

$$|\vec{F}| = \frac{gMmb}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{a}{(b^2 + a^2)^{3/2}} dt = \frac{gMmb}{(a^2 + b^2)^{3/2}}. \quad \square$$

§ 16.2. Поверхностный интеграл первого рода

Поверхности в \mathbb{R}^3 , способы их параметризации и вычисление их площадей рассматривались в п. 15.2.4 (с. 39).

Определение. Пусть S — кусочно-гладкая поверхность в \mathbb{R}^3 . Конечный набор кусочно-гладких поверхностей S_i , $1 \leq i \leq n$, назовём *разбиением* T поверхности S , если $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ и $|S_i \cap S_j| = 0$ при $i \neq j$. Части S_i , $1 \leq i \leq n$, поверхности S , образующие разбиение T , назовём *участками разбиения*.

Заметим, что как для поверхности S , так и для всех участков разбиения S_i , $1 \leq i \leq n$, определены площади $|S|$ и $|S_i|$.

Пусть функция $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ определена и ограничена на кусочно-гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ и T — разбиение S . Введём обозначения:

$$M_i = \sup_{P \in S_i} f(P), \quad m_i = \inf_{P \in S_i} f(P),$$

$$\bar{I}(f, S) = \inf_T \sum_{i=1}^n M_i |S_i| \quad \text{— верхний интеграл Дарбу,}$$

$$\underline{I}(f, S) = \sup_T \sum_{i=1}^n m_i |S_i| \quad \text{— нижний интеграл Дарбу.}$$

Определение. Функция $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, определённая и ограниченная на кусочно-гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, *интегрируема по поверхности* S , если $\bar{I}(f, S) = \underline{I}(f, S)$. В этом случае общее значение интегралов Дарбу называется *поверхностным интегралом первого рода от функции f по поверхности S* и обозначается $\iint_S f d\sigma$.

Если $f(x) = 1$ для всех $x \in S$, то $\bar{I}(f, S) = \underline{I}(f, S) = |S|$, поэтому $|S| = \iint_S 1 d\sigma$.

Основные свойства поверхностного интеграла первого рода

1 (*Аддитивность интеграла*). Пусть поверхности S_1 и S_2 таковы, что их пересечение представляет собой конечное множество кусочно-гладких кривых, и функция f интегрируема по поверхностям S_1 и S_2 . Тогда f интегрируема по $S = S_1 \cup S_2$ и

$$\iint_S f d\sigma = \iint_{S_1} f d\sigma + \iint_{S_2} f d\sigma.$$

2 (*Линейность интеграла*). Если функции f и g интегрируемы по поверхности S , то для любых постоянных λ и μ функция $\lambda f + \mu g$ также интегрируема по S , причём

$$\iint_S (\lambda f + \mu g) d\sigma = \lambda \iint_S f d\sigma + \mu \iint_S g d\sigma.$$

3 (*Монотонность*). Если функции f и g интегрируемы по поверхности S и $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ на S , то $\iint_S f d\sigma \leq \iint_S g d\sigma$.

4 (Интегрируемость модуля). Если функция f интегрируема по поверхности S , то функция $|f|$ интегрируема по S и $\left| \iint_S f d\sigma \right| \leq \iint_S |f| d\sigma$.

5 (Интегрируемость произведения). Если функции f и g интегрируемы по поверхности S , то и их произведение fg интегрируемо по поверхности S .

6 (Теорема о среднем). Если функции f и g интегрируемы по поверхности S , $g(P) \geq 0$ для всех $P \in S$, $m = \inf_{P \in S} f(P)$, $M = \sup_{P \in S} f(P)$, то

$$m \iint_S g d\sigma \leq \iint_S fg d\sigma \leq M \iint_S g d\sigma,$$

в частности $m|S| \leq \iint_S f d\sigma \leq M|S|$. Если к тому же функция f непрерывна на поверхности S , то существует такая точка $C \in S$, что $\iint_S fg d\sigma = f(C) \iint_S g d\sigma$.

7 (Интегрируемость непрерывной функции). Если функция f непрерывна на кусочно-гладкой поверхности S , то функция f интегрируема по S .

Отметим, что из непрерывности функции f в области $D \subset \mathbb{R}^3$ следует, что f непрерывна на любой поверхности $S \subset D$, причём обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Сведение поверхностного интеграла первого рода к интегралу Римана

Пусть $S = \{(x, y, z) : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in \bar{D}\}$ — простая гладкая поверхность и функция f непрерывна на поверхности S . Тогда

$$\iint_S f d\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

где

$$E = \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_u = |\vec{r}'_u|^2, \quad G = \vec{r}'_v \cdot \vec{r}'_v = |\vec{r}'_v|^2, \quad F = \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v, \\ r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

В частности, если поверхность S задана явной непрерывно дифференцируемой функцией $z = z(x, y)$, т. е. $S = \{(x, y, z(x, y)) : (x, y) \in \bar{D}\}$, то

$$\iint_S f d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

Найдём $d\sigma$ для нескольких типов поверхностей, наиболее часто встречающихся в примерах: плоскости, конуса и сферы.

1. Плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Если плоскость не параллельна оси Oz ($C \neq 0$), то $z = \frac{1}{C}(-Ax - By - D)$, $z'_x = -\frac{A}{C}$, $z'_y = -\frac{B}{C}$, и, наконец,

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{C} dx dy.$$

2. Конус $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{(z - z_0)^2}{c^2}$, $c > 0$ (круговой конус с осью симметрии, параллельной оси Oz). Из равенства $z = z_0 \pm c\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

вытекает, что $z'_x = \pm c \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$, $z'_y = \pm c \frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$, откуда

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + c^2} dx dy.$$

3. Сфера $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$. Для верхней полусферы $z = z_0 + \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}$ имеем

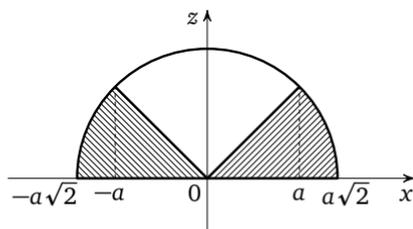
$$z'_x = -\frac{x-x_0}{\sqrt{R^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} = -\frac{x-x_0}{z-z_0}, \quad z'_y = -\frac{y-y_0}{z-z_0}$$

и, следовательно,

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \frac{R}{z-z_0} dx dy.$$

Пример 16.19. Вычислим $\iint_S (x+y+z) d\sigma$, где S — поверхность тела, ограниченного плоскостью $z=0$, полусферой $z = \sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}$ ($a > 0$) и конусом $z^2 = x^2 + y^2$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку все поверхности, заданные в условии, — поверхности вращения относительно оси Oz , построим меридиональное сечение данного тела (см. рис.). Поверхность S состоит из трёх гладких поверхностей: части плоскости, части полусферы и части конуса.



В силу аддитивности интеграла получаем

$$\iint_S (x+y+z) d\sigma = \iint_{S_1} (x+y+z) d\sigma + \iint_{S_2} (x+y+z) d\sigma + \iint_{S_3} (x+y+z) d\sigma.$$

Вычислим отдельно каждый из трёх интегралов.

1. Для $S_1 = \{(x, y, z) : z=0, x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$ имеем $d\sigma = dx dy$, в силу симметрии области интегрирования и нечётности подынтегральной функции

$$\iint_{S_1} (x+y+z) d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 2a^2} (x+y) dx dy = 0.$$

2. Для $S_2 = \{(x, y, z) : z = \sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$ получаем $d\sigma = \frac{a\sqrt{2}}{z} dx dy$, поэтому

$$\iint_{S_2} (x+y+z) d\sigma = \iint_{a^2 \leq x^2+y^2 \leq 2a^2} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}} + 1 \right) a\sqrt{2} dx dy = \pi\sqrt{2}a^3.$$

3. Для $S_3 = \{(x, y, z) : z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ получаем $d\sigma = \sqrt{2} dx dy$, поэтому

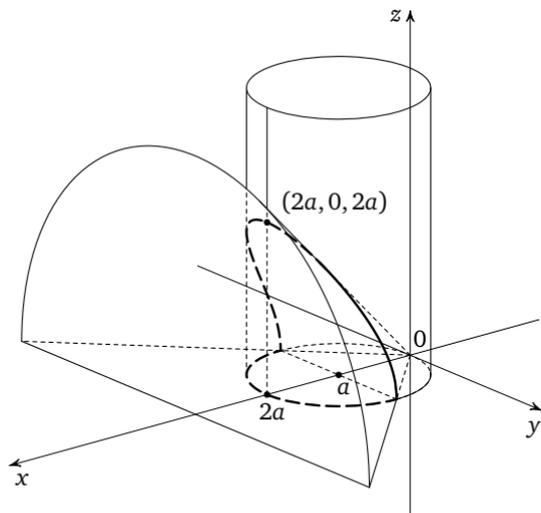
$$\iint_{S_3} (x+y+z) d\sigma = \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x+y+\sqrt{x^2+y^2}) dx dy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 dr = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a^3.$$

Таким образом, $\iint_S (x+y+z) d\sigma = 0 + \pi\sqrt{2}a^3 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a^3 = \frac{5\sqrt{2}}{3} \pi a^3$. \square

Пример 16.20. Вычислим

$$\iint_S xy^2 z^3 d\sigma,$$

где S — часть поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$), лежащая внутри конуса $y^2 + z^2 = x^2$ и выше плоскости $z = 0$.



Решение. Запишем поверхность S в виде

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 2ax, y^2 + z^2 \leq x^2, z \geq 0\}.$$

Наиболее простым и часто употребляемым способом параметризации цилиндра с образующими, параллельными оси Oz , является следующий:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = h, \quad t \in [a; b], \quad h \in \mathbb{R},$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a; b]$ — параметрическое задание линии пересечения этого цилиндра с плоскостью xOy . В данном случае получаем:

$$x = a(1 + \cos t), \quad y = a \sin t, \quad z = h, \quad t \in [-\pi; \pi], \quad h \geq 0.$$

Чтобы найти множество D значений параметров t и h , перейдём к переменным t и h в неравенстве $y^2 + z^2 \leq x^2$. Получим неравенство

$$a^2 \sin^2 t + h^2 \leq a^2 (1 + \cos t)^2, \quad \text{или} \quad h^2 \leq 4a^2 \cos t \cos^2 \frac{t}{2}.$$

Из него и условия $h \geq 0$ следует, что $\cos t \geq 0$, т. е. $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак,

$$r(t, h) = (a(1 + \cos t), a \sin t, h),$$

$$S = \left\{ r(t, h) : t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], h \in \left[0; 2a \cos \frac{t}{2} \sqrt{\cos t}\right] \right\}.$$

Отсюда находим $\vec{r}'_t = (-a \sin t, a \cos t, 0)$, $\vec{r}'_h = (0, 0, 1)$,

$$E = |\vec{r}'_t|^2 = a^2, \quad G = |\vec{r}'_h|^2 = 1, \quad F = \vec{r}'_t \cdot \vec{r}'_h = 0, \quad d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dt dh = a dt dh.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_S xy^2 z^3 d\sigma &= \iint_D a^3 (1 + \cos t) \sin^2 t \cdot h^3 \cdot a dt dh = \\ &= a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos t) \sin^2 t dt \int_0^{2a \cos(t/2) \sqrt{\cos t}} h^3 dh = \\ &= \frac{a^4}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos t) \sin^2 t \cdot 16a^4 \cos^4 \frac{t}{2} \cos^2 t dt = a^8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos t)^3 \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= 2a^8 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t \sin^2 t + 3 \cos^3 t \sin^2 t + 3 \cos^4 t \sin^2 t + \cos^5 t \sin^2 t) dt = \\ &= a^8 \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} + 3 \frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} + 3 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)} + \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})} \right) = \left(\frac{5\pi}{16} + \frac{20}{21} \right) a^8. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.21. Вычислим $\iint_S \frac{d\sigma}{x + \sqrt{y^2 + z^2}}$, где S — поверхность, полученная вращением вокруг оси Ox дуги параболы $x = a \cos^4 t$, $y = a \sin^4 t$ ($a > 0$).

Решение. Во избежание путаницы обозначим через $x^*(t)$, $y^*(t)$ параметрическое задание кривой на плоскости xOy ($x^*(t) = a \cos^4 t$, $y^*(t) = a \sin^4 t$), а через x, y, z — координаты точек в пространстве $Oxyz$. Воспользуемся выведенными в п. 15.2.4 (при рассмотрении площади поверхности) соотношениями: если поверхность S , полученную вращением вокруг оси Ox кривой $x^* = x^*(t)$, $y^* = y^*(t)$, $t \in [a; b]$, параметризовать равенствами

$$x = x^*(t), \quad y = y^*(t) \cos \varphi, \quad z = y^*(t) \sin \varphi, \quad t \in [a; b], \quad \varphi \in [0; 2\pi],$$

то $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dt d\varphi = |y^*| ds d\varphi$, где $ds = \sqrt{(x^*)'^2 + (y^*)'^2} dt$ — дифференциал дуги кривой $x = x^*(t)$, $y = y^*(t)$.

В данном случае получаем

$$S = \left\{ (x, y, z) : x = a \cos^4 t, \quad y = a \sin^4 t \cos \varphi, \quad z = a \sin^4 t \sin \varphi, \right. \\ \left. t \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right], \quad \varphi \in [0; 2\pi] \right\};$$

$$ds = 4a \sqrt{\cos^6 t \sin^2 t + \sin^6 t \cos^2 t} dt = 4a \cos t \sin t \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t} dt;$$

$$d\sigma = 4a^2 \sin^5 t \cos t \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t} dt d\varphi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{d\sigma}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{4a \sin^5 t \cos t \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t}}{\cos^4 t + \sin^4 t} dt = \\ &= \pi a \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos 2t)^2 \sin 2t}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2t}} dt = \frac{\pi a}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{(1-u)^2}{\sqrt{1+u^2}} du = \frac{\pi a}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2}} du = \\ &= \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} (u\sqrt{1+u^2} + \ln|u + \sqrt{1+u^2}|) \Big|_{-1}^1 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2})\right) \pi a. \quad \square \end{aligned}$$

Приложения поверхностного интеграла первого рода

Пусть скалярная величина $P(S)$ распределена на поверхности S с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$, тогда

$$P(S) = \iint_S \rho(x, y, z) d\sigma.$$

Если ρ — плотность распределения массы на поверхности S , то интегралы

$$I_{yz}^{(1)} = \int_S x\rho(x, y, z) d\sigma, \quad I_{xz}^{(1)} = \int_S y\rho(x, y, z) d\sigma, \quad I_{xy}^{(1)} = \int_S z\rho(x, y, z) d\sigma$$

называются *статическими моментами* или *моментами первого порядка* поверхности S относительно соответствующих координатных плоскостей. Можно считать, что масса поверхности является моментом нулевого порядка:

$$M = I^{(0)} = \int_S \rho(x, y, z) d\sigma.$$

С помощью статических моментов вычисляются координаты центра масс поверхности S с заданной плотностью:

$$x_0 = \frac{I_{yz}^{(1)}}{M}, \quad y_0 = \frac{I_{xz}^{(1)}}{M}, \quad z_0 = \frac{I_{xy}^{(1)}}{M}.$$

Если $r(x, y, z)$ — расстояние от точки $(x, y, z) \in S$ до некоторой точки, прямой или плоскости Q , то *моментом инерции* или *моментом второго порядка* поверхности S относительно Q называется интеграл

$$I_Q^{(2)} = \int_S r^2(x, y, z) \rho(x, y, z) d\sigma.$$

Пример 16.22. Найдём координаты центра масс части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$), лежащей в первом октанте: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, если её плотность в каждой точке пропорциональна квадрату аппликаты этой точки.

Решение. Запишем рассматриваемую часть сферы в виде

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}, \\ D &= \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}. \end{aligned}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\rho(x, y, z) = z^2$. Поскольку

$$\rho d\sigma = z^2 \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = az dx dy$$

(см. с. 153), получаем

$$M = \iint_S \rho(x, y, z) d\sigma = \iint_S z^2 d\sigma = \iint_D a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy =$$

$$= a \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr = -\frac{a\pi}{2} (a^2 - r^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{3} \Big|_0^a = \frac{\pi a^4}{6},$$

$$I_{xy}^{(1)} = \iint_S z\rho(x, y, z) d\sigma = \iint_S z^3 d\sigma = \iint_D a(a^2 - x^2 - y^2) dx dy =$$

$$= a \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a (a^2 r - r^3) dr = \frac{\pi a}{2} \left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} \right) = \frac{\pi a^5}{8},$$

$$z_0 = \frac{I_{xy}^{(1)}}{M} = \frac{3a}{4};$$

$$I_{xz}^{(1)} = \iint_S \rho(x, y, z)y d\sigma = \iint_S yz^2 d\sigma = \iint_D ay \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy =$$

$$= a \int_0^a \left(-(a^2 - x^2 - y^2) \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{3} \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= \frac{a}{3} \int_0^a (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{a^5}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{a^5}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{\pi a^5}{16},$$

$$y_0 = \frac{I_{xz}^{(1)}}{M} = \frac{3a}{8};$$

$$I_{xz}^{(1)} = \iint_S \rho(x, y, z)x d\sigma = \iint_S xz^2 d\sigma = \iint_D ax \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \frac{\pi a^5}{16},$$

$$x_0 = \frac{I_{yz}^{(1)}}{M} = \frac{3a}{8}. \quad \square$$

§ 16.3. Криволинейный интеграл второго рода

Ориентация кусочно-гладкой кривой

Определение. Пусть L — незамкнутая кривая без точек самопересечения, лежащая в \mathbb{R}^3 , с концами в точках A и B . Выбор в паре (A, B) начальной и конечной точек называется *ориентацией кривой* L . Кривую L с начальной точкой A и конечной точкой B (ориентированную от A к B) мы обозначаем \overrightarrow{AB} ; если необходимо рассмотреть ту же кривую (то же множество точек) с противоположной ориентацией (от B к A), то используем обозначение \overleftarrow{BA} .

Задать ориентацию кривой L с концами в точках A и B — это значит указать, как направлена (как проходится) эта кривая: от A к B или от B к A .

Замкнутую кривую, которая после удаления любой своей точки («разрезания» кривой в этой точке) становится незамкнутой кривой без точек самопересечения, часто называют *контуром*. Если контур лежит в плоскости xOy , то он является границей некоторой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$. В таком случае ориентация контура часто задаётся направлением его обхода: *положительным* направлением обхода принято считать такое, при котором область D остаётся слева, и *отрицательным* направлением — противоположное.

Пусть $L = \{(x, y, z) : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [a; b]\}$ — простая гладкая кривая и концевые точки A и B кривой L есть соответственно образы точек a и b . При этом говорят, что кривая $L = \overset{\curvearrowright}{AB}$ проходится при возрастании параметра t при параметризации $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Тогда векторное поле $\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'_t}{|\vec{r}'_t|} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$, где $ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt$ — дифференциал длины дуги L , является непрерывным полем касательных к L единичных векторов, причём направление векторов $\vec{\tau}$ совпадает с направлением движения по кривой $L = \overset{\curvearrowright}{AB}$ с ростом параметра t . Таким образом, на простой гладкой ориентированной кривой $\overset{\curvearrowright}{AB}$ однозначно определено согласованное с её ориентацией непрерывное поле единичных касательных векторов. Ориентация кривой $\overset{\curvearrowright}{BA}$ задаётся параметризацией, при которой кривая проходится в «обратную сторону»: $\rho(t) = r(b + a - t)$, $t \in [a; b]$. Соответствующее касательное векторное поле противоположно исходному: $\vec{\sigma} = -\vec{\tau}$.

Кусочно-гладкая ориентированная кривая L также однозначно определяет согласованное с её ориентацией кусочно непрерывное векторное поле $\vec{\tau}$ единичных касательных векторов, заданное и непрерывное во всех точках гладкости L .

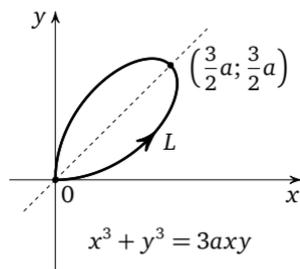
Ориентированную кривую L вместе с соответствующим полем единичных касательных векторов будем обозначать $(L, \vec{\tau})$.

Пример 16.23. Запишем какое-нибудь параметрическое представление петли кривой $x^3 + y^3 = 3axy$, при котором эта петля проходится в положительном направлении при возрастании параметра t ($a > 0$).

Решение. Введём параметр t следующим образом: $y = tx$, тогда

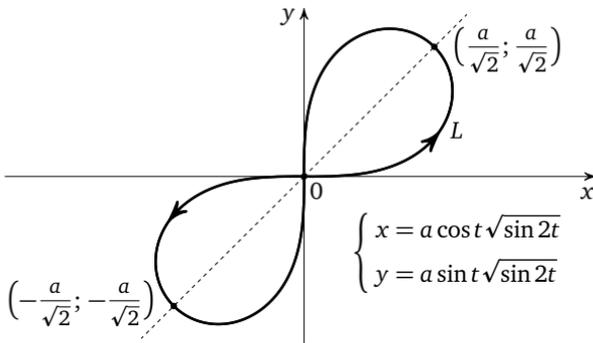
$$x = \frac{3at}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3at^2}{t^3 + 1}.$$

При этом петля кривой $x^3 + y^3 = 3axy$ расположена в первом квадранте $x \geq 0, y \geq 0$ и поэтому $t \in [0; +\infty)$ (см. рис.). Если $0 \leq t \leq 1$, то $0 \leq x \leq y$, поэтому обход петли начинается по той её части, которая лежит ниже биссектрисы $y = x$ первого координатного угла и, следовательно, при возрастании t петля действительно обходится в положительном направлении. □



Пример 16.24. Запишем такое параметрическое представление лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ ($a > 0$), при котором каждая её петля проходит в положительном направлении при возрастании параметра.

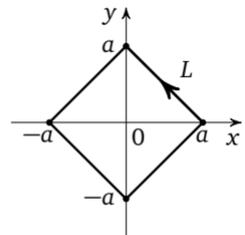
Решение. В полярных координатах уравнение лемнискаты имеет вид $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$, поэтому, выбирая в качестве параметра t полярный угол φ , получаем $x = a \cos t \sqrt{\sin 2t}$, $y = a \sin t \sqrt{\sin 2t}$ с $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ для правой петли и $t \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$ для левой петли.



При этом если t возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то правая петля проходит в положительном направлении, поскольку изменению t на отрезке $[0; \frac{\pi}{4}]$ соответствует часть лемнискаты, лежащая в первом квадранте ниже прямой $y = x$ (см. рис.). Аналогично проверяется, что левая петля проходит в положительном направлении при возрастании t от π до $\frac{3\pi}{2}$. \square

Пример 16.25. Запишем параметрическое представление контура квадрата $|x| + |y| = a$ ($a > 0$), при котором этот контур проходит в положительном направлении при возрастании параметра t (см. рис.).

Решение. Подберём такую функцию $x = x(t)$, чтобы при возрастании t значения $x(t)$ сначала убывали от a до $-a$, затем возрастали от $-a$ до a ; например, можно положить $x(t) = a \cos t$, $t \in [0; 2\pi]$. Чтобы точка $(x(t), y(t))$ двигалась по верхней границе квадрата $|x| + |y| = a$, координата $y = y(t)$, $t \in [0; \pi]$, должна удовлетворять равенству $y = a - |x|$, т. е.



$$y(t) = a - a|\cos t| = (a - a|\cos t|) \operatorname{sgn} \sin t.$$

На нижней границе квадрата координата $y = y(t)$ удовлетворяет равенству $y = -a + |x|$, т. е. $y = -a + a|\cos t| = (a - a|\cos t|) \operatorname{sgn} \sin t$, $t \in [\pi; 2\pi]$. Объединяя обе полученные формулы, запишем параметризацию контура квадрата: $x = a \cos t$, $y = (a - a|\cos t|) \operatorname{sgn} \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$. \square

Определение криволинейного интеграла второго рода

Определение. Пусть в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^3$ заданы непрерывное векторное поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ и ориентированная кусочно-гладкая кривая $\overset{\curvearrowright}{AB} = (L, \vec{\tau})$. Тогда интеграл

$$\int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds \quad \left(\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds \right)$$

называется *криволинейным интегралом второго рода по кривой L* и обозначается так:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz \quad \left(\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P dx + Q dy + R dz \right).$$

Смысл данного обозначения будет прояснён в § 16.6 (с. 212).

Запись подынтегрального выражения в виде $P dx + Q dy + R dz$ уже показывает, что рассматривается криволинейный интеграл второго рода, поэтому вместо $(L, \vec{\tau})$ будем писать просто L . Указание ориентации кривой L входит необходимым условием в задание криволинейного интеграла второго рода.

Заметим, что скалярное произведение $\vec{F} \cdot \vec{\tau}$ при данных условиях является кусочно непрерывной и ограниченной функцией, определённой на L , за исключением, быть может, конечного множества точек, поэтому имеет смысл интеграл

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds.$$

Если поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ интерпретировать как силовое поле, то криволинейный интеграл второго рода $\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds$ выражает работу этого поля при перемещении по ориентированной кривой $(L, \vec{\tau})$.

Основные свойства криволинейного интеграла второго рода

Пусть функции P, Q и R непрерывны в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^3$, содержащей кривую $L = \overset{\curvearrowright}{AB}$.

1 (*Аддитивность интеграла*). Если точка C лежит на кривой $\overset{\curvearrowright}{AB}$, то

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AC}} P dx + Q dy + R dz + \int_{\overset{\curvearrowright}{CB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P dx + Q dy + R dz.$$

2 (*Линейность интеграла*). Для любых постоянных α и β

$$\begin{aligned} \int_L (\alpha P_1 + \beta P_2) dx + (\alpha Q_1 + \beta Q_2) dy + (\alpha R_1 + \beta R_2) dz &= \\ &= \alpha \int_L P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz + \beta \int_L P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz. \end{aligned}$$

3 (*Направленность интеграла*)geVU/Wnu8v9dI4=

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{BA}} P dx + Q dy + R dz = - \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P dx + Q dy + R dz.$$

4 (Аналог формулы Ньютона — Лейбница). Если в области $D \subset \mathbb{R}^3$ существует такая дифференцируемая функция f , что $\text{grad } f = (P, Q, R)$, то

$$\int_{\overline{AB}} P dx + Q dy + R dz = f(B) - f(A).$$

В частности, если L — контур, то $\int_L P dx + Q dy + R dz = 0$.

Заметим, что верно и обратное утверждение, а именно, если для любого контура $L \subset D$ выполнено равенство

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = 0,$$

то существует дифференцируемая функция f , для которой $\text{grad } f = (P, Q, R)$ в области D .

5 (Сведение криволинейного интеграла второго рода к интегралу Римана). Если $\overline{AB} = L = \{(x, y, z) : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [a; b]\}$ — простая гладкая кривая, то

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \\ &= \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'_t + Q(x(t), y(t), z(t))y'_t + R(x(t), y(t), z(t))z'_t) dt. \end{aligned}$$

Заметим, что при любой параметризации отрезка $L = AB$, параллельного оси Ox , функции $y(t)$ и $z(t)$ постоянны, следовательно, $y'_t = 0$, $z'_t = 0$, и поэтому

$$\int_{\overline{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\overline{AB}} P dx.$$

Аналогично для отрезка, параллельного оси Oy и для отрезка, параллельного оси Oz .

Свойства 1 и 5 позволяют вычислять криволинейные интегралы второго рода по гладким и кусочно-гладким кривым.

Пример 16.26. Вычислим $\int_{\overline{AB}} (y^2 + 2xy) dx + (x^2 - 2xy) dy$, где \overline{AB} — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 4)$.

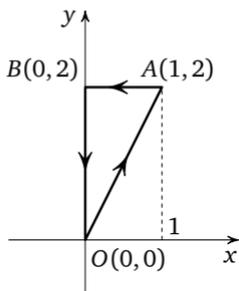
Решение. Параметризуем дугу: $\overline{AB} = \{(x, y) : x = x, y = x^2, x \in [1; 2]\}$. Это простая гладкая ориентированная кривая, причём $x'_x = 1$, $y'_x = 2x$, поэтому, применяя свойство 5, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} (y^2 + 2xy) dx + (x^2 - 2xy) dy &= \int_1^2 ((x^4 + 2x^3) + (x^2 - 2x^3) \cdot 2x) dx = \\ &= \int_1^2 (4x^3 - 3x^4) dx = 15 - \frac{3}{5} \cdot 31 = -\frac{18}{5}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.27. Вычислим

$$\int_L (xy + x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy,$$

где L — контур треугольника OAB с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(0, 2)$ и положительным направлением обхода (см. рис.).



РЕШЕНИЕ. Кривая L — кусочно-гладкая. Она состоит из трёх гладких ориентированных кусков: отрезков OA , AB , BO . Запишем каждый из них как простую гладкую ориентированную кривую, которая проходит при возрастании параметра:

$$OA = \{(x, y) : x = x, y = 2x, x \in [0; 1]\},$$

$$AB = \{(x, y) : x = 1 - t, y = 2, t \in [0; 1]\},$$

$$BO = \{(x, y) : x = 0, y = 2 - t, t \in [0; 2]\}.$$

На отрезке OA имеем $x'_x = 1$, $y'_x = 2$, поэтому по свойству 5 находим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{OA} (xy + x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = \\ &= \int_0^1 ((2x^2 + x^2 + 4x^2) + (x^2 - 4x^2) \cdot 2) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

На отрезке AB имеем $x'_t = -1$, $y'_t = 0$, следовательно,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{AB} (xy + x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = \int_0^1 (2(1-t) + (1-t)^2 + 4)(-1) dt = \\ &= \int_0^1 (4t - 7 - t^2) dt = 2 - 7 - \frac{1}{3} = -\frac{16}{3}. \end{aligned}$$

На отрезке BO имеем $x'_t = 0$, $y'_t = -1$, значит,

$$I_3 = \int_{BO} (xy + x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = \int_0^2 -(2-t)^2(-1) dt = \int_0^2 (2-t)^2 dt = \frac{8}{3}.$$

Применяя свойство 1, находим

$$\int_L (xy + x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{3} - \frac{16}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{7}{3}.$$

Выкладки становятся проще, если использовать свойство направленности интеграла, тогда отпадает необходимость вводить параметр так, чтобы кривая проходила именно при возрастании параметра. Покажем это.

Если отрезок AB параметрически представить в виде

$$\{(x, y) : x = x, y = 2, x \in [0; 1]\},$$

то он будет проходиться при убывании параметра x от 1 до 0, а отрезок BA будет проходиться при возрастании параметра x от 0 до 1. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{AB} (xy + x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy &= - \int_{BA} (xy + x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = \\ &= - \int_0^1 (2x + x^2 + 4) dx = - \left(1 + \frac{1}{3} + 4\right) = -\frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Аналогично $OB = \{(x, y) : x=0, y=y, y \in [0; 2]\}$ и

$$\begin{aligned} \int_{BO} (xy + x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy &= \\ &= - \int_{OB} (xy + x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = - \int_0^2 (-y^2) dy = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Применяя свойство аддитивности интеграла, получаем

$$\int_L (xy + x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = \frac{1}{3} - \frac{16}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{7}{3}. \quad \square$$

Пример 16.28. Вычислим $\int_L y dx - x dy$, где L — астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ с положительным направлением обхода ($a > 0$).

Решение. В примере 16.7 была получена следующая параметризация астроида: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0; 2\pi]$. Тогда положительному направлению обхода соответствует возрастание параметра t от 0 до 2π . Итак,

$$L = \{(x, y) : x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in [0; 2\pi]\}.$$

Следовательно, $x'_t = -3a \cos^2 t \sin t$, $y'_t = 3a \sin^2 t \cos t$, и по свойству 5

$$\begin{aligned} \int_L y dx - x dy &= \int_0^{2\pi} (-a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t \sin t - a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t) dt = \\ &= -3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -12a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t dt = \\ &= -6a^2 \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)} = -3a^2 \cdot \frac{1}{4} \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} \pi a^2. \quad \square \end{aligned}$$

На практике бывает удобно перед вычислением интеграла преобразовать подынтегральное выражение.

Пример 16.29. Вычислим $\int_L (x + y) dx - (x - y) dy$, где L — петля кривой $r = a \cos 3\varphi$ ($a > 0$), пересекающая полярную ось, с положительным направлением обхода (декартова и полярная система координат совмещены).

Решение. Выбирая в качестве параметра полярный угол φ , получаем параметризацию: $x = a \cos 3\varphi \cos \varphi$, $y = a \cos 3\varphi \sin \varphi$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$. Тогда поло-

жительному направлению обхода заданной петли соответствует возрастание параметра от $-\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{6}$. Итак,

$$L = \left\{ (x, y) : x = a \cos 3\varphi \cos \varphi, y = a \cos 3\varphi \sin \varphi, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right] \right\}.$$

Следовательно, $x'_\varphi = -a(\sin 2\varphi + 2 \sin 4\varphi)$, $y'_\varphi = a(2 \cos 4\varphi - \cos 2\varphi)$,

$$\begin{aligned} (x+y) dx - (x-y) dy &= (-a^2(\cos \varphi + \sin \varphi) \cos 3\varphi (\sin 2\varphi + 2 \sin 4\varphi) - \\ &\quad - a^2(\cos \varphi - \sin \varphi) \cos 3\varphi (2 \cos 4\varphi - \cos 2\varphi)) d\varphi = \\ &= -a^2 \cos 3\varphi (3 \sin 3\varphi + \cos 3\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_L (x+y) dx - (x-y) dy &= - \int_{\pi/6}^{\pi/6} a^2 \cos 3\varphi (3 \sin 3\varphi + \cos 3\varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{a^2}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/6} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi = -\frac{\pi a^2}{6}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.30. Вычислим $\int_{\overset{AB}{\curvearrowright}} z dx + 2x dy - y dz$, где кривая $\overset{AB}{\curvearrowright}$ является пересечением поверхностей $x^2 + y^2 = 2ax$ и $az = xy$ ($a > 0$) при $z \geq 0$; $A = (0, 0, 0)$, $B = (2a, 0, 0)$.

Решение. Для точек кривой $\overset{AB}{\curvearrowright}$ из первого уравнения получаем условие $x \geq 0$; из условия $z \geq 0$ и второго уравнения следует, что $y \geq 0$. Отсюда заключаем, что кривая $\overset{AB}{\curvearrowright}$ может быть параметризована следующим образом:

$$x = x, \quad y = \sqrt{2ax - x^2}, \quad z = \frac{x}{a} \sqrt{2ax - x^2}, \quad x \in [0; 2a],$$

и заданной ориентации соответствует возрастание параметра x от 0 до $2a$:

$$L = \left\{ (x, y, z) : x = x, y = \sqrt{2ax - x^2}, z = \frac{x}{a} \sqrt{2ax - x^2}, x \in [0; 2a] \right\}.$$

Следовательно, $x'_x = 1$, $y'_x = \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$, $z'_x = \frac{3ax-2x^2}{a\sqrt{2ax-x^2}}$, поэтому

$$\begin{aligned} z dx + 2x dy - y dz &= \\ &= \left(\frac{x}{a} \sqrt{2ax - x^2} + 2x \cdot \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}} - \sqrt{2ax-x^2} \cdot \frac{3ax-2x^2}{a\sqrt{2ax-x^2}} \right) dx = \\ &= \left(\frac{x(2a^2-x^2)}{a\sqrt{a^2-(x-a)^2}} - 3x + \frac{2x^2}{a} \right) dx. \end{aligned}$$

Тогда, полагая $t = x - a$ и $a \sin \varphi = t$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\overset{AB}{\curvearrowright}} z dx + 2x dy - y dz &= \int_{-a}^a \frac{(t+a)(2a^2-(t+a)^2)}{a\sqrt{a^2-t^2}} dt + \int_0^{2a} \left(\frac{2x^2}{a} - 3x \right) dx = \\ &= 2 \int_0^a \frac{a^2-3t^2}{\sqrt{a^2-t^2}} dt + \frac{16}{3}a^2 - 6a^2 = 2a^2 \int_0^{2\pi} (1-3\sin^2 \varphi) d\varphi - \frac{2}{3}a^2 = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (3\cos 2\varphi - 1) d\varphi - \frac{2}{3}a^2 = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \right) a^2. \end{aligned}$$

Заметим, что в этом примере при такой параметризации кривой \widetilde{AB} функции $y(x)$ и $z(x)$ не являются гладкими на $[0; 2a]$, поэтому формально мы здесь не имели права применять рассмотренные выше формулы. Но, как уже не раз отмечалось в аналогичных ситуациях, если в этих формулах вместо интеграла Римана поставить абсолютно сходящийся несобственный интеграл, то они остаются в силе. Этим утверждением будем пользоваться и дальше.

Можно параметризовать кривую \widetilde{AB} и так, чтобы все функции были гладкими. Именно, положим: $x = a(1 - \cos t)$, $y = a \sin t$, $z = a \sin t(1 - \cos t)$; тогда точке $A(0, 0, 0)$ соответствует $t = 0$, точке $B(2a, 0, 0)$ — значение $t = \pi$:

$$\widetilde{AB} = L = \{(x, y, z) : x = a(1 - \cos t), y = a \sin t, z = a \sin t(1 - \cos t), t \in [0; \pi]\}.$$

Находим $x'_t = a \sin t$, $y'_t = a \cos t$, $z'_t = a(\cos t - \cos^2 t + \sin^2 t)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} z dx + 2x dy - y dz &= \\ &= a^2(\sin^2 t - \sin^2 t \cos t + 2 \cos t - 2 \cos^2 t - \cos t \sin t + \cos^2 t \sin t - \sin^3 t) dt = \\ &= a^2(\cos t(2 - \sin^2 t - \sin t) - \sin t(1 - 2 \cos^2 t) - 3 \cos^2 t + 1) dt \end{aligned}$$

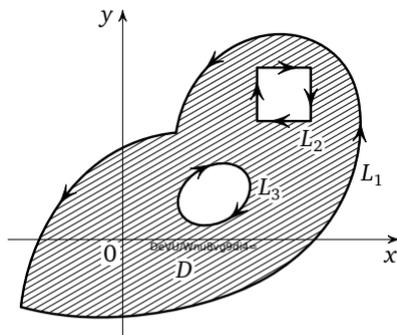
и

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{AB}} z dx + 2x dy - y dz &= \\ &= a^2 \int_0^\pi \left((2 - \sin^2 t - \sin t) \cos t + (1 - 2 \cos^2 t)(-\sin t) - \frac{3}{2} \cos 2t - \frac{1}{2} \right) dt = \\ &= a^2 \left(\cos t - \frac{2}{3} \cos^3 t \right) \Big|_0^\pi - \frac{\pi a^2}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \right) a^2. \quad \square \end{aligned}$$

Формула Грина

Следующая теорема позволяет свести вычисление интеграла по замкнутой кривой к вычислению двойного интеграла по ограниченной ею области.

Теорема (формула Грина). Пусть D — область в \mathbb{R}^2 , а её граница ∂D состоит из конечного числа кусочно-гладких контуров $\partial D = \bigcup_{j=1}^m L_j$ (см. рис.).



Пусть также функции P , Q , $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в $\bar{D} = D \cup \partial D$. Тогда

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \sum_{j=1}^m \int_{L_j} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

где все контуры L_j , $1 \leq j \leq m$, положительно ориентированы.

Естественная область применения формулы Грина — это нахождение интегралов второго рода по плоским контурам.

Пример 16.31. Пусть L — окружность $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, с положительным направлением обхода. Вычислим

$$\int_L x^2 y dx - xy^2 dy$$

а) применяя формулу Грина; б) непосредственно по определению.

Решение. а) Поскольку область D , ограниченная окружностью L , есть круг $\{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2\}$, используя формулу Грина, получаем

$$\int_L x^2 y dx - xy^2 dy = \iint_D (-y^2 - x^2) dx dy = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = -\frac{\pi}{2} a^4.$$

б) Используя параметризацию

$$L = \{(x, y) : x = a \cos t, y = a \sin t, t \in [0; 2\pi]\},$$

получаем

$$\int_L x^2 y dx - xy^2 dy = -2a^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = -4a^4 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} = -\frac{\pi}{2} a^4. \quad \square$$

Пример 16.32. Вычислим $\int_L x^2 y dx - xy^2 dy$, где L — контур квадрата $|x| + |y| = a$, $a > 0$, с положительным направлением обхода.

Решение. Для непосредственного вычисления этого интеграла его необходимо представить как сумму четырёх интегралов по гладким компонентам L — сторонам квадрата. При этом получаются довольно громоздкие выкладки, потому проведём вычисление только с применением формулы Грина. Пользуясь симметрией подынтегральной функции и области интегрирования в двойном интеграле по $D = \{(x, y) : |x| + |y| < a\}$, получаем

$$\begin{aligned} \int_L x^2 y dx - xy^2 dy &= \iint_D (-y^2 - x^2) dx dy = -4 \int_0^a dx \int_0^{a-x} (y^2 + x^2) dy = \\ &= -4 \int_0^a \left(\frac{1}{3} (a-x)^3 + ax^2 - x^3 \right) dx = -4 \left(\frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} \right) = -\frac{2}{3} a^4. \quad \square \end{aligned}$$

Иногда нахождение интеграла второго рода по незамкнутой кривой упрощается, если замкнуть эту кривую и искать данный интеграл как разность соответствующих интегралов по замкнутой кривой и по замыкающему множеству. В качестве замыкающего множества обычно берутся отрезки прямых, параллельных координатным осям, поскольку по таким множествам интеграл второго рода вычисляется наиболее просто.

Пример 16.33. Вычислим

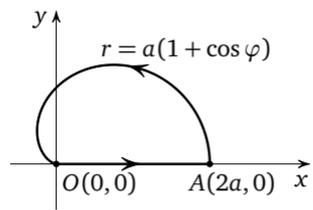
$$\int_L (\cos y + y \sin x + y^2) dx - (\cos x + x \sin y + x^2) dy,$$

где L — лежащая в верхней полуплоскости часть кривой $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$), от точки $A(2a, 0)$ до точки $O(0, 0)$ (декартова и полярная системы координат совмещены).

РЕШЕНИЕ. Присоединив к кривой $L = \overset{\sim}{AO}$ отрезок OA оси Ox (см. рис.), получим замкнутую кривую \tilde{L} . Направление кривой $\overset{\sim}{AO}$ индуцирует такой обход контура \tilde{L} , что область

$$D = \{(r, \varphi) : 0 < \varphi < \pi, 0 < r < a(1 + \cos \varphi)\},$$

ограниченная им, остаётся слева. Используя аддитивность интеграла и формулу Грина, получаем



$$\begin{aligned} & \int_L (\cos y + y \sin x + y^2) dx - (\cos x + x \sin y + x^2) dy = \\ & = \int_{\tilde{L}} (\cos y + y \sin x + y^2) dx - (\cos x + x \sin y + x^2) dy - \\ & \quad - \int_{OA} (\cos y + y \sin x + y^2) dx - (\cos x + x \sin y + x^2) dy = \\ & = - \int_0^{2a} dx + \iint_D (\sin x - \sin y - 2x + \sin y - \sin x - 2y) dx dy = \\ & = -2a - 2 \iint_D (x + y) dx dy = -2a - 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) dr = \\ & = -2a - \frac{2}{3} a^3 \int_0^\pi ((1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi + \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi + 3 \cos^3 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi = \\ & = -2a - \frac{2}{3} a^3 \cdot \frac{1}{4} (1 + \cos \varphi)^4 \Big|_\pi^0 - \frac{2}{3} a^3 \left(3 \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2)} + \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)} \right) = \\ & = -2a - \frac{8}{3} a^3 - \frac{5}{4} \pi a^3 = -\frac{a}{12} (15\pi a^2 + 32a^2 + 24). \quad \square \end{aligned}$$

§ 16.4. Поверхностный интеграл второго рода

Ориентация кусочно-гладкой поверхности

Определение. Гладкая (т. е. имеющая в каждой точке касательную плоскость) поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ называется *ориентируемой* или *двусторонней*, если на ней можно задать непрерывное поле единичных нормальных векторов. Такое поле будем называть ориентирующим полем нормалей S .

В каждой точке гладкой поверхности имеются два и только два различных единичных нормальных вектора противоположного направления, поэтому для ориентируемой поверхности существуют два и только два ориентирующих поля нормалей \vec{n}_1 и \vec{n}_2 , причём векторы этих полей в данной точке $s_0 \in S$ противоположны.

Если $S \subset \mathbb{R}^3$ — простая гладкая поверхность, т. е.

$$S = r(\bar{D}) = \{(x, y, z) : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in \bar{D}\},$$

где D — жорданова область в \mathbb{R}^2 , r — гомеоморфизм с $x, y, z \in C^1(\bar{D})$ и на \bar{D} $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq 0$ (см. 15.2.4), то ориентирующими полями нормалей будут поля

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} \quad \text{и} \quad \vec{n}_2 = \frac{\vec{r}'_v \times \vec{r}'_u}{|\vec{r}'_v \times \vec{r}'_u|}.$$

Определение. Ориентируемая поверхность с выбранным ориентирующим полем нормалей называется *ориентированной поверхностью*.

Ориентированную поверхность будем обозначать парой (S, \vec{n}) , где \vec{n} — выбранное ориентирующее поле нормалей.

Можно сказать, что выбор направления нормали определяет сторону поверхности. Поэтому ориентацию поверхности часто называют выбором стороны поверхности — отсюда возникает термин «двусторонняя поверхность». Например, если на сфере задать непрерывное поле внешних (направленных от центра) нормальных векторов, то можно сказать, что задана внешняя сторона сферы; если же задать поле внутренних (направленных к центру) нормальных векторов, то можно сказать, что задана внутренняя сторона сферы.

Определение. Пусть ориентированная замкнутая кривая L является краем ориентированной поверхности $S = r(\bar{D})$, т. е. $L = r(\partial D)$. Их ориентации называются *согласованными*, если ориентация кривой L порождается положительной ориентацией её прообраза — границы ∂D области D , т. е. в том случае, когда ориентация поверхности S задаётся полем нормалей $\vec{n} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}$,

а ориентация кривой L — таким полем касательных векторов $\vec{\tau}$, что в её точке $(x_0, y_0, z_0) = r(u_0, v_0)$, являющейся образом точки $(u_0, v_0) \in \partial D$, вектор $\vec{\tau}$ равен $\frac{(\vec{r}'(\rho(t)))'_t}{|(\vec{r}'(\rho(t)))'_t|_{t=t_0}} = \frac{\vec{r}'_u u'(t) + \vec{r}'_v v'(t)}{|\vec{r}'_u u'(t) + \vec{r}'_v v'(t)|_{t=t_0}}$, где $\rho(t) = (u(t), v(t))$ — параметризация, задающая положительную ориентацию ∂D , и $\rho(t_0) = (u_0, v_0)$.

Можно сказать, что ориентации L и S согласованы, если при обходе L в направлении, задаваемом вектором $\vec{\tau}$ по стороне S , соответствующей вектору \vec{n} , поверхность S остаётся слева.

Определение. Пусть контур L лежит на поверхности S . Если та часть S_1 поверхности S , для которой точки L граничные, не имеет других граничных точек и является связным ограниченным множеством, то будем говорить, что контур L ограничивает часть S_1 поверхности S или что поверхность S_1 натянута на контур L .

Назовём поверхность замкнутой, если она является границей некоторой ограниченной области в \mathbb{R}^3 .

Определение. Пусть ориентированный контур L лежит на ориентированной незамкнутой поверхности S . Если ориентации контура L и ограниченной им части S_1 поверхности S согласованы, то такое направление обхода контура L называется положительным на S .

Определение. Пусть незамкнутые ориентированные поверхности S_1 и S_2 пересекаются по кривой L . Возьмём на S_1 и S_2 контуры C_1 и C_2 соответственно так, чтобы кривая L или её часть составляла часть как контура C_1 , так и контура C_2 . Если положительные направления обхода контуров C_1 и C_2 индуцируют противоположные ориентации на L , то ориентации поверхностей S_1 и S_2 называются согласованными.

Определение. Кусочно-гладкая поверхность $S = \bigcup_{q=1}^m S_q$, где S_q , $1 \leq q \leq m$, — простые гладкие поверхности, называется ориентируемой (двусторонней), если на каждой из поверхностей S_q , $1 \leq q \leq m$, можно выбрать ориентацию (S_q, \vec{n}_q) таким образом, чтобы для любой пары S_i, S_j , имеющей линию пересечения, ориентации были согласованными. Векторное поле \vec{n} , составленное полями \vec{n}_q ($1 \leq q \leq m$), назовём ориентирующим полем нормалей S .

Для кусочно-гладкой поверхности S ориентирующее поле нормалей определено и непрерывно на S , за исключением, быть может, конечного числа кусочно-гладких кривых, лежащих на S . Так же как и для гладкой ориентируемой поверхности, для кусочно-гладкой ориентируемой поверхности существуют два и только два ориентирующих поля нормалей \vec{n}_1 и \vec{n}_2 , составленные противоположными векторами.

Определение. Пара (S, \vec{n}) , где S — ориентируемая кусочно-гладкая поверхность и \vec{n} — выбранное ориентирующее поле нормалей, называется ориентированной поверхностью.

Положительное направление обхода контура на кусочно-гладкой незамкнутой ориентированной поверхности определяется аналогично случаю гладкой незамкнутой ориентированной поверхности.

Любая кусочно-гладкая замкнутая поверхность ориентируема. При этом одна ориентация соответствует выбору внешних нормалей (внешняя сторона поверхности), другая — выбору внутренних нормалей (внутренняя сторона поверхности).

При указании ориентации (стороны) поверхности будем пользоваться следующей терминологией.

Для замкнутых поверхностей, как уже говорилось, определяются внешняя и внутренняя стороны. Будем считать это определение наследуемым для любых

частей замкнутых поверхностей. Например, внутренняя сторона полусферы — это сторона, соответствующая выбору нормалей, направленных к центру. Для эллиптических цилиндра и параболоида, двухполостного и однополостного гиперboloидов и эллиптического конуса внутренней нормалью считается вектор нормали, направленный внутрь полости, и соответственно определяется внутренняя и внешняя стороны. Определения внешней и внутренней стороны также будем считать наследуемыми для любых частей таких поверхностей. Если (S, \vec{n}) — ориентированная поверхность и косинус угла вектора \vec{n} с осью Oz сохраняет знак во всех точках поверхности, то назовём соответствующую сторону S верхней, если $\cos \angle(\vec{n}, \vec{k}) \geq 0^1$, и нижней, если $\cos \angle(\vec{n}, \vec{k}) \leq 0$. Аналогично назовём сторону поверхности (S, \vec{n}) правой, если $\cos \angle(\vec{n}, \vec{i}) \geq 0$ и левой, если $\cos \angle(\vec{n}, \vec{i}) \leq 0$. Аналогично определяются передняя и задняя стороны.

В частности, если поверхность S задана явной функцией $z = z(x, y)$, т. е.

$$S = \{r(x, y) : (x, y) \in \bar{D}\}, \quad r(x, y) = (x, y, z(x, y)), \quad z \in C^1(\bar{D}),$$

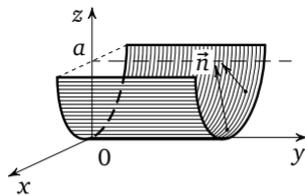
$$\text{то поле } \vec{n}_1 = \frac{\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y}{|\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y|} = \frac{(-z'_x, -z'_y, 1)}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \quad \text{задаёт верхнюю,}$$

$$\text{а поле } \vec{n}_2 = \frac{\vec{r}'_y \times \vec{r}'_x}{|\vec{r}'_y \times \vec{r}'_x|} = \frac{(z'_x, z'_y, -1)}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \quad \text{— нижнюю стороны } S.$$

Точно так же определяются правая и левая стороны для поверхности $x = x(y, z)$ и передняя и задняя стороны для поверхности $y = y(x, z)$.

Пример 16.34. Выясним, внешняя или внутренняя сторона поверхности $S = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 2az, z < a\}$ ($a > 0$) является верхней.

РЕШЕНИЕ. Условие $z < a$ показывает, что ориентирующее поле нормалей к S , определяющее верхнюю сторону, есть $\vec{n} = \left(-\frac{x}{a}, 0, \frac{a-z}{a}\right)$. Внешняя и внутренняя стороны поверхности S как части цилиндра $\{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 2az\}$ определяются полем нормалей, направленных соответственно от оси симметрии этого цилиндра и к оси симметрии. Осью симметрии цилиндра является прямая $z = a$, лежащая выше точек поверхности S , следовательно, вектор $\vec{n} = \left(-\frac{x}{a}, 0, \frac{a-z}{a}\right)$ направлен к этой прямой (см. рис.). Итак, верхняя сторона S — внутренняя. \square

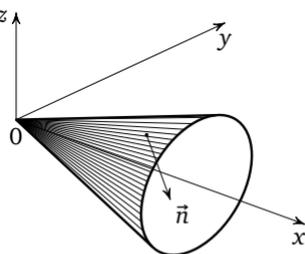


Пример 16.35. Для поверхности

$$S = \{(x, y, z) : x^2 = y^2 + z^2, x > 0\}$$

выясним, правая или левая сторона является внутренней.

РЕШЕНИЕ. Поверхность S является частью конуса $x^2 = y^2 + z^2$, следовательно, внутренняя сто-



¹ Здесь и далее через \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} обозначаются единичные векторы, направленные вдоль координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно.

рона S определяется полем нормалей \vec{n} , направленных внутрь полости этого конуса, т.е. к оси Ox (см. рис.). Такой вектор $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ в точке $(x, y, z) \in S, z > 0$, должен иметь отрицательную координату n_z . Отсюда заключаем, что ориентирующим полем нормалей внутренней стороны S является поле $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{x}, -\frac{z}{x} \right)$. Поскольку $n_x = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, внутренняя сторона S является правой. \square

Пример 16.36. Покажем, что сторона поверхности

$$S = \left\{ (x, y, z) : x = a \cos u \cos^4 v, y = a \sin u \cos^4 v, z = a \sin^4 v, \right. \\ \left. 0 < u < \pi, 0 < v < \frac{\pi}{2} \right\},$$

определённая полем $\vec{n} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}$, — верхняя.

РЕШЕНИЕ. Координата n_z вектора \vec{n} равна

$$\frac{1}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} (x'_u y'_v - x'_v y'_u) = \frac{1}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} \cdot 4a^2 \cos^7 v \sin v > 0.$$

Это неравенство показывает, что соответствующая сторона S — верхняя. \square

Пример 16.37. Поверхность S есть часть поверхности тела

$$V = \left\{ (x, y, z) : 2x^2 + 2y^2 \leq az \leq x^2 + y^2 + a^2 \right\}, \quad a > 0,$$

удовлетворяющая условию $y \geq 0$. Вектор нормали, определяющий ориентацию S , в точке $M\left(0, \frac{a}{2}, \frac{5a}{4}\right)$ образует острый угол с осью Oz . Дадим характеристику ориентации гладких поверхностей, составляющих кусочно-гладкую ориентированную поверхность S .

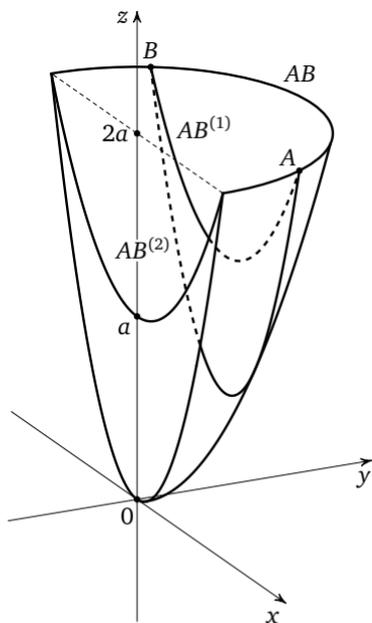
РЕШЕНИЕ. Поверхность S состоит из части S_1 параболоида $az = x^2 + y^2 + a^2$ и части S_2 параболоида $az = 2x^2 + 2y^2$ (см. рис.), линией пересечения S_1 с S_2 является полуокружность $x^2 + y^2 = a^2, z = 2a, y \geq 0$. Обе поверхности S_1 и S_2 заданы явными функциями:

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) : z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2 + a^2), \right. \\ \left. x^2 + y^2 \leq a, y \geq 0 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) : z = \frac{2}{a}(x^2 + y^2), \right. \\ \left. x^2 + y^2 \leq a, y \geq 0 \right\}.$$

Поэтому их ориентация характеризуется указанием — рассматривается верхняя или нижняя сторона соответствующей поверхности.

Точка $M\left(0, \frac{a}{2}, \frac{5a}{4}\right)$ лежит на S_1 , следовательно, на S_1 задана верхняя сторона. Чтобы

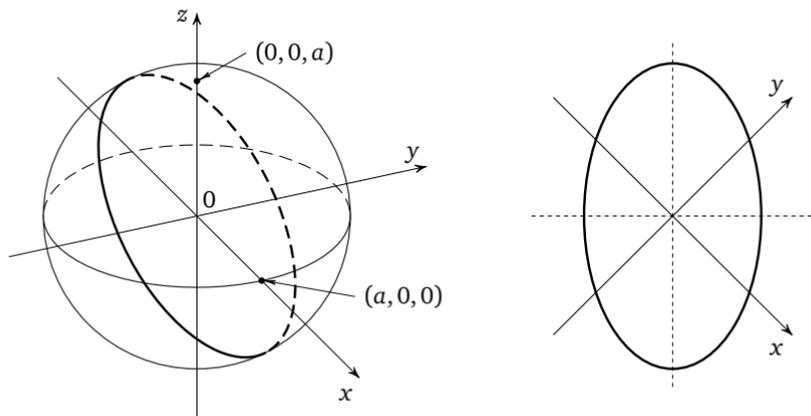


определить согласованную ориентацию поверхности S_2 , возьмём на параболоиде $az = x^2 + y^2 + a^2$ контур L , образованный дугой AB линии пересечения S_1 с S_2 и параболой $AB^{(1)}: az = x^2 + y^2 + a^2, y = \frac{a}{2}$, а на параболоиде $az = 2x^2 + 2y^2$ — контур L_2 , образованный той же дугой AB и параболой $AB^{(2)}: az = 2x^2 + 2y^2, y = \frac{a}{2}$. Координаты точек A и B находятся из системы: $y = \frac{a}{2}, x^2 + y^2 = a^2, z = 2a$, откуда $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 2a\right), B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 2a\right)$. На верхней стороне поверхности S_1 положительное направление обхода контура L_1 индуцирует направление \overrightarrow{AB} линии пересечения S_1 с S_2 , следовательно, при согласованной ориентации поверхности S_2 положительное направление обхода контура L_2 должно индуцировать направление \overrightarrow{BA} этой дуги. Оказывается, контур L с положительным направлением обхода находится на нижней стороне параболоида $az = 2x^2 + 2y^2$. Итак, заданная ориентированная кусочно-гладкая поверхность S состоит из верхней стороны части параболоида $az = x^2 + y^2 + a^2$ и нижней стороны части параболоида $az = 2x^2 + 2y^2$ ($x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$). \square

Пример 16.38. Найдём параметрическое представление окружности

$$L = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0\} \quad (a > 0),$$

при котором направление её обхода при возрастании параметра положительно на верхней стороне плоскости $x + y + z = 0$ (см. рис.).



Решение. Параметризуем окружность L . Исключая переменную z из системы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$, получаем уравнение $x^2 + y^2 + xy = \frac{a^2}{2}$. Оно задаёт на плоскости xOy эллипс, главные оси которого образуют угол $\frac{\pi}{4}$ с осями координат, поэтому

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin t \quad \text{и} \quad y = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \cos t - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin t,$$

где α, β — длины полуосей этого эллипса. Для их вычисления подставим выражения x и y в уравнение эллипса и получим равенство $\frac{3\alpha^2}{2} \cos^2 t + \frac{\beta^2}{2} \sin^2 t = \frac{a^2}{2}$

откуда $\alpha = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $\beta = a$. Итак,

$$L = \left\{ (x, y, z) : x = \frac{a}{\sqrt{6}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{2}} \sin t, y = \frac{a}{\sqrt{6}} \cos t - \frac{a}{\sqrt{2}} \sin t, \right. \\ \left. z = -a\sqrt{\frac{2}{3}} \cos t, 0 \leq t < 2\pi \right\}.$$

Точка $O(0, 0, 0)$ принадлежит части плоскости $x + y + z = 0$, ограниченной окружностью L , а вектор \overline{MO} , как направленный по радиусу окружности L , ортогонален её касательному вектору $\vec{\tau}$. Поэтому для требуемого направления обхода вектор $\vec{p} = \vec{\tau} \times \overline{MO} = (p_x, p_y, p_z)$ должен быть направлен в ту же сторону от плоскости $x + y + z = 0$, что и нормальный вектор этой плоскости, определяющий её верхнюю сторону, т. е. $p_z \geq 0$. Поскольку

$$\vec{\tau} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \left(-\frac{a \sin t}{\sqrt{6}} + \frac{a \cos t}{\sqrt{2}}, -\frac{a \sin t}{\sqrt{6}} - \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, a\sqrt{\frac{2}{3}} \sin t \right)$$

и $\overline{MO} = (-x, -y, -z)$, имеем $p_z = -y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} = -\frac{a^2}{\sqrt{3}} < 0$; таким образом, полученная параметризация окружности L даёт при возрастании t от 0 до 2π противоположное требуемому направлению обхода. Заменяя t на $2\pi - u$, получаем следующее параметрическое представление окружности:

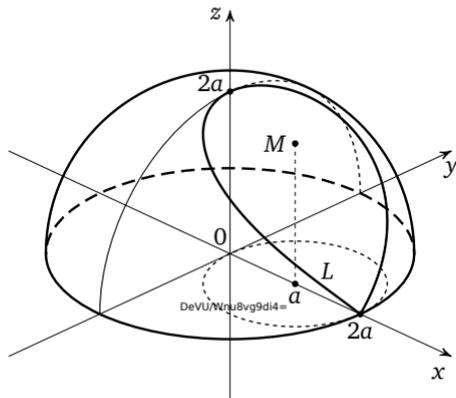
$$x = \frac{a}{\sqrt{6}} \cos u - \frac{a}{\sqrt{2}} \sin u, y = \frac{a}{\sqrt{6}} \cos u + \frac{a}{\sqrt{2}} \sin u, z = -a\sqrt{\frac{2}{3}} \cos u, u \in (0; 2\pi],$$

а поскольку сделано преобразование параметра с отрицательной производной, такая параметризация задаёт противоположную предыдущей, т. е. исковую ориентацию окружности L . \square

Пример 16.39. Найдём такую параметризацию верхней петли кривой Вивiani $L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, x^2 + y^2 = 2ax, z \geq 0\}$ ($a > 0$), чтобы направление обхода при возрастании параметра на верхней стороне верхней полусферы $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, z \geq 0\}$ было положительным (см. рис.).

Решение. Параметризуем кривую Вивiani L . Условию $x^2 + y^2 = 2ax$ удовлетворяет параметрическое представление координат

$$x = 2a \cos^2 t \text{ и } y = 2a \cos t \sin t, \quad \text{где } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \text{ или } t \in [0; \pi].$$



Из уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ имеем $z^2 = 4a^2 \sin^2 t$; учитывая условие $z \geq 0$, получаем параметризацию

$$L = \{(x, y, z) : x = 2a \cos^2 t, y = 2a \cos t \sin t, z = 2a \sin t, 0 \leq t \leq \pi\}.$$

Возьмём точку $M(a, 0, a\sqrt{3})$, принадлежащую той части верхней полушеры S , которая ограничена кривой L . Тогда для требуемого направления обхода векторное произведение вектора $\vec{\tau} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$, касательного к L в точке $A(x, y, z)$, и вектора $\vec{AM} = (a - x, -y, a\sqrt{3} - z)$, т. е. вектор $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = \vec{\tau} \times \vec{AM}$, должен иметь положительную координату p_z , так как вектор \vec{p} должен быть направлен в ту же сторону от полусферы S , что и нормальный вектор, определяющий её верхнюю сторону. Поскольку $p_z = -y \frac{dx}{dt} - (a - x) \frac{dy}{dt} = 2a^2 > 0$, заключаем, что указанная выше параметризация кривой Вивиани и является искомой. \square

Определение поверхностного интеграла второго рода

Определение. Пусть в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^3$ заданы непрерывное векторное поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ и ориентированная кусочно-гладкая поверхность (S, \vec{n}) . Тогда интеграл первого рода $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ называется *поверхностным интегралом второго рода по поверхности S* и обозначается так:

$$\iint_S P dx \wedge dy + Q dy \wedge dz + R dz \wedge dx.$$

Смысл данного обозначения будет прояснён в §16.6 (с. 212).

Запись подынтегрального выражения в виде $P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ показывает, что рассматривается поверхностный интеграл 2-го рода, поэтому вместо (S, \vec{n}) будем писать просто S . Указание ориентации поверхности S — обязательное условие задания поверхностного интеграла 2-го рода.

Заметим, что скалярное произведение $\vec{F} \cdot \vec{n}$ при данных условиях является кусочно непрерывной и ограниченной функцией, определённой на S , за исключением, быть может, конечного множества кусочно-гладких кривых, лежащих на S , поэтому интеграл $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ определён.

Если поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ интерпретировать как поле скоростей течения жидкости, то величина поверхностного интеграла второго рода

$$\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

есть количество жидкости, протёкшей за единицу времени через поверхность S (поток поля) в направлении нормали \vec{n} .

Основные свойства поверхностного интеграла второго рода

Здесь предполагается, что функции P , Q и R непрерывны в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^3$, содержащей поверхность S .

1 (Аддитивность интеграла). Если $S = S_1 \cup S_2$, поверхности S_1 и S_2 не имеют общих внутренних точек и их ориентации согласованы, то

$$\begin{aligned} & \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \\ & = \iint_{S_1} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy + \iint_{S_2} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy. \end{aligned}$$

2 (Линейность интеграла). Для любых постоянных α и β

$$\begin{aligned} & \iint_S (\alpha P_1 + \beta P_2) dy \wedge dz + (\alpha Q_1 + \beta Q_2) dz \wedge dx + (\alpha R_1 + \beta R_2) dx \wedge dy = \\ & = \alpha \iint_S P_1 dy \wedge dz + Q_1 dz \wedge dx + R_1 dx \wedge dy + \\ & \quad + \beta \iint_S P_2 dy \wedge dz + Q_2 dz \wedge dx + R_2 dx \wedge dy. \end{aligned}$$

3 (Направленность интеграла). Если S и \tilde{S} обозначают одну поверхность, но с противоположными ориентациями, задаваемыми нормальными векторами \vec{n} и $-\vec{n}$, то

$$\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = - \iint_{\tilde{S}} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

4 (Сведение поверхностного интеграла второго рода к двойному интегралу). Если $S = \{(x, y, z) : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in \bar{D}\}$ —

простая гладкая поверхность, ориентированная полем нормалей $\vec{n} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}$

с $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$, где $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}$, $\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}$,

$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$, то

$$\begin{aligned} & \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du dv = \\ & = \iint_D \left(P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \right. \\ & \quad \left. + R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) du dv. \end{aligned}$$

Следствие 1. Для гладкой цилиндрической поверхности S с образующими, параллельными оси Oz , справедливо равенство

$$\iint_S R dx \wedge dy = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 0.$$

Для гладких цилиндрических поверхностей S_1 и S_2 с образующими, параллельными соответственно оси Ox и оси Oy , справедливы равенства

$$\iint_{S_1} P dy \wedge dz = 0 \quad \text{и} \quad \iint_{S_2} Q dz \wedge dx = 0.$$

Следствие 2. Если поверхность S задана явной функцией $z = z(x, y)$, т. е.

$$S = \{(x, y, z(x, y)) : (x, y) \in \bar{D}\}, \quad z \in C^1(\bar{D}),$$

то для верхней стороны S имеем равенство

$$\iint_S R dx \wedge dy = \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

а для нижней — равенство

$$\iint_S R dx \wedge dy = - \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Аналогично для правой стороны поверхности

$$S = \{(x(y, z), y, z) : (y, z) \in \bar{D}\}, \quad x \in C^1(\bar{D}),$$

справедливо равенство

$$\iint_S P dy \wedge dz = \iint_D P(x(y, z), y, z) dy dz,$$

а для левой — равенство

$$\iint_S P dy \wedge dz = - \iint_D P(x(y, z), y, z) dy dz.$$

Наконец, для передней стороны поверхности

$$S = \{(x, y(x, z), z) : (x, z) \in \bar{D}\}, \quad y \in C^1(\bar{D}),$$

справедливо равенство

$$\iint_S Q dz \wedge dx = \iint_D Q(x, (y(x, z), z) dx dz,$$

а для задней — равенство

$$\iint_S Q dz \wedge dx = - \iint_D Q(x, y(x, z), z) dx dz.$$

Пример 16.40. Вычислим $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dy \wedge dz$, где S — левая сторона поверхности, полученной вращением относительно оси Ox дуги кривой $L = \{(x, y), x = x, y = \cos x, x \in [0; \frac{\pi}{2}]\}$.

Решение. Поскольку в условии задана левая сторона поверхности S , представим её с помощью явного задания функции $x = x(y, z) = \arccos \sqrt{y^2 + z^2}$:

$$S = \{(\arccos \sqrt{y^2 + z^2}, y, z) : (y, z) \in \bar{D}\}, \quad D = \{(y, z) : y^2 + z^2 < 1\}.$$

В силу следствия 2 свойства 4 находим

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dy \wedge dz &= - \iint_D (\arccos \sqrt{y^2 + z^2} + y^2 + z^2) dy dz = \\ &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3 + r \arccos^2 r) dr = -2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} t^2 \sin 2t dt \right) = \\ &= -2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \right) \right) = -\frac{\pi^2}{8}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.41. Вычислим $\iint_S yz \, dy \wedge dz + x^2 \, dz \wedge dx + yz \, dx \wedge dy$, где S — внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y \geq 0$ ($a > 0$).

РЕШЕНИЕ. Поскольку $y \geq 0$, уравнение полусферы можно записать с помощью явно заданной функции $y(x, z)$:

$$S = \{(x, \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}, z) : (x, z) \in \bar{D}\}, \quad D = \{(x, z) : x^2 + z^2 < a^2\}.$$

Для отображения $r = (x, \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}, z) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ имеем

$$\vec{r}'_x = \left(1, \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}, 0\right), \quad \vec{r}'_z = \left(0, \frac{-z}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}, 1\right),$$

$$\vec{r}'_x \times \vec{r}'_z = \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}, -1, \frac{-z}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}\right) = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(x, z)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(x, z)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, z)}\right).$$

Таким образом, поле $\vec{n} = \frac{\vec{r}'_x \times \vec{r}'_z}{|\vec{r}'_x \times \vec{r}'_z|}$ является полем нормалей, направленных к центру полусферы S , поэтому внешняя сторона полусферы определяется полем $-\vec{n}$. Применяя свойство 4, получаем

$$\begin{aligned} \iint_S yz \, dy \wedge dz + x^2 \, dz \wedge dx + yz \, dx \wedge dy &= \\ &= \iint_D \left(z \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \frac{\partial(y, z)}{\partial(z, x)} + x^2 \frac{\partial(z, x)}{\partial(z, x)} + z \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, x)} \right) dx \, dz = \\ &= \iint_D (xz + x^2 + z^2) \, dx \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 (1 + \cos \varphi \sin \varphi) \, dr = \frac{\pi a^4}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.42. Вычислим

$$\iint_S (4x^2 + z^2) \, dy \wedge dz + 4xy \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy,$$

где S — правая сторона части гиперболического цилиндра $4x^2 - y^2 = a^2$, лежащей внутри конуса $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ ($a > 0$).

РЕШЕНИЕ. Поскольку $x \geq 0$, уравнение поверхности можно записать с помощью явно заданной функции: $S = \left\{ \left(\frac{1}{2} \sqrt{y^2 + a^2}, y, z \right) : (y, z) \in \bar{D} \right\}$. Область D значений параметров является проекцией заданной части цилиндра на плоскость zOy . Границу D находим как проекцию линии пересечения поверхностей $4x^2 - y^2 = a^2$ и $x = \sqrt{y^2 + z^2}$. Исключая переменную x из этих двух уравнений, получаем $a^2 + y^2 = 4(y^2 + z^2)$, или $3y^2 + 4z^2 = a^2$. Итак,

$$S = \left\{ r = \left(\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + y^2}, y, z \right) : (y, z) \in \bar{D} \right\}, \quad \text{где } D = \{(y, z) : 4z^2 + 3y^2 < a^2\}.$$

Далее, $\vec{r}'_y = \left(\frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}, 1, 0 \right)$, $\vec{r}'_z = (0, 0, 1)$, $\vec{r}'_y \times \vec{r}'_z = \left(1, \frac{-y}{\sqrt{a^2 + y^2}}, 0 \right)$. Следовательно, заданная ориентация поверхности S определяется полем $\vec{n} = \frac{\vec{r}'_y \times \vec{r}'_z}{|\vec{r}'_y \times \vec{r}'_z|}$.

В силу свойства 4 имеем

$$\begin{aligned} & \iint_S (4x^2 + z^2) dy \wedge dz + 4xy dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy = \\ & = \iint_D \left((a^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial(y, z)}{\partial(y, z)} + 2y \sqrt{a^2 + y^2} \frac{\partial(z, x)}{\partial(y, z)} + z^2 \frac{\partial(x, y)}{\partial(y, z)} \right) dy dz = \\ & = \iint_D (a^2 + y^2 + z^2 - y^2) dy dz = \iint_D (a^2 + z^2) dy dz. \end{aligned}$$

Далее, $\iint_D a^2 dy dz = a^2 |D| = \frac{\pi a^4}{2\sqrt{3}}$. В интеграле $\iint_D z^2 dy dz$ сделаем замену:

$y = \frac{a}{\sqrt{3}} r \sin \varphi$, $z = \frac{a}{2} r \cos \varphi$, тогда

$$\iint_D z^2 dy dz = \frac{a^2}{2\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{a^2}{4} r^3 \cos^3 \varphi dr = \frac{a^4}{8\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{\pi a^4}{32\sqrt{3}}.$$

Итак,

$$\iint_S (4x^2 + z^2) dy \wedge dz + 4xy dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy = \frac{\pi a^4}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi a^4}{32\sqrt{3}} = \frac{17\pi a^4}{32\sqrt{3}}. \quad \square$$

Пример 16.43. Вычислим $\iint_S x dy \wedge dz - y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, где S — внешняя сторона части конуса $z^2 = x^2 + y^2$, лежащей выше плоскости $z = 0$ и внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$).

Решение. Учитывая, что $z \geq 0$, запишем:

$$S = \{(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}), (x, y) \in \bar{D}\},$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2\}.$$

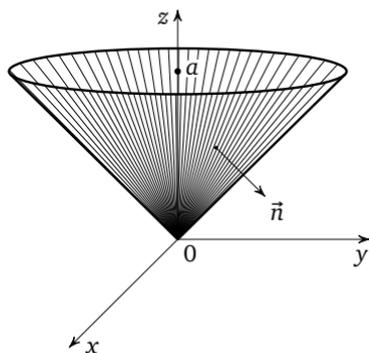
Внешняя нормаль к поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$ направлена от оси Oz и в точках конуса, лежащих выше плоскости $z = 0$, образует с этой осью тупой угол (см. рис.). Поэтому в условии задана нижняя сторона конуса,

т. е. $\vec{n} = \frac{\vec{r}'_y \times \vec{r}'_x}{|\vec{r}'_y \times \vec{r}'_x|}$. В силу свойства 4 получаем

$$\begin{aligned} & \iint_S x dy \wedge dz - y dz \wedge dx + z dx \wedge dy = \\ & = \iint_D \left(x \frac{\partial(y, z)}{\partial(y, x)} - y \frac{\partial(z, x)}{\partial(y, x)} + \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial(x, y)}{\partial(y, x)} \right) dx dy, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(y, x)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & x \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \sqrt{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(y, x)} = \begin{vmatrix} y & x \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_S x dy \wedge dz - y dz \wedge dx + z dx \wedge dy &= \\ &= \iint_D \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dx dy = \iint_D \frac{-2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \\ &= -2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr = -\frac{2}{3} \pi a^3. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.44. Вычислим интеграл $\iint_S xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + zx dx \wedge dy$

по левой стороне поверхности $S = \{(2u + v^2, u^2 - 2v, 2uv), (u, v) \in \bar{D}\}$, где $D = (0; 1) \times (0; 1)$.

РЕШЕНИЕ. Проверим сначала корректность задания стороны поверхности S . Поскольку $\vec{r}'_u = (2, 2u, 2v)$, $\vec{r}'_v = (2v, -2, 2u)$, для вектора

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = 4(u^2 + v, v^2 - u, -1 - uv)$$

получаем $\cos \angle(\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v, \vec{\tau}) = \frac{4u^2 + 4v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} \geq 0$. Отсюда следует, что левую сторону поверхности S определяет противоположный вектор. Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_S xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + zx dx \wedge dy &= \iint_D \left((2u + v^2)(u^2 - 2v) \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, u)} + \right. \\ &\quad \left. + 2uv(u^2 - 2v) \frac{\partial(z, x)}{\partial(v, u)} + 2uv(2u + v^2) \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, u)} \right) du dv = \\ &= 4 \iint_D \left((u^2 + v)(2u + v^2)(2v - u^2) + 2uv(u^2 - 2v)(u - v^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2uv(2u + v^2)(uv + 1) \right) du dv = \\ &= 4 \int_0^1 dv \int_0^1 (2v^4 + u(4v^4 + 2v^3 + 4v^2) + u^2(4v - 4v^2 + v^3 + 2v^4) + \\ &\quad + u^3(2v + 4v^2 - 2v^3) + u^4(2v - v^2) - 2u^5) du = \\ &= 4 \int_0^1 \left(2v^4 + 2v^4 + v^3 + 2v^2 + \frac{4}{3}v - \frac{4}{3}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{3}v^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}v + v^2 - \frac{1}{2}v^3 + \frac{2}{5}v - \frac{1}{5}v^2 - \frac{1}{3} \right) dv = \frac{869}{90}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.45. Вычислим $\iint_S y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy - x^2 dy \wedge dz$, где S —

часть поверхности тела $V = \{(x, y, z) : 2x^2 + 2y^2 \leq az \leq x^2 + y^2 + a^2\}$ ($a > 0$), удовлетворяющая условию $y \geq 0$, а вектор нормали \vec{n} , определяющий ориентацию S , в точке $M\left(0, \frac{a}{2}, \frac{5a}{4}\right)$ образует острый угол с осью Oz .

РЕШЕНИЕ. Ориентация поверхности S , определённая вектором \vec{n} , была подробно проанализирована в примере 16.37 на с. 172. Этой ориентации соответствует верхняя сторона поверхности

$$S_1 = \{(x, y, z) : az = x^2 + y^2 + a^2, x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$$

и нижняя сторона поверхности

$$S_2 = \{(x, y, z) : az = 2x^2 + 2y^2, x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}.$$

Учитывая определение верхней и нижней сторон поверхности, аддитивность интеграла и свойство 4, получаем

$$\begin{aligned} & \iint_S y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy - x^2 dy \wedge dz = \\ &= \iint_{S_1} y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy - x^2 dy \wedge dz + \\ & \quad + \iint_{S_2} y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy - x^2 dy \wedge dz = \\ &= \iint_D \left(\left(y^2 \frac{\partial(z_1, x)}{\partial(x, y)} + z_1^2 \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} - x^2 \frac{\partial(y, z_1)}{\partial(x, y)} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left(y^2 \frac{\partial(z_2, x)}{\partial(y, x)} + z_2^2 \frac{\partial(x, y)}{\partial(y, x)} - x^2 \frac{\partial(y, z_2)}{\partial(y, x)} \right) \right) dx dy, \end{aligned}$$

где

$$z_1(x, y) = \frac{1}{a}(x^2 + y^2 + a^2), \quad z_2(x, y) = \frac{1}{a}(2x^2 + 2y^2), \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial(z_1, x)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2y}{a}, \quad \frac{\partial(y, z_1)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = -\frac{2x}{a},$$

$$\frac{\partial(z_2, x)}{\partial(y, x)} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} 4y & 4x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4y}{a}, \quad \frac{\partial(y, z_2)}{\partial(y, x)} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4y & 4x \end{vmatrix} = \frac{4x}{a},$$

находим

$$\begin{aligned} & \iint_S y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy - x^2 dy \wedge dz = \\ &= \iint_D \left(\frac{-2y^3}{a} + \frac{1}{a^2}(x^2 + y^2 + a^2)^2 + \frac{2x^3}{a} + \frac{4y^3}{a} - \frac{4}{a^2}(x^2 + y^2)^2 - \frac{4x^3}{a} \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{a^2} \iint_D (2ay^3 - 2ax^3 - 3(x^2 + y^2)^2 + a^4 + 2a^2x^2 + 2a^2y^2) dx dy = \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^a (2ar^4(\sin^3 \varphi - \cos^3 \varphi) - 3r^5 + ar^4 + 2a^2r^3) dr = \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot \pi \cdot \left(-\frac{1}{2}a^6 + \frac{a^6}{2} + \frac{1}{2}a^6 \right) + \frac{2}{5} \cdot \frac{a^6}{a^2} \cdot \frac{4}{3} = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{8}{15} \right) a^4. \quad \square \end{aligned}$$

Формула Гаусса — Остроградского

Свести вычисление интеграла по замкнутой поверхности к вычислению тройного интеграла по ограниченной ею области позволяет следующая

Теорема (формула Гаусса — Остроградского). Пусть D — ограниченная область в \mathbb{R}^3 , её граница ∂D состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей, а функции P, Q, R и их частные производные первого порядка непрерывны в \bar{D} . Тогда

$$\iint_{\partial D} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

где поверхностный интеграл берётся по внешней стороне поверхности.

Вспомнив определение поверхностного интеграла второго рода, мы можем записать левую часть формулы Гаусса — Остроградского в виде интеграла первого рода $\iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, где $F = (P, Q, R)$.

Для плоского векторного поля $\vec{F} = (P, Q)$ рассмотрим интеграл $\int_L \vec{F} \cdot \vec{n} ds$, где L — плоский контур, $\vec{n} = (n_x, n_y)$ — поле единичных внешних нормалей к L . Поле единичных касательных векторов $\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ к L , задающее такую ориентацию L , что ограниченная им область D_L остаётся слева, получается из \vec{n} поворотом на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, поэтому $(n_x, n_y) = (\tau_y, -\tau_x)$. Учитывая это и формулу Грина (с. 166), получаем

$$\begin{aligned} \int_L \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \int_L (Pn_x + Qn_y) ds = \int_L P\tau_y - Q\tau_x ds = \int_L (-Q, P) \cdot \vec{\tau} ds = \\ &= \iint_{D_L} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Равенство

$$\int_L \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{D_L} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

можно назвать *двумерным аналогом формулы Гаусса — Остроградского*.

Естественная область применения формулы Гаусса — Остроградского — вычисление интегралов 2-го рода по замкнутым поверхностям в пространстве.

Пример 16.46. Вычислим интеграл

$$\iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона границы куба $D = [0; a] \times [0; a] \times [0; a]$.

Решение. Применяя формулу Гаусса — Остроградского, находим

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy &= \iiint_D (2x + 2y + 2z) dx dy dz = \\ &= 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z) dz = 3a^4. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.47. Вычислим интеграл

$$I = \iint_S xz \, dy \wedge dz + xy \, dz \wedge dx + yz \, dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона поверхности тела

$$D = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az\}.$$

РЕШЕНИЕ. Применяя формулу Гаусса — Остроградского, находим, что $I = \iiint_D (z + x + y) \, dx \, dy \, dz$. В силу симметрии области интегрирования и подынтегральной функции относительно координатных плоскостей xOz и yOz , имеем $\iiint_D (x + y) \, dx \, dy \, dz = 0$. Поэтому, пользуясь представлением тела в сферических координатах

$$D = \{(r, \varphi, \psi): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2a \sin \psi\},$$

получаем

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \int_0^{2a \sin \psi} r^3 \, dr = 8\pi a^4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^4 \psi \cos \psi \, d\psi = \\ &= \frac{8 - \sqrt{2}}{5} \pi a^4. \quad \square \end{aligned}$$

Иногда вычисление интеграла второго рода по незамкнутой поверхности упрощается, если замкнуть эту поверхность и вычислять данный интеграл как разность соответствующих интегралов по замкнутой поверхности и по замыкающему множеству. В качестве замыкающих множеств обычно берутся части плоскостей, параллельных координатным, поскольку по таким множествам интеграл второго рода вычисляется наиболее просто. В частности, этот метод даёт возможность заменять достаточно сложную процедуру ориентации кусочно-гладкой поверхности путём согласования ориентации её гладких составляющих более простым выбором внутренней или внешней стороны замкнутой поверхности.

Пример 16.48. Вычислим указанным способом интеграл

$$\iint_S y^2 \, dz \wedge dx - x^2 \, dy \wedge dz + z^2 \, dx \wedge dy,$$

где S — часть поверхности тела

$$V = \{(x, y, z): 2x^2 + 2y^2 \leq az \leq x^2 + y^2 + a^2\} \quad (a > 0),$$

удовлетворяющая условию $y \geq 0$, и вектор нормали, определяющий ориентацию S , в точке $M(0, \frac{a}{2}, \frac{5a}{4})$ образует острый угол с осью Oz (см. пример 16.45).

РЕШЕНИЕ. Замкнём поверхность S частью плоскости $y = 0$. Тогда полученная поверхность \tilde{S} будет границей тела

$$\tilde{V} = \{(x, y, z): y \geq 0, 2x^2 + 2y^2 \leq az \leq x^2 + y^2 + a^2\}.$$

Точка $M\left(0, \frac{a}{2}, \frac{5a}{4}\right)$ лежит на верхней границе тела \tilde{V} , и нормаль в этой точке направлена вверх, следовательно, интеграл берётся по внешней стороне поверхности $\partial\tilde{V}$. Часть плоскости $y=0$, входящая в ∂V , есть поверхность

$$S_1 = \{(x, 0, z) : (x, z) \in \bar{D}_1\}, \quad D_1 = \{(x, z) : 2x^2 \leq az \leq x^2 + a^2\}.$$

Внешняя по отношению к телу \tilde{V} нормаль \vec{n} на S_1 направлена противоположно оси Oy . В данном случае

$$\vec{r}'_x = (1, 0, 0), \quad \vec{r}'_z = (0, 0, 1), \quad \vec{r}'_x \times \vec{r}'_z = (0, -1, 0), \quad \text{поэтому } \vec{n} = (0, -1, 0).$$

Плоскость $y=0$ параллельна как оси Ox , так и оси Oz , значит, согласно следствию 1 свойства 4 поверхностных интегралов второго рода получаем

$$\iint_{S_1} y^2 dz \wedge dx - x^2 dy \wedge dz + z^2 dx \wedge dy = \iint_{S_1} y^2 dz \wedge dx = \iint_{D_1} 0 dz dx = 0.$$

Поскольку

$$\tilde{V} = \{(x, y, z) : 2x^2 + 2y^2 \leq az \leq x^2 + y^2 + a^2, (x, y) \in \bar{D}\}, \\ D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2, y > 0\},$$

применяя формулу Гаусса — Остроградского, находим

$$\begin{aligned} & \iint_{\tilde{S}} y^2 dz \wedge dx - x^2 dy \wedge dz + z^2 dx \wedge dy = \\ & = \iiint_{\tilde{V}} (2y - 2x + 2z) dx dy dz = 2 \iint_D dx dy \int_{(2x^2+2y^2)/a}^{(x^2+y^2+a^2)/a} (y - x + z) dz = \\ & = \frac{2}{a^2} \iint_D \left(a(y-x)(a^2 - x^2 - y^2) + \frac{1}{2}(3x^2 + 3y^2 + a^2)(a^2 - x^2 - y^2) \right) dx dy = \\ & = \frac{2}{a^2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^a \left((a^3 r^2 - ar^4)(-\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{2}(a^4 r + 2a^2 r^2 - 3r^5) \right) dr = \\ & = \left(\frac{8}{15} + \frac{\pi}{2} \right) a^4. \end{aligned} \quad \square$$

Формула Стокса

Свести вычисление интеграла по замкнутому контуру к вычислению интеграла по поверхности, натянутой на этот контур, позволяет следующая

Теорема (формула Стокса). Пусть D — область в \mathbb{R}^3 , функции P, Q, R и их частные производные первого порядка непрерывны в \bar{D} , ориентированный контур $(L, \vec{\tau})$ и натянутая на L ориентированная поверхность (S, \vec{n}) лежат в D , причём ориентации контура и поверхности согласованы. Тогда

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Вспомнив определение поверхностного интеграла второго рода, можно записать правую часть формулы Стокса в виде интеграла первого рода

$$\iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) d\sigma,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — координаты единичного вектора \vec{n} . Коротко подынтегральная функция в этом интеграле записывается в виде определителя

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Поверхностный интеграл второго рода чаще всего вычисляется переходом к интегралу первого рода, поэтому формула Стокса обычно применяется именно с интегралом первого рода в правой части:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

Область применения формулы Стокса — это вычисление криволинейных интегралов второго рода в случае, когда кривая интегрирования L задана как пересечение двух поверхностей. При таком задании кривой L , во-первых, как правило, уже определена поверхность, натянутая на L , а, во-вторых, нет необходимости параметризовать кривую L , что зачастую нетривиально.

Пример 16.49. Вычислим интеграл

$$\int_L (x^2 + z) dx + (y^2 + x) dy + (z^2 + y) dz,$$

где $L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0\}$ — окружность, положительная ориентированная на верхней стороне плоскости ($a > 0$).

Решение. Верхняя сторона плоскости $x + y + z = 0$ определена единичным вектором нормали $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$, натянутая на контур L часть этой плоскости есть круг радиуса a : $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x + y + z = 0\}$. Применяя формулу Стокса, получаем

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 + z) dx + (y^2 + x) dy + (z^2 + y) dz &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + z & y^2 + x & z^2 + y \end{vmatrix} d\sigma = \\ &= \sqrt{3} \iint_S d\sigma = \sqrt{3} |S| = \sqrt{3} \pi a^2. \quad \square \end{aligned}$$

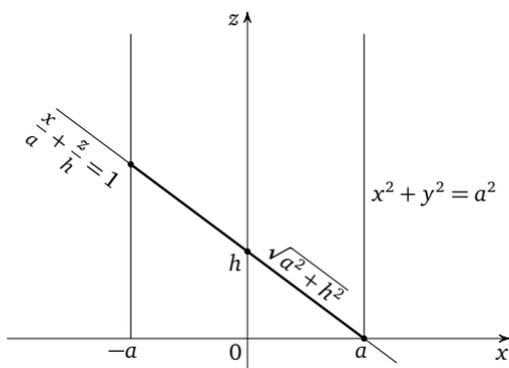
Заметим, что данный интеграл можно вычислить и непосредственно, воспользовавшись параметризацией окружности L , полученной в примере 16.38, но применение формулы Стокса приводит к более простым выкладкам.

Пример 16.50. Вычислим интеграл $\int_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, где кривая $L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1\}$ ($a, h > 0$) положительно ориентирована на правой стороне плоскости.

Решение. Применяя формулу Стокса, получаем

$$\begin{aligned} \int_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz &= \iint_S \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{h} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - z & z - x & x - y \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{h^2}}} = \\ &= \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}} \iint_S \left(\frac{-2}{a} + \frac{-2}{h} \right) d\sigma = -2 \frac{a+h}{\sqrt{a^2 + h^2}} |S| = -2\pi a(a+h), \end{aligned}$$

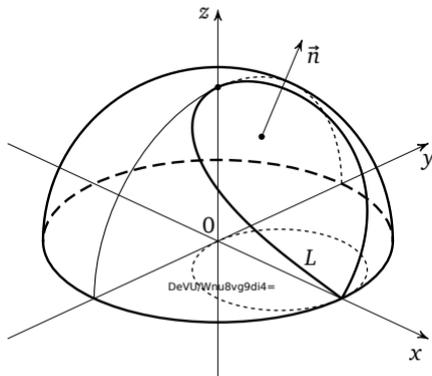
так как S — часть плоскости $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$, вырезанная круговым цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, является эллипсом с полуосями a и $\sqrt{a^2 + h^2}$ (см. рис.). \square



Пример 16.51. Вычислим интеграл

$$I = \int_L (2xy + z^2) dx + (2yz + 2x^2) dy + (2xz + y^2) dz,$$

где $L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax, z \geq 0\}$ ($a > 0$) — верхняя петля кривой Вивiani, положительно ориентированная на внешней стороне сферы.



РЕШЕНИЕ. Внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ определяется единичными векторами нормали $\vec{n} = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$, натянутая на контур L часть этой сферы есть $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \leq ax, z \geq 0\}$. Применяя формулу Стокса, получаем

$$I = \frac{1}{a} \iint_S \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^2 & 2yz + 2x^2 & 2xz + y^2 \end{vmatrix} d\sigma = \\ = \frac{1}{a} \iint_S (x(2y - 2y) + y(2z - 2z) + z(4x - 2x)) d\sigma = \frac{2}{a} \iint_S xz d\sigma.$$

Учитывая условие $z \geq 0$, получаем $d\sigma = \frac{a}{z} dx dy$ (см. с. 153).

Итак, $I = 2 \iint_D x dx dy$, где

$$D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq ax\} = \{(r, \varphi): -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq a \cos \varphi\}.$$

Окончательно получаем

$$I = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 \cos \varphi dr = \frac{2a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{2a^3}{3} \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)} = \frac{\pi a^3}{4}. \quad \square$$

Пример 16.52. Вычислим, используя формулу Стокса, интеграл

$$\int_{\vec{AB}} z dx + 2x dy - y dz,$$

где \vec{AB} — кривая $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$), $az = xy$, $z \geq 0$, $A(0, 0, 0)$, $B(2a, 0, 0)$.

РЕШЕНИЕ. Отрезок BA оси Ox лежит на поверхности параболоида $az = xy$, поэтому, объединяя его с кривой \vec{AB} , получим замкнутый контур L , лежащий на поверхности $az = xy$. Обход полученного контура, индуцированный направлением кривой \vec{AB} , положителен, если рассматривать его на нижней стороне параболоида. Значит, натянутая на контур $(L, \vec{\tau})$ часть (S, \vec{n}) параболоида $az = xy$ с согласованной ориентацией есть

$$S = \left\{ \left(x, y, \frac{xy}{a} \right) : (x, y) \in \bar{D} \right\}, \quad D = \{(x, y): x^2 + y^2 < 2ax, y > 0\}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}'_y \times \vec{r}'_x}{|\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y|}.$$

Имеем $\int_{BA} z dx + 2x dy - y dz = \int_{BA} z dx = 0$, поэтому в силу аддитивности интеграла и формулы Стокса получаем

$$I = \int_{\vec{AB}} z dx + 2x dy - y dz = \int_L z dx + 2x dy - y dz - \int_{BA} z dx + 2x dy - y dz = \\ = \int_L z dx + 2x dy - y dz = \iint_S -dy \wedge dz + dz \wedge dx + 2dx \wedge dy.$$

Поскольку $\vec{r}'_x = \left(1, 0, \frac{y}{a}\right)$, $\vec{r}'_y = \left(0, 1, \frac{x}{a}\right)$, получаем $\vec{r}'_y \times \vec{r}'_x = \left(\frac{y}{a}, \frac{x}{a}, -1\right)$ и

$$I = \frac{1}{a} \iint_D (-y + x - 2a) dx dy = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\right)a^2. \quad \square$$

§ 16.5. Векторный анализ

Определение. Пусть в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^3$ задано гладкое векторное поле $\vec{F} = (P, Q, R)$, т. е. $P, Q, R \in C^1(D)$. Тогда скалярное поле $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ называют *дивергенцией поля \vec{F}* и обозначают $\operatorname{div} \vec{F}$.

Векторное поле

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

называют *ротором (вихрем) поля \vec{F}* и обозначают $\operatorname{rot} \vec{F}$.

Определение. Векторное поле \vec{F} , заданное в области $D \subset \mathbb{R}^3$, называется *потенциальным в D* , если существует такая функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$, называемая *потенциалом поля \vec{F}* , что $\nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \vec{F}$.

Из определений дивергенции и градиента сразу следует, что для любой функции $u \in C^2(D)$ справедливо равенство $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Последняя сумма называется *лапласианом функции u* и обозначается Δu . Аналогично для функции $u \in C^2(D)$ при $D \subset \mathbb{R}^2$ *лапласианом* называется сумма $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Если $\Delta u = 0$ всюду в области D , то функция u называется *гармонической в D* .

Определение. Векторное поле \vec{F} , заданное в области $D \subset \mathbb{R}^3$, называется *соленоидальным*, если в области D существует такое векторное поле \vec{W} , называемое *векторным потенциалом поля \vec{F}* , что $\operatorname{rot} \vec{W} = \vec{F}$.

Как указывалось выше, интеграл $\int_L P dx + Q dy + R dz$ выражает работу силы $\vec{F} = (P, Q, R)$ при перемещении по ориентированной кривой L . Поэтому для любого векторного поля $\vec{F} = (P, Q, R)$ интеграл $\int_L P dx + Q dy + R dz$ принято

называть *работой поля \vec{F} вдоль ориентированной кривой L* . Если кривая L является контуром, то этот интеграл обычно называют *циркуляцией поля \vec{F} вдоль контура L в данном направлении*.

Аналогично интеграл $\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ принято называть *потокм поля $\vec{F} = (P, Q, R)$ через ориентированную поверхность S в данном направлении*.

¹ Необходимые общие сведения о скалярных и векторных полях приведены на с. 138.

Определение. Кривая L называется *векторной линией поля* \vec{F} , если в каждой точке $M \in L$ вектор поля является касательным к L .

Определение. Область, ограниченная поверхностью S , называется *векторной трубкой поля* \vec{F} , если в каждой точке $M \in S$ вектор поля ортогонален вектору нормали \vec{n} к поверхности S .

Из определения следует, что поток $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ поля \vec{F} через поверхность S векторной трубки равен нулю.

Запишем в терминах векторного анализа формулу Гаусса — Остроградского (см. с. 182).

Если D — область в \mathbb{R}^3 , её граница ∂D состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей, а векторное поле \vec{F} является гладким в \bar{D} , то его поток через поверхность ∂D в сторону внешней нормали \vec{n} равен интегралу от дивергенции этого поля по области D :

$$\iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz.$$

Пример 16.53. Найдём поток в сторону внешней нормали векторного поля $\vec{F} = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$ через:

а) боковую поверхность S конуса

$$K = \{(x, y, z) : H^2(x^2 + y^2) \leq z^2 R^2, 0 \leq z \leq H\}, \quad R > 0;$$

б) полную поверхность ∂K конуса K .

Решение. Начнём с п. б). В силу формулы Гаусса — Остроградского поток вектора \vec{F} через ∂K есть

$$\begin{aligned} \iint_{\partial K} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} dx dy \int_{(H/R)\sqrt{x^2+y^2}}^H (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dz = \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{Hr/R}^H (r^2 + z^2) dz = 6\pi \int_0^R \left(r^3 \left(H - \frac{Hr}{R} \right) + \frac{r}{3} \left(H^3 - \frac{H^3 r^3}{R^3} \right) \right) dr = \\ &= 2\pi \int_0^R \left(3Hr^3 - r^4 \left(\frac{3H}{R} + \frac{H^3}{R^3} \right) + rH^3 \right) dr = \\ &= 2\pi \left(\frac{3}{4} HR^4 - \frac{1}{5} (3HR^4 + H^3 R^2) + \frac{1}{2} H^3 R^2 \right) = \frac{3\pi}{10} R^2 H (R^2 + 2H^2). \end{aligned}$$

Перейдём к п. а). Вычисление потока векторного поля \vec{F} через S проведём двумя способами.

Первый способ. Обозначим через (S_1, \vec{n}_1) внешнюю сторону верхней части поверхности ∂K . Тогда $S_1 = \{(x, y, H) : (x, y) \in D\}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$. Вектор \vec{n}_1 направлен вверх. Имеем $\vec{r}'_x = (1, 0, 0)$, $\vec{r}'_y = (0, 1, 0)$, $\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y = (0, 0, 1)$, поэтому $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$. Поверхность S_1 параллельна как оси Ox , так

и оси Oy , значит, в силу следствия 1 свойства 4 поверхностных интегралов второго рода имеем

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma = \iint_{S_1} z^3 dx \wedge dy = \iint_D H^3 dx dy = \pi R^2 H^3.$$

Пользуясь аддитивностью интеграла и результатом п. б), получаем

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma &= \iint_{\partial K} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma = \frac{3\pi}{10} R^2 H (R^2 + 2H^2) - \pi R^2 H^3 = \\ &= \frac{\pi}{10} (3R^2 - 4H^2) H R^2. \end{aligned}$$

Второй способ. Вектор \vec{n} внешней нормали к S образует с осью Oz тупой угол, т. е. рассматривается нижняя сторона S . Поскольку $z \geq 0$, имеем

$$S = \left\{ \left(x, y, \frac{H}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \right) : (x, y) \in \bar{D} \right\}, \quad D = \{ (x, y) : x^2 + y^2 < R^2 \}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy = \\ &= \iint_D \left(x^3 \frac{\partial(y, z)}{\partial(y, x)} + y^3 \frac{\partial(z, x)}{\partial(y, x)} + \frac{H^3}{R^3} (x^2 + y^2)^{3/2} \frac{\partial(x, y)}{\partial(y, x)} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y, z)}{\partial(y, x)} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{Hy}{R\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{Hx}{R\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = \frac{Hx}{R\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial(z, x)}{\partial(y, x)} &= \begin{vmatrix} \frac{Hy}{R\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{Hx}{R\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{Hy}{R\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_D \left(\frac{H(x^4 + y^4)}{R\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{H^3}{R^3} (x^2 + y^2)^{3/2} \right) dx dy = \\ &= \frac{H}{R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2 (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) - H^2) r^4 dr = \\ &= \frac{H}{R} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 4 \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)} - \frac{H^3}{R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{10} (3R^2 - 4H^2) H R^2. \end{aligned}$$

Предлагаем читателю сравнить достоинства и недостатки каждого из предложенных способов. □

Пример 16.54. Найдём поток векторного поля $\vec{F} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ через внешнюю сторону поверхности $(x - 1)^2 + 4y^2 + z^2 = 4$.

Решение. Непосредственное вычисление потока с опорой на свойства поверхностного интеграла вызывает большие трудности, поэтому здесь разумнее воспользоваться формулами векторного анализа.

Формулу Гаусса — Остроградского нельзя применить непосредственно к области $(x - 1)^2 + 4y^2 + z^2 < 4$, поскольку невозможно доопределить поле \vec{F} в начале координат с сохранением его непрерывности и гладкости, так как, например, при $x = y = z \rightarrow 0$ имеем $P(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{3z^2} \rightarrow \infty$. В то же время с её помощью можно перейти к другой поверхности, интеграл по которой вычислить будет проще. А именно, применяя формулу Гаусса — Остроградского к области

$$\left\{ (x, y, z) : (x - 1)^2 + 4y^2 + z^2 < 4, x^2 + y^2 + z^2 > \frac{1}{100} \right\},$$

получаем, что поток векторного поля через внешнюю сторону исходного эллипсоида равен потоку через внешнюю сторону сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{100}$, так как

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0$$

для всех $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Вычислим этот поток, переходя к сферическим координатам: $x = \frac{1}{10} \cos \varphi \cos \psi$, $y = \frac{1}{10} \sin \varphi \cos \psi$, $z = \frac{1}{10} \sin \psi$. Поскольку

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \psi)} = \frac{1}{100} \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \psi & 0 \\ -\sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \end{vmatrix} = \frac{1}{100} \cos \varphi \cos^2 \psi,$$

$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \psi)} = \frac{1}{100} \begin{vmatrix} 0 & -\sin \varphi \cos \psi \\ \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi \end{vmatrix} = \frac{1}{100} \sin \varphi \cos^2 \psi,$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} = \frac{1}{100} \begin{vmatrix} -\sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \cos \psi \\ -\cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi \end{vmatrix} = \frac{1}{100} \sin \psi \cos \psi,$$

получаем, что искомый поток равен

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 \varphi \cos^3 \psi + \sin^2 \varphi \cos^3 \psi + \sin^2 \psi \cos \psi) d\psi d\varphi &= \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi = 4\pi. \quad \square \end{aligned}$$

В терминах векторного анализа формула Стокса (см. с. 184) выглядит следующим образом.

Если D — область в \mathbb{R}^3 , векторное поле \vec{F} гладкое в \bar{D} , ориентированный контур $(L, \vec{\tau})$ и натянутая на L ориентированная поверхность (S, \vec{n}) лежат в D , причём ориентации контура и поверхности согласованы, то циркуляция поля \vec{F} вдоль контура L равна потоку ротора этого поля через поверхность S :

$$\int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Пример 16.55. Найдём циркуляцию векторного поля

$$\vec{F} = (x(y+z), y(x+z), z(x+y))$$

вдоль кривой $L = \{x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, x^2 + y^2 = 2ax, z \geq 0\}$, положительно ориентированной на внешней стороне сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ ($0 < a < R$).

РЕШЕНИЕ. Ориентированный контур $(L, \vec{\tau})$ лежит как на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, так и на цилиндре $x^2 + y^2 = 2ax$, но условиям применения формулы Стокса удовлетворяет только часть сферы, поскольку она является простой гладкой поверхностью. Рассмотрим два способа решения: сведение криволинейного интеграла второго рода к поверхностному интегралу а) второго рода и б) первого рода.

Первый способ. Обозначим через (S, \vec{n}) часть внешней стороны полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, z \geq 0$, лежащую внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$. Для верхней полусферы внешняя сторона является и верхней стороной, поэтому

$$S = \left\{ (x, y, \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}) : (x, y) \in \bar{D} \right\}, \quad D = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 < 2ax \right\},$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y}{|\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y|} = \frac{1}{R}(x - R, y, z).$$

Применяя формулу Стокса, получаем

$$\begin{aligned} \int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds &= \int_L x(y+z) dx + y(x+z) dy + z(x+y) dz = \\ &= \iint_S (z-y) dy \wedge dz + (x-z) dz \wedge dx + (y-x) dx \wedge dy = \\ &= \iint_D \left((z(x,y) - y) \frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)} + (x - z(x,y)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)} + (y - x) \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} \right) dx dy = \\ &= \iint_D \left((z-y) \frac{x-R}{z} + (x-z) \frac{y}{z} + y - x \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{yR}{z} - R \right) dx dy. \end{aligned}$$

Область D симметрична относительно оси Ox , а функция $f(x, y, z) = \frac{Ry}{z} = \frac{Ry}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}$ нечётна по переменной y , поэтому $\iint_D \frac{Ry}{z} dx dy = 0$ и, следовательно, $\int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = -R \iint_D dx dy = -\pi Ra^2$.

Второй способ. Применяя формулу Стокса, получаем

$$\begin{aligned} \int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds &= \int_L x(y+z) dx + y(x+z) dy + z(x+y) dz = \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} \frac{x-R}{R} & \frac{y}{R} & \frac{z}{R} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x(y+z) & y(x+z) & z(x+y) \end{vmatrix} d\sigma = \\ &= \iint_S \left(\frac{x-R}{R}(z-y) + \frac{y}{R}(x-z) + \frac{z}{R}(y-x) \right) d\sigma = \iint_S (y-z) d\sigma. \end{aligned}$$

Поскольку $d\sigma = \frac{R}{z} dx dy$ (см. с. 153), находим

$$\int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = R \iint_D \frac{y-z}{z} dx dy = -\pi R a^2. \quad \square$$

В терминах векторного анализа аналог формулы Ньютона — Лейбница для криволинейного интеграла второго рода (с. 162) формулируется следующим образом.

Для того чтобы векторное поле \vec{F} , заданное в области $D \subset \mathbb{R}^3$, было потенциальным, необходимо и достаточно равенство нулю работы этого поля вдоль любого контура $L \subset D$. Если поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ потенциально (с потенциалом u), то работа этого поля вдоль кривой $L \subset D$ равна разности значений потенциала в конечной и начальной точках этой кривой:

$$\int_{\vec{AB}} P dx + Q dy + R dz = u(B) - u(A).$$

Вопрос об условиях потенциальности поля будет рассмотрен далее, а здесь мы займёмся нахождением потенциала u заданного потенциального поля \vec{F} .

Фиксируя точку $A \in D$, получаем, что $u(B) = u(A) + \int_{\vec{AB}} P dx + Q dy + R dz$,

где B — произвольная точка рассматриваемой области D . Равенство $\text{grad } u = (P, Q, R)$ определяет функцию u с точностью до произвольной аддитивной постоянной, поэтому значение $u(A)$ выбирается произвольно. В качестве кривой \vec{AB} при решении задач этого типа берётся ломаная, составленная из отрезков, параллельных осям координат. Указанный выбор обусловлен тем, что на таких отрезках криволинейный интеграл второго рода наиболее просто преобразуется в одномерный интеграл.

Пример 16.56. Найдём потенциал u поля $\vec{F} = (y+z, z+x, x+y)$.

РЕШЕНИЕ. Возьмём произвольную точку B с координатами (x_0, y_0, z_0) и точки $A(0, 0, 0)$, $M(x_0, 0, 0)$, $N(x_0, y_0, 0)$. Тогда

$$AM = \{(x, y, z) : x = x, y = 0, z = 0, x \in [0; x_0]\},$$

$$MN = \{(x, y, z) : x = x_0, y = y, z = 0, y \in [0; y_0]\},$$

$$NB = \{(x, y, z) : x = x_0, y = y_0, z = z, z \in [0; z_0]\}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= u(A) + \int_{\vec{AB}} P dx + Q dy + R dz = \\ &= u(A) + \int_{AM} (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz + \int_{MN} (y+z) dx + \\ &\quad + (z+x) dy + (x+y) dz + \int_{NB} (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz = \\ &= u(A) + \int_0^{x_0} 0 dx + \int_0^{y_0} x_0 dy + \int_0^{z_0} (x_0 + y_0) dz = x_0 y_0 + x_0 z_0 + y_0 z_0. \end{aligned}$$

В силу произвольности точки $B(x_0, y_0, z_0)$ и того, что функция u определяется с точностью до постоянной, заключаем, что $u(x, y, z) = xy + xz + yz + C$. \square

Пример 16.57. Найдём потенциал u векторного поля

$$\vec{F} = \left(-\frac{x}{y^2}, \frac{x^2}{y^3} + \frac{y}{z^2}, -\frac{y^2}{z^3} \right).$$

РЕШЕНИЕ. Функции $P(x, y, z) = -\frac{x}{y^2}$, $Q(x, y, z) = \frac{x^2}{y^3} + \frac{y}{z^2}$, $R(x, y, z) = -\frac{y^2}{z^3}$ определены и непрерывны, если $y \neq 0$ и $z \neq 0$. Поэтому потенциал u следует искать отдельно в каждой из четырёх областей, на которые пространство разбивается плоскостями $y = 0$ и $z = 0$. Примем для определённости, что $y > 0$ и $z < 0$. Чтобы кусочно-гладкая кривая \overline{AB} не пересекала плоскостей $y = 0$ и $z = 0$, необходимо начальную точку A также взять в области $D = \{(x, y, z) : y > 0, z < 0\}$. Положим $A(0, 1, -1)$, тогда для любой точки $B(x_0, y_0, z_0)$, $y_0 > 0$, $z_0 < 0$, ломаная $AMNB$, где $M(0, 1, z_0)$, $N(0, y_0, z_0)$, не пересекает плоскостей $y = 0$ и $z = 0$. Поскольку

$$AM = \{(x, y, z) : x = 0, y = 1, z = z, z \in [-1; z_0]\},$$

$$MN = \{(x, y, z) : x = 0, y = y, z = z_0, y \in [1; y_0]\},$$

$$NB = \{(x, y, z) : x = x, y = y_0, z = z_0, x \in [0; x_0]\},$$

справедливы равенства

$$\int_{AM} df = \int_{-1}^{z_0} \frac{-1}{z^3} dz, \quad \int_{MN} df = \int_1^{y_0} \frac{y}{z_0^2} dy, \quad \int_{NB} df = \int_0^{x_0} \frac{-x}{y_0^2} dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= u(A) + \int_{-1}^{z_0} \frac{-1}{z^3} dz + \int_1^{y_0} \frac{y}{z_0^2} dy + \int_0^{x_0} \frac{-x}{y_0^2} dx = \\ &= u(A) + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2} + \frac{y_0^2}{2z_0^2} - \frac{1}{2z_0^2} - \frac{x_0^2}{2y_0^2} = u(A) - \frac{1}{2} + \frac{y_0^2}{2z_0^2} - \frac{x_0^2}{2y_0^2}. \end{aligned}$$

Итак, $u(x, y, z) = \frac{y^2}{2z^2} - \frac{x^2}{2y^2} + C$, где C — произвольная постоянная. \square

Теперь вернёмся к вопросу об условиях потенциальности векторного поля. Для его пояснения нам потребуется понятие односвязной области.

Заметим, что любой контур L , заданный как непрерывное отображение $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(0) = f(1)$, можно интерпретировать также и как непрерывное отображение единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, а именно, точке $P \in S^1$ с полярными координатами $(1, \varphi)$, $\varphi \in [0; 2\pi)$, ставится в соответствие точка $f\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right) \in L$. Непрерывность этого отображения гарантируется совпадением значений отображения f в точках 0 и 1 .

Обратно, всякое непрерывное отображение $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ можно интерпретировать как непрерывное отображение отрезка $[0; 1]$ с равными значениями в его концах: точке $t \in [0; 1]$ ставим в соответствие точку $g(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

Определение. Область $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *односвязной*, если для любого контура $L = \{g(P) : P \in S^1\}$, лежащего в D , отображение $g : S^1 \rightarrow D$ можно продолжить до непрерывного отображения всего единичного круга

$$B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

т. е. существует такое непрерывное отображение $G : B^2 \rightarrow D$, что $G|_{S^1} = g$.

Иными словами, область односвязна, если любой лежащий в ней гладкий контур можно «стянуть» в точку не выходя за пределы области. В случае плоской области $D \subset \mathbb{R}^2$ её односвязность равносильна тому, что для любого гладкого контура $L \subset D$ область $D_L \subset \mathbb{R}^2$, ограниченная L , целиком лежит в D .

Теорема. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$ односвязна и заданы функции $P, Q \in C^1(\bar{D})$. Тогда выполнение равенства $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в D необходимо и достаточно для существования такой функции $u \in C^1(D)$, что $\text{grad } u = (P, Q)$.

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^3$ односвязна и функции $P, Q, R \in C^1(\bar{D})$. Тогда выполнение равенств $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в D необходимо и достаточно для существования такой функции $u \in C^1(D)$, что $\text{grad } u = (P, Q, R)$.

В терминах векторного анализа эта теорема выглядит так.

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^3$ ($D \subset \mathbb{R}^2$) односвязна. Тогда гладкое векторное поле \vec{F} , заданное в D , потенциально тогда и только тогда, когда $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ ($\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$) всюду в D .

Необходимость условия теоремы есть просто условие равенства смешанных производных второго порядка функции $u \in C^2(D)$.

Чтобы проанализировать достаточность условий теоремы, рассмотрим векторное поле

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

В области

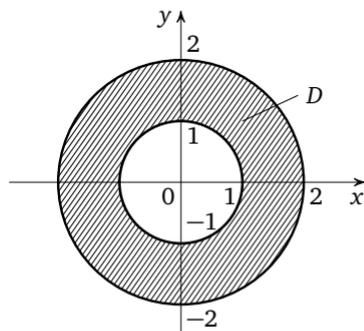
$$D = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\} \quad (\text{см. рис.})$$

функции $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ и $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ бесконечно гладкие и удовлетворяют равенству

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Условием существования функции $u \in C^1(D)$, для которой $\text{grad } u = (P, Q)$ в области D , является равенство нулю интеграла $\int_L P dx + Q dy = \int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ по любому замкнутому контуру $L \subset D$. Покажем, что это условие не выполняется. Действительно, пусть L — окружность радиусом $3/2$ с положительным направлением обхода

$$L = \left\{ (x, y) : x = \frac{3}{2} \cos t, y = \frac{3}{2} \sin t, t \in [0; 2\pi] \right\}.$$



Тогда $L \subset D$ и

$$\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(9/4) \cos^2 t + (9/4) \sin^2 t}{9/4} dt = 2\pi.$$

Итак, функции $u \in C^1(D)$, удовлетворяющей условию $du = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, не существует. Причина этого в том, что область D не является односвязной. Если же рассматривать односвязную область $\tilde{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$, то нарушается условие гладкости функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Можно показать, что при любом доопределении этих функций в точке $(0, 0)$ получаются разрывные в этой точке функции.

Пример 16.58. Покажем, что векторное поле

$$\vec{F} = (\cos y + y \cos x, \sin x - x \sin y)$$

является потенциальным, и найдём его потенциал.

РЕШЕНИЕ. Функции $P = \cos y + y \cos x$ и $Q = \sin x - x \sin y$ непрерывно дифференцируемы на всей плоскости \mathbb{R}^2 , поэтому из равенства $\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos x - \sin y = \frac{\partial P}{\partial y}$ следует существование функции $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\text{grad } u = (P, Q) = (\cos y + y \cos x, \sin x - x \sin y)$.

Функцию u находим описанным выше способом (см. с. 193). Рассмотрим две точки $A(0, 0)$ и $B(x_0, y_0)$, тогда

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) - u(0, 0) &= \int_0^{x_0} dx + \int_0^{y_0} (\sin x_0 - x_0 \sin y) dy = \\ &= x_0 + y_0 \sin x_0 + x_0 \cos y_0 - x_0 = y_0 \sin x_0 + x_0 \cos y_0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $u(x, y) = x \cos y + y \sin x + C$, где C — произвольная постоянная. \square

Пример 16.59. Покажем, что векторное поле

$$\vec{F} = \left(\sqrt{z} + \frac{y}{2\sqrt{x}}, \sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{y}}, \sqrt{y} + \frac{x}{2\sqrt{z}} \right)$$

потенциально в первом октанте $x > 0, y > 0, z > 0$, и найдём его потенциал.

РЕШЕНИЕ. Условием потенциальности поля \vec{F} является равенство $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$. Проверим справедливость этого равенства для данного поля:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sqrt{z} + \frac{y}{2\sqrt{x}} & \sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{y}} & \sqrt{y} + \frac{x}{2\sqrt{z}} \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{y}} \right) + \vec{j} \left(\frac{1}{2\sqrt{z}} - \frac{1}{2\sqrt{z}} \right) + \vec{k} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Потенциал поля \vec{F} — функция u , удовлетворяющая условию $\text{grad } u = \vec{F}$. Функцию u находим описанным выше способом (см. с. 193):

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) - u(1, 1, 1) &= \\ &= \int_1^{x_0} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx + \int_1^{y_0} \left(\sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) dy + \int_1^{z_0} \left(\sqrt{y_0} + \frac{x_0}{2\sqrt{z}}\right) dz = \\ &= x_0 - 1 + \sqrt{x_0} - 1 + y_0\sqrt{x_0} - \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} - 1 + z_0\sqrt{y_0} - \sqrt{y_0} + \\ &\quad + x_0\sqrt{z_0} - x_0 = y_0\sqrt{x_0} + z_0\sqrt{y_0} + x_0\sqrt{z_0} - 3. \end{aligned}$$

Итак, потенциалом поля \vec{F} является функция $u(x, y, z) = x\sqrt{z} + z\sqrt{y} + y\sqrt{x} + C$, где C — произвольная постоянная. \square

Непосредственная проверка показывает, что дивергенция соленоидального поля \vec{F} тождественно равна нулю. Верно и обратное утверждение: если $\text{div } \vec{F} = 0$ в области $D \subset \mathbb{R}^3$, то в этой области поле \vec{F} соленоидально. Поскольку $\text{div}(\text{grad } u) \equiv 0$, векторный потенциал соленоидального поля определяется с точностью до слагаемого, являющегося потенциальным полем. Один из векторных потенциалов $\vec{W} = (W_x, W_y, W_z)$ соленоидального поля $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ получают следующим образом: 1) полагают $W_x = 0$; 2) за W_y берут одну из первообразных функций F_z по переменной x ; 3) W_z будет та из первообразных функций $-F_y$ по переменной x , которая удовлетворяет уравнению $\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} = F_x$. Таким образом,

$$W_y = \int F_z dx, \quad W_z = - \int F_y dx + \varphi(y, z),$$

где функция $\varphi(y, z)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_x + \frac{\partial W_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int F_y dx \right)$.

Пример 16.60. Покажем, что поле $\vec{F} = (x - y + z, y + z - x, x + y - 2z)$ соленоидально, и найдём его векторный потенциал.

Решение. Поле \vec{F} соленоидально, так как

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x - y + z) + \frac{\partial}{\partial y}(y + z - x) + \frac{\partial}{\partial z}(x + y - 2z) = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Одним из векторных потенциалов поля \vec{F} является поле $\vec{W} = (W_x, W_y, W_z)$, где

$$W_x = 0, \quad W_y = \int (x + y - 2z) dx = \frac{x^2}{2} + yx - 2zx,$$

$$W_z = - \int (y + z - x) dx + \varphi(y, z) = \frac{x^2}{2} - yx - zx + \varphi(y, z),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x - y + z + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x^2}{2} + yx - 2zx \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x^2}{2} + yx - 2zx \right) = -y + z,$$

$$\varphi = -\frac{y^2}{2} + zy.$$

Итак, векторным потенциалом поля $\vec{F} = (x - y + z, y + z - x, x + y - 2z)$ является векторное поле $\vec{V} = \vec{W} + \text{grad } u$, где u — произвольная функция класса C^2 и $\vec{W} = \left(0, \frac{x^2}{2} + yx - 2zx, \frac{x^2 - y^2}{2} - yx - zx + zy\right)$. \square

§ 16.6. Дифференциальные формы

Настоящий параграф, посвящённый дифференциальным формам, их интегрированию и общей формуле Стокса, позволяет взглянуть на рассмотренные выше криволинейные и поверхностные интегралы второго рода и основные формулы векторного анализа с более общей точки зрения, связывающей эти интегралы с дифференциальной геометрией на многообразиях и другими разделами современной математики.

16.6.1. Алгебраические формы

Напомним необходимые для дальнейшего факты из курса алгебры.

Определение. Пусть X и Y — линейные пространства. Полилинейная форма $L: X^q \rightarrow Y$ порядка q , которая определена на упорядоченных наборах $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$ векторов из X и принимает значения в Y , называется *кососимметрической формой*, если её значение меняет знак при перестановке любой пары аргументов, т. е.

$$L(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_q) = -L(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_q).$$

В частности, если $\xi_i = \xi_j$ при некоторых различных i и j , то независимо от остальных векторов значение кососимметрической формы равно нулю. Отсюда следует, что кососимметрическая форма, порядок которой больше размерности пространства X , равна нулю на любом наборе векторов.

Например, если X — двумерное подпространство \mathbb{R}^3 , то векторное произведение $\xi_1 \times \xi_2$ векторов $\xi_1 \in X$, $\xi_2 \in X$ есть кососимметрическая форма второго порядка со значениями в ортогональном дополнении X . В самом деле, во-первых,

$$(\alpha \xi_1 + \beta \tilde{\xi}_1) \times \xi_2 = \alpha \xi_1 \times \xi_2 + \beta \tilde{\xi}_1 \times \xi_2, \quad \xi_1 \times (\alpha \xi_2 + \beta \tilde{\xi}_2) = \alpha \xi_1 \times \xi_2 + \beta \xi_1 \times \tilde{\xi}_2,$$

т. е. векторное произведение линейно относительно как первого, так и второго сомножителя, и, во-вторых, $\xi_1 \times \xi_2 = -\xi_2 \times \xi_1$.

Вещественнозначную кососимметрическую форму порядка q будем называть *q -формой*. Множество q -форм является линейным пространством.

Линейную форму естественно называть 1-формой.

Определение. Пусть L_1, L_2, \dots, L_q — 1-формы. *Внешним произведением* этих форм называется q -форма $L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_q$, которая принимает на векторах $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$ значение

$$L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q) = \begin{vmatrix} L_1(\xi_1) & L_2(\xi_1) & \dots & L_q(\xi_1) \\ L_1(\xi_2) & L_2(\xi_2) & \dots & L_q(\xi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_1(\xi_q) & L_2(\xi_q) & \dots & L_q(\xi_q) \end{vmatrix}.$$

Из определения следует, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_i \wedge \dots \wedge L_j \wedge \dots \wedge L_q &= -L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_j \wedge \dots \wedge L_i \wedge \dots \wedge L_q, \\ (L_1 + L_2) \wedge L_3 \wedge L_4 \wedge \dots \wedge L_q &= L_1 \wedge L_3 \wedge L_4 \wedge \dots \wedge L_q + L_2 \wedge L_3 \wedge L_4 \wedge \dots \wedge L_q. \end{aligned}$$

В силу линейности пространства q -форм всякий однородный многочлен степени q от 1-форм есть q -форма. Из свойств внешнего произведения 1-форм следует, что внешнее произведение q -форм находится по правилам умножения алгебраических многочленов с добавлением условия сохранения порядка множителей.

Пример 16.61. Упростим выражение

$$(L_1 \wedge L_4 - 2L_1 \wedge L_3) \wedge (2L_2 - 4L_3 + 3L_4),$$

где L_1, L_2, L_3, L_4 — 1-формы.

РЕШЕНИЕ. Раскроем скобки с сохранением порядка множителей:

$$\begin{aligned} (L_1 \wedge L_4 - 2L_1 \wedge L_3) \wedge (2L_2 - 4L_3 + 3L_4) &= 2L_1 \wedge L_4 \wedge L_2 - 4L_1 \wedge L_3 \wedge L_2 - \\ &- 4L_1 \wedge L_4 \wedge L_3 + 8L_1 \wedge L_3 \wedge L_3 + 3L_1 \wedge L_4 \wedge L_4 - 6L_1 \wedge L_3 \wedge L_4. \end{aligned}$$

Учитывая, что при перемене местами двух множителей внешнее произведение меняет знак и, следовательно, внешнее произведение, включающее два одинаковых множителя, равно нулю, получаем

$$\begin{aligned} (L_1 \wedge L_4 - 2L_1 \wedge L_3) \wedge (2L_2 - 4L_3 + 3L_4) &= \\ &= -2L_1 \wedge L_2 \wedge L_4 + 4L_1 \wedge L_2 \wedge L_3 + 4L_1 \wedge L_3 \wedge L_4 - 6L_1 \wedge L_3 \wedge L_4 = \\ &= 4L_1 \wedge L_2 \wedge L_3 - 2L_1 \wedge L_2 \wedge L_4 - 2L_1 \wedge L_3 \wedge L_4. \quad \square \end{aligned}$$

Символом π_i , $1 \leq i \leq n$, будем обозначать оператор проектирования пространства \mathbb{R}^n на i -ю координатную ось, т. е. для $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ по определению $\pi_i(x) = x_i$. Проекторы π_i , $1 \leq i \leq n$, — это простейшие 1-формы. Всякая q -форма представляется в виде линейной комбинации простейших q -форм — внешних произведений 1-форм π_i :

$$L = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n} a_{i_1, i_2, \dots, i_q} \pi_{i_1} \wedge \pi_{i_2} \wedge \dots \wedge \pi_{i_q}.$$

Это представление называется *координатной записью* или *записью в координатном виде формы L* .

Из определения следует, что для $\xi_j = (\xi_{j,1}, \xi_{j,2}, \dots, \xi_{j,n})$, $1 \leq j \leq q$, имеем

$$\pi_{i_1} \wedge \pi_{i_2} \wedge \dots \wedge \pi_{i_q}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q) = \begin{vmatrix} \xi_{1,i_1} & \xi_{1,i_2} & \dots & \xi_{1,i_q} \\ \xi_{2,i_1} & \xi_{2,i_2} & \dots & \xi_{2,i_q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{q,i_1} & \xi_{q,i_2} & \dots & \xi_{q,i_q} \end{vmatrix}.$$

Пример 16.62. Найдём значение 3-формы

$$\omega = 4\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3 - 3\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_4 + \pi_1 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4 + 5\pi_1 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4$$

на векторах $\xi_1 = (1, 0, 3, 0)$, $\xi_2 = (5, 3, 4, -3)$, $\xi_3 = (2, -1, 1, 2)$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку

$$\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -26,$$

$$\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\pi_1 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -37,$$

$$\pi_2 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9,$$

находим $\omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -104 - 9 - 37 - 45 = -195$. \square

Пример 16.63. Пусть $\xi_1 \times \xi_2$ — векторное произведение векторов $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}) \in \mathbb{R}^3$ и $\xi_2 = (\xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23}) \in \mathbb{R}^3$. Запишем в координатном виде 2-формы $\pi_1(\xi_1 \times \xi_2)$, $\pi_2(\xi_1 \times \xi_2)$, $\pi_3(\xi_1 \times \xi_2)$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку

$$\xi_1 \times \xi_2 = \left(\begin{vmatrix} \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{22} & \xi_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_{13} & \xi_{11} \\ \xi_{23} & \xi_{21} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix} \right),$$

получаем $\pi_1(\xi_1 \times \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{22} & \xi_{23} \end{vmatrix}$. С другой стороны, по определению

$$\pi_2 \wedge \pi_3(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \pi_2(\xi_1) & \pi_3(\xi_1) \\ \pi_2(\xi_2) & \pi_3(\xi_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{22} & \xi_{23} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, $\pi_1(\xi_1 \times \xi_2) = \pi_2 \wedge \pi_3(\xi_1, \xi_2)$. Аналогично находим

$$\pi_2(\xi_1 \times \xi_2) = \pi_3 \wedge \pi_1(\xi_1, \xi_2), \quad \pi_3(\xi_1 \times \xi_2) = \pi_1 \wedge \pi_2(\xi_1, \xi_2). \quad \square$$

16.6.2. Дифференциальные формы в \mathbb{R}^n

Пусть область D лежит в \mathbb{R}^n . Совокупность всех n -мерных векторов, приложенных в точке $x_0 \in D$, называют *касательным пространством в точке x_0* и обозначают $T_{x_0}D$. Каноническим базисом в $T_{x_0}D$ является базис $\overrightarrow{e_1}(x_0), \overrightarrow{e_2}(x_0), \dots, \overrightarrow{e_n}(x_0)$, где $\overrightarrow{e_i}(x_0)$ — вектор, коллинеарный вектору \vec{e}_i базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ исходного пространства \mathbb{R}^n .

Пусть $f \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогда дифференциал $df(x_0)$ определён в каждой точке $x_0 \in D$ и является линейной формой

$$df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) dx_n,$$

определённой на векторах смещения $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in T_{x_0}D$. При переходе от точки к точке в области D форма $df(x_0)$, вообще говоря, меняется. Таким образом, гладкая функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ порождает поле линейных форм или 1-форм, определённых на соответствующих касательных пространствах T_xD , $x \in D$. С помощью внешнего умножения от задания 1-форм можно перейти к заданию q -форм.

Определение. Говорят, что в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана дифференциальная форма порядка q (дифференциальная q -форма) ω , если для каждой точки $x \in D$ задана q -форма $\omega(x): (T_xD)^q \rightarrow \mathbb{R}$.

Таким образом, дифференциал $df(x)$ гладкой функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ задаёт в D дифференциальную форму 1-го порядка (дифференциальную 1-форму).

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Такое поле порождает в D две часто употребляемые дифференциальные формы.

а) Можно рассматривать поле \vec{F} как силовое поле. Тогда для малого вектора $\vec{h} \in T_xD$ смещения от точки $x \in D$ скалярное произведение $\vec{F} \cdot \vec{h} = F_x \pi_1(\vec{h}) + F_y \pi_2(\vec{h}) + F_z \pi_3(\vec{h})$ равно работе поля \vec{F} , отвечающей этому смещению. Поскольку $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$, т. е. $\pi_1(\vec{h}) = dx(\vec{h}) = h_1$, $\pi_2(\vec{h}) = dy(\vec{h}) = h_2$, $\pi_3(\vec{h}) = dz(\vec{h}) = h_3$, получаем $\vec{F} \cdot \vec{h} = F_x dx(\vec{h}) + F_y dy(\vec{h}) + F_z dz(\vec{h})$. Дифференциальная 1-форма $\omega_{\vec{F}}^1 = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, заданная в D , часто называется *формой работы* векторного поля \vec{F} .

б) Можно рассматривать поле \vec{F} как поле скоростей установившегося течения жидкости. Тогда для двух малых векторов $\vec{h}_1 \in T_xD$, $\vec{h}_2 \in T_xD$, $x \in D$, смешанное произведение $(\vec{F}, \vec{h}_1, \vec{h}_2)$ равно объёму жидкости, протекающей за единицу времени через параллелограмм, натянутый на векторы \vec{h}_1, \vec{h}_2 .

Пользуясь равенством

$$(\vec{F}, \vec{h}_1, \vec{h}_2) = F_x \pi_1(\vec{h}_1 \times \vec{h}_2) + F_y \pi_2(\vec{h}_1 \times \vec{h}_2) + F_z \pi_3(\vec{h}_1 \times \vec{h}_2)$$

и результатом примера 16.63 на с. 200, получаем координатную запись этой 2-формы на векторах \vec{h}_1, \vec{h}_2 :

$$(\vec{F}, \vec{h}_1, \vec{h}_2) = (F_x \pi_2 \wedge \pi_3 + F_y \pi_3 \wedge \pi_1 + F_z \pi_1 \wedge \pi_2)(\vec{h}_1, \vec{h}_2).$$

Поскольку $\pi_1(\vec{h}) = dx(\vec{h})$, $\pi_2(\vec{h}) = dy(\vec{h})$, $\pi_3(\vec{h}) = dz(\vec{h})$, получаем

$$\begin{aligned} \pi_2 \wedge \pi_3(\vec{h}_1, \vec{h}_2) &= dy \wedge dz(\vec{h}_1, \vec{h}_2), & \pi_3 \wedge \pi_1(\vec{h}_1, \vec{h}_2) &= dz \wedge dx(\vec{h}_1, \vec{h}_2), \\ \pi_1 \wedge \pi_2(\vec{h}_1, \vec{h}_2) &= dx \wedge dy(\vec{h}_1, \vec{h}_2). \end{aligned}$$

Итак,

$$(\vec{F}, \vec{h}_1, \vec{h}_2) = F_x dy \wedge dz(\vec{h}_1, \vec{h}_2) + F_y dz \wedge dx(\vec{h}_1, \vec{h}_2) + F_z dx \wedge dy(\vec{h}_1, \vec{h}_2).$$

Дифференциальная 2-форма $\omega_{\vec{F}}^2 = F_x dy \wedge dz + F_y dz \wedge dx + F_z dx \wedge dy$, заданная в D , часто называется *формой потока* векторного поля \vec{F} .

Для векторного поля $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, определённого в области $D \subset \mathbb{R}^n$, по аналогии с трёхмерным случаем формой работы и формой потока часто называют соответственно дифференциальные 1-форму $\omega_{\vec{F}}^1 = \sum_{i=1}^n F_i dx_i$

и $(n-1)$ -форму

$$\omega_F^{n-1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} F_i dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

(Знак « $\widehat{}$ » показывает, что именно этот множитель в данном слагаемом отсутствует.)

Внешнее произведение дифференциалов координат $dx_{i_1}, \dots, dx_{i_q}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n$, является простейшей дифференциальной q -формой. Представление дифференциальной q -формы ω в виде линейной комбинации

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n} a_{i_1, i_2, \dots, i_q}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}$$

называется *координатной записью* или *записью в координатном виде*. Функции $a_{i_1, i_2, \dots, i_q}(x)$ называются *коэффициентами формы* ω . *Порядком гладкости формы* ω в области D называется наименьший из порядков гладкости её коэффициентов. Множество дифференциальных q -форм в D с коэффициентами класса $C^\infty(D)$ обозначается $\Omega^q(D)$.

Пример 16.64. Вычислим значение дифференциальной формы

$$\omega = x_1 x_4 dx_1 \wedge dx_2 + x_3 x_4 dx_2 \wedge dx_3 + x_1 x_3 dx_1 \wedge dx_4 + x_2 x_3 dx_2 \wedge dx_4$$

на паре векторов $\xi_1 = (1, 4, 1, 0)$ и $\xi_2 = (2, 0, 3, 1)$, $\xi_1, \xi_2 \in T_{(1,0,2,-1)} \mathbb{R}^4$.

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$dx_1 \wedge dx_2(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8,$$

$$dx_2 \wedge dx_3(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{22} & \xi_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12,$$

$$dx_1 \wedge dx_4(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{14} \\ \xi_{21} & \xi_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$dx_2 \wedge dx_4(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \xi_{14} \\ \xi_{22} & \xi_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -1.$$

Следовательно, $\omega(\xi_1, \xi_2) = -1 \cdot (-8) - 2 \cdot 12 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = -14$. \square

Пример 16.65. Приведём к координатному виду дифференциальную форму

$$\omega = (x_2 dx_1 \wedge dx_2 + x_4 dx_1 \wedge dx_4 + x_1 dx_3 \wedge dx_4) \wedge (x_2 dx_1 + x_3 dx_2).$$

РЕШЕНИЕ. Используя свойства внешнего произведения, получаем

$$\begin{aligned} \omega &= x_2^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + x_4 x_2 dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_1 + x_1 x_2 dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 + \\ &\quad + x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + x_3 x_4 dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_2 + x_1 x_3 dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_2 = \\ &= -x_3 x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1 x_3 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4. \end{aligned} \quad \square$$

Пример 16.66. Приведём к координатному виду дифференциальную форму $d(x_1^4 x_2^3 x_3^2) \wedge d(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)$.

РЕШЕНИЕ. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} & d(x_1^4 x_2^3 x_3^2) \wedge d(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2) = \\ &= (4x_1^3 x_2^3 x_3^2 dx_1 + 3x_1^4 x_2^2 x_3^2 dx_2 + 2x_1^4 x_2^3 x_3 dx_3) \wedge (2x_1 dx_1 - 2x_2 dx_2 + 2x_3 dx_3) = \\ &= 6x_1^5 x_2^2 x_3^2 dx_2 \wedge dx_1 + 4x_1^5 x_2^3 x_3 dx_3 \wedge dx_1 - 8x_1^3 x_2^4 x_3^2 dx_1 \wedge dx_2 - \\ &\quad - 4x_1^4 x_2^4 x_3 dx_3 \wedge dx_2 + 8x_1^3 x_2^3 x_3^3 dx_1 \wedge dx_3 + 6x_1^4 x_2^2 x_3^3 dx_2 \wedge dx_3 = \\ &= -2x_1^3 x_2^2 x_3^2 (3x_1^2 + 4x_2^2) dx_1 \wedge dx_2 + 4x_1^3 x_2^3 x_3 (2x_3^2 - x_1^2) dx_1 \wedge dx_3 + \\ &\quad + 2x_1^4 x_2^2 x_3 (2x_2^2 + 3x_3^2) dx_2 \wedge dx_3. \quad \square \end{aligned}$$

Условимся под *дифференциальной формой нулевого порядка* (0-формой) в области D понимать функцию $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение. Пусть функция $f \in C^1(D)$. Дифференциалом (внешним дифференциалом) 0-формы f называется дифференциал df функции f , являющийся 1-формой в D .

Определение. Пусть $q \in \mathbb{N}$. Если коэффициенты заданной в D q -формы

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n} a_{i_1, i_2, \dots, i_q}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}$$

дифференцируемы в D , то *дифференциалом* (внешним дифференциалом) $d\omega$ формы ω называется дифференциальная $(q+1)$ -форма в D , определяемая равенством

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n} d(a_{i_1, i_2, \dots, i_q}(x)) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}.$$

Пример 16.67. Найдём дифференциал $d\omega$ формы

$$\omega = x_1^2 x_3^2 x_4 dx_1 \wedge dx_2 - x_1^3 x_3^2 dx_2 \wedge dx_4.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем $d\omega = d(x_1^2 x_3^2 x_4) \wedge dx_1 \wedge dx_2 - d(x_1^3 x_3^2) \wedge dx_2 \wedge dx_4 =$

$$\begin{aligned} &= (2x_1 x_3^2 x_4 dx_1 + 2x_1^2 x_3 x_4 dx_3 + x_1^2 x_3^2 dx_4) \wedge dx_1 \wedge dx_2 - \\ &\quad - (3x_1^2 x_3^2 dx_1 + 2x_1^3 x_3 dx_3) \wedge dx_2 \wedge dx_4 = \\ &= 2x_1^2 x_3 x_4 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + x_1^2 x_3^2 dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 - 3x_1^2 x_3^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - \\ &\quad - 2x_1^3 x_3 dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_4 = \\ &= 2x_1^2 x_3 x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - 2x_1^2 x_3^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + 2x_1^3 x_3 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4. \quad \square \end{aligned}$$

Если порядок гладкости формы ω не меньше двух, то, как следует из теоремы о равенстве смешанных производных, $d(d\omega) = 0$.

Определение. Дифференциальная p -форма ω , заданная в области D , называется *точной в этой области*, если существует такая $(p-1)$ -форма ω_1 , заданная в D , что $d\omega_1 = \omega$.

Про точную 1-форму ω говорят также, что она *есть полный дифференциал*, так как в этом случае $\omega = df$, где f — 0-форма, т. е. просто функция $f \in C^1(D)$.

Если гладкая форма ω точна, то $d\omega = d(d\omega_1) = 0$, т. е. условие $d\omega = 0$ необходимо для точности гладкой формы.

Покажем, что это условие не является достаточным для точности гладкой формы. В качестве примера рассмотрим форму $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ в области

$$D = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\} \quad (\text{см. рис.}).$$

Тогда $\omega \in \Omega^1(D)$ и

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{(x^2 + y^2) dx - 2xy dy - 2x^2 dx}{(x^2 + y^2)^2} \wedge dy + \frac{-(x^2 + y^2) dy + 2xy dx + 2y^2 dy}{(x^2 + y^2)^2} \wedge dx = \\ &= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy + \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx = 0. \end{aligned}$$

При $x \neq 0$ имеем $d\left(\arctg \frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \omega$, а из условия $dg = 0$ следует, что $g = C$, поэтому удовлетворять условию $dz = \omega$ может только функция $z = f(x, y) + C$, где $f(x, y)$ — гладкая функция в D и

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & (x, y) \in D_1, D_1 = \{(x, y) : (x, y) \in D, x > 0\}; \\ \arctg \frac{y}{x} + k, & (x, y) \in D_2, D_2 = \{(x, y) : (x, y) \in D, x < 0\}. \end{cases}$$

Покажем, что никакой выбор постоянной k не даст функцию $f(x, y)$, непрерывную (и тем более гладкую) в области D . Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0^+, y > 0} f(x, y) = \frac{\pi}{2}$ и $\lim_{x \rightarrow 0^-, y > 0} f(x, y) = -\frac{\pi}{2} + k$, заключаем, что для непрерывности f в точках интервала $(1; 2)$ оси Oy , лежащего в D , необходимо, чтобы $k = \pi$. Но тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0^+, y < 0} f(x, y) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-, y < 0} f(x, y) = \frac{\pi}{2} + k = \frac{3\pi}{2}$$

и f разрывна во всех точках интервала $(-2; -1)$ оси Oy , тоже лежащего в D .

Итак, $\omega \in \Omega^1(D)$, и $d\omega = 0$ на D , однако не существует гладкой функции $z : D \rightarrow \mathbb{R} - 0$ -формы в D , для которой $dz = \omega$.

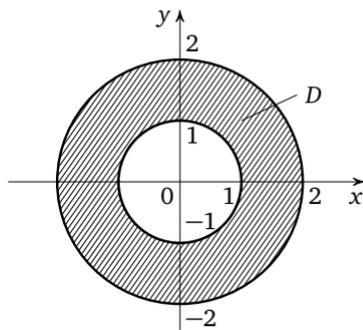
Определение. Дифференциальная форма ω , заданная в области D , для которой $d\omega \equiv 0$ в D , называется замкнутой в этой области.

Теорема (лемма Пуанкаре). Если дифференциальная форма замкнута в шаре или в бруссе, то она точна в нём.

Перенос дифференциальных форм

Пусть область U лежит в \mathbb{R}^m , область V лежит в \mathbb{R}^n , задано отображение $\varphi : U \rightarrow V$ и функция $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Определим операцию $f \mapsto \varphi^* f$:

$$(\varphi^* f)(u) = f(\varphi(u)), \quad u \in U.$$



Обозначение $\varphi^* f$, в отличие от обычной записи композиции функций, показывает, что мы имеем дело с преобразованием множества функций, определённых на V , в множество функций, определённых на U , т. е. с оператором, определённым отображением φ . Поэтому мы скажем, что отображение $\varphi: U \rightarrow V$ порождает отображение $\varphi^*: \Omega^0(V) \rightarrow \Omega^0(U)$, преобразующее 0-формы, заданные на V , в 0-формы, заданные на U .

Если $\varphi: U \rightarrow V$ — гладкое отображение, то для каждой точки $u \in U$ матрица Якоби $J_\varphi(u)$ определяет соответствующее отображение касательных пространств $J_\varphi(u): T_u U \rightarrow T_v V$, где $v = \varphi(u)$. Каждой q -форме ω , заданной в V , тогда можно сопоставить q -форму $\varphi^* \omega$, заданную в U :

$$(\varphi^* \omega)(u)(v_1, v_2, \dots, v_q) = \omega(v)(J_\varphi(u)v_1, J_\varphi(u)v_2, \dots, J_\varphi(u)v_q).$$

Итак, каждое гладкое отображение $\varphi: U \rightarrow V$ порождает отображение $\varphi^*: \Omega^q(V) \rightarrow \Omega^q(U)$, преобразующее q -формы, заданные на V , в q -формы, заданные на U . Это отображение называют *переносом форм с V на U* .

Основные свойства отображения $\varphi^*: \Omega^q(V) \rightarrow \Omega^q(U)$

1. $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) + \varphi^*(\omega_2)$.
2. $\varphi^*(\lambda\omega) = \lambda\varphi^*(\omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\varphi^*(a(v)\omega) = a(\varphi(v))\varphi^*(\omega)$, $a \in C^\infty(V)$.
4. $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, $((\psi(\varphi))^* = \varphi^*(\psi^*))$.
5. $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$.
6. Если $\omega = dv_{i_1} \wedge dv_{i_2} \wedge \dots \wedge dv_{i_q}$, то

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n} \frac{\partial(v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_q})}{\partial(u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_q})} du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge \dots \wedge du_{j_q}.$$

7. Если форма ω записана в координатном виде

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n} a_{i_1, i_2, \dots, i_q}(v) dv_{i_1} \wedge dv_{i_2} \wedge \dots \wedge dv_{i_q},$$

то координатная запись формы $\varphi^* \omega$ получается из координатной записи формы ω прямой заменой переменных $v = \varphi(u)$ с последующим преобразованием в соответствии со свойствами внешнего произведения.

Пример 16.68. Пусть область U лежит в \mathbb{R}^2 , область V лежит в \mathbb{R}^3 , отображение $\varphi: U \rightarrow V$ задаётся формулами $x = u$, $y = t$, $z = \sin u \sin t$, форма $\omega = \arctg(xz) dy \wedge dz$ задана в V . Найдём форму $\varphi^* \omega$, заданную в U .

РЕШЕНИЕ. Поскольку

$$\varphi^*(dy) = dt \quad \text{и} \quad \varphi^*(dz) = d(\sin u \sin t) = \cos u \sin t du + \sin u \cos t dt,$$

получаем

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega &= \arctg(u \sin u \sin t) dt \wedge (\cos u \sin t du + \sin u \cos t dt) = \\ &= -\arctg(u \sin u \sin t) \cos u \sin t du \wedge dt. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.69. Пусть область U лежит в \mathbb{R}^2 , область V лежит в \mathbb{R}^4 , отображение $\varphi: U \rightarrow V$ задаётся формулами $v_1 = u_1^2 u_2$, $v_2 = u_1^4 - u_2^4$, $v_3 = u_1^4 + u_2^4$, $v_4 = u_1 u_2^2$; дифференциальная форма

$$\omega = v_4 dv_1 \wedge dv_2 + v_2 dv_1 \wedge dv_3 - v_1 dv_2 \wedge dv_4$$

задана в V . Найдём форму $\varphi^* \omega$, заданную в U .

РЕШЕНИЕ. Имеем $dv_1 = 2u_1 u_2 du_1 + u_1^2 du_2$, $dv_2 = 4u_1^3 du_1 - 4u_2^3 du_2$, $dv_3 = 4u_1^3 du_1 + 4u_2^3 du_2$, $dv_4 = u_2^2 du_1 + 2u_1 u_2 du_2$. Отсюда получаем

$$dv_1 \wedge dv_2 = \begin{vmatrix} 2u_1 u_2 & u_1^2 \\ 4u_1^3 & -4u_2^3 \end{vmatrix} du_1 \wedge du_2 = -4u_1(u_1^4 + 2u_2^4) du_1 \wedge du_2,$$

$$dv_1 \wedge dv_3 = \begin{vmatrix} 2u_1 u_2 & u_1^2 \\ 4u_1^3 & 4u_2^3 \end{vmatrix} du_1 \wedge du_2 = 4u_1(2u_2^4 - u_1^4) du_1 \wedge du_2,$$

$$dv_2 \wedge dv_4 = \begin{vmatrix} 4u_1^3 & -4u_2^3 \\ u_2^2 & 2u_1 u_2 \end{vmatrix} du_1 \wedge du_2 = 4u_2(2u_1^4 + u_2^4) du_1 \wedge du_2.$$

Подставляя выражения переменных v_1, v_2, v_3, v_4 через переменные u_1, u_2 в коэффициенты формы ω и заменяя простейшие дифференциальные 2-формы переменных v_1, v_2, v_3, v_4 полученными выражениями через 2-форму $du_1 \wedge du_2$, находим

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega &= (u_1 u_2^2 \cdot (-4u_1(u_1^4 + 2u_2^4)) + (u_1^4 - u_2^4) \cdot 4u_1(2u_2^4 - u_1^4) - \\ &\quad - u_1^2 u_2 \cdot 4u_2(2u_1^4 + u_2^4)) du_1 \wedge du_2 = \\ &= 4u_1(3u_1^4 u_2^4 - u_1^8 - 2u_2^8 - 3u_1^5 u_2^2 - 3u_1 u_2^6) du_1 \wedge du_2. \quad \square \end{aligned}$$

Если порядок q формы ω , заданной в области $V \subset \mathbb{R}^n$, больше, чем размерность области $U \subset \mathbb{R}^m$, то для любого гладкого отображения $\varphi: U \rightarrow V$ форма $\varphi^* \omega$ будет нулевой. С другой стороны, если $\varphi: U \rightarrow V$ — диффеоморфизм, т. е. существует обратное гладкое отображение $\varphi^{-1}: V \rightarrow U$, то отображения $\varphi^*: \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^p(U)$ и $(\varphi^{-1})^*: \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^p(V)$ взаимно обратны, т. е. отображение $\varphi^*: \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^p(U)$ биективно.

Определение. Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — простая гладкая поверхность. Дифференциальная 2-форма ω задана на S , если для каждой точки $p \in S$ на векторах плоскости $T_p S$, касательной к S в точке p , определена 2-форма ω .

Если поверхность S кусочно-гладкая, то дифференциальная 2-форма задана на S , если эта форма задана на каждой из гладких составляющих S .

Примером дифференциальной 2-формы, заданной на простой гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, может служить одна из координат вектора нормали к S , если этот вектор определяется как векторное произведение двух неколлинеарных векторов соответствующей касательной плоскости.

Пусть гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ лежит в области $D \subset \mathbb{R}^3$ и дифференциальная 2-форма ω задана в D . Тогда для любой точки $p \in S$ имеет место включение $T_p S \subset T_p D$ и, следовательно, можно рассмотреть сужение формы ω на $T_p S$. Такое сужение представляет собой форму, заданную на S ; эту форму

называют *сужением* ω на S и обозначают $\omega|_S$. Если $S = \{\varphi(u, v) : (u, v) \in \bar{U}\}$ — параметрическое представление поверхности S , то можно сделать перенос $\varphi^*\omega$ и $\varphi^*\omega|_S$ форм ω и $\omega|_S$ на U , при этом формы $\varphi^*\omega$ и $\varphi^*\omega|_S$ тождественны. Отображение $J_\varphi : T_{(u,v)}U \rightarrow T_{\varphi(u,v)}S$ есть изоморфизм, поэтому можно переносить формы как с S на U , так и с U на S ; поэтому формы на гладкой простой поверхности обычно задаются в области изменения её параметров.

Определение. Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ — простая гладкая кривая. Дифференциальная 1-форма ω задана на L , если для каждой точки $p \in L$ на векторах прямой T_pL , касательной к L в точке p , определена 1-форма ω .

Перенос дифференциальной 1-формы на L на область изменения параметра описывается вполне аналогично переносу дифференциальной 2-формы на поверхности S .

Пример 16.70. Найдём сужение формы $\omega = y^2z dx - xyz dy + xz^2 dz$ на конечную винтовую линию $x = ae^{-t} \cos t$, $y = ae^{-t} \sin t$, $z = ae^{-t}$ ($a > 0$).

Решение. Поскольку

$$dx = a(-e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t) dt, \quad dy = a(e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t) dt, \quad dz = -ae^{-t} dt,$$

получаем

$$\begin{aligned} \omega &= -a^4 e^{-3t} \sin^2 t (e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t) dt - a^4 e^{-3t} \sin t \cos t (e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t) dt - \\ &\quad - a^4 e^{-3t} \cos t e^{-t} dt = -a^4 e^{-4t} (\sin t + \cos t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.71. Найдём сужение формы $\omega = xy dx \wedge dy + yz dy \wedge dz + xz dz \wedge dx$ на конус $x = uv$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^2 - v^2$.

Решение. Имеем

$$dx = v du + u dv, \quad dy = 2u du + 2v dv, \quad dz = 2u du - 2v dv;$$

$$dx \wedge dy = \begin{vmatrix} v & u \\ 2u & 2v \end{vmatrix} du \wedge dv = 2(v^2 - u^2) du \wedge dv,$$

$$dy \wedge dz = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{vmatrix} du \wedge dv = -8uv du \wedge dv,$$

$$dz \wedge dx = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} du \wedge dv = 2(u^2 + v^2) du \wedge dv,$$

$$\begin{aligned} \omega &= 2uv(u^2 + v^2)(v^2 - u^2) du \wedge dv - (u^4 - v^4)8uv du \wedge dv + \\ &\quad + 2uv(u^2 - v^2)(u^2 + v^2) du \wedge dv = -8uv(u^4 - v^4) du \wedge dv. \quad \square \end{aligned}$$

16.6.3. Интегрирование дифференциальных форм

Множество базисов в пространстве \mathbb{R}^n разбивается на два класса эквивалентности так, что определитель матрицы перехода от базиса одного класса к базису того же класса положителен, а к базису другого класса отрицателен. Эти классы эквивалентности называют *классами ориентации базисов*.

Определение. *Ориентированным пространством* \mathbb{R}^n называется пространство \mathbb{R}^n с фиксированным классом ориентации его базисов.

Класс ориентации базисов определён указанием одного из принадлежащих ему базисов, поэтому ориентированное пространство \mathbb{R}^n задаётся как пространство $\mathbb{R}_{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n}^n$ с фиксированным базисом $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Для краткости пространство \mathbb{R}^n со стандартным базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ будем называть просто ориентированным пространством \mathbb{R}^n . Базис фиксирован, если заданы составляющие его векторы и их порядок. Базис $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n$, полученный из базиса $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n$ перестановкой любой пары векторов, принадлежит другому классу эквивалентности, т. е. пространства $\mathbb{R}_{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n}^n$ и $\mathbb{R}_{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n}^n$ ориентированы противоположно.

В одномерном случае базисами разных классов ориентации являются ненулевой вектор a и противоположно направленный вектор λa , $\lambda < 0$. Геометрически задать ориентацию на промежутке $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ — это указать, проходит ли этот промежуток слева направо или справа налево, т. е. указать начальную и конечную точку движения по промежутку. В пространстве \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) простейшим методом перехода от одного класса ориентации базисов к другому является перестановка векторов стандартного базиса.

В двумерном случае, переставляя векторы базиса, получаем два противоположно ориентированных пространства \mathbb{R}_{xy}^2 и \mathbb{R}_{yx}^2 . В трёхмерном случае имеется 6 перестановок $xyz, yzx, zxy, xzy, yxz, zyx$ векторов базиса и 6 соответствующих ориентированных пространств разбиваются на два класса ($\mathbb{R}_{xyz}^3, \mathbb{R}_{yzx}^3, \mathbb{R}_{zxy}^3$ и $\mathbb{R}_{xzy}^3, \mathbb{R}_{yxz}^3, \mathbb{R}_{zyx}^3$) так, что пространства в одном классе ориентированы одинаково, а ориентация любой пары пространств из разных классов противоположна.

Определение. Интеграл от n -формы $\omega = f(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ по области $D \subset \mathbb{R}^n$ обозначается $\int_D \omega$ и определяется равенством $\int_D \omega = \int_D f(x) dx$.

Если U и V — области в \mathbb{R}^n , а $\varphi: U \rightarrow V$ — диффеоморфизм (регулярное отображение), то его матрица Якоби J_φ задаёт переход от базиса dv_1, dv_2, \dots, dv_n к базису du_1, du_2, \dots, du_n . Рассматривая эти два базиса в \mathbb{R}^n , видим, что отображение φ сохраняет ориентацию \mathbb{R}^n , если $\det J_\varphi > 0$, и изменяет её, если $\det J_\varphi < 0$. При этом $\varphi^*(dv_1 \wedge dv_2 \wedge \dots \wedge dv_n) = \det J_\varphi du_1 \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_n$. Формула

$$\int_{D=\varphi(D_1)} f(x) dx = \int_{D_1} f(\varphi(t)) \det J_\varphi dt$$

замены переменных в кратном интеграле при условии, что диффеоморфизм $\varphi: D_1 \rightarrow D$ сохраняет ориентацию \mathbb{R}^n (т. е. $\det J_\varphi > 0$), получается формальной подстановкой $x = \varphi(t)$, её можно записать в виде $\int_{\varphi(D)} \omega = \int_D \varphi^* \omega$. В таком виде

эта формула справедлива и для диффеоморфизма φ , меняющего ориентацию, т. е. если $\det J_\varphi < 0$. В частности, равенство $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ можно рассматривать как формулу замены переменной в определённом интеграле при отображении $\varphi: x \rightarrow (-x)$, меняющем ориентацию пространства \mathbb{R}^1 .

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *простым гладким многообразием порядка q* , $1 \leq q \leq n-1$, если M есть образ жордановой области $D \subset \mathbb{R}^q$ (или её замыкания \bar{D}) при гладком невырожденном отображении $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, т. е. $\varphi \in C^1(\bar{D})$ и ранг матрицы Якоби J_φ равен q . Запись

$$M = \{ \varphi(x_1, x_2, \dots, x_q) : (x_1, x_2, \dots, x_q) \in D \}$$

называется *параметрическим представлением M* , область D — *областью значений параметров M* .

Определение. Гладкие невырожденные отображения $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^q$, и $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^q$, называются *эквивалентными*, если существует такой диффеоморфизм $f: U \rightarrow V$, что $\varphi(u) = \psi(f(u))$ для всех $u \in U$.

Если φ и ψ — эквивалентные отображения, то выражения

$$\begin{aligned} & \{ \varphi(u_1, u_2, \dots, u_q) : (u_1, u_2, \dots, u_q) \in U \} \quad \text{и} \\ & \{ \psi(v_1, v_2, \dots, v_q) : (v_1, v_2, \dots, v_q) \in V \} \end{aligned}$$

являются различными параметрическими представлениями одного и того же простого гладкого многообразия M . Диффеоморфизм f , связывающий отображения φ и ψ , называется *диффеоморфизмом преобразования параметров* или, короче, *преобразованием параметров*.

Понятие многообразия есть обобщение понятий кривой и поверхности. Именно: простая гладкая кривая L есть многообразие первого порядка, простая гладкая поверхность S — многообразие второго порядка.

Пусть есть два различных параметрических представления одного простого гладкого многообразия порядка q :

$$\begin{aligned} M &= \{ \varphi(u_1, u_2, \dots, u_q) : (u_1, u_2, \dots, u_q) \in U \} \quad \text{и} \\ M &= \{ \psi(v_1, v_2, \dots, v_q) : (v_1, v_2, \dots, v_q) \in V \}. \end{aligned}$$

Отображение $f = \psi^{-1} \circ \varphi$ — диффеоморфизм преобразования параметров, следовательно, якобиан $\det J_f$ не меняет знака на U . Все возможные параметрические представления разбиваются на два класса эквивалентности так, что якобиан f для представлений одного класса положителен, а для представлений разных классов отрицателен. Таким образом, на простом гладком многообразии M так же, как в пространстве \mathbb{R}^q , определяются две ориентации.

Определение. Простое гладкое многообразие M с выбранной (заданной) ориентацией называется *ориентированным простым многообразием*.

Ориентация многообразия M задаётся порядком векторов базиса или, что то же самое, порядком записи координат в области значений параметров. Таким образом,

$$\begin{aligned} & \{ \varphi(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_q) : (u_1, u_2, \dots, u_q) \in U \} \quad \text{и} \\ & \{ \varphi(u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_q) : (u_1, u_2, \dots, u_q) \in U \} \end{aligned}$$

— запись одного и того же многообразия с противоположными ориентациями.

Заметим, что обобщая понятие касательной плоскости к поверхности, можно определить понятие касательного пространства к многообразию.

Определение. Пусть ориентированное простое многообразие

$$M = \{\varphi(u_1, \dots, u_q) : (u_1, \dots, u_q) \in U\}$$

порядка q лежит в области $D \subset \mathbb{R}^n$, где задана дифференциальная q -форма ω .

Тогда *интеграл от ω по M* обозначается $\int_M \omega$ и определяется равенством

$$\int_M \omega = \int_U \varphi^* \omega, \text{ где } \varphi^* \omega \text{ — перенос формы } \omega, \text{ порождённый отображением } \varphi.$$

Из соотношений переноса форм и замены переменных в кратном интеграле следует, что величина интеграла $\int_M \omega$ не зависит от выбора параметри-

ческого представления ориентированного многообразия M , т. е. определение этого интеграла корректно.

Пример 16.72. Вычислим $\int_M \omega$, где $\omega = x_3 dx_1 + x_4 dx_2 + x_1 dx_3 + x_2 dx_4$,
 $M = \{x \in \mathbb{R}^4 : x = \varphi(u) = (\cos u, \sin u, u \cos u, u \sin u), u \in [0; \pi]\}$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку

$$\varphi^* \omega = (-u \cos u \sin u + u \sin u \cos u + \cos u (\cos u - u \sin u) + \sin u (\sin u + u \cos u)) du = du,$$

$$\text{получаем } \int_M \omega = \int_0^\pi du = \pi. \quad \square$$

Пример 16.73. Вычислим $\int_M x_2 x_7 dx_1 \wedge dx_5 \wedge dx_7$, где

$$M = \{x \in \mathbb{R}^7 : x =$$

$$= \varphi(u) = (u_1^2 u_2 u_3, u_1 u_2^2 u_3, u_1 u_2 u_3^2, u_1^3 u_3, u_1^2 u_2^3, u_1 u_2^3, u_1 u_3^3), u \in D\},$$

$$D = [0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1].$$

РЕШЕНИЕ. Найдём перенос $\varphi^* \omega$ формы $\omega = x_2 x_7 dx_1 \wedge dx_5 \wedge dx_7$ на D :

$$\begin{aligned} \omega &= u_1^2 u_2^2 u_3^4 \begin{vmatrix} 2u_1 u_2 u_3 & u_1^2 u_3 & u_1^2 u_2 \\ 3u_1^2 u_2 & u_1^3 & 0 \\ u_3^3 & 0 & 3u_1 u_3^2 \end{vmatrix} du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 = \\ &= u_1^5 u_2^2 u_3^6 \begin{vmatrix} 2u_2 u_3 & u_1 u_3 & u_1 u_2 \\ 3u_2 & u_1 & 0 \\ u_3 & 0 & 3u_1 \end{vmatrix} du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 = -4u_1^7 u_2^3 u_3^7 du_1 \wedge du_2 \wedge du_3. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \int_M x_2 x_7 dx_1 \wedge dx_5 \wedge dx_7 &= \int_{[0;1] \times [0;1] \times [0;1]} -4u_1^7 u_2^3 u_3^7 du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 = \\ &= \int_{[0;1] \times [0;1] \times [0;1]} -4u_1^7 u_2^3 u_3^7 du_1 du_2 du_3 = -4 \int_0^1 u_1^7 du_1 \int_0^1 u_2^3 du_2 \int_0^1 u_3^7 du_3 = \\ &= -4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{64}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.74. Вычислим $\int_M \omega$, где

$$\omega = x_3 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5 + \\ + x_5 dx_1 \wedge dx_5 \wedge dx_6 + 2x_6 dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_6,$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^6 : x = \varphi(u) = (u_1^2 - u_2^2, u_1 u_2, u_2^2 - u_3^2, u_2 u_3, u_3^2 - u_1^2, u_1 u_3), u \in D\}, \\ D = [0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1].$$

РЕШЕНИЕ. Вначале найдём перенос $\varphi^* \omega$ формы ω на множество D .
Справедливы равенства

$$\varphi^*(dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4) = \begin{vmatrix} 2u_1 & -2u_2 & 0 \\ 0 & 2u_2 & -2u_3 \\ 0 & u_3 & u_2 \end{vmatrix} du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 = \\ = 4u_1(u_2^2 + u_3^2) du_1 \wedge du_2 \wedge du_3,$$

$$\varphi^*(dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5) = \begin{vmatrix} u_2 & u_1 & 0 \\ 0 & 2u_2 & -2u_3 \\ -2u_1 & 0 & 2u_3 \end{vmatrix} du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 = \\ = 4u_3(u_1^2 + u_2^2) du_1 \wedge du_2 \wedge du_3,$$

$$\varphi^*(dx_1 \wedge dx_5 \wedge dx_6) = \begin{vmatrix} 2u_1 & -2u_2 & 0 \\ -2u_1 & 0 & 2u_3 \\ u_3 & 0 & u_1 \end{vmatrix} du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 = \\ = -4u_2(u_1^2 + u_3^2) du_1 \wedge du_2 \wedge du_3,$$

$$\varphi^*(dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_6) = \begin{vmatrix} u_2 & u_1 & 0 \\ 0 & u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & u_1 \end{vmatrix} du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 = 2u_1 u_2 u_3 du_1 \wedge du_2 \wedge du_3,$$

$$\varphi^* \omega = 4(u_2^4 - u_3^4)u_1 + (u_1^4 - u_2^4)u_3 - (u_3^4 - u_1^4)u_2 + u_1 u_2 u_3 du_1 \wedge du_2 \wedge du_3.$$

Поэтому получаем

$$\int_M \omega = -4 \iiint_D (u_1 u_3^4 - u_1 u_2^4 + u_3 u_2^4 - u_3 u_1^4 + u_2 u_3^4 - u_2 u_1^4 - u_1 u_2 u_3) du_1 du_2 du_3 = \\ = -4 \int_0^1 u_1 \left(\int_0^1 u_3^4 du_3 - \int_0^1 u_2^4 du_2 \right) du_1 - 4 \int_0^1 u_3 \left(\int_0^1 u_2^4 du_2 - \int_0^1 u_1^4 du_1 \right) du_3 - \\ - 4 \int_0^1 u_2 \left(\int_0^1 u_3^4 du_3 - \int_0^1 u_1^4 du_1 \right) du_2 + 4 \int_0^1 u_1 du_1 \cdot \int_0^1 u_2 du_2 \cdot \int_0^1 u_3 du_3 = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Понятие интеграла от дифференциальной 1-формы $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ по ориентированному простому многообразию первого порядка (т. е. по кривой) $M = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \varphi(u), u \in \langle a; b \rangle\}$ является обобщением понятия криволинейного интеграла второго рода в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 , рассмотренного в § 16.3. При этом

обозначение $\int_M P dx + Q dy + R dz$ криволинейного интеграла второго рода обретает смысл интеграла от формы работы $\omega_{\vec{F}} = P dx + Q dy + R dz$ соответствующего векторного поля $\vec{F} = (P, Q, R)$. Представление подынтегрального выражения в виде $\vec{F} \cdot \vec{\tau} dt$ и есть перенос формы $\omega_{\vec{F}}$ с M на $\langle a; b \rangle$. Направленность криволинейного интеграла второго рода соотносится с выбором ориентации на M , линейность есть линейность интеграла $\int_M \omega_{\vec{F}}$, аддитивность даёт возможность рассматривать интеграл от формы по более широкому классу многообразий аналогично переходу от простых гладких кривых к кусочно-гладким.

Аналог формулы Ньютона — Лейбница (свойство 4 на с. 162) в терминах дифференциальных форм формулируется так:

если дифференциальная 1-форма ω точная, т. е.

$$\omega = df, \quad f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{и} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \varphi(u), \quad u \in [a; b]\},$$

$$\text{то} \quad \int_M \omega = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)).$$

Если D есть простейшая область в \mathbb{R}^n — шар или брус, то можно воспользоваться леммой Пуанкаре (см. с. 204) для выяснения точности формы и свойством аддитивности для нахождения функции f с помощью интегрирования по отрезкам, параллельным координатным осям, подобно тому как это делалось в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 .

Точно так же понятие интеграла от дифференциальной $(n-1)$ -формы $\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$ по ориентированному простому гладкому многообразию размерности $n-1$, $n \geq 3$, является обобщением понятия поверхностного интеграла второго рода, рассмотренного в § 16.4. При этом обозначение $\int_M P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ криволинейного интеграла второго рода обретает смысл интеграла от формы потока $\omega_{\vec{F}} = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ векторного поля $\vec{F} = (P, Q, R)$.

Пример 16.75. Покажем, что форма $\omega = 2xy dx + (x^2 - 2yz) dy - y^2 dz$ точна, и найдём функцию f , для которой $\omega = df$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку коэффициенты формы ω непрерывны в \mathbb{R}^3 и

$$\begin{aligned} d\omega &= 2(x dy + y dx) \wedge dx + 2(x dx - y dz - z dy) \wedge dy - 2y dy \wedge dz = \\ &= 2x dy \wedge dx + 2x dx \wedge dy - 2y dz \wedge dy - 2y dy \wedge dz = 0, \end{aligned}$$

в силу леммы Пуанкаре искомая функция f определена всюду на \mathbb{R}^3 . Рассмотрим отрезки, параллельные осям координат:

$$l = \{(t, 0, 0) : t \in [0; x]\}, \quad m = \{(x, t, 0) : t \in [0; y]\}, \quad n = \{(x, y, t) : t \in [0; z]\}.$$

Тогда

$$f(x, y, z) - f(0, 0, 0) = \int_l \omega + \int_m \omega + \int_n \omega = \int_0^x 0 dt + \int_0^y x^2 dt - \int_0^z y^2 dt = x^2 y - y^2 z.$$

Итак, $f(x, y, z) = x^2 y - y^2 z + C$. □

Пример 16.76. Покажем, что форма

$$\omega = (2x_1x_2 + x_5^2) dx_1 + (x_1^2 - 2x_2x_3) dx_2 + (2x_3x_4 - x_2^2) dx_3 + \\ + (x_3^2 - 2x_4x_5) dx_4 + (2x_1x_5 - x_4^2) dx_5$$

точна и найдём функцию f , для которой $\omega = df$.

РЕШЕНИЕ. Справедливы равенства

$$d\omega = (2x_2 dx_1 + 2x_1 dx_2 + 2x_5 dx_5) \wedge dx_1 + (2x_1 dx_1 - 2x_3 dx_2 - 2x_2 dx_3) \wedge dx_2 + \\ + (2x_4 dx_3 + 2x_3 dx_4 - 2x_2 dx_2) \wedge dx_3 + (2x_3 dx_3 - 2x_5 dx_4 - 2x_4 dx_5) \wedge dx_4 + \\ + (2x_5 dx_1 + 2x_1 dx_5 - 2x_4 dx_4) \wedge dx_5 = \\ = (-2x_1 + 2x_1) dx_1 \wedge dx_2 + (-2x_5 + 2x_5) dx_1 \wedge dx_5 + (2x_2 - 2x_2) dx_2 \wedge dx_3 + \\ + (-2x_3 + 2x_3) dx_3 \wedge dx_4 + (2x_4 - 2x_4) dx_4 \wedge dx_5 = 0.$$

Коэффициенты формы ω непрерывны в \mathbb{R}^5 , поэтому в силу леммы Пуанкаре искомая функция f определена всюду на \mathbb{R}^5 . Рассмотрим отрезки, параллельные осям координат:

$$l_1 = \{(t, 0, 0, 0, 0) : t \in [0; x_1]\}, \quad l_2 = \{(x_1, t, 0, 0, 0) : t \in [0; x_2]\}, \\ l_3 = \{(x_1, x_2, t, 0, 0) : t \in [0; x_3]\}, \quad l_4 = \{(x_1, x_2, x_3, t, 0) : t \in [0; x_4]\}, \\ l_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, t) : t \in [0; x_5]\}.$$

Тогда

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) - f(0, 0, 0, 0, 0) = \\ = \sum_{i=1}^5 \int_{l_i} \omega = \int_0^{x_1} 0 dt + \int_0^{x_2} x_1^2 dt - \int_0^{x_3} x_2^2 dt + \int_0^{x_4} x_3^2 dt + \int_0^{x_5} (2x_1t - x_4^2) dt = \\ = x_1^2x_2 - x_2^2x_3 + x_3^2x_4 + x_5^2x_1 - x_4^2x_5.$$

Итак, $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2x_2 - x_2^2x_3 + x_3^2x_4 - x_4^2x_5 + x_5^2x_1 + C$. \square

Приведём решения примеров 16.29 и 16.30 из § 16.3 и примеров 16.43 и 16.44 из § 16.4 в терминах дифференциальных форм.

Пример 16.77. Вычислим $\int_L (x + y) dx - (x - y) dy$, где L — петля кривой, заданной уравнением $r = a \cos 3\varphi$ ($a > 0$), пересекающая полярную ось с положительным направлением обхода (декартова и полярная системы координат совмещены).

РЕШЕНИЕ. Положительному обходу кривой соответствует изменение φ от $-\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{6}$, следовательно, петля L как ориентированное простое многообразие может быть записана так:

$$L = \{(x, y) = \theta(\varphi) : x = a \cos 3\varphi \cos \varphi, y = a \cos 3\varphi \sin \varphi, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]\}.$$

Рассмотрим перенос подынтегральной формы на полуинтервал $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$:

$$\begin{aligned} \theta^*((x+y) dx - (x-y) dy) &= \\ &= a \cos 3\varphi (\cos \varphi + \sin \varphi) a (-3 \sin 3\varphi \cos \varphi - \cos 3\varphi \sin \varphi) d\varphi - \\ &\quad - a \cos 3\varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) a (-3 \sin 3\varphi \sin \varphi + \cos 3\varphi \cos \varphi) d\varphi = \\ &= -a^2 \cos 3\varphi (3 \sin 3\varphi + \cos 3\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int_L (x+y) dx - (x-y) dy &= \int_L \omega = \\ &= -a^2 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos 3\varphi (3 \sin 3\varphi + \cos 3\varphi) d\varphi = -\frac{a^2}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi = -\frac{\pi a^2}{6}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.78. Вычислим $\int_{\check{A}B} z dx + 2x dy - y dz$, где

$$\begin{aligned} \check{A}B &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 2ax, az = xy, z \geq 0\} \quad (a > 0), \\ A &= (0; 0; 0), \quad B = (2a; 0; 0). \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ. Используем гладкую параметризацию кривой $\check{A}B$ (см. с. 166):

$$\check{A}B = \{(x, y, z) : x = a(1 - \cos t), y = a \sin t, z = a \sin t(1 - \cos t)\}$$

и запишем $\check{A}B$ как ориентированное простое многообразие:

$$\begin{aligned} \check{A}B &= \{(x, y, z) = \varphi(t) : x = a(1 - \cos t), y = a \sin t, \\ &\quad z = a \sin t(1 - \cos t), t \in [0; \pi]\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим перенос подынтегральной формы на $[0; \pi]$:

$$\begin{aligned} \varphi^*(z dx + 2x dy - y dz) &= \\ &= a^2 (\sin t(1 - \cos t) \sin t + 2(1 - \cos t) \cos t - \sin t(\cos t - \cos^2 t + \sin^2 t)) dt = \\ &= a^2 ((2 - \sin^2 t - \sin t) \cos t + (1 - 2 \cos^2 t)(-\sin t) - 3 \cos^2 t + 1) dt. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int_{\check{A}B} z dx + 2x dy - y dz &= \int_{\check{A}B} \omega = \\ &= a^2 \int_0^\pi \left((2 - \sin^2 t - \sin t) \cos t + (1 - 2 \cos^2 t)(-\sin t) - \frac{3}{2} \cos 2t - \frac{1}{2} \right) dt = \\ &= a^2 \left(\cos t - \frac{2}{3} \cos^3 t \right) \Big|_0^\pi - \frac{\pi}{2} a^2 = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \right) a^2. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.79. Вычислим $\iint_S x dy \wedge dz - y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, где S — внеш-

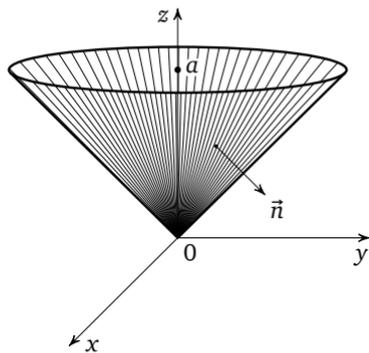
няя сторона части конуса $z^2 = x^2 + y^2$, лежащая выше плоскости xOy и внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$).

РЕШЕНИЕ. Условие $z \geq 0$ позволяет представить поверхность S в виде

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in \bar{D}, z = \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

$$D = \{x^2 + y^2 < a^2\}.$$

Переведём определение ориентации поверхности S на язык ориентации простого гладкого многообразия. Внешняя нормаль к поверхности рассматриваемого конуса направлена от оси Oz и в точках, лежащих выше плоскости xOy , образует с осью Oz тупой угол (см. рис.), следовательно, задана нижняя сторона поверхности S , что соответствует упорядоченной паре параметров (y, x) . Запишем выражение ориентированной поверхности как ориентированного простого многообразия:



$$S = \{u \in \mathbb{R}^3 : u = \varphi(y, x) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}), (x, y) \in \bar{D}\}, \quad D = \{x^2 + y^2 < a^2\}.$$

Перенесём подынтегральную форму на D :

$$\varphi^* dy \wedge \varphi^* dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial x} \end{vmatrix} dx \wedge dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx \wedge dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \wedge dy,$$

$$\varphi^* dz \wedge \varphi^* dx = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial x} \end{vmatrix} dx \wedge dy = \frac{\partial z}{\partial y} dx \wedge dy = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \wedge dy,$$

$$\varphi^* dx \wedge \varphi^* dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial x} \end{vmatrix} dx \wedge dy = -dx \wedge dy,$$

$$\begin{aligned} \varphi^*(x dy \wedge dz - y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) &= \\ &= x \varphi^* dy \wedge \varphi^* dz - y \varphi^* dz \wedge \varphi^* dx + \sqrt{x^2 + y^2} \varphi^* dx \wedge \varphi^* dy = \\ &= \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx \wedge dy = -\frac{2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \iint_S x dy \wedge dz - y dz \wedge dx + z dx \wedge dy &= \iint_S \omega = \\ &= -2 \iint_D \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = -2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^a r^2 dr = -\frac{2}{3} \pi a^3. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 16.80. Вычислим $\iint_S xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + zx dx \wedge dy$, где S — левая сторона поверхности

$$S = \{(x, y, z) : x = 2u + v^2, y = u^2 - 2v, z = 2uv, (u, v) \in \bar{D}\}, \quad D = (0; 1) \times (0; 1).$$

РЕШЕНИЕ. Корректность задания стороны поверхности S проверена в примере 16.44. Перенесём подынтегральную дифференциальную форму на D :

$$\varphi^*(dy \wedge dz) = \begin{vmatrix} -2 & 2u \\ 2u & 2v \end{vmatrix} du \wedge dv = (-4u^2 - 4v) du \wedge dv,$$

$$\varphi^*(dz \wedge dx) = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2v & 2 \end{vmatrix} du \wedge dv = (4u - 4v^2) du \wedge dv,$$

$$\varphi^*(dx \wedge dy) = \begin{vmatrix} 2v & 2 \\ -2 & 2u \end{vmatrix} du \wedge dv = (4uv + 4) du \wedge dv,$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} \varphi^*(xy \, dy \wedge dz + yz \, dz \wedge dx + zx \, dx \wedge dy) &= \\ &= 4((u^2 + v)(2u + v^2)(2v - u^2) + 2uv(u^2 - 2v)(u - v^2) + \\ &\quad + 2uv(2u + v^2)(uv + 1)) du \wedge dv = \\ &= 4(2v^4 + u(4v^4 + 2v^3 + 4v^2) + u^2(4v - 4v^2 + v^3 + 2v^4) + u^3(2v + 4v^2 - 2v^3) + \\ &\quad + u^4(2v - v^2) - 2u^5) du \wedge dv. \end{aligned}$$

В итоге находим

$$\begin{aligned} \iint_S xy \, dy \wedge dz + yz \, dz \wedge dx + zx \, dx \wedge dy &= \iint_D \omega = \\ &= 4 \iint_D ((u^2 + v)(2u + v^2)(2v - u^2) + 2uv(u^2 - 2v)(u - v^2) + \\ &\quad + 2uv(2u + v^2)(uv + 1)) du \, dv = \\ &= 4 \int_0^1 dv \int_0^1 (2v^4 + u(4v^4 + 2v^3 + 4v^2) + u^2(4v - 4v^2 + v^3 + 2v^4) + \\ &\quad + u^3(2v + 4v^2 - 2v^3) + u^4(2v - v^2) - 2u^5) du = \\ &= 4 \int_0^1 \left(2v^4 + 2v^4 + v^3 + 2v^2 + \frac{4}{3}v - \frac{4}{3}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{3}v^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}v + v^2 - \frac{1}{2}v^3 + \frac{2}{5}v - \frac{1}{5}v^2 - \frac{1}{3} \right) dv = \frac{869}{90}. \quad \square \end{aligned}$$

16.6.4. Общая формула Стокса

Пусть U — область в \mathbb{R}^q , $q \geq 2$, а её граница $\Gamma = \partial U$ является ориентированным простым многообразием: $\Gamma = \{\gamma(t_1, t_2, \dots, t_{q-1}) : t \in I\}$, $I \subset \mathbb{R}^{q-1}$. Тогда в каждой точке $u \in \Gamma$ определены касательные векторы $\vec{\tau}_j = \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t_j}, \dots, \frac{\partial \gamma_q}{\partial t_j} \right)$,

$1 \leq j \leq q-1$, и нормальный вектор

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_q \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \gamma_q}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial t_{q-1}} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial t_{q-1}} & \dots & \frac{\partial \gamma_q}{\partial t_{q-1}} \end{vmatrix}.$$

Ориентация Γ называется *положительной*, если определитель матрицы перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_q$ к базису $\vec{n}, \vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_{q-1}$ положителен, т. е. эти базисы относятся к одному классу ориентации базисов.

Пусть, далее, $M = \{\varphi(u_1, u_2, \dots, u_q) : u \in \bar{U}\}$ — ориентированное простое многообразие в \mathbb{R}^n , $n \geq q$. Множество $L = \varphi(\Gamma)$ называется *краем многообразия* M . Оно само является ориентированным простым многообразием: $L = \{\varphi(\gamma(t)) : t \in I\}$. При этом ориентации многообразия M и его края L называются *согласованными*, если ориентация многообразия Γ положительна.

Теорема (общая формула Стокса). Пусть G — область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $M \subset G$ — ориентированное простое q -мерное многообразие с краем ∂M , $2 \leq q \leq n$, причём ориентации M и ∂M согласованы, ω — гладкая $(q-1)$ -форма в G . Тогда

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Покажем, что формулы Грина (с. 166), Гаусса — Остроградского (с. 182) и Стокса (с. 184) являются частными случаями общей формулы Стокса.

Пусть D — область в \mathbb{R}^2 с положительно ориентированной границей ∂D , а $\vec{F} = (P, Q)$ — гладкое векторное поле в \bar{D} . Положим $q = n = 2$ и рассмотрим двумерное многообразие $M = \{\varphi(x, y) : (x, y) \in D\}$, где $\varphi(x, y) = (x, y)$, т. е. $M = D$, и 1-форму работы $\omega = \omega_{\vec{F}} = P dx + Q dy$. При указанном обходе кривой $\partial D = \{(x(t), y(t)) : t \in (a; b)\}$ касательный вектор есть $\vec{\tau} = (x'(t), y'(t))$, а вектор нормали равен

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} = (y'(t), -x'(t)),$$

поэтому определитель матрицы перехода от базиса \vec{e}_1, \vec{e}_2 к базису $\vec{n}, \vec{\tau}$ равен

$$\begin{vmatrix} y' & x' \\ -x' & y' \end{vmatrix} = |\vec{\tau}|^2 > 0, \text{ так что условие согласованности ориентаций многообразия и его границы выполняется. В итоге, поскольку}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

закключаем, что справедливо равенство (формула Грина):

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Далее, пусть D — область в \mathbb{R}^3 с границей ∂D , ориентированной полем внешних нормалей, а $\vec{F} = (P, Q, R)$ — гладкое векторное поле в \bar{D} . Положим $q = n = 3$ и рассмотрим трёхмерное многообразие

$$M = \{\varphi(x, y, z) : (x, y, z) \in D\}, \quad \text{где } \varphi(x, y, z) = (x, y, z), \quad \text{т. е. } M = D,$$

и 2-форму потока $\omega = \omega_{\vec{F}} = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$. Тогда для касательных к $\partial D = \{r(s, t) : (s, t) \in I\}$ векторов \vec{r}'_s и \vec{r}'_t и вектора внешней нормали

$\vec{n} = \frac{\vec{r}'_s \times \vec{r}'_t}{|\vec{r}'_s \times \vec{r}'_t|}$ получаем, что определитель матрицы перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{n}, \vec{r}'_s, \vec{r}'_t$ равен $\vec{n} \cdot (\vec{r}'_s \times \vec{r}'_t) = \frac{1}{|\vec{r}'_s \times \vec{r}'_t|} > 0$, и поэтому условие согласованности ориентаций многообразия и его границы выполняется. В итоге, поскольку

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dz \wedge dx + \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

закключаем, что справедливо равенство (формула Гаусса — Остроградского):

$$\iint_{\partial D} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Наконец, пусть G — область в \mathbb{R}^3 , ориентированный контур L и натянутая на L ориентированная поверхность S лежат в G , причём ориентации контура и поверхности согласованы, а $\vec{F} = (P, Q, R)$ — гладкое векторное поле в \bar{G} . Положим $n = 3$, $q = 2$ и рассмотрим двумерное многообразие $M = S$ с границей $\partial M = L$ и 1-форму работы $\omega = \omega_{\vec{F}} = P dx + Q dy + R dz$. Тогда, поскольку

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz = \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy + \\ &\quad + \frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

закключаем, что справедливо равенство (формула Стокса):

$$\begin{aligned} \int_L P dx + Q dy + R dz &= \int_{\partial M} \omega = \\ &= \int_M d\omega = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Задачи¹

Вычислить криволинейный интеграл первого рода (16.1–16.12).

$$\checkmark 16.1. \int_L y ds, L = \{(x, y) : y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}.$$

$$16.2. \int_L xy ds, L = \{(x, y) : x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in [0; 2\pi]\}.$$

$$16.3. \int_L x^2 y ds, L = \{(x, y) : x = 4 \cos t, y = \sin 2t, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$16.4. \int_L y ds, L - \text{дуга параболы } y^2 = 2x \text{ от точки } A(2, -2) \text{ до точки } B(8, 4).$$

$$16.5. \int_L \frac{ds}{x^2 + y^2}, L = \{(x, y) : x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t, t \in [0; 2\pi]\}.$$

$$\checkmark 16.6. \int_L y^2 ds, L = \{(x, y) : y = \max\{2\sqrt{x}, 2x\}, 0 \leq x \leq 2\}.$$

$$16.7. \int_L 4xy ds, L = \{(x, y) : y = \min\{\frac{x^2}{a}, \sqrt{2a^2 - x^2}\}, x \geq 0\}.$$

$$\checkmark 16.8. \int_L (2x + z^2 y) ds, L = \{(x, y, z) : x = \frac{t^2}{2}, y = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}, z = t, t \in [0; 1]\}.$$

$$16.9. \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds, L = \{(x, y, z) : x = \cos t, y = \sin t, z = t, t \in [0; 2\pi]\}.$$

$$\checkmark 16.10. \int_L \frac{z^2 ds}{x^2 + y^2}, L = \{(x, y, z) : x = a \cos t, y = a \sin t, z = at, t \in [0; 2\pi]\}.$$

$$\checkmark 16.11. \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds \text{ от точки } A(0, 0, 0) \text{ до точки } B(2a\pi, 0, 0) \text{ кривой}$$

$$L = \{(x, y, z) : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a \sin \frac{t}{2}\}.$$

$$16.12. \int_L ye^{-x} ds, L = \{(x, y) : x = \ln(1 + t^2), y = 2 \arctg t - t + 3, t \in [0; 1]\}.$$

Найти какое-либо параметрическое представление заданной линии в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$ (если кривая задана уравнением в полярной системе координат, то x и y суть координаты точек этой кривой в совмещённой декартовой системе) (16.13–16.34).

16.13. Отрезок AB , соединяющий точки

а) $A(1, 2)$ и $B(-1, 3)$; б) $A(2, 3)$ и $B(5, 3)$; в) $A(-1, 2)$ и $B(-1, 5)$.

16.14. Часть параболы $y = x^2$, соединяющая точки $A(1, 1)$ и $B(3, 9)$.

$$\checkmark 16.15. \text{ Гипербола } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \checkmark 16.16. \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1.$$

$$\checkmark 16.17. x^{2/5} + y^{2/5} = a^{2/5}. \quad 16.18. r = a \cos \varphi.$$

$$\checkmark 16.19. r = a(1 + \cos \varphi). \quad \checkmark 16.20. r = a \cos 3\varphi.$$

$$16.21. r = \frac{a\varphi}{1 + \varphi}, \varphi \geq 0. \quad 16.22. r^2 = a^2 \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi}.$$

¹ Все буквенные параметры в задачах считаются положительными.

16.23. Часть кривой $x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$ от точки $A\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ до $B(0, 0)$.

16.24. Часть кривой $x^4 - y^4 = ax^2y$ между точками A и $B(0, 0)$, если
а) $A(-a\sqrt[4]{2}, -a\sqrt{2})$; б) $A(a\sqrt[4]{8}, a\sqrt{2})$.

✓ **16.25.** $x^3 = axy - ay^2$.

16.26. $x^4 = axy^2 + ay^3$.

✓ **16.27.** $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

16.28. $(x^2 + y^2)^3 = 2a^4(x^2 - y^2)$.

16.29. $a^2y^4 = x^4(a^2 - x^2)$.

16.30. а) $(x + y)^{2/3} - (x - y)^{2/3} = a^{2/3}$; б) $(x + y) = (x - y)^2$.

16.31*. а) $(y - x)^2 = a^2 - x^2$; б) $(y - x)^2 = a^2 + x^2$.

16.32. $x^4 - y^4 + xy = 0$ от точки $A\left(\sqrt{\frac{2}{15}}, 2\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$ до точки $B(0, 0)$.

16.33. $x^6 + y^6 = a^2x^4 + b^2y^4$. **16.34.** $y^2(a - x) = x^2(a + x)$.

Найти какое-либо параметрическое представление заданной линии в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in T$ (16.35—16.40).

✓ **16.35°.** Отрезок AB , соединяющий точки

а) $A(1, 2, 3)$ и $B(-1, 3, -4)$; б) $A(-1, 2, 1)$ и $B(-1, 2, 4)$;

в) $A(1, 3, -1)$ и $B(2, 3, 0)$.

16.36. а) $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 2$; б) $x^2 + y^2 = R^2$, $x + y = z$.

✓ **16.37.** а) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{2}$, $z \geq 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$; в) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = xR$.

16.38. $x^2 + y^2 = cz$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$ от точки $\left(\frac{c}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{c}{2}\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \frac{c\pi}{6}\right)$ до точки (x_0, y_0, z_0) .

16.39*. $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$, $(x - y)^2 = a(x + y)$ от точки $A(0, 0, 0)$ до точки $B(x_0, y_0, z_0)$.

16.40*. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ch}\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = a$ от точки $A(a, 0, 0)$ до точки $B(x_0, y_0, z_0)$ ($z_0 \geq 0$).

При помощи надлежащей параметризации кривой L вычислить криволинейный интеграл первого рода (16.41—16.56).

16.41°. $\int_L \frac{ds}{x - y}$, L — отрезок AB , где $A(0, -2)$, $B(4, 0)$.

16.42. $\int_L (x^2 + y) ds$, L — отрезок AB , где $A(0, 1)$, $B(-2, 3)$.

✓ **16.43.** $\int_L xy ds$, L — контур квадрата, ограниченного прямыми $x \pm y = 1$, $x \pm y = -1$.

16.44°. $\int_L (x^2 + y^2)^n ds$, $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 = a^2\}$.

16.45. $\int_L xy ds$, L — четверть окружности $x^2 + y^2 = 1$, лежащая в первом квадранте.

16.46°. $\int_L (x + y) ds$, $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 = ax\}$.

✓ **16.47.** $\int_L (4x^2 - y^2) ds$, $L = \{(x, y) : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}\}$.

$$\sqrt{16.48.} \int_L x ds, L - \text{верхняя половина кривой } r = 1 + \cos \varphi \ (y \geq 0).$$

$$16.49. \int_L y^3 ds, L - \text{петля кривой } r = a \cos 4\varphi, -\frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8}.$$

$$16.50^* \int_L |y| ds, L - \text{кривая } r = a(2 + \cos \varphi).$$

$$16.51. \int_L (x + 4y) ds, L = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x \geq 0\}.$$

$$16.52. \int_L (x^3 + y^3) ds, L = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$16.53. \int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds,$$

$$L = \{(x, y, z) : x = \sqrt{z} \cos \sqrt{z}, y = \sqrt{z} \sin \sqrt{z}, z \in [0; \pi^2]\}.$$

$$\sqrt{16.54.} \int_L y^2 ds, L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0\}.$$

$$16.55^* \int_L |y| ds, L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = ax\}.$$

$$16.56^* \int_L xz ds, L = \{(r, \varphi, z) : r = a(1 + \cos \varphi), z = 4a\left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right)\}.$$

Найти площадь цилиндрической поверхности, ограниченной поверхностью $z = f_1(x, y)$ снизу и поверхностью $z = f_2(x, y)$ сверху (16.57–16.64).

$$16.57^\circ: y = x^2, 1 \leq x \leq 2, f_1 = 0, f_2 = x + y.$$

$$16.58^\circ: y = \frac{3}{8}x^2, 0 \leq x \leq 4, f_1 = 0, f_2 = x.$$

$$\sqrt{16.59^\circ:} y^2 = 2x, f_1 = 0, f_2 = \sqrt{2x - 4x^2}.$$

$$16.60^\circ: y = x^2, 0 \leq x \leq 1, f_1 = 0, f_2 = x.$$

$$16.61^\circ: x^2 + y^2 = R^2, f_1 = 0, f_2 = \frac{xy}{2R}.$$

$$\sqrt{16.62^\circ:} x^2 + y^2 = R^2, f_1 = 0, f_2 = R + \frac{x^2}{R}.$$

$$16.63. x^2 + y^2 = ax, f_1 = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, f_2 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

$$16.64. y^2 = \frac{4}{9}(x - 1)^3, f_1 = 0, f_2 = 2 - \sqrt{x}.$$

$\sqrt{16.65.}$ Найти площадь части цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$, заключённой внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

16.66°: Найти массу дуги кривой $y = \ln x, 0 < a \leq x \leq b$, если плотность кривой в каждой точке равна квадрату её абсциссы.

16.67°: Найти массу треугольника с вершинами $A(0, 0), B(3, 0), C(0, 4)$, если его плотность в точке $M(x, y)$ равна $\frac{x}{3} + \frac{y}{4}$.

16.68. Найти массу участка $AB, A(0, a), B(x_0, y(x_0)), x_0 > 0$, цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, если плотность в каждой точке равна k/y .

16.69. Найти массу полуокружности $x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0$, если плотность в каждой её точке равна кубу ординаты этой точки.

✓ **16.70.** Найти массу дуги винтовой линии $x = a \sin t$, $y = a \cos t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$, если плотность в каждой её точке равна:

а) квадрату аппликаты; б) длине радиус-вектора точки.

16.71*. Найти статический момент относительно оси Ox однородной полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$, плотности ρ .

✓ **16.72.** Найти статические моменты относительно осей координат однородной дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, плотности ρ .

Найти моменты инерции однородной дуги L плотности ρ (16.73—16.81).

16.73*: $L = \{(x, y) : x + 2y = 3, 1 \leq x \leq 2\}$ относительно оси Ox .

✓ **16.74.** $L = \{(x, y) : y^2 = x, 1 \leq x \leq 2\}$ относительно оси Ox .

16.75. $L = \{(x, y) : 2y = x^2 + 1, 0 \leq x \leq 1\}$ относительно осей координат.

16.76. L — ломаная ABC , соединяющая точки $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(4, -1)$, относительно осей координат.

16.77*: $L = \{(x, y) : x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq \tau\}$ относительно осей координат.

16.78. $L = \{(x, y) : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$ относительно оси Ox .

16.79*: $L = \{(x, y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, 0 \leq x \leq a\}$ относительно оси Ox .

✓ **16.80.** $L = \{(x, y) : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, x \geq 0, y \geq 0\}$ относительно осей координат.

✓ **16.81.** $L = \{(x, y, z) : x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{ht}{2\pi}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ относительно осей координат.

16.82. Найти момент инерции витка конической винтовой линии $x = at \cos \pi t$, $y = at \sin \pi t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2$ с плотностью $\rho = kz$ относительно: а) оси Oz ; б) плоскости xOy ; в) начала координат.

Найти координаты центра масс однородной кривой L (16.83—16.94).

✓ **16.83*:** $L = \{(x, y) : y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, 0 \leq x \leq a\}$.

16.84. $L = \{(x, y) : x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y, 1 \leq y \leq 2\}$.

16.85*: $L = \{(x, y) : x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq \beta\}$ ($0 < \beta < 2\pi$).

16.86. а) $L = \{(x, y) : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq \pi\}$;

б) $L = \{(x, y) : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

16.87*: $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

16.88. $L = \{(x, y) : 3ay^2 = ax^2 - x^3, x \geq 0\}$.

16.89. $L = \{(r, \varphi) : r = a(1 + \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.

16.90*: $L = \{(x, y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}\}$.

16.91. а) $L = \{(x, y) : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, y \geq 0\}$;

б) $L = \{(x, y) : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, x \geq 0, y \geq 0\}$.

16.92*: $L = \{(x, y, z) : x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

✓ **16.93.** $L = \{(x, y, z) : x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, t \leq 0\}$.

$$16.94. L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, |y| = x, z \geq 0\}.$$

16.95. Найти координаты центра масс дуги винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq \pi$, если её плотность в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

16.96. Найти координаты центра масс дуги

$$L = \{(x, y, z) : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a \sin \frac{t}{2}, 0 \leq t \leq 2\pi\},$$

если её плотность в каждой точке пропорциональна аппликате.

16.97. Найти силу притяжения однородной полуокружностью массой M и радиусом R массы m , помещённой в центре окружности.

16.98. Найти силу, с которой однородная прямая плотности ρ притягивает материальную точку единичной массы, находящуюся от прямой на расстоянии h .

16.99. Найти силу притяжения дугой астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, единичной массы, помещённой в начале координат, если плотность астроида в каждой её точке равна кубу расстояния от этой точки до начала координат.

Вычислить интеграл (16.100—16.120).

$$\sqrt{16.100}^{\circ} \iint_S (xy + yz + zx) d\sigma, S = \{(x, y, z) : z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 2ax\}.$$

$$16.101^{\circ} \iint_S (x^2 + y^2) d\sigma, \text{ где } S = \partial V, V = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}.$$

$$16.102. \iint_S \left(x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2}\right) d\sigma,$$

где S — часть параболоида $2z = 2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

$$16.103. \iint_S (x^2 + y^2 + z) d\sigma, \text{ где } S \text{ — полусфера } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0.$$

$$16.104. \iint_S (3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2) d\sigma,$$

где S — часть конуса $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, лежащая между плоскостями $y = 0$, $y = b$.

$$16.105^* \iint_S \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}} d\sigma, \text{ где } S \text{ — часть параболоида } z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}, x \geq 0,$$

лежащая внутри цилиндра $\left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}\right)^2 = a^2\left(\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2}\right)$.

$$16.106^* \iint_S \sqrt{a^2 + y^2 + z^2} d\sigma, \text{ где } S \text{ — часть параболоида } ax = yz, \text{ лежащая}$$

внутри цилиндра $(y^2 + z^2)^2 = 2b^2 yz$.

$$\sqrt{16.107.} \iint_S xyz d\sigma,$$

где S — часть конуса $z^2 = 2xy$, $z \geq 0$, лежащая внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

$$\sqrt{16.108.} \iint_S (xy + yz + xz) d\sigma, \text{ где } S \text{ — часть конуса } x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0, \text{ лежа-$$

щая внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$.

$$\sqrt{16.109.} \iint_S (x + y + z) d\sigma,$$

где S — часть конуса $x^2 = y^2 + z^2$, лежащая внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$.

$$16.110. \iint_S xz d\sigma, \text{ где } S \text{ — часть цилиндра } x^2 + y^2 = 2ax, \text{ лежащая между}$$

конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и параболоидом $z = \frac{x^2 + y^2}{2a}$.

$$\sqrt{16.111.} \iint_S (x - y^2 + z^3) d\sigma, \text{ где } S \text{ — часть цилиндра } x^2 + y^2 = a^2, x \geq 0, \text{ ле-$$

жащая между плоскостями $x + z = 0, x - z = 0$.

16.112. $\iint_S \sqrt{x} d\sigma$, где S — часть цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, лежащая вне гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$.

16.113*. $\iint_S (x - y) d\sigma$, где S — часть цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, лежащая внутри цилиндра $z^2 = a(a - x)$.

$$16.114. \iint_S |xy| d\sigma,$$

где S — поверхность тела, ограниченного цилиндрами $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2$.

$\sqrt{16.115.} \iint_S |x + y| d\sigma$, где S — часть поверхности геликоида $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v, 0 \leq v \leq 2\pi, 0 \leq u \leq 1$.

$\sqrt{16.116.} \iint_S (x + y + z) d\sigma$, где S — часть тора ($b > a$) $x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, z = a \sin \psi, x \geq 0, z \geq 0$.

$$16.117*. \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma,$$

где S — поверхность, полученная вращением кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$ вокруг оси абсцисс (декартова и полярная системы координат совмещены).

$$\sqrt{16.118.} \iint_S (y + z) d\sigma,$$

где S — лежащая в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) часть поверхности, полученная вращением вокруг оси абсцисс арки циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

16.119. $\iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{2 - y^2 - z^2}}$, где S есть поверхность, полученная вращением кривой $L = \{(x, y) : y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$ вокруг оси абсцисс.

16.120. $\iint_S yz d\sigma$, где S — часть поверхности, полученной вращением кривой $y = \cos x, |x| \leq \pi/2$, вокруг оси абсцисс, $z \geq y \geq 0$.

16.121. Вычислить интеграл $I(t) = \iint_S f(x, y, z) d\sigma$, где

а) S — плоскость $x + y + z = t$ и

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\ 0, & x^2 + y^2 + z^2 > 1; \end{cases}$$

б) S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ и

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

16.122°. Найти массу части однородного параболоида $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq 1$, плотности ρ .

16.123*. Найти массу части цилиндра $x^2 + z^2 = 2az$, лежащей внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2$, если плотность в каждой точке равна модулю её ординаты.

16.124. Найти массу части конуса $x^2 = y^2 + z^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, если плотность в каждой точке равна её абсциссе.

✓ **16.125°.** Найти массу части конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 4$, если плотность в каждой точке равна квадрату расстояния от этой точки до вершины.

16.126. Найти статический момент относительно плоскости xOz части цилиндра $x^2 + y^2 = 2Ry$, лежащей между плоскостями $z = 0$ и $z = c$, если плотность в каждой точке равна сумме ординаты и аппликаты точки.

16.127*. Найти момент инерции относительно оси Oz однородной поверхности $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 \geq y^2 + z^2$ плотности ρ .

✓ **16.128.** Найти момент инерции относительно оси Ox однородной поверхности плотности ρ , полученной вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

16.129. Найти момент инерции относительно плоскости xOz части цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, лежащей внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, плотности $\rho = \text{const}$.

16.130. Найти момент инерции относительно плоскости yOz части однородной полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, плотности ρ , лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = ax$.

16.131. Найти моменты инерции относительно плоскости xOy части однородного конуса массой M :

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad x^2 + y^2 \leq R^2 \quad (0 < \alpha < \pi/2).$$

16.132. Найти момент инерции относительно оси Ox поверхности

$$x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, \quad y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, \quad z = a \sin \psi \quad (b > a)$$

постоянной плотности ρ .

16.133°. Найти момент инерции относительно оси Oz части однородного параболоида $x^2 + y^2 = 2cz$, $0 \leq z \leq c$, плотности ρ .

16.134. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного сегмента сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq H$ ($H < R$) плотности ρ .

✓ **16.135°** Найти координаты центра масс:

- а) однородной полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$;
 б) части однородной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
 в) полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$, если плотность в каждой её точке равна расстоянию от этой точки до оси Oz .

16.136. Найти координаты центра масс однородной поверхности, полученной вращением дуги параболы $y^2 = 2px, 0 \leq x \leq p$, вокруг оси Ox .

16.137. Найти координаты центра масс части однородной поверхности:

- а) $x^2 + y^2 = 2cz, 0 \leq z \leq c$; б) $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2}z^2, 0 \leq z \leq H$.

16.138. Найти координаты центра масс однородной поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av, \quad 0 \leq u \leq a, \quad 0 \leq v \leq \pi.$$

16.139. По поверхности кругового цилиндра с радиусом основания R и высотой h распределена масса с постоянной плотностью ρ . Найти притяжение, испытываемое со стороны этой поверхности материальной точкой единичной массы, расположенной в центре основания цилиндра.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по ориентированной кривой L (16.140–16.161).

$$\mathbf{16.140^\circ} \int_L (2a - y) dx + x dy,$$

где L — арка циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\mathbf{16.141^\circ} \int_L \frac{y dx + x dy}{1 + x^2 y^2}, \text{ где } L \text{ — отрезок } AB \text{ от точки } A(0, 0) \text{ до точки } B(1, 1).$$

16.142° $\int_L (-x^2 y dx + xy^2 dy), L = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$, где окружность L проходимся в положительном направлении.

$$\mathbf{16.143.} \int_L y dx - (y + x^2) dy,$$

где L — дуга параболы $y = 2x - x^2$ от точки $A(2, 0)$ до точки $B(0, 0)$.

$$\checkmark \mathbf{16.144.} \int_L x dy + 2y dx,$$

где L — контур, образованный линиями $y = 0, y = x, y = \sqrt{1 - x^2}$ с положительным направлением обхода.

$$\mathbf{16.145.} \int_L (x + y) dx - xy dy,$$

где L — дуга кривой $x^{1/4} + y^{1/4} = a^{1/4}$ от точки $A(0, a)$ до точки $B(a, 0)$.

$$\mathbf{16.146.} \int_L xy^2 dx - x^2 y dy,$$

где $L = \{(x, y) : 2(x + y) = (x - y)^2\}$, от точки $A(0, 2)$ до точки $B(2, 0)$.

$$\mathbf{16.147.} \int_L xy dx - x^2 dy,$$

где $L = \{(x, y) : x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 = 0\}$, от точки $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8})$ до точки $(0, 0)$.

$$\sqrt{16.148.} \int_L y^3 dy - 2xy^2 dx,$$

где L — часть кривой $x^3 + 2x^2 + y^2 = 3$ от точки $A(-1, \sqrt{2})$ до точки $B(1, 0)$.

$$16.149. \int_L (y + \pi) dx + x \cos y dy,$$

где L — часть кривой $\pi \ln x - y + \sin y = 0$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(e, \pi)$.

$$\sqrt{16.150.} \int_L x^2 dy - xy dx, \text{ где } L \text{ — часть кривой } x^4 - y^4 = 6x^2 y \text{ от точки } A \text{ до}$$

точки B , если а) $A(-4\sqrt{2}, 4), B(0, 0)$; б) $A(0, 0), B(2\sqrt{2}, 4)$.

$$16.151. \int_L x dy - y dx,$$

где L — часть кривой $x(x - y)^2 + y = 0$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B\left(\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}\right)$.

$$16.152. \int_L x dy - y dx,$$

где L — часть кривой $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ от точки $A(a, 0)$ до точки $B(0, a)$.

$$16.153. \int_L \frac{dx + dy}{|x| + |y|},$$

где L — контур квадрата $|x| + |y| = 1$ с положительным направлением обхода.

$$\sqrt{16.154.} \int_L xy dx - x^3 y^3 dy, \text{ где } L \text{ — контур квадрата } |x - y| + |x + y| = 1 \text{ с от-}$$

рицательным направлением обхода.

$$16.155. \int_L (2a - y) dx + x dy,$$

где L — арка циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

$$16.156. \int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dy - dx, \text{ где } L = \widetilde{OA}_{(1)} \cup \widetilde{AO}_{(2)}, \widetilde{OA}_{(1)} \text{ — дуга параболы}$$

$y = x^2, \widetilde{AO}_{(2)}$ — отрезок прямой $y = x$, соединяющие точки $O(0, 0)$ и $A(1, 1)$.

$$\sqrt{16.157.} \int_L y dx + z dy + x dz, \text{ где } L \text{ — виток винтовой линии } x = a \cos t,$$

$y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$.

$$16.158. \int_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz, \text{ где } L \text{ — окружность}^1 x^2 + y^2 +$$

$+ z^2 = a^2, y = x \operatorname{tg} \alpha, 0 < \alpha < \pi$, проходима против часовой стрелки на правой стороне указанной плоскости.

$$16.159. \int_L xz dx + ax dy - x^2 dz, \text{ где } L \text{ — часть кривой } az = xy, x + y + z = a,$$

$x \geq 0, y \geq 0$ от точки $A(0, a, 0)$ до точки $B(a, 0, 0)$.

$$\sqrt{16.160.} \int_L yz dx + ay dz - az dy, \text{ где } L \text{ — часть кривой } x^2 + y^2 = z^2, y^2 +$$

$+ x^2 = ax, y \geq 0, z \geq 0$, от точки $A(0, 0, 0)$ до точки $B(a, 0, a)$.

¹ Здесь и далее кривая может задаваться перечислением поверхностей, пересечением которых она является.

16.161. $\int_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$, где L — часть кривой $x^2 + y^2 = r^2$, $z = H$ от точки $(r, 0, H)$ до точки $(-r, 0, H)$, проходящая через точку $(0, r, H)$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода, используя формулу Грина и при необходимости замыкая кривую (16.162–16.175).

✓ **16.162°** $\int_L (x + y) dx - (x - y) dy$, где L — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, проходимый по часовой стрелке.

16.163° $\int_L (x^2 - y^2) dx + 2xy dy$, где L — контур треугольника с вершинами $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 3)$ и положительным направлением обхода.

16.164° $\int_L xy dx + 2xy^2 dy$, где L — контур треугольника с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(0, 0)$ и отрицательным направлением обхода.

16.165. $\int_L (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$, где L — ломаная ABC , где $A(0, 0)$, $B(2, 2)$, $C(0, 1)$.

✓ **16.166.** $\int_L x^3 y^3 dx + (x - y)^2 dy$, где L — ломаная ABC , где $A(2, 1)$, $B(0, 3)$, $C(-2, 1)$.

16.167. $\int_L e^x ((1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy)$, где L — проходимая в положительном направлении кривая, ограничивающая область $D = \{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < \sin x\}$.

✓ **16.168.** $\int_L (4xy - 15x^2 y) dx + (2x^2 - 5x^3 + 7) dy$, где L — часть кривой

а) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ от точки $A(1 - \sqrt{3}, 0)$ до точки $B(1, 0)$;

б) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ от точки $A(1 - \sqrt{3}, 0)$ до точки $B(1 + \sqrt{3}, 0)$.

16.169. $\int_L x dy + y dx$, где L — часть кривой $y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{4}{\pi^2}, & x \neq 0, \\ \frac{4}{\pi^2}, & x = 0, \end{cases}$ от точки $A(0, \frac{4}{\pi^2})$ до точки $B(\frac{2}{\pi}, \frac{8}{\pi^2})$.

✓ **16.170.** $\int_L (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$, где L — часть окружности

а) $x^2 + y^2 = ax$ ($y \leq 0$) от точки $A(0, 0)$ до точки $B(a, 0)$;

б) $x^2 + y^2 = ax$ ($x \leq \frac{a}{2}$) от точки $A(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ до точки $B(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$.

16.171. $\int_L (1 - \frac{y}{2}) dx + \frac{x}{2} dy$, где L — верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = a^2$ ($y \geq 0$) от точки $A(a, 0)$ до точки $B(-a, 0)$.

16.172. $\int_L (e^{-x} \cos y - y^2) dx + (e^{-x} \sin y - x^2) dy$, где L — правая ($x \geq a$) полуокружность $x^2 + y^2 = 2ax$ от точки $A(a, a)$ до точки $B(a, -a)$.

$$16.173. \int_L y^{5/3} dx - x^{5/3} dy,$$

где L — положительно ориентированная кривая $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

$$16.174. \int_L xy^2 dx + (y^2 - x^2) dy,$$

где L — положительно ориентированная кривая $r = a(1 + \cos \varphi)$.

✓ 16.175. $\int_L x^2 y dx - y^2 x dy$, где L — верхняя ($y \geq 0$) часть правой петли ($x \geq 0$) лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(a, 0)$.

Вычислить поверхностный интеграл второго рода по ориентированной поверхности S (16.176—16.185).

$$16.176^\circ. \iint_S (y^2 + z^2) dx \wedge dy,$$

где S — часть верхней стороны цилиндра $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leq y \leq b$.

16.177. $\iint_S (x^4 + y^4 + 2a^2 z^2) dx \wedge dy$, где S — часть нижней стороны параболоида $az = xy$, лежащая в первом октанте и внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = bxy$.

$$\checkmark 16.178^\circ. \iint_S (x^2 + 6z - 2y^2) dx \wedge dy,$$

где S — часть нижней стороны цилиндра $y^2 = 6z$, $0 \leq x \leq 3$, $z \leq 6$.

$$16.179. \iint_S (a^2 x + by^2 + cz^2) dy \wedge dz,$$

где S — правая сторона цилиндра $y^2 = 2px$, $x \leq 2p$, $0 \leq z \leq q$.

$$\checkmark 16.180. \iint_S (x^2 + z^2) dy \wedge dz,$$

где S — часть внешней стороны цилиндра $x = \sqrt{9 - y^2}$, $0 \leq z \leq 2$.

$$16.181. \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dz \wedge dx,$$

где S — часть внешней стороны конуса $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $0 \leq y \leq b$.

$$16.182. \iint_S (y - z) dy \wedge dz + (z - x) dz \wedge dx + (x - y) dx \wedge dy,$$

где S — часть внешней стороны конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$.

$$\checkmark 16.183. \iint_S (y - z) dy \wedge dz + (z - x) dz \wedge dx + (x - y) dx \wedge dy,$$

где S — часть внешней стороны верхней ($z \geq 0$) полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, лежащая внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, $a < R$.

$$16.184. \iint_S \frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z},$$

где S — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

$$\checkmark 16.185. \iint_S y dy \wedge dz - x dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

где S — часть верхней стороны геликоида $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$, $0 \leq v \leq 2\pi$, $0 \leq u \leq a$.

В задачах 16.186—16.203 вычислить поверхностный интеграл второго рода, используя формулу Гаусса — Остроградского и при необходимости замыкая поверхность.

$$\sqrt{16.186.} \iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$$16.187. \iint_S x dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 \leq a^2$, $-H \leq z \leq H$.

$$16.188. \iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

где S — внутренняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

$$\sqrt{16.189.} \iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy, \text{ где}$$

а) S — внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 \leq z \leq H$;

б) S — часть внешней стороны параболоида $x^2 + y^2 = z$, $0 \leq z \leq H$.

$$16.190. \iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq H$.

$$16.191. \iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

где S — внутренняя сторона поверхности тела $x + 2y + 3z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

$$\sqrt{16.192.} \iint_S (xy^2 + z^2) dy \wedge dz + (yz^2 + x^2) dz \wedge dx + (zx^2 + y^2) dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона верхней ($z \geq 0$) полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$$16.193. \iint_S xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + xz dx \wedge dy,$$

где S — часть внешней стороны конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq H$.

$$16.194. \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dy \wedge dz + \sqrt{x^2 + y^2} dz \wedge dx + \sqrt{z} dx \wedge dy,$$

где S — правая сторона части поверхности тела $x^2 + y^2 \leq z^2$, $x^2 + y^2 \leq 2 - z$, $z \geq 0$, удовлетворяющая условию $x \geq 0$.

$$\sqrt{16.195.} \iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

где S — правая сторона части цилиндра $y^2 + x = 1$, $0 \leq z \leq 2$, $x \geq 0$.

$$16.196. \iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy,$$

где S — верхняя сторона части параболоида $x^2 + y^2 = 2 - z$, $z \geq 0$.

$$16.197. \iint_S (xz^2 + y^2) dy \wedge dz + (yx^2 + z^2) dz \wedge dx + (zy^2 + x^2) dx \wedge dy,$$

где S — часть внешней стороны конуса $1 - z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$.

$$16.198. \iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

где S — часть внутренней стороны гиперboloида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $0 \leq z \leq 3$.

$$16.199. \iint_S (x + y^2) dy \wedge dz + (y + z^2) dz \wedge dx + (z + x^2) dx \wedge dy,$$

где S — часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq H$.

$$16.200. \iint_S yz^2 dy \wedge dz + zy^2 dz \wedge dx + yx^2 dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона поверхности тела $0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$$16.201. \iint_S xz^2 dy \wedge dz + yx^2 dz \wedge dx + zy^2 dx \wedge dy, \text{ где } S \text{ — внешняя сторона}$$

поверхности тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$, $x^2 + y^2 \geq 3z^2$, $x \geq y$.

$$16.202. \iint_S (x^2 + y^2) dy \wedge dz + (y^2 + z^2) dz \wedge dx + (z^2 + x^2) dx \wedge dy, \text{ где } S \text{ —}$$

внутренняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

$$16.203^*. \iint_S f(x, y, z) dy \wedge dz + g(x, y, z) dz \wedge dx + h(x, y, z) dx \wedge dy, \text{ где}$$

$$f(x, y, z) = x^{\alpha+1} y^{\beta} z^{\gamma} \left(\frac{x}{\alpha+2} - \frac{1}{3(\alpha+1)} \right),$$

$$g(x, y, z) = x^{\alpha} y^{\beta+1} z^{\gamma} \left(\frac{y}{\beta+2} - \frac{1}{3(\beta+1)} \right),$$

$$h(x, y, z) = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma+1} \left(\frac{z}{\gamma+2} - \frac{1}{3(\gamma+1)} \right),$$

а S — внешняя сторона поверхности тела $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Вычислить интегралы, используя двумерный аналог формулы Гаусса — Остроградского (16.204—16.207) (\vec{n} — направление внешней нормали к L).

$$16.204. \int_L \frac{\partial(x^2 + 3xy - 4y^2)}{\partial \vec{n}} ds, \text{ где } L \text{ — кривая } 4(x+a)^2 + (y-2a)^2 = 4a^2.$$

$$\sqrt{16.205.} \int_L \frac{\partial(x^2 + 4y^2 - xy)}{\partial \vec{n}} ds, \text{ где } L \text{ — кривая } (x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 16.$$

$$16.206. \int_L \frac{\partial(x^2 - 5xy + 3y^2)}{\partial \vec{n}} ds, \text{ где } L \text{ — контур, составленный правой } (x \geq a)$$

полуокружностью $x^2 + y^2 = 2ax$ и прямой $x = a$.

$$\sqrt{16.207.} \int_L \left(\frac{\partial(xy)}{\partial \vec{n}} \sqrt{x^2 + 4y^2} - \frac{\partial(\sqrt{x^2 + 4y^2})}{\partial \vec{n}} xy \right) ds, \text{ где } L \text{ — контур, состав-$$

ленный верхней ($y \geq 1$) полуокружностью $x^2 + y^2 = 2y$ и прямой $y = 1$.

Вычислить интеграл, используя формулу Стокса (16.208—16.220).

$$16.208^{\circ}. \int_L (x^2 + y) dx + (y^2 + z) dy + (z^2 + x) dz, \text{ где } L \text{ — эллипс } x^2 + y^2 = 4,$$

$x + z = 2$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.

$$16.209. \int_L (xy + z) dx + (yz + x) dy + (xz + y) dz,$$

где L — окружность $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ положительно ориентированная на верхней стороне плоскости.

$$16.210. \int_L (z^2 - y^2) dx + (x^2 - z^2) dy + (y^2 - x^2 + x) dz,$$

где L — эллипс $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 = 8x$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.

$$\sqrt{16.211.} \int_L 2xy dx + z^2 dy + x^2 dz, \text{ где } L \text{ — эллипс } 2x^2 + 2y^2 = z^2, x + z = a,$$

положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.

$$16.212. \text{ Пусть } K \text{ — куб } [0; 1]^3. \text{ Вычислить } \int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz, \text{ если } L$$

есть контур сечения K плоскостью, проходящей через указанные точки, положительно ориентированный на правой стороне плоскости:

$$а) O(0, 0, 0), B(0, 0, 1), A(1, 1, 0); \quad б) P(1, 0, 0), Q(0, 1, 0), R(1, 0, 1).$$

$$16.213. \int_L (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (y^2 + x^2) dz,$$

где L — верхняя ($z \geq 2$) петля кривой $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, положительно ориентированная на внешней стороне верхней ($z \geq 2$) полусферы.

$$\sqrt{16.214.} \int_L (z - x^2 - y) dx + (x + y + z) dy + (y + 2x + z^3) dz,$$

где L — кривая $y^2 + z^2 = x^2$, $x \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, положительно ориентированная на внешней стороне правой ($x \geq 0$) полусферы.

$$16.215. \int_L z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz,$$

где L — кривая $x^2 + y^2 = 2ax$, $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$, положительно ориентированная на внешней стороне конуса.

$$\sqrt{16.216.} \int_L z^2 x dx + (z + x + y) dy + y^2 z dz, \text{ где } L \text{ — кривая } x^2 + y^2 = ax, x^2 = y^2 + z^2, \text{ положительно ориентированная на внешней стороне цилиндра.}$$

$$16.217. \int_L xyz dx + y^2 z dy + zx^2 dz, \text{ где } L \text{ — кривая } x^2 + y^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, \text{ положительно ориентированная на внешней стороне первого цилиндра.}$$

$$16.218. \int_L (xy + z) dx + (yz + x) dy + y \sqrt{a^2 - x^2} dz,$$

где L — кривая $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, положительно ориентированная на внутренней стороне цилиндра.

$$16.219. \int_L (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz,$$

где L — кривая $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$ ($r < R$), $z \geq 0$, проходима так, что ограниченная ею на внешней стороне сферы наименьшая область остаётся слева.

16.220. $\int_L (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz$, где L — часть винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = \frac{h}{2\pi}t$, от точки $A(a, 0, 0)$ до точки $B(a, 0, h)$.

Найти градиент скалярного поля u (16.221–16.224).

$$\sqrt{16.221^\circ}: u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\sqrt{16.222^\circ}: u = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$16.223^\circ: u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$16.224^\circ: u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

$\sqrt{16.225}$. Найти угол между градиентами функций $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ и $v = xy + yz + zx - 18x - 6z - y$ в точке $M(3, 5, 4)$.

16.226. Найти угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точках $A(c, 0, 0)$ и $B(0, c, 0)$.

16.227. Показать, что угол между градиентами функций $u = ax^2 + by^2 + cz^2$ и $v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ стремится к нулю при $M_0 \rightarrow \infty$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$).

Найти дивергенцию векторного поля \vec{F} (16.228–16.232)¹.

$$16.228^\circ: \vec{F} = \frac{-x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$16.229^\circ: \vec{F} = \vec{r}.$$

$$\sqrt{16.230^\circ}: \vec{F} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

$$16.231. \vec{F} = \frac{f(xyz)}{yz}\vec{i} + \frac{f(xyz)}{xz}\vec{j} - 2\frac{f(xyz)}{xy}\vec{k}, f \in C^1(\mathbb{R}).$$

$$\sqrt{16.232}. \vec{F} = xf\left(\frac{xy}{z}\right)\vec{i} - 2yf\left(\frac{xy}{z}\right)\vec{j} - zf\left(\frac{xy}{z}\right)\vec{k}, f \in C^1(\mathbb{R}).$$

Найти ротор векторного поля \vec{F} (16.233–16.240).

$$16.233^\circ: \vec{F} = (x+z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x^2+z)\vec{k}.$$

$$\sqrt{16.234^\circ}: \vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}.$$

$$16.235. \vec{F} = z^3\vec{i} + y^3\vec{j} + x^3\vec{k}. \quad 16.236. \vec{F} = \frac{y}{z}\vec{i} + \frac{z}{x}\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}. \quad 16.237. \vec{F} = \vec{r}.$$

$$16.238. \vec{F} = f(r)\vec{c}, f \in C^1(\mathbb{R}), \vec{c} \text{ — постоянное поле.}$$

$$\sqrt{16.239}. \vec{F} = f(r)\vec{r}, f \in C^1(\mathbb{R}).$$

$$16.240. \vec{F} = \vec{c} \times f(r)\vec{r}, f \in C^1(\mathbb{R}), \vec{c} \text{ — постоянное поле.}$$

16.241. Доказать следующие равенства:

$$a) \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = u \Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v;$$

$$\sqrt{б) \operatorname{div}(u\vec{c}) = \vec{c} \cdot \operatorname{grad} u, \vec{c} \text{ — постоянное поле;}$$

$$в) \operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u; \quad \sqrt{г) \operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{\Phi}) = \vec{\Phi} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{\Phi};}$$

$$д) \operatorname{div}(u\vec{F}) = u \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \operatorname{grad} u; \quad e) \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0;$$

$$ж) \operatorname{rot}(u\vec{F}) = u \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} u \times \vec{F}.$$

$\sqrt{16.242}$. Найти $\operatorname{div} \operatorname{grad} f(r)$, $f \in C^2(\mathbb{R})$, и такое условие, при котором $\operatorname{div} \operatorname{grad} f(r) = 0$.

$$16.243. \text{ Найти } \operatorname{div}(f(r)\vec{c}), f \in C^1(\mathbb{R}).$$

$$16.244. \text{ Найти } \operatorname{div}(f(r)\vec{r}), f \in C^1(\mathbb{R}), \text{ и условие, при котором } \operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = 0.$$

16.245. Электростатическое поле точечного заряда q равно $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$. Вычислить $\operatorname{div} \vec{E}$ в точке $M(x, y, z)$, если $x, y, z \neq 0$.

¹ Здесь и далее обозначено: $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$.

✓ 16.246. Найти работу поля \vec{F} вдоль кривой L , если $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ и L — наименьшая дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 1)$.

16.247. Найти работу поля \vec{F} вдоль кривой L , если $\vec{F} = x\vec{j} - y\vec{i}$ и L — окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ с положительным направлением обхода.

16.248. Найти работу векторного поля \vec{F} вдоль кратчайшей дуги эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ от точки $A(a, 0)$ до точки $B(0, b)$, если:

а) $\vec{F} = y\vec{i} + a\vec{j}$; б) $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$; в) $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$;

г) \vec{F} — сила, имеющая постоянную величину F и направление: 1) вдоль оси Ox ; 2) вдоль оси Oy ;

д) \vec{F} — упругая сила, направленная к началу координат и пропорциональная удалению точки от начала координат.

16.249. Под действием силы тяжести \vec{g} , направленной вдоль оси Oz , тело единичной массы скатывается от точки $A(a, 0, 2\pi b)$ до точки $B(a, 0, 0)$ по спирали $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $z = b(2\pi - \varphi)$. Найти работу поля при таком перемещении.

Найти поток векторного поля \vec{F} через поверхность S в направлении внешней нормали (16.250—16.266).

16.250°: $\vec{F} = (x^3 + yz)\vec{i} + (y^3 + xz)\vec{j} + (z^3 + xy)\vec{k}$,
где S — верхняя полусфера: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.

16.251°: $\vec{F} = (xy + x^2)\vec{i} + (2y - 2xy)\vec{j} + (z - yz)\vec{k}$,
где $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq H\}$.

✓ 16.252. $\vec{F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$, где $S = \{(x, y, z) : z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq H\}$.

✓ 16.253. $\vec{F} = (x - y + z)\vec{i} + (y - z + x)\vec{j} + (z - x + y)\vec{k}$,
где $S = \{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| = 1\}$.

✓ 16.254. $\vec{F} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$,
где S — поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $3z \leq x^2 + y^2$.

16.255. $\vec{F} = -x^3\vec{i} + y^3\vec{j} - z^3\vec{k}$,
где S — поверхность куба $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$.

16.256°: $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$,
где S — поверхность пирамиды $x + y + z \leq a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

16.257. $\vec{F} = x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j} + xyz\vec{k}$,
где S — поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

16.258. $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, где S — нижняя полусфера: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$.

✓ 16.259. $\vec{F} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$,
где S — часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, отсечённая плоскостью $z = 2$ ($z \geq 2$).

16.260. $\vec{F} = y^2\vec{j} + z\vec{k}$, где S — часть параболоида $z = x^2 + y^2$, $z \leq 2$.

16.261. $\vec{F} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$,
где S — поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3R^2$, $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$.

16.262. $\vec{F} = x\vec{i} - xy\vec{j} + z\vec{k}$,
где S — часть цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченная плоскостями $z = 0$, $x + z = R$.

16.263. $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$, где $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H}z, 0 \leq z \leq H\}$.

16.264. $\vec{F} = (y - x)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$,
где S — верхняя сторона треугольника ABC , где $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

✓ 16.265. $\vec{F} = (3x - 1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}$, где S — поверхность пирамиды, образуемой плоскостью $2x - y - 2z + 2 = 0$ и координатными плоскостями.

16.266. $\vec{F} = (x - 3y + 6z)\vec{i}$, где S — поверхность пирамиды, образуемой плоскостью $-x + y + 2z - 4 = 0$ и координатными плоскостями.

✓ 16.267. Найти поток жидкости в направлении внешней нормали через верхнюю половину окружности $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $y \geq 0$, если скорость потока \vec{v} постоянна по величине и направлена вдоль оси Ox .

16.268. Найти поток жидкости в направлении внешней нормали через правую половину окружности $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $x \geq 0$, если скорость потока \vec{v} образует угол $\frac{\pi}{4}$ с осью Ox ($|\vec{v}| = \text{const}$).

16.269. Найти поток жидкости в направлении внешней нормали через часть окружности $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, лежащую в первой четверти, если скорость потока $\vec{v} = (x + y, y)$.

Найти циркуляцию векторного поля \vec{F} вдоль ориентированного контура L (16.270—16.281).

16.270. $\vec{F} = z^3\vec{i} + x^3\vec{j} + y^3\vec{k}$,
 $L = \{(x, y, z): 2x^2 + z^2 - y^2 = a^2, x + y = 0\}$ положительно ориентирован на правой стороне плоскости.

16.271. $\vec{F} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$,
 L — граница части параболоида $\{(x, y, z): x^2 + y^2 = az, x \geq 0, y \geq 0, z \leq a\}$, положительно ориентированная на его внешней стороне.

✓ 16.272. $\vec{F} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + 3xy\vec{k}$,
 L — граница части сферы $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, положительно ориентированная на её внешней стороне.

✓ 16.273. $\vec{F} = ye^{xy}\vec{i} + xe^{xy}\vec{j} + xyz\vec{k}$,
 L — граница части конуса $\{(x, y, z): x^2 + y^2 = (z - 1)^2, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$, положительно ориентированная на его внешней стороне.

16.274. $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$,
 $L = \{(x, y, z): x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}$, положительно ориентирован на верхней стороне плоскости.

16.275. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,
 $L = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0\}$, положительно ориентирован на верхней стороне плоскости.

16.276. $\vec{F} = y\vec{i} - 2z\vec{j} + x\vec{k}$,
 $L = \{(x, y, z): 2x^2 - y^2 + z^2 = a^2, x = y\}$, положительно ориентирован на правой стороне плоскости.

✓ 16.277. $\vec{F} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$, L — часть кривой $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$, $y = x$ от точки $A(1, 1, 0)$ до точки $B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.

16.278. $\vec{F} = (x + z)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + x\vec{k}$,
 L — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости $z = 5$.

16.279. $\vec{F} = (x + 3y + 2z)\vec{i} + (2x + z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$,
 L — замкнутая ломаная $MNPM$ с вершинами $M(2, 0, 0)$, $N(0, 3, 0)$, $P(0, 0, 1)$.

$$16.280. \vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y + z)\vec{k},$$

L — замкнутая ломаная $OBCO$ с вершинами $O(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

16.281. $\vec{F} = (3x - 1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}$, L — контур треугольника ABC , где A, B и C — точки пересечения плоскости $2x - y - 2z + 2 = 0$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно, положительно ориентированный на верхней стороне этой плоскости.

Выяснить, является ли поле \vec{F} потенциальным, и если является, то найти его потенциал (16.282—16.302).

$$16.282. \vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^2 + 1)\vec{j}.$$

$$16.283. \vec{F} = (y + 1)^2\vec{i} + 2x(y + 1)\vec{j}.$$

$$\sqrt{16.284. \vec{F} = \cos y\vec{i} + x \sin y\vec{j}.$$

$$16.285. \vec{F} = (2x \cos y - y^2 \sin x)\vec{i} + (2y \cos x - x^2 \sin y)\vec{j}.$$

$$16.286. \vec{F} = (1 + e^{x/y})\vec{i} + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{x/y}\vec{j}.$$

$$\sqrt{16.287. \vec{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{x^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x}\right)\vec{j}.$$

$$16.288. \vec{F} = \left(\sqrt{1 - y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)\vec{i} + \\ + \left(\sqrt{1 - x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1 - y^2}} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y}\right)\vec{j}.$$

$$16.289. \vec{F} = \left(\frac{y}{2\sqrt{1 + xy}} - \frac{y}{x^2 + y^2} + e^x \sin 2y + \frac{1}{\sin x}\right)\vec{i} + \\ + \left(\frac{x}{2\sqrt{1 + xy}} + \frac{x}{x^2 + y^2} + 2e^x \cos 2y\right)\vec{j}.$$

$$16.290. \vec{F} = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} + 2x\sqrt{1 + y} - \frac{y}{1 + x^2 y^2} + \ln x\right)\vec{i} + \\ + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1 + y}} - \frac{x}{1 + x^2 y^2} + \frac{1}{y\sqrt{1 + y^2}}\right)\vec{j}.$$

$$\sqrt{16.291. \vec{F} = e^x \sin y\vec{i} + e^x \cos y\vec{j} + \vec{k}.$$

$$16.292. \vec{F} = (yz + 1)\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}. \quad \sqrt{16.293. \vec{F} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{x + y + z}.$$

$$\sqrt{16.294. \vec{F} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}.$$

$$16.295. \vec{F} = 2xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + x^2y\vec{k}.$$

$$\sqrt{16.296. \vec{F} = \frac{2}{\sqrt{y + z}}\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{(y + z)^3}}\vec{j} - \frac{x}{\sqrt{(y + z)^3}}\vec{k}.$$

$$16.297. \vec{F} = \left(\frac{yz}{1 + (xyz)^2} + \frac{2x}{x^2 + z^2} + 2x\right)\vec{i} + \left(\frac{xz}{1 + (xyz)^2} - \frac{1}{2\sqrt{yz}} - 1\right)\vec{j} + \\ + \left(\frac{xy}{1 + (xyz)^2} + \frac{2z}{x^2 + z^2} + \frac{\sqrt{y}}{2z\sqrt{z}} + 1\right)\vec{k}.$$

$$16.298. \vec{F} = \left(2xyz + \frac{1}{z}\right)\vec{i} + \left(x^2z - \frac{1}{z^2}\right)\vec{j} + \left(x^2y - \frac{x}{z^2} + \frac{2y}{z^3}\right)\vec{k}.$$

$$\sqrt{16.299. \vec{F} = (2xy + z^2 + yz)\vec{i} + (x^2 + 2yz + xz)\vec{j} + (y^2 + 2xz + xy)\vec{k}.$$

$$16.300. \vec{F} = \frac{x + y + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \left((y^2 + z^2 - xy - xz)\vec{i} + (z^2 + x^2 - yz - yx)\vec{j} + \right. \\ \left. + (x^2 + y^2 - zx - zy)\vec{k} \right).$$

$$16.301. \vec{F} = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right)\vec{k}.$$

$$16.302. \vec{F} = yz(2x + y + z)\vec{i} + xz(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}.$$

16.303. Доказать, что поле электрической напряжённости \vec{E} , создаваемое точечным зарядом q , помещённым в начале координат, является потенциальным полем, и найти его потенциал.

16.304. Найти потенциал гравитационного поля $\vec{F} = -m\vec{r}/r^3$, создаваемого массой m , помещённой в начале координат.

Убедившись в потенциальности соответствующего поля, вычислить интеграл (16.305—16.312).

$$\sqrt{16.305.} \int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y) dx + (x-y) dy.$$

$$\sqrt{16.306.} \int_{(0,1)}^{(1,0)} (3x^2 - 2xy + y^2) dx + (x^2 - 2xy) dy.$$

$$16.307. \int_{(0,0)}^{(1,1)} x(1+6y^2) dx + y(1+6x^2) dy.$$

$$16.308. \int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3) dx + y(6x^2y^2 - 5y^4) dy.$$

$$\sqrt{16.309.} \int_{(-1,5)}^{(2,2)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \text{ по кривой, не проходящей через начало координат.}$$

16.310. $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy$ по кривой, не пересекающей прямую $y = x$.

$$16.311. \int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} (2xy + y^2 + yz^2) dx + (x^2 + 2xy + xz^2) dy + 2xyz dz.$$

$$16.312. \int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} yzx^{yz-1} dx + zx^{yz} \ln x dy + yx^{yz} \ln x dz.$$

Выяснить, является ли поле соленоидальным, и если является, то найти его векторный потенциал (с точностью до слагаемого вида $\text{grad } u$, $u \in C^1(\mathbb{R}^3)$) (16.313—16.320).

$$\sqrt{16.313.} \vec{F} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}.$$

$$\sqrt{16.314.} \vec{F} = (6x+7yz)\vec{i} + (6y+7xz)\vec{j} + (6z+7xy)\vec{k}.$$

$$16.315. \vec{F} = 2y\vec{i} - z\vec{j} + 2x\vec{k}.$$

$$16.316. \vec{F} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}.$$

$$16.317. \vec{F} = y^2\vec{i} - (x^2 + y^2)\vec{j} + z(3y^2 + 1)\vec{k}.$$

$$16.318. \vec{F} = (1 + 2xy)\vec{i} - y^2z\vec{j} + (z^2y - 2zy + 1)\vec{k}.$$

$$16.319. \vec{F} = 6y^2\vec{i} + 6z\vec{j} + 6x\vec{k}.$$

$$16.320. \vec{F} = ye^{x^2}\vec{i} + 2yz\vec{j} - (2xyze^{x^2} + z^2y)\vec{k}.$$

$\sqrt{16.321.}$ Найти значение формы $\pi_1 \wedge \pi_2 + 2\pi_2 \wedge \pi_3 - 5\pi_1 \wedge \pi_3$ на векторах $\zeta_1 = (1, 4, 1)$, $\zeta_2 = (2, 0, 3)$.

16.322. Найти значение формы

$$\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3 - 3\pi_1 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4 - \pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_4 + 2\pi_2 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4$$

на векторах $\zeta_1 = (2, 2, -1, 1)$, $\zeta_2 = (4, 3, -1, 2)$, $\zeta_3 = (-1, 0, 2, 3)$.

✓ 16.323. Привести к координатному виду форму

$$(2\pi_1 + \pi_2 - \pi_3 + 2\pi_4) \wedge (\pi_1 \wedge \pi_2 - 3\pi_2 \wedge \pi_4).$$

16.324. Привести к координатному виду форму

$$(2\pi_1 \wedge \pi_3 - 3\pi_1 \wedge \pi_4 + \pi_3 \wedge \pi_4) \wedge (5\pi_1 - 2\pi_2 + 3\pi_3 + \pi_4).$$

✓ 16.325. Найти значение дифференциальной формы

$$x_2^2 x_4^2 dx_1 \wedge dx_2 + x_1^2 x_3^2 dx_1 \wedge dx_4 + x_3^2 x_4^2 dx_2 \wedge dx_3 + x_1^2 x_2^2 dx_2 \wedge dx_4$$

на векторах $\zeta_1 = (1, -1, 0, 2)$ и $\zeta_2 = (3, 1, -1, 0)$ из пространства $T_{(1,2,-1,-2)}D$.

16.326. Найти значение дифференциальной формы

$$x_2 x_3^2 dx_1 \wedge dx_2 + 2x_1 x_2 x_3^2 dx_1 \wedge dx_3 + x_1 x_2 x_3 dx_2 \wedge dx_3$$

на векторах $\zeta_1 = (1, 0, 1)$, $\zeta_2 = (2, -1, 0)$ из пространства $T_{(2,2,1)}D$.

В задачах 16.327—16.335 привести к координатному виду дифференциальную форму.

$$16.327. d(4x^2 e^{y+z} dx \wedge dz - z^2 e^{y+z} dx \wedge dz).$$

$$\checkmark 16.328. d(x(z^2 - y^2) dx + y(x^2 - z^2) dy + z(y^2 - x^2) dz).$$

$$\checkmark 16.329. d(xyz^2 dx \wedge dy + x^2 yz dy \wedge dz + xy^2 z dz \wedge dx).$$

$$\checkmark 16.330. (x_2 dx_3 \wedge dx_4 + x_1 dx_2 \wedge dx_3) \wedge (x_1 x_2 dx_1 + x_4 x_1 dx_4).$$

$$16.331. d(x_1^2 x_2^2 dx_3 \wedge dx_4 - 2x_1 x_2^2 x_4 dx_1 \wedge dx_3).$$

$$16.332. d\left(\arctg \frac{x_1 x_2}{x_3 x_4}\right) \wedge d(x_3 x_1 - x_2 x_4).$$

$$16.333. d(2x_1 x_2 x_3 x_4 dx_1 + x_1 x_3^2 x_4 dx_2 + x_1^2 x_2 x_4 dx_3 + x_1 x_2 x_3^2 dx_4).$$

$$16.334. d(\sin(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) dx_1 \wedge dx_3 + \sin(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) dx_2 \wedge dx_4 + \sin(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) dx_1 \wedge dx_2 + \sin(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) dx_3 \wedge dx_4).$$

$$16.335. d(x_1 x_2 dx_1 + x_2 x_3 dx_2 + x_3 x_4 dx_3 + x_1 x_4 dx_4) \wedge (x_4 dx_1 + x_3 dx_2 + x_2 dx_3 + x_1 dx_4).$$

Выяснить, является ли форма замкнутой (16.336—16.341).

$$\checkmark 16.336. 2zx dx + 2zy dy + (x^2 + y^2) dz.$$

$$16.337. 2xyz dx + (x^2 z - z^2 y) dy + x^2 y dz.$$

$$16.338. (ye^{xyz} + xy^2 ze^{xyz}) dx + (xe^{xyz} + x^2 yze^{xyz}) dy + x^2 y^2 e^{xyz} dz.$$

$$\checkmark 16.339. z(x - y) \cos(x + y - z) dx \wedge dy + x(y + z) \cos(x + y - z) dy \wedge dz - y(x + z) \cos(x + y - z) dz \wedge dx.$$

$$16.340. (x_1 x_2 + x_3 x_4) dx_1 \wedge dx_2 + (x_1 x_3 + x_2 x_4) dx_1 \wedge dx_4 + (x_1 x_4 + x_2 x_3) dx_2 \wedge dx_3 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) dx_3 \wedge dx_4.$$

$$16.341. (x_4 x_3 + x_2^2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + x_1 x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + (x_2 x_4 - x_4^2) dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1 x_2 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

Найти сужение формы ω на кривую L с указанной параметризацией (16.342–16.345).

$$16.342^\circ. \omega = (x + \sin x) dy - y(\cos x + 1) dx, L = \{(x, y) : x = x, y = x \cos x\}.$$

$$\sqrt{16.343^\circ. \omega = y dx - x dy, L = \{(x, y) : x = y \ln y, y = y\}.$$

$$\sqrt{16.344. \omega = yz dx - xz dy + xy dz, L = \{(x, y, z) : x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt\}.$$

$$16.345. \omega = xz dx + yz dy + (x^2 + y^2) dz,$$

$$L = \{(x, y, z) : x = at \sin t, y = at \cos t, z = bt^2\}.$$

Найти сужение формы ω на поверхность S с указанной параметризацией (16.346–16.353).

$$\sqrt{16.346^\circ. \omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

$$S = \{(x, y, z) : x = x, y = y, z = x \sin y + y \sin x\}.$$

$$16.347. \omega = -z(z^2 + y^2) dx \wedge dy + y(z^2 + y^2) dz \wedge dx + 2x dy \wedge dz,$$

$$S = \{(x, y, z) : x = \operatorname{arctg} \frac{y}{z} + yz, y = y, z = z\}.$$

$$16.348. \omega = z dx \wedge dy + x dy \wedge dz + 2y dz \wedge dx,$$

$$S = \{(x, y, z) : x = x, y = xz \ln(x^2 + z^2), z = z\}.$$

$$\sqrt{16.349. \omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy, S - \text{сфера:}$$

$$S = \{(x, y, z) : x = R \cos \varphi \cos \psi, y = R \sin \varphi \cos \psi, z = R \sin \psi\}.$$

$$16.350. \omega = z^2(x + y) dx \wedge dy - z(x^2 + y^2)(dz \wedge dx + dy \wedge dz),$$

$$S - \text{геликоид: } S = \{(x, y, z) : x = au \cos v, y = au \sin v, z = bu\}.$$

$$16.351. \omega = yz dy \wedge dz - xz dz \wedge dx + xy dx \wedge dy, S - \text{тор: } S = \{(x, y, z) : x = (b + a \cos \varphi) \cos \psi, y = (b + a \cos \varphi) \sin \psi, z = a \sin \varphi\}, a < b.$$

$$16.352. \omega = y dx \wedge dy + z dz \wedge dx - x dy \wedge dz, S - \text{гиперболический парабо- лoid } S = \{(x, y, z) : x = auv, y = a(u + v), z = a(u - v)\}.$$

$$\sqrt{16.353. \omega = z(x^2 + y^2) dx \wedge dy - x(y^2 + z^2) dy \wedge dz + y(x^2 + z^2) dz \wedge dx,$$

$$S = \{(x, y, z) : x = R \cos \varphi + R, y = R \sin \varphi, z = h\}.$$

Найти перенос дифференциальной формы ω , заданной на простом гладком многообразии M , на область D значений параметров (16.354–16.358).

$$\sqrt{16.354. \omega = x_3 x_4 dx_1 \wedge dx_2 + (x_1 + x_2) dx_3 \wedge dx_4,$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 : x = (u_1^2 + u_2^2, 2u_1 u_2, u_1 e^{u_2}, u_2 e^{u_1}), u = (u_1, u_2) \in D \subset \mathbb{R}^2\}.$$

$$16.355. \omega = x_3 x_4 dx_1 \wedge dx_2 - x_1^2 x_2^2 dx_3 \wedge dx_4,$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 : x = (u_1 \cos u_3, u_2 \sin u_3, u_1 + u_2, u_1 - u_2),$$

$$u = (u_1, u_2, u_3) \in D \subset \mathbb{R}^3\}.$$

$$\sqrt{16.356. \omega = x_2 x_4 dx_1 \wedge dx_3 + x_1 x_3 dx_2 \wedge dx_4,$$

DeVU/Wnu8v9dI4=

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 : x = (e^{u_1} \cos u_2, e^{u_1} \sin u_2, e^{-u_1} \cos u_2, e^{-u_1} \sin u_2),$$

$$u = (u_1, u_2) \in D \subset \mathbb{R}^2\}.$$

$$16.357. \omega = x_1 x_4 dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_6 - x_2 x_5 dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_5 - x_3 x_6 dx_3 \wedge dx_5 \wedge dx_6,$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^6 : x = (u_1^2 - u_2^2, u_2^2 - u_3^2, u_3^2 - u_1^2, u_1 u_2, u_2 u_3, u_1 u_3),$$

$$u = (u_1, u_2, u_3) \in D \subset \mathbb{R}^3\}.$$

$$16.358. \omega = x_1^2 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_2^2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_3^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + x_4^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 : x = (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, u_1 \cos u_3, u_1 \sin u_3),$$

$$u = (u_1, u_2, u_3) \in D \subset \mathbb{R}^3\}.$$

Показать, что подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал, и вычислить интеграл (16.359–16.370).

$$\sqrt{16.359.} \int_{(-1,-2)}^{(1,0)} (2x-y) dx + (3y-x) dy. \quad 16.360. \int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y) (dx-dy).$$

$$16.361. \int_{(1,1)}^{(2,3)} 2x(y^2-2) dx + 2y(x^2+1) dy.$$

$$\sqrt{16.362.} \int_{(x_1, y_1)}^{(0,0)} f(x+y) (dx+dy), \text{ где } f \text{ — непрерывная функция.}$$

$$\sqrt{16.363.} \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ по кривой, не проходящей через начало координат.}$$

$$16.364. \int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2} \text{ по кривой, не пересекающей прямую } y = x.$$

$$\sqrt{16.365.} \int_{(-1,1,-1)}^{(5,3,1)} x(y^2+z^2) dx + y(x^2+z^2) dy + z(x^2+y^2) dz.$$

$$16.366. \int_{(7,2,3)}^{(3,3,3)} \frac{xz dy + xy dz - yz dx}{(x-yz)^2} \text{ по кривой, не пересекающей поверхность}$$

$$x = yz.$$

$$\sqrt{16.367.} \int_{(1,1,1,1)}^{(1,2,1,1)} x_2 x_3 x_4 dx_1 + x_1 x_3 x_4 dx_2 + x_1 x_2 x_4 dx_3 + x_1 x_2 x_3 dx_4.$$

$$16.368. \int_{(\pi, 1/2, 2\pi, 1)}^{(1,1,1,2)} (x_2 - x_4) dx_1 + (x_1 + x_3) dx_2 + (x_2 - x_4) dx_3 - (x_1 + x_3) dx_4.$$

$$16.369. \int_{(1,\pi,2,2\pi)} x_2 \cos(x_1 x_2) dx_1 + x_1 \cos(x_1 x_2) dx_2 -$$

$$x_4 \sin(x_3 x_4) dx_3 - x_3 \sin(x_3 x_4) dx_4.$$

$$16.370. \int_A^B x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n, \text{ где } A = (2, \dots, 2) \in \mathbb{R}^n, B = (4, \dots, 4) \in \mathbb{R}^n.$$

Ответы¹

- 16.1. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$. 16.2. $\frac{32}{3}\pi$. 16.3. $\frac{8}{3}(1 + \sqrt{5} + 3\ln(2 + \sqrt{5}))$.
- 16.4. $\frac{1}{3}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$. 16.5. $\ln\sqrt{1 + 4\pi^2}$. 16.6. $3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{28}{3}\sqrt{5}$.
- 16.7. $\frac{1}{30}(1 + 60\sqrt{2} + 25\sqrt{5})a^3$. 16.8. $\frac{7}{12} + \frac{80\sqrt{2}}{297}$. 16.9. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi(3 + 4\pi^2)$.
- 16.10. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi^3 a$. 16.11. $\frac{16}{3}\pi(\pi^2 + 9)a^3$. 16.12. $\frac{1}{16}(\pi^2 + 12\pi) - \frac{1}{2}\ln 2$.
- 16.13. а) $x = 1 - 2t, y = 2 + t, t \in [0; 1]$;
 б) $x = 2 + 3t, y = 3, t \in [0; 1]; x = x, y = 3, x \in [2; 5]$;
 в) $x = -1, y = 2 + 3t, t \in [0; 1]; x = -1, y = y, y \in [2; 5]$.
- 16.14. $x = x, y = x^2, x \in [1; 3]$.
- 16.15. $x = a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t, t \in \mathbb{R}$, правая ветвь; $x = -a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t, t \in \mathbb{R}$, левая ветвь.
- 16.16. $x = a \cos^4 t, y = b \sin^4 t, t \in [0; \frac{\pi}{2}]$. 16.17. $x = a \cos^5 t, y = a \sin^5 t, t \in [0; 2\pi]$.
- 16.18. $x = a \cos^2 \varphi, y = a \cos \varphi \sin \varphi, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
- 16.19. $x = a \cos \varphi(1 + \cos \varphi), y = a \sin \varphi(1 + \cos \varphi), \varphi \in [0; 2\pi]$.
- 16.20. $x = a \cos \varphi \cos 3\varphi, y = a \sin \varphi \cos 3\varphi, \varphi \in [0; \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}] \cup [\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}] \cup [\frac{11\pi}{6}; 2\pi]$.
- 16.21. $x = \frac{a\varphi}{1+\varphi} \cos \varphi, y = \frac{a\varphi}{1+\varphi} \sin \varphi, \varphi \in [0; +\infty)$.
- 16.22. $x = a|\sin \varphi| \sqrt{\operatorname{tg} \varphi} \cos \varphi, y = a|\sin \varphi| \sqrt{\operatorname{tg} \varphi} \sin \varphi, \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\pi; \frac{3\pi}{2}]$.
- 16.23. $x = \frac{t^3}{2t^2-1}, y = \frac{t^4}{2t^2-1}, t \in [0; \frac{1}{2}]$.
- 16.24. $x = \frac{at}{1-t^4}, y = \frac{at^2}{1-t^4}$, причём: а) $t \in [\sqrt[4]{2}; +\infty)$; б) $t \in [0; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}]$.
- 16.25. $x = at - at^2, y = at^2 - at^3, t \in \mathbb{R}$. 16.26. $x = at^2 + at^3, y = at^3 + at^4, t \in \mathbb{R}$.
- 16.27. $x = \sqrt{\sin 2\varphi} \cos \varphi, y = \sqrt{\sin 2\varphi} \sin \varphi, \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\pi; \frac{3\pi}{2}]$.
- 16.28. $x = a\sqrt[4]{2 \cos 2\varphi} \cos \varphi, y = a\sqrt[4]{2 \cos 2\varphi} \sin \varphi, \varphi \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$.
- 16.29. $x = a \cos t, y = a \cos t \sqrt{|\sin t|} \operatorname{sgn}(\sin t), t \in [0; 2\pi]$.
- 16.30. а) $x = \frac{a}{2}(\operatorname{ch}^3 t + \operatorname{sh}^3 t), y = \frac{a}{2}(\operatorname{ch}^3 t - \operatorname{sh}^3 t), t \in \mathbb{R}$;
 б) $x = t^2 + t, y = t^2 - t, t \in \mathbb{R}; x = \frac{2v+v^2}{4}, y = \frac{v^2-2v}{4}, v \in \mathbb{R}$.
- 16.31. а) $x = a \cos t, y = a(\cos t + \sin t), t \in [0; 2\pi]$; б) $y = y, x = \frac{y^2 - a^2}{2y}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- 16.32. $x = \sqrt{\frac{t}{t^4-1}}, y = \sqrt{\frac{t}{t^4-1}}, t \in [2; +\infty)$.
- 16.33. $x = \sqrt{a^2 \cos^{4/3} t + b^2 \sin^{4/3} t} \cos^{1/3} t, y = \sqrt{a^2 \cos^{4/3} t + b^2 \sin^{4/3} t} \sin^{1/3} t, t \in [0; 2\pi]$.
- 16.34. $x = a \cos 2t \operatorname{ctg} t, y = a \cos 2t, t \in (0, \pi); x = \frac{a(t^2-1)}{1+t^2}, y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2}, t \in \mathbb{R}$.
- 16.35. а) $x = 1 - 2t, y = t + 2, z = 3 - 7t, t \in [0; 1]$; б) $x = -1, y = 2, z = t, t \in [1; 4]$;
 в) $x = 1 + t, y = 3, z = t - 1, t \in [0; 1]$.
- 16.36. а) $x = R \cos t, y = R \sin t, z = 2, t \in [0; 2\pi]$;
 б) $x = R \cos t, y = R \sin t, z = R(\cos t + \sin t), t \in [0; 2\pi]$.
- 16.37. а) $x = \frac{R}{\sqrt{2}} \cos t, y = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t, z = \frac{R}{\sqrt{2}}, t \in [0; 2\pi]$;
 б) $x = \frac{R}{\sqrt{2}}(\frac{\sin t}{\sqrt{3}} + \cos t), y = \frac{R}{\sqrt{2}}(\frac{\sin t}{\sqrt{3}} - \cos t), z = -\frac{2}{\sqrt{6}}R \sin t, t \in [0; 2\pi]$;
 в) $x = R \cos t, y = R \sin t \cos t, z = R \sin t, t \in [0; 2\pi]$.

¹ В ответах к задачам 16.13–16.40 приведены некоторые из возможных параметризаций.

- 16.38. $x = c\sqrt{\varphi} \cos \varphi$, $y = c\sqrt{\varphi} \sin \varphi$, $z = c\varphi$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{z_0}{c}\right]$.
- 16.39. $x = \frac{1}{4}\left(\frac{3t}{2} \sqrt[3]{\frac{3t}{a}} + \sqrt[3]{9at^2}\right)$, $y = \frac{1}{4}\left(\frac{3t}{2} \sqrt[3]{\frac{3t}{a}} - \sqrt[3]{9at^2}\right)$, $z = t$, $t \in [0; z_0]$.
- 16.40. $x = a \frac{\cos \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}$, $y = a \frac{\sin \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}$, $z = a \operatorname{th} \varphi$, $\varphi \in [0; \varphi_0]$. 16.41. $\sqrt{5} \ln 2$. 16.42. $\frac{20}{3} \sqrt{2}$.
- 16.43. 0. 16.44. $2\pi a^{2n+1}$. 16.45. $\frac{1}{2}$. 16.46. $\frac{\pi a^2}{2}$. 16.47. $\frac{9}{2} a^3$. 16.48. $\frac{16}{5}$.
- 16.49. 0. 16.50. $18,6a^2$. 16.51. $\sqrt{2}$. 16.52. $\frac{4}{5} a^4$. 16.53. $\frac{1}{15}((1+5\pi^2)^{3/2} - 1)$.
- 16.54. $\frac{2}{3} \pi a^3$. 16.55. $\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)a^2$. 16.56. $8\pi a^3$.
- 16.57. $\frac{167}{48} \sqrt{17} - \frac{67}{96} \sqrt{5} - \frac{1}{64} \ln \frac{4+\sqrt{17}}{2+\sqrt{5}}$. 16.58. $\frac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$. 16.59. $\frac{\pi}{4}$.
- 16.60. $\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$. 16.61. $\frac{R^2}{2}$. 16.62. $3\pi R^2$. 16.63. $4a^2$. 16.64. $\frac{11}{3}$.
- 16.65. $4c\left(b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arccos \frac{b}{a}\right)$. 16.66. $\frac{1}{3}((b^2+1)^{3/2} - (a^2+1)^{3/2})$. 16.67. $\frac{17}{2}$.
- 16.68. $\frac{kx_0}{a}$. 16.69. $\frac{4}{3} R^4$.
- 16.70. а) $\frac{8}{3} \pi^3 b^2 \sqrt{a^2+b^2}$; б) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2b} \left(2\pi b \sqrt{a^2+4\pi^2 b^2} + a^2 \ln \frac{2\pi b + \sqrt{a^2+4\pi^2 b^2}}{a}\right)$.
- 16.71. $2\rho R^2$.
- 16.72. $I_{Ox}^{(1)} = \rho \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^2 b}{2\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$; $I_{Oy}^{(1)} = \rho \left(\frac{a^2}{2} + \frac{ab^2}{2\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$.
- 16.73. $\frac{7}{24} \sqrt{5} \rho$. 16.74. $\frac{\rho}{64} (204\sqrt{2} - 36\sqrt{5} + \ln \frac{9+4\sqrt{5}}{17+12\sqrt{2}})$.
- 16.75. $I_{Ox}^{(2)} = \frac{1}{192} (67\sqrt{2} + 15 \ln(1+\sqrt{2})) \rho$, $I_{Oy}^{(2)} = \frac{1}{8} (3\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})) \rho$.
- 16.76. $I_{Ox}^{(2)} = 9\sqrt{5} \rho$, $I_{Oy}^{(2)} = 21\sqrt{5} \rho$.
- 16.77. $I_{Ox}^{(2)} = \frac{\rho}{4} (2\rho - \sin 2\rho) a^3$, $I_{Oy}^{(2)} = \frac{\rho}{4} (2\rho + \sin 2\rho) a^3$. 16.78. $\frac{\rho}{15} (128 - 86\sqrt{2}) a^3$.
- 16.79. $\frac{\sqrt{2}}{768} (139\sqrt{2} - 9 \ln(1+\sqrt{2})) \rho a^3$. 16.80. $\frac{3}{8} \rho a^3$.
- 16.81. $I_{Ox}^{(2)} = I_{Oy}^{(2)} = \frac{\rho}{6} (3a^2 + h^2) \sqrt{4a^2 \pi^2 + h^2}$, $I_{Oz}^{(2)} = \rho a^2 \sqrt{4a^2 \pi^2 + h^2}$.
- 16.82. а) Aa^2 ; б) Ab^2 ; в) $A(a^2 + b^2)$, где $A = \frac{2kb}{15\pi^4 a^4} ((4a^2 \pi^2 + a^2 + b^2)^{3/2} (6a^2 \pi^2 - a^2 - b^2) + (a^2 + b^2)^{5/2})$.
- 16.83. $x_0 = \frac{2a}{e+1}$, $y_0 = \frac{(e^4 + 4e^2 - 1)a}{4e(e^2 - 1)}$. 16.84. $x_0 = \frac{27 - 16 \ln 2 - 4 \ln^2 2}{8(3 + 2 \ln 2)}$, $y_0 = \frac{20}{3(3 + 2 \ln 2)}$.
- 16.85. $x_0 = \frac{a \sin \beta}{\beta}$, $y_0 = \frac{a(1 - \cos \beta)}{\beta}$. 16.86. а) $x_0 = y_0 = \frac{4a}{3}$; б) $x_0 = \pi a$, $y_0 = \frac{4a}{3}$.
- 16.87. $x_0 = y_0 = \frac{2R}{\pi}$. 16.88. $x_0 = \frac{8a}{15}$, $y_0 = 0$. 16.89. $x_0 = y_0 = \frac{4a}{5}$.
- 16.90. $x_0 = y_0 = \frac{7\sqrt{2} + 3 \ln(1+\sqrt{2})}{16(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))} a$. 16.91. а) $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{2a}{5}$; б) $x_0 = y_0 = \frac{2a}{5}$.
- 16.92. $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = \pi b$. 16.93. $x_0 = \frac{2}{5}$, $y_0 = -\frac{1}{5}$, $z_0 = \frac{1}{2}$.
- 16.94. $x_0 = \frac{\sqrt{2}a}{\pi}$, $y_0 = 0$, $z_0 = \frac{2a}{\pi}$. 16.95. $x_0 = -\frac{4a}{2}$, $y_0 = \frac{2a}{\pi}$, $z_0 = \frac{2}{3} \pi b$.
- 16.96. $x_0 = \pi a$, $y_0 = \frac{4a}{3}$, $z_0 = \pi a$. 16.97. $\left(0, \frac{2gmM}{\pi R^2}\right)$. 16.98. $\left(0, -\frac{2g\rho}{h}\right)$.
- 16.99. $\left(\frac{3ga^2}{5}, \frac{3ga^2}{5}\right)$. 16.100. $\frac{64\sqrt{2}}{15} a^4$. 16.101. $\frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2})$.

- 16.102. $\frac{\pi}{5}(9\sqrt{3}-1)$. 16.103. $\left(\frac{4a}{3}+1\right)\pi a^3$. 16.104. $2\sqrt{2}\pi b^2(2b^2-1)$.
- 16.105. $\frac{1}{16}(8+\pi a^2)pqa^2$. 16.106. $\frac{b^2}{8a}(8a^2+\pi b^2)$. 16.107. $\frac{4}{15}a^5$. 16.108. $\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$.
- 16.109. $\frac{19}{6}\pi a^3$. 16.110. $\frac{\pi}{2}a^4$. 16.111. $\pi a^3 - \frac{4a^4}{3}$. 16.112. $3\sqrt{2}\pi a^{5/2}$.
- 16.113. $-\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$. 16.114. $\frac{16}{3}a^4$. 16.115. $\frac{4}{3}(4-\sqrt{2})$. 16.116. $\pi a(a^2+2ab+2b^2)$.
- 16.117. $\frac{128}{9}\pi a^4$. 16.118. $\frac{512}{15}a^3$. 16.119. 4π . 16.120. $\frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{5}{16}\ln(1+\sqrt{2})$.
- 16.121. а) $I(t) = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$ при $|t| \leq \sqrt{3}$ и $I(t) = 0$ при $|t| > \sqrt{3}$;
 б) $I(t) = \frac{\pi}{6}(8-5\sqrt{2})t^4$.
- 16.122. $\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)\pi\rho$. 16.123. $(\pi+4)a^3$. 16.124. $\frac{19}{6}\pi a^3$. 16.125. $256\sqrt{2}\pi$.
- 16.126. $\pi R^2c(3R+c)$. 16.127. $7\sqrt{2}\pi\rho a^4$. 16.128. $\frac{1024}{35}\pi a^4$. 16.129. $\frac{8}{15}\rho a^4$.
- 16.130. $\left(\frac{\pi}{3} - \frac{26}{45}\right)\rho a^4$. 16.131. $\frac{MR^2}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha$. 16.132. $\pi^2\rho ab(5a^2+2b^2)$.
- 16.133. $\frac{4}{15}(1+6\sqrt{3})\pi\rho c^4$. 16.134. $\frac{2\pi}{3}\rho R(2R^3-3R^2H+H^3)$.
- 16.135. а) $x_0=y_0=0, z_0=\frac{R}{2}$; б) $x_0=y_0=z_0=\frac{R}{2}$; в) $x_0=y_0=0, z_0=\frac{4R}{3\pi}$.
- 16.136. $x_0 = \frac{p}{5} \cdot \frac{53-3\sqrt{3}}{26}, y_0=z_0=0$.
- 16.137. а) $x_0=y_0=0, z_0 = \frac{55+9\sqrt{3}}{130}c$; б) $x_0=y_0=0, z_0 = \frac{2H}{3}$.
- 16.138. $x_0=0, y_0 = \frac{4a(2\sqrt{2}-1)}{3\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))}, z_0 = \frac{\pi a}{2}$.
- 16.139. $F_x=F_y=0, F_z=2\pi g\rho\left(1-\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$. 16.140. -2π . 16.141. $\frac{\pi}{4}$.
- 16.142. $\frac{\pi}{2}r^4$. 16.143. -4 . 16.144. $-\frac{\pi}{8}$. 16.145. $\frac{a^2}{5}\left(\frac{1}{7}+\frac{a}{198}\right)$. 16.146. $\frac{8}{35}$.
- 16.147. $\frac{33}{512} - \frac{3}{32}\ln 2$. 16.148. $-\frac{1}{5}$. 16.149. πe . 16.150. а) -21 ; б) 3 .
- 16.151. $-\ln 5 + \frac{4}{5}$. 16.152. $2\sqrt{2}\pi a^2$. 16.153. 0 . 16.154. 0 . 16.155. $-2\pi a^3$.
- 16.156. $\frac{\pi}{4}-1$. 16.157. $-\pi a^2$. 16.158. $2\sqrt{2}\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. 16.159. $(4\ln 2-3)a^3$.
- 16.160. $\frac{14}{15}a^3$. 16.161. $-\frac{\pi}{16}r^6$. 16.162. $2\pi ab$. 16.163. $\frac{40}{3}$. 16.164. 0 . 16.165. 3 .
- 16.166. $-\frac{40}{3}$. 16.167. $\frac{1}{5}(1-e^\pi)$. 16.168. а) 0 ; б) 0 . 16.169. $\frac{16}{\pi^3}$.
- 16.170. а) $-\frac{\pi a^3}{16} - \frac{a^3}{12} + \frac{a^2}{2}$; б) $\frac{\pi a^3}{16} - \frac{a^3}{12} + a^2$. 16.171. $\frac{\pi a^2}{2} - 2a$. 16.172. $\frac{3\pi+10}{3}a^3$.
- 16.173. $-\frac{15}{32}\pi a^{8/3}$. 16.174. $-\frac{5}{2}\pi a^3$. 16.175. $\frac{\pi}{32}a^4$. 16.176. $\frac{2}{3}ab(2a^2+b^2)$.
- 16.177. $-\frac{1}{72}b^3$. 16.178. 324 . 16.179. $\frac{4}{3}(2a^2p^2q+4bp^3q+cpq^3)$. 16.180. 88 .
- 16.181. $-\frac{\pi}{2}b^4$. 16.182. 0 . 16.183. πa^2R . 16.184. $\frac{4\pi}{abc}(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)$.
- 16.185. $\pi(1+\pi)a^3$. 16.186. $\frac{12}{5}\pi a^5$. 16.187. $2\pi a^2H$. 16.188. $-4\pi abc$.
- 16.189. а) $\frac{2}{3}\pi H^3$; б) $-\frac{1}{3}\pi H^3$. 16.190. $\frac{\pi}{2}H^4$. 16.191. $-\frac{1}{12}$. 16.192. $\frac{\pi}{20}(8a+5)a^4$.
- 16.193. $\frac{\pi}{4}H^4$. 16.194. $\frac{5}{3} + \pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{11}{15}\right)$. 16.195. $\frac{16}{3}$. 16.196. 8π . 16.197. $\frac{23\pi}{60}$.

- 16.198. $-86,4\pi$. 16.199. $2\pi a^2 H$. 16.200. $\frac{1}{7}$. 16.201. $\frac{\pi}{60} a^5$. 16.202. $-\frac{3\pi}{8} a^4$.
- 16.203. $-\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+5)}$. 16.204. $-12\pi a^2$. 16.205. 80π . 16.206. $4\pi a^2$.
- 16.207. 0. 16.208. -8π . 16.209. $\sqrt{3}\pi a^2$. 16.210. -16π . 16.211. $-2\sqrt{2}\pi a^2$.
- 16.212. а) 0; б) -2 . 16.213. $-\frac{32}{3}$. 16.214. $-\frac{4}{3}a^2$. 16.215. $-2\pi a^3$.
- 16.216. $-\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi a^2$. 16.217. $-\frac{\pi}{2}a^4$. 16.218. $-\frac{32}{15}a^3$. 16.219. $2\pi Rr^2$.
- 16.220. $\frac{h^3}{6}$. Указание. Дополнить кривую до замкнутой отрезком BA .
- 16.221. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$.
- 16.222. $\left(\frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right)$.
- 16.223. $\left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$.
- 16.224. $(3x^2 - 3yz, 3y^2 - xz, 3z^2 - xy)$. 16.225. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{10}$. 16.226. $\frac{\pi}{2}$.
- 16.228. $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$. 16.229. 3. 16.230. $\frac{2}{r}$. 16.231. 0.
- 16.232. $-2f\left(\frac{xy}{z}\right)$. 16.233. $(-1, 1 - 2x, 0)$. 16.234. $(-2z, -2x, -2y)$.
- 16.235. $(0, 3z^2 - 3x^2, 0)$. 16.236. $\left(-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}, -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{y}, -\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z}\right)$. 16.237. $(0, 0, 0)$.
- 16.238. $\frac{f(r)}{r}\vec{r} \times \vec{c}$. 16.239. 0. 16.240. $2f(r)\vec{c} + \frac{f'}{r}(\vec{c}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{c} \cdot \vec{r}))$.
- 16.242. $f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$; $f = C_1 + \frac{C_2}{r}$. 16.243. $\frac{f'(r)}{r}\vec{c} \cdot \vec{r}$.
- 16.244. $3f(r) + rf'(r)$; $f = \frac{C}{r^3}$. 16.245. 0. 16.246. 0. 16.247. $2\pi R^2$.
- 16.248. а) $-\frac{\pi ab}{4} + ab$; б) $-\frac{a^2 b}{3} + \frac{\pi ab}{4} + \frac{b^2}{2}$; в) 0; г) 1) $-aF$; 2) Fb ;
д) $\frac{k(a^2 - b^2)}{2}$, где k — коэффициент пропорциональности.
- 16.249. $2\pi|\vec{g}|b$. 16.250. $\frac{6\pi}{5} \cdot 2^{10}$. 16.251. 0. 16.252. πH^3 . 16.253. 4.
- 16.254. 15π . 16.255. $-a^5$. 16.256. 0. 16.257. $\frac{R^5}{3}$. 16.258. $-\frac{\pi}{2}$. 16.259. 45π .
- 16.260. -2π . 16.261. πR^4 . 16.262. $\frac{\pi}{2}(R+2)R^3$. 16.263. $\frac{\pi}{4}R^2H(2R^2 - H^2)$.
- 16.264. $\frac{1}{2}$. 16.265. $\frac{8}{3}$. 16.266. $\frac{16}{3}$. 16.267. 0. 16.268. $R\sqrt{2}|v|$. 16.269. $\frac{\pi+1}{2}a^2$.
- 16.270. $\frac{3}{2}\pi a^4$. 16.271. $\frac{1}{3}a^3$. 16.272. $\frac{\pi}{4}a^3$. 16.273. 0. 16.274. $-\pi$.
- 16.275. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}a^2$. 16.276. $3\pi a^2$. 16.277. $2\sqrt{2} - \frac{7}{3}$. 16.278. πab . 16.279. -5 .
- 16.280. 1. 16.281. 0. 16.282. $x^2y + y + C$. 16.283. $x(y+1)^2 + C$.
- 16.284. Не является. 16.285. $x^2 \cos y + y^2 \cos x + C$. 16.286. $x + ye^{x/y} + C$.
- 16.287. $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} + C$. 16.288. $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \arctg \frac{y}{x} + \ln|y| + C$.
- 16.289. $\sqrt{1+xy} + \arctg \frac{y}{x} + e^x \sin 2y + \ln \left| \tg \frac{x}{2} \right| + C$.
- 16.290. $\ln(x^2 + y^2) + x^2\sqrt{1+y} - \arctg \frac{xy}{x+y} - x \ln x - x - \ln \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + C$.
- 16.291. $e^x \sin y + z + C$. 16.292. $x + xyz + C$. 16.293. $\ln|x+y+z| + C$.
- 16.294. $xy + yz + zx + C$. 16.295. $x^2yz + C$. 16.296. $\frac{2x}{\sqrt{y+z}} + C$.

- 16.297. $\arctg(xyz) + \ln(x^2 + z^2) - \sqrt{\frac{y}{z}} + x^2 - y + z + C$. 16.298. $x^2yz + \frac{x}{z} - \frac{y}{z^2} + C$.
- 16.299. $x^2y + y^2z + z^2x + xyz + C$. 16.300. $\frac{1}{2} \cdot \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2} + C$.
- 16.301. $\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + C$. 16.302. $xyz(x+y+z) + C$. 16.303. $-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$. 16.304. $\frac{m}{r}$.
- 16.305. $-\frac{14}{15}$. 16.306. 1. 16.307. 4. 16.308. 62. 16.309. $\frac{\pi}{4} + \arctg 5$.
- 16.310. $\pi + 1$. 16.311. 123. 16.312. 15.
- 16.313. $\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\vec{j} + \left(-\frac{x^2}{2} - zx + yz + \frac{y^2}{2}\right)\vec{k}$. 16.314. Не является.
- 16.315. $x^2\vec{j} + (xz + y^2)\vec{k}$. 16.316. $\left(xy^2z - \frac{1}{3}x^3z\right)\vec{j} + \left(xyz^2 - \frac{1}{3}x^2y\right)\vec{k}$.
- 16.317. Не является. 16.318. $(z^2yx - 2zxy + x)\vec{j} + (y^2zx + y)\vec{k}$.
- 16.319. $3x^2\vec{j} + (2y^3 - 6zx)\vec{k}$. 16.320. $-(xz^2 + yze^{x^2})\vec{j} - 2xyz\vec{k}$. 16.321. 11.
- 16.322. -17. 16.323. $-\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3 - 4\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_4 - 3\pi_2 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4$.
- 16.324. $4\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3 + 16\pi_1 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4 - 6\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_4 - 2\pi_2 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4$. 16.325. 54.
- 16.326. -14. 16.327. $-(z+1)^2 e^{y+z} dx \wedge dy \wedge dz$.
- 16.328. $4xz dz \wedge dx + 4xy dx \wedge dy + 4yz dy \wedge dz$. 16.329. $6xyz dx \wedge dy \wedge dz$.
- 16.330. $x_1^2 x_2 dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_2 + x_1^2 x_4 dx_2 \wedge dx_3 + x_1^2 x_4 dx_2 \wedge dx_3 + dx_4$.
- 16.331. $2x_1 x_2 x_4 dx_1 \wedge dx_2 + 2x_1^2 x_2 dx_2 \wedge dx_3 + dx_4$.
- 16.332. $\frac{1}{x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2} \left((-x_2 x_3 x_4^2 - x_1 x_3^2 x_4) dx_1 \wedge dx_2 + 2x_1 x_2 x_3 x_4 dx_1 \wedge dx_3 + \right.$
 $\left. + (x_1 x_2 x_3^2 - x_2^2 x_3 x_4) dx_1 \wedge dx_4 + (x_1^2 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_4^2) dx_2 \wedge dx_3 - \right.$
 $\left. - 2x_1 x_2 x_3 x_4 dx_2 \wedge dx_4 + (x_1 x_2^2 x_4 + x_1^2 x_2 x_3) dx_3 \wedge dx_4 \right)$.
- 16.333. $(x_3^2 x_4 - 2x_1 x_3 x_4) dx_1 \wedge dx_2 + (x_2 x_3^2 - 2x_1 x_2 x_3) dx_1 \wedge dx_4 +$
 $+ (x_1^2 x_4 - 2x_1 x_3 x_4) dx_2 \wedge dx_3 + (2x_1 x_2 x_3 - x_1^2 x_2) dx_3 \wedge dx_4$.
- 16.334. $2 \cos(x_1 + x_2) \cos(x_1 + x_3) (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4) -$
 $- 2 \sin(x_1 + x_2) \sin(x_3 + x_4) (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4)$.
- 16.335. $-(x_1 x_2 + x_2 x_4) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - (x_3 x_4 + x_2 x_4) dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 -$
 $- (x_3 x_4 + x_1^2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - (x_1 x_2 + x_3^2) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.
- 16.336. Замкнута. 16.337. Нет. 16.338, 16.339. Замкнута.
- 16.340, 16.341. Нет. 16.342. $(\sin x \cos x - x^2 \sin x - x) dx$. 16.343. $y dy$.
- 16.344. $a^2 b (\sin t \cos t - t) dt$. 16.345. $3a^2 b t^3 dt$. 16.346. $-xy (\cos x + \cos y) dx \wedge dy$.
- 16.347. $2 \arctg \frac{y}{z} dy \wedge dz$. 16.348. $-2xz dz \wedge dx$. 16.349. $2R^3 \cos \psi d\varphi \wedge d\psi$.
- 16.350. $2a^3 b^2 u^4 (\cos v + \sin v) du \wedge dv$.
- 16.351. $-a \sin \varphi \sin \psi \cos \psi (a + b \cos \varphi)^3 d\varphi \wedge d\psi$. 16.352. $2a^3 uv du \wedge dv$.
- 16.353. $(R^4 \sin^2 \varphi (\cos \varphi + 1) - R^2 (\cos \varphi + \cos 2\varphi) h^2) d\varphi \wedge dh$.
- 16.354. $(u_1 + u_2) e^{u_1 + u_2} (u_1 + u_2 + u_1 u_2 (3u_1 - 5u_2)) du_1 \wedge du_2$.
- 16.355. $((u_1^2 - u_2^2) + 2u_1 u_2) \sin u_3 \cos u_3 du_1 \wedge du_2 + u_1 (u_1^2 - u_2^2) \sin^2 u_3 du_2 \wedge du_3 +$
 $+ u_2 (u_1^2 - u_2^2) \cos^2 u_3 du_1 \wedge du_3$.
- 16.356. $\frac{1}{2} \sin 4u_2 du_1 \wedge du_2$.
- 16.357. $-2(u_1 u_2^5 - u_1^6 u_2 + u_2^2 u_3^5 - u_2^6 u_3 + u_1^5 u_3^2 - u_1 u_3^6) du_1 \wedge du_2 \wedge du_3$.
- 16.358. $u_1^4 (\sin^3 u_2 - \cos^3 u_2 - \sin^3 u_3 + \cos^3 u_3) du_1 \wedge du_2 \wedge du_3$. 16.359. -4.
- 16.360. -2. 16.361. 37. 16.362. $\int_0^{x_1+y_1} f(u) du$. 16.363. 9. 16.364. 1. 16.365. 3.
- 16.366. $-\frac{9}{2}$. 16.367. 80. 16.368. 4. 16.369. 1. 16.370. 6n.

§ 16.7. Теоретические задачи

Пример Т16.1. Пусть $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность простых гладких кривых $L_n = \{r_n(t) : t \in [0; 1]\}$, лежащих в области $D \subset \mathbb{R}^3$, что:

- 1) последовательность $\{r_n(0)\}$ сходится к точке $A \in D$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) последовательность $\{r'_n\}$ на $[0; 1]$ сходится равномерно к некоторому отображению $\vec{\varphi}$, причём $|\vec{\varphi}(t)| \neq 0, t \in [0; 1]$.

Докажем, что:

а) последовательность $\{r_n\}$ отображений $r_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ сходится к отображению $r : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, причём $r \in C^1[0; 1]$,

б) для любой функции $f \in C(D)$ справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n} f ds = \int_L f ds$, где $L = \{r(t) : t \in [0; 1]\}$ — простая гладкая кривая.

РЕШЕНИЕ. а) Поскольку L_n — простая гладкая кривая, получаем $r_n(t) = (x_n(t), y_n(t), z_n(t))$ и $x_n(t), y_n(t), z_n(t) \in C^1[0; 1]$. Из условий 1 и 2 следует, что:

- 1) $x_n(0) \rightarrow x_0, y_n(0) \rightarrow y_0, z_n(0) \rightarrow z_0$, где x_0, y_0, z_0 — координаты точки A ;
- 2) последовательности $\{x'_n\}, \{y'_n\}, \{z'_n\}$ сходятся равномерно на $[0; 1]$.

Отсюда вытекает, что последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ равномерно сходятся на $[0; 1]$ к некоторым функциям $x, y, z \in C^1[0; 1]$, т. е. $r_n \rightarrow r = (x, y, z) \in C^1[0; 1]$ и $\vec{r}' = \vec{\varphi}, t \in [0; 1]$.

б) Поскольку $|\vec{r}'(t)| \neq 0, t \in [0; 1]$, множество $L = \{(x, y, z) : (x, y, z) = r(t), t \in [0; 1]\}$ является простой гладкой кривой. Тогда

$$\int_L f ds - \int_{L_n} f ds = \int_0^1 (f(\vec{r})|\vec{r}'| - f(x_n(t), y_n(t), z_n(t))\sqrt{(x'_n)^2 + (y'_n)^2 + (z'_n)^2}) dt.$$

В силу равномерной сходимости на $[0; 1]$ последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, \{x'_n\}, \{y'_n\}, \{z'_n\}$ к функциям x, y, z, x', y', z' соответственно и непрерывности функции f , на $[0; 1]$ последовательность

$$\{f(\vec{r})|\vec{r}'| - f(x_n(t), y_n(t), z_n(t))\sqrt{(x'_n(t))^2 + (y'_n(t))^2 + (z'_n(t))^2}\}$$

стремится к нулю равномерно и, следовательно, $\int_L f ds - \int_{L_n} f ds \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. \square

Пример Т16.2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область. Преобразуем к двойному криволинейный интеграл 1-го рода $\int_L \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds$, где $f \in C^2(D), L \subset D$ — кусочно-гладкий контур, \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к L .

РЕШЕНИЕ. Применяя двумерный аналог формулы Гаусса — Остроградского (см. с. 182) и равенство $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \text{grad } f \cdot \vec{n}$, получаем

$$\int_L \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \int_L \text{grad } f \cdot \vec{n} ds = \int_{D_L} \text{div grad } f dx dy = \int_{D_L} \Delta f dx dy,$$

где D_L — область, ограниченная контуром L . \square

Пример Т16.3. Вычислим интеграл Гаусса $u(x_0, y_0) = \int_L \frac{\cos \angle(\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{r}|} ds$, где $L \subset \mathbb{R}^2$ — гладкий контур, $M_0(x_0, y_0) \notin L$, $M(x, y) \in L$, $\vec{r} = \overrightarrow{M_0M}$, \vec{n} — вектор внешней нормали к L .

РЕШЕНИЕ. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = y_0 = 0$ и $|\vec{n}| = 1$, тогда

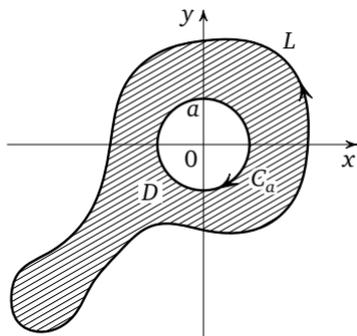
$$u(0, 0) = \int_L \frac{\cos \angle(\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{r}|} ds = \int_L \frac{xn_x + yn_y}{x^2 + y^2} ds = \int_L \vec{F} \cdot \vec{n} ds, \quad \text{где } \vec{F} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Обозначим через D_L область, ограниченную контуром L , и рассмотрим два случая.

1. Пусть начало координат не лежит в D_L . Тогда $\vec{F} \in C^\infty(D_L)$ и, применяя двумерный аналог формулы Гаусса — Остроградского, получаем:

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= \int_L \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{D_L} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \iint_{D_L} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

2. Пусть начало координат лежит в D_L . Тогда поле \vec{F} не будет не только гладким, но даже непрерывным в D_L при любом его доопределении в начале координат. Возьмём область $D_{L,a}$, границей которой является контур L и окружность C_a с центром в начале координат и радиусом a , достаточно малым, чтобы эта окружность лежала внутри D_L . Граница $D_{L,a}$ (обозначим её через L_a) состоит из двух непересекающихся контуров L и C_a , причём положительному обходу L_a соответствует положительный обход контура L и отрицательный обход окружности C_a (см. рис.). Начало координат лежит вне $D_{L,a}$, следовательно, как было показано в п. 1, $\int_{L_a} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 0$.



Пользуясь параметризацией $C_a = \{(x, y) : x = a \cos t, y = -a \sin t, t \in [0; 2\pi)\}$, получаем $ds = a dt$. Для точки $(x, y) \in C_a$ единичный вектор внешней нормали к C_a есть $\vec{n} = \left(-\frac{x}{a}, -\frac{y}{a} \right)$, следовательно, на C_a имеем

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{a} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{1}{a}.$$

Пользуясь свойством аддитивности, получаем:

$$u(0, 0) = \int_L \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_{L_a} \vec{F} \cdot \vec{n} ds - \int_{C_a} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Итак, интеграл Гаусса равен нулю для любой точки $M_0(x_0, y_0)$ снаружи контура L и равен 2π для любой точки $M_0(x_0, y_0)$ внутри контура L . \square

Пример Т16.4. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область, $L \subset D$ — кусочно-гладкий контур, \vec{n} — вектор внешней нормали к L и S — фигура, ограниченная контуром L . Докажем, что для функций $u \in C^2(D)$ и $v \in C^2(D)$ справедливо равенство (вторая формула Грина на плоскости)

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \int_L \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \\ u & v \end{vmatrix} ds.$$

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся двумерным аналогом формулы Гаусса — Остроградского для векторного поля $\vec{F} = u \operatorname{grad} v$ и равенством $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = u \Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v$ (задача 16.241 а):

$$\begin{aligned} \int_L u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds &= \int_L u \operatorname{grad} v \cdot \vec{n} ds = \iint_S \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) dx dy = \\ &= \iint_S (u \Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) dx dy. \end{aligned}$$

Меняя местами u и v и вычитая из одного равенства другое, получаем

$$\int_L (v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}) ds = \iint_S (v \Delta u - u \Delta v) dx dy. \quad \square$$

Пример Т16.5. Пусть L — кусочно-гладкая замкнутая кривая, \vec{n} — вектор внешней нормали к L , D — область в \mathbb{R}^2 , ограниченная кривой L , \vec{r} — вектор из точки M_0 , лежащей вне L , в точку M кривой L . Докажем равенство

$$\iint_D \frac{dx dy}{|\vec{r}|} = \int_L \cos \angle(\vec{r}, \vec{n}) ds.$$

РЕШЕНИЕ. Без ограничения общности можно считать, что $M_0 = (0, 0) \notin L$, тогда $\vec{r} = (x, y)$. Применим двумерный аналог формулы Гаусса — Остроградского для $\vec{A} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$:

$$\begin{aligned} \int_L \cos \angle(\vec{r}, \vec{n}) ds &= \int_L \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) dx dy = \\ &= \iint_D \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} \right) dx dy = \iint_D \frac{dx dy}{|\vec{r}|}. \quad \square \end{aligned}$$

Т16.1. Пусть $I = [0; 1] \times [0; 1]$ и $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ — такая последовательность простых гладких поверхностей $S_n = \{r_n(u, v) : (u, v) \in I\}$, лежащих в области $D \subset \mathbb{R}^3$, что последовательность $\{\sigma_n\}$:

$$\sigma_n = \sup \{ \|r_n(u, v)\| + \|\vec{r}'_{nu}(u, v)\| + \|\vec{r}'_{nv}(u, v)\| : (u, v) \in I \},$$

фундаментальна. Доказать, что:

а) последовательность $\{r_n\}$ отображений $r_n : I \rightarrow D$ сходится к отображению $r : I \rightarrow D \in C^1(I)$;

б) если $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq 0$, $(u, v) \in I$, то для любой функции $f \in C(D)$ справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f d\sigma = \iint_S f d\sigma$, где $S = \{r(u, v) : (u, v) \in I\}$ — простая гладкая поверхность.

✓ **T16.2.** Доказать формулу Пуассона

$$\iint_S f(ax + by + cz) d\sigma = 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du,$$

где S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $f \in C[-\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}; \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}]$.

✓ **T16.3.** Пусть L — кусочно-гладкая кривая, $\vec{F} = (P, Q, R)$ — гладкое векторное поле на L . Доказать неравенство

$$\left| \int_L P dx + Q dy + R dz \right| \leq |L| \sup_{(x, y, z) \in L} |\vec{F}(x, y, z)|.$$

✓ **T16.4.** Пусть \vec{F} — гладкое векторное поле в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^3$ и $S_\varepsilon^2(x_0)$ — сфера радиусом ε с центром в точке x_0 , \vec{n} — вектор внешней нормали к ней. Доказать равенство

$$\operatorname{div} \vec{F}(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \iint_{S_\varepsilon^2(x_0)} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

T16.5. Пусть \vec{F} — гладкое векторное поле в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $S_\varepsilon^1(x_0, \vec{l})$ — окружность радиусом ε с центром в точке x_0 , лежащая в плоскости, ортогональной вектору \vec{l} , $\vec{\tau}$ — касательный к этой окружности вектор, определяющий движение против часовой стрелки на стороне плоскости, задаваемой вектором \vec{l} . Доказать равенство

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x_0) \cdot \vec{l} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon^1(x_0, \vec{l})} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds.$$

T16.6. Пусть D — односвязная область в \mathbb{R}^2 , L — кусочно-гладкий контур, лежащий в D , \vec{n} — вектор внешней нормали к L и S — фигура, ограниченная контуром L . Доказать, что для функции $u \in C^2(D)$ справедливо равенство

$$\int_L u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \iint_S \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy + \iint_S u \Delta u dx dy.$$

✓ **T16.7.** Пусть D — односвязная область в \mathbb{R}^2 . Доказать, что функция $u \in C^2(D)$ является гармонической в D (см. § 16.5, с. 188) тогда и только тогда, когда для любого кусочно-гладкого контура $L \subset D$ выполняется равенство $\int_L \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = 0$, где \vec{n} — вектор внешней нормали к L .

T16.8. Пусть u и v — функции, гармонические в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, причём $u(x) = v(x)$ для всех точек x , лежащих на кусочно-гладком контуре $L \subset D$. Доказать, что $u(x) = v(x)$ для всех $x \in S$, где S — фигура, ограниченная L (т. е. гармоническая функция однозначно определяется в S своими значениями на границе S).

T16.9. Пусть функции u и v — гармонические в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, $L \subset D$ — кусочно-гладкий контур и \vec{n} — вектор внешней нормали к L . Доказать, что если $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}$ во всех точках L , то в области, ограниченной L , разность $u(x) - v(x)$ постоянна.

T16.10. Пусть u — гармоническая функция в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, $L \subset D$ — кусочно-гладкий контур и \vec{n} — вектор внешней нормали к L . Доказать, что для точки x_0 , лежащей в области, ограниченной контуром L , справедливо равенство

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left(u \frac{\partial \ln |\vec{r}|}{\partial \vec{n}} - \ln |\vec{r}| \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) ds,$$

где \vec{r} — вектор из точки x_0 в точку x контура L .

✓ **T16.11.** Пусть u — гармоническая функция в области $D \subset \mathbb{R}^2$. Доказать, что для любой точки $x_0 \in D$ справедливо равенство

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_C u ds,$$

где C — такая окружность с центром в точке x_0 и радиусом R , что круг $S = \{x: \|x - x_0\| < R\}$ содержится в области D .

T16.12. Доказать, что гармоническая в области $D \subset \mathbb{R}^2$ функция u , отличная от постоянной, не имеет в этой области строгих локальных экстремумов.

T16.13. Пусть D — односвязная область в \mathbb{R}^3 , $S \subset D$ — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, \vec{n} — вектор внешней нормали к S и V — тело, ограниченное поверхностью S . Доказать, что для $u \in C^2(D)$ справедливы равенства

$$a) \iint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma = \iiint_V \Delta u dx dy dz;$$

$$b) \iint_S u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma = \iiint_V \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dx dy dz + \iint_V u \Delta u dx dy dz.$$

T16.14. Пусть D — односвязная область в \mathbb{R}^3 , $S \subset D$ — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, \vec{n} — вектор внешней нормали к S и V — тело, ограниченное поверхностью S . Доказать, что для функций $u \in C^2(D)$ и $v \in C^2(D)$ справедливо равенство (вторая формула Грина в пространстве)

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \\ u & v \end{vmatrix} d\sigma.$$

✓ **T16.15.** Пусть D — односвязная область в \mathbb{R}^3 и функция $u \in C^2(D)$. Доказать, что функция u является гармонической в D тогда и только тогда, когда для любой кусочно-гладкой замкнутой поверхности $S \subset D$ выполняется равенство $\iint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma = 0$, где \vec{n} — вектор внешней нормали к S .

✓ **T16.16.** Пусть функции u и v — гармонические в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^3$, $S \subset D$ — кусочно-гладкая замкнутая поверхность и V — тело, ограниченное поверхностью S . Доказать, что если $u(x) = v(x)$ для всех $x \in S$, то $u(x) = v(x)$ для всех $x \in V$.

T16.17. Пусть функции u и v — гармонические в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^3$, $S \subset D$ — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, \vec{n} — вектор внешней нормали к S и V — тело, ограниченное поверхностью S . Доказать, что если $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}$ для всех $x \in S$, то разность $u(x) - v(x)$ постоянна в V .

T16.18. Пусть u — гармоническая функция в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^3$, $S \subset D$ — кусочно-гладкая замкнутая поверхность и \vec{n} — вектор внешней нормали к S . Доказать, что для точки x_0 , лежащей в области, ограниченной поверхностью S , справедливо равенство

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(u \frac{\cos \angle(\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{r}|^2} + \frac{1}{|\vec{r}|} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma,$$

где \vec{r} — вектор из точки x_0 в точку x поверхности S .

✓ **T16.19.** Пусть u — гармоническая функция в области $D \subset \mathbb{R}^3$. Доказать, что для любой точки $x_0 \in D$ справедливо равенство

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S u d\sigma,$$

где S — такая сфера с центром в x_0 и радиусом R , что шар $V = \{x : \|x - x_0\| \leq R\}$ содержится в области D .

T16.20. Пусть S — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, \vec{n} — вектор внешней нормали к S , V — тело, ограниченное поверхностью S , \vec{r} — вектор из точки x_0 , лежащей вне S , в точку x поверхности S . Доказать равенство

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{|\vec{r}|} = \frac{1}{2} \iint_S \cos \angle(\vec{r}, \vec{n}) d\sigma.$$

✓ **T16.21.** Пусть S — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, \vec{n} — вектор внешней нормали к S , \vec{r} — вектор из точки x_0 , лежащей вне S , в точку x поверхности S . Вычислить интеграл Гаусса $\iint_S \frac{\cos \angle(\vec{r}, \vec{n})}{|\vec{r}|^2} d\sigma$.

T16.22. Пусть D — область в \mathbb{R}^3 , $L \subset D$ — кусочно-гладкая ориентированная кривая, проходящая через точку $x_0 \in D$, u — гладкая функция на D . Найти

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|L_\varepsilon|} \int_{L_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

где $L_\varepsilon = L \cap \{x : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$.

T16.23. Пусть D — область в \mathbb{R}^3 , $u \in C^1(D)$, $S \subset D$ — кусочно-гладкая ориентированная поверхность, проходящая через точку $x_0 \in D$. Найти

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|S_\varepsilon|} \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial u}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial z} dx \wedge dy,$$

где $S_\varepsilon = S \cap \{x : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$.

Ответы и указания

T16.1. Указание. См. пример T16.1.

T16.2. Указание. Перейти к новым переменным (u, v, w) , сделав поворот осей координат так, чтобы плоскость $ax + by + cz = 0$ стала координатной плоскостью $u = 0$.

T16.3. Указание. Показать, что $|P dx + Q dy + R dz| \leq \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} ds$.

T16.4. Указание. Воспользоваться формулой Гаусса — Остроградского.

T16.5. Указание. Воспользоваться формулой Стокса.

T16.6. Указание. Преобразовать $\int_L u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds$ в интеграл 2-го рода и применить формулу Грина.

T16.7. Указание. Применить равенство примера T16.2 утверждение задачи T15.8.

T16.8. Указание. Применить равенство задачи T16.6 и утверждение задачи T15.9.

T16.9. Указание. Применить равенство задачи T16.6 и утверждение задачи T15.9.

T16.10. Указание. Показать, что в равенстве примера T16.4 фигура S может иметь границу, состоящую из конечного числа кусочно-гладких контуров, и применить это равенство к области, ограниченной контуром L и окружностью с центром в точке x_0 и произвольно малым радиусом.

T16.11. Указание. Применить равенство задачи T16.10.

T16.12. Указание. Применить равенство задачи T16.11.

T16.13. Указание. Преобразовать интегралы $\iint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma$ и $\iint_S u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma$ в интегралы второго рода и применить формулу Гаусса — Остроградского.

T16.14. Указание. См. пример T16.4.

T16.15. Указание. Применить равенство а) задачи T16.13 и утверждение задачи T15.8.

T16.16. Указание. Применить равенство б) задачи T16.13 и утверждение задачи T15.9.

T16.17. Указание. Применить равенство б) задачи T16.13 и утверждение задачи T15.9.

T16.18. Указание. Показать, что равенство задачи T16.14 имеет место и тогда, когда границей тела V является конечное число кусочно-гладких поверхностей, и применить это равенство к телу, ограниченному поверхностью S и сферой с центром в точке x_0 и произвольно малым радиусом.

T16.19. Указание. Применить равенство задачи T16.18.

T16.20. Указание. См. пример T16.5.

T16.21. 4π .

T16.22. $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{\tau}} \right|_{x=x_0}$, где $\vec{\tau}$ — касательный вектор к L , определяющий её ориентацию.

T16.23. $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{x=x_0}$, где \vec{n} — вектор нормали к S , определяющий её ориентацию.

Оглавление

Глава 15. Кратные интегралы

§ 15.1. Определение и общие свойства интеграла Римана от функции нескольких переменных	3
§ 15.2. Двойной интеграл	10
15.2.1. Сведение двойного интеграла к повторному	10
15.2.2. Замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярной и обобщённой полярной системам координат	26
15.2.3. Площадь плоской фигуры и объём пространственного тела	36
15.2.4. Площадь поверхности и её вычисление	39
15.2.5. Механические приложения двойного интеграла	48
§ 15.3. Тройной интеграл	50
15.3.1. Сведение тройного интеграла к повторному	50
15.3.2. Замена переменных. Переход к цилиндрическим, сферическим и обобщённым сферическим координатам	62
15.3.3. Объём тела	70
15.3.4. Механические приложения тройного интеграла	74
§ 15.4. Многомерный кратный интеграл	77
15.4.1. Сведение кратного интеграла к повторному	77
15.4.2. Многомерные полярные координаты	80
§ 15.5. Несобственный кратный интеграл	84
Задачи	95
Ответы и указания	116
§ 15.6. Теоретические задачи	132

Глава 16. Криволинейные и поверхностные интегралы. Векторный анализ.

Дифференциальные формы

Предварительные сведения	138
§ 16.1. Криволинейный интеграл первого рода	139
§ 16.2. Поверхностный интеграл первого рода	152
§ 16.3. Криволинейный интеграл второго рода	158
§ 16.4. Поверхностный интеграл второго рода	169
§ 16.5. Векторный анализ	188
§ 16.6. Дифференциальные формы	198
16.6.1. Алгебраические формы	198
16.6.2. Дифференциальные формы в \mathbb{R}^n	200
16.6.3. Интегрирование дифференциальных форм	207
16.6.4. Общая формула Стокса	216
Задачи	219
Ответы и указания	241
§ 16.7. Теоретические задачи	246

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: <http://biblio.mccme.ru/shop/order>

Книги в электронном виде: <http://www.litres.ru/mcnmo/>

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru, k_i_@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru