



俄罗斯数学
教材选译

数学分析习题集

(根据 2010 年俄文版翻译)

- Б. П. 吉米多维奇 著
- 李荣涑 李植 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

总策划：张小萍
责任编辑：蒋青
封面设计：王凌波

Б. П. 吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部久负盛名的经典著作，自20世纪50年代引进以来，对我国半个多世纪的微积分学乃至高等数学的教与学产生了重大影响。本书译自最新的2010年俄文版，是对已在我国流行多年的1958年版中译本（李荣涑译）的全面修订和增补。与该版相比，本书除了对少量习题的修订与更替，还增加了许多新题。后继译者继承了原有译文简洁凝练的风格，对全部译文进行了适当改写和补译，以适应学科术语标准化和语言习惯变化的需要。

全书包括约5000道习题，几乎涵盖了数学分析的各个重要分支：分析引论（主要是函数与极限理论）、一元函数微分学、不定积分与定积分、级数、多元函数微分学、带参数的积分、重积分与曲线积分、曲面积分。难度较大的一些习题带有提示，书后附有计算题和简答题的答案。

本书可作为各类读者学习微积分或高等数学课程的重要参考书。

学科类别：数学

ISBN 978-7-04-025439-6

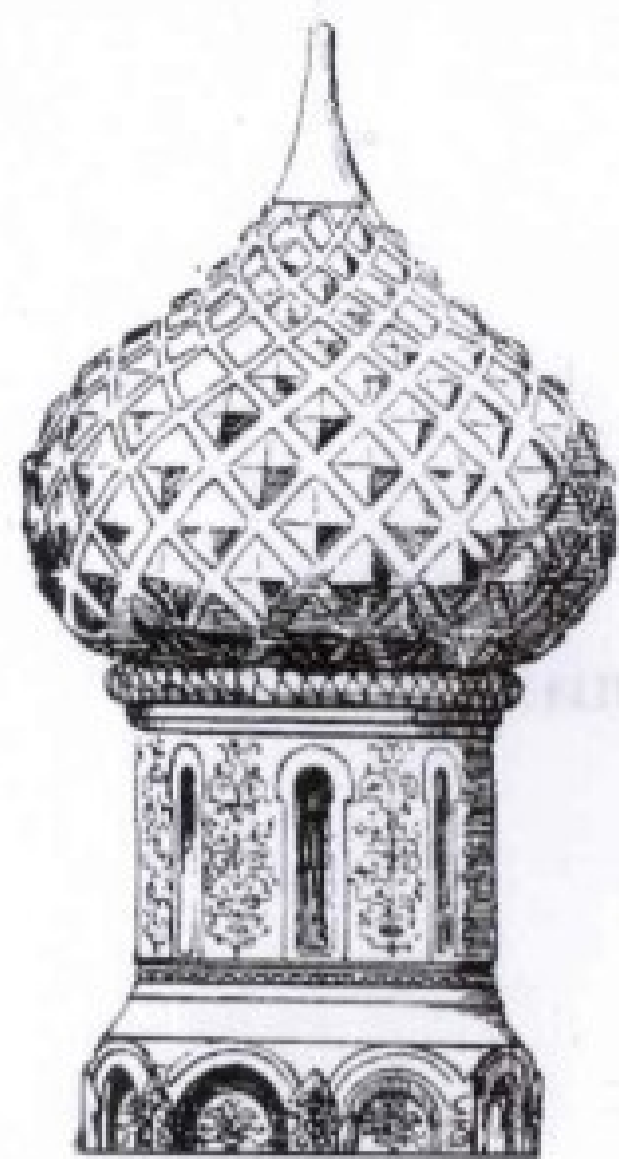


9 787040 254396 >

定价 29.00 元

academic.hep.com.cn

郑重声明：原作品版权所有人V. B. Demidovich（B. Б. 吉米多维奇）委托高等教育出版社全权处理在中华人民共和国境内发生的侵犯本作品（包括其任何版本）著作权的相关事务。



俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

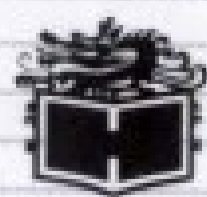
数学分析习题集

S h u x u e F e n x i X i t i j i

(根据 2010 年俄文版翻译)

Б. П. 吉米多维奇 著

李荣涑 李 植 译



高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

数学分析习题集
PDFG

图字: 01-2008-5183 号

В. П. Демидович,

Сборник задач и упражнений по математическому анализу,
Москва, Издательство Астрель, 2010.

Originally published in Russian in the title:

V. P. Demidovich

Collection of Problems and Exercises in Mathematical Analysis

Copyright © 2010 by V. B. Demidovich

All Rights Reserved

郑重声明: 原作品著作权所有人 V. B. Demidovich (В. Б. 吉米多维奇) 委托高等教育出版社
全权处理在中华人民共和国境内发生的侵犯本作品 (包括其任何版本) 著作权的相关事务.

图书在版编目 (CIP) 数据

数学分析习题集 / (俄罗斯) 吉米多维奇著; 李荣涑,
李植译. — 2 版. — 北京: 高等教育出版社, 2010.7

根据 2010 年俄文版翻译

ISBN 978-7-04-025439-6

I. 数... II. ①吉...②李...③李... III. 数学分析-高
等学校-习题 IV. O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 213260 号

策划编辑	赵天夫	责任编辑	蒋青	封面设计	王凌波
版式设计	余杨	责任校对	王雨	责任印制	陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com http://www.landaco.com.cn
印 刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	1958 年 6 月第 1 版 2010 年 7 月第 2 版
印 张	25.5	印 次	2010 年 7 月第 1 次印刷
字 数	450 000	定 价	29.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 25439-00

《俄罗斯数学教材选译》序

俄罗斯数学教材选译

从上世纪 50 年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材.这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才.到了 60 年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用.客观地说,从解放初一直到文化大革命前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的.

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益.但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,引进却基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机.今年初,在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版.这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视.会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订,本系列中所列入的教材,以莫斯科大学的教材为主,也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材.有大学基础课程的教材,也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书.有些教材虽曾翻译出版,但经多次修订重版,面目已有较大变化,至今仍广泛采用、深受欢迎,反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力,对我们也是一个有益的借鉴.这一教材系列的出版,将中俄数学教学之间中断多年的

链条重新连接起来,对推动我国数学课程设置和教学内容的改革,对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才,可望发挥积极的作用,并起着深远的影响,无疑值得庆贺,特为之序.

李大潜

2005年10月

序 言

和许多数学家一样,我也曾两次使用这部广为流传的著作:首先是别人教我数学分析的时候,然后是我自己教别人数学分析的时候.在Б.П.吉米多维奇的习题集筹备再版之际,我深感欣喜,并以特别感激的心情应其子В.Б.吉米多维奇之邀为本版作序.

在此,我对这本卓越的大学数学分析习题集和它的作者、国立莫斯科大学教授Б.П.吉米多维奇作简要的介绍.

鲍里斯·巴甫洛维奇·吉米多维奇(Борис Павлович Демидович, 1906—1977)是白俄罗斯人,他的父亲П.П.吉米多维奇是当地的一位教师^①,在教书的同时也在民族学和地方民俗学领域取得了研究成果,并因此当选为莫斯科大学自然科学、人类学和民族学爱好者皇家协会的准会员.Б.П.吉米多维奇本人在国立白俄罗斯大学毕业后也曾当过几年教师,后来成为国立莫斯科大学数学和力学研究所的研究生.在研究生期间,他在В.В.斯捷潘诺夫的领导下开展研究,直接导师则是В.В.涅梅茨基.在很大程度上,正是他们决定了Б.П.吉米多维奇的主要研究领域——经典数学分析和常微分方程理论.

研究生毕业后,Б.П.吉米多维奇被聘为国立莫斯科大学力学数学系数学分析教研室的助教.在此后的四十多年时间里,他一直是这个教研室的成员.他在副博士^②论文答辩后成为该教研室的副教授,在博士论文答辩后晋升为教授.此外,他还在莫斯科的其他一些高等院校任教.他直接培养的学生,许多已经成为副博士或博士.

Б.П.吉米多维奇的论文、专著和教科书(共计约60项)反映了他极强的专业精神和极丰富的教学经验,这些学术作品获得了国内外的广泛认可.其中,具有特殊地位的正是呈献给读者的这本习题集.它的第一版于1952年问世,Б.П.吉米多维奇为此花费了15年以上的时间来收集材料.该习题集一举成名,立刻成为大学数学分析的基本教材.

^①俄文 *учитель* 一词一般指中小学教师. —— 译注

^②苏联和现在的俄罗斯等国家的副博士(кандидат наук)学位一般相当于我们通常所说的博士学位,而博士学位(доктор наук)则是更高一级的学位,要求学位获得者在相关领域有非同寻常的重要贡献.在上述国家,副博士学位拥有者才有资格成为副教授,博士学位拥有者才有资格成为教授. —— 译注

此后, 作者又进行了一些修订, 但由于这本书的初始结构十分合理, 后续调整并不算大. 至今, 习题集的俄文版已经多次再版, 并被译为多种文字在世界的许多国家使用.

数学的发展带来了新的概念、方法、观念和语言, 它们通常会把个别的事实联系起来. 这也经常涉及那些似乎已经发展完毕的基础分支. 微积分学的发展就完全印证了这个结论, 例如对微分和微分规则的不变性的现代解释, 再如利用微分形式的语言和对微分形式的积分给出牛顿—莱布尼茨公式的现代表述. 目前, 无论在数学分析的习题集中, 还是在必修课上, 都未必总能找到这样的语言和一般形式的斯托克斯公式. 此外, 渐近方法作为一种因其有效性而非常有用的重要数学工具, 也是数学的某些领域所共有的一种方法. 渐近方法的基本内容, 就如同极限理论和泰勒公式那样, 总是希望能在数学分析的习题集中看到. 至于数学分析的较高等的分支, 则要求读者有一定的熟练程度和技巧. 要知道, 演奏者若不精通乐器是不可能演奏一部严肃音乐作品的.

经验已经表明, Б. П. 吉米多维奇的习题集能够让学生在经典分析工具的时候获得必要的技能. 本书是高等院校数学分析习题课的基本教材之一.

卓里奇 (В. А. Зорич)
莫斯科大学力学数学系
数学分析教研室教授

目 录

《俄罗斯数学教材选译》序

序言

第一部分 一元函数	1
第一章 分析引论	3
§1. 实数	3
§2. 数列理论	6
§3. 函数的概念	16
§4. 函数的图像表示法	22
§5. 函数的极限	30
§6. 符号 O	46
§7. 函数的连续性	50
§8. 反函数. 用参数形式表示的函数	57
§9. 函数的一致连续性	59
§10. 函数方程	61
第二章 一元函数微分学	63
§1. 显函数的导数	63
§2. 反函数的导数. 用参数形式给出的函数的导数. 隐函数的导数	75
§3. 导数的几何意义	77
§4. 函数的微分	79

§5. 高阶的导数和微分	82
§6. 罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理	89
§7. 增函数与减函数. 不等式	93
§8. 凹凸性. 拐点	96
§9. 不定式的求值法	98
§10. 泰勒公式	101
§11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值	104
§12. 依据函数的特征点作函数图像	108
§13. 函数的极大值与极小值问题	111
§14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线	113
§15. 方程的近似解法	115
第三章 不定积分	116
§1. 最简单的不定积分	116
§2. 有理函数的积分法	125
§3. 无理函数的积分法	127
§4. 三角函数的积分法	130
§5. 各种超越函数的积分法	135
§6. 求函数积分的各种例子	137
第四章 定积分	140
§1. 定积分是积分和的极限	140
§2. 利用不定积分计算定积分的方法	143
§3. 中值定理	150
§4. 广义积分	153
§5. 面积的计算法	157
§6. 弧长的计算法	160
§7. 体积的计算法	161
§8. 旋转曲面表面积的算法	164
§9. 矩的计算法. 质心的坐标	165
§10. 力学和物理学中的问题	166
§11. 定积分的近似算法	167
第五章 级数	169
§1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法	169
§2. 变号级数收敛性的判别法	178

§3. 级数的运算	182
§4. 函数项级数	183
§5. 幂级数	193
§6. 傅里叶级数	201
§7. 级数求和法	205
§8. 利用级数求定积分	208
§9. 无穷乘积	209
§10. 斯特林公式	214
§11. 用多项式逼近连续函数	215
第二部分 多元函数	217
第六章 多元函数微分学	219
§1. 函数的极限. 连续性	219
§2. 偏导数. 函数的微分	224
§3. 隐函数的微分法	234
§4. 变量代换	242
§5. 几何上的应用	250
§6. 泰勒公式	254
§7. 多元函数的极值	257
第七章 带参数的积分	263
§1. 带参数的常义积分	263
§2. 带参数的广义积分. 积分的一致收敛性	267
§3. 广义积分号下的微分法和积分法	271
§4. 欧拉积分	275
§5. 傅里叶积分公式	278
第八章 多重积分和曲线积分	280
§1. 二重积分	280
§2. 面积的计算法	287
§3. 体积的计算法	288
§4. 曲面面积的计算法	290
§5. 二重积分在力学上的应用	291
§6. 三重积分	293

§7. 利用三重积分计算体积	296
§8. 三重积分在力学上的应用	299
§9. 二重和三重广义积分	302
§10. 多重积分	305
§11. 曲线积分	308
§12. 格林公式	314
§13. 曲线积分在物理学上的应用	317
§14. 曲面积分	319
§15. 斯托克斯公式	323
§16. 奥斯特罗格拉茨基公式	324
§17. 场论初步	328
答案	336
人名译名对照表	389
译后记	391

第一部分

一元函数

第一章 分析引论

§1. 实数

1. **数学归纳法.** 为了证明某定理对任意的正整数 n 为真, 只需证明下面两点即可: (1) 这定理对 $n = 1$ 为真, (2) 设这定理对任何的一个正整数 n 为真, 则它对下一个正整数 $n + 1$ 也为真.

2. **分割.** 若分有理数为 A 和 B 两类, 使其满足下列条件: (1) 两类均非空集; (2) 每一个有理数必属于一类, 且仅属于一类; (3) 属于 A 类 (下类) 的任一数小于属于 B 类 (上类) 的任何数, 则这样的一个分类法称为分割. (a) 若或是下类 A 有最大的数, 或是上类 B 有最小的数, 则分割 A/B 确定一个有理数; (b) 若 A 类无最大数, 而 B 类亦无最小数, 则分割 A/B 确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数^①.

3. **绝对值 (或模).** 若 x 为实数, 则用下列条件所确定的非负数 $|x|$, 称为 x 的绝对值 (模)

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y , 以下不等式成立:

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

4. **上确界和下确界.** 设 $X = \{x\}$ 为实数的有界集合. 若:

(1) 每一个 $x \in X$ ^② 满足不等式

$$x \geq m;$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x' \in X$, 使

$$x' < m + \varepsilon,$$

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样, 若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leq M;$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x'' \in X$, 使

^①以后若没有相反的附带说明, 数这个字我们将理解为实数.

^②符号 $x \in X$ 表示 x 属于集合 X .

$$x'' > M - \varepsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界, 则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界, 则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5. 绝对误差和相对误差. 设 a ($a \neq 0$) 是被测量的精确数值, 而 x 是这个量的近似值, 则

$$\Delta = |x - a|$$

称为被测量的绝对误差, 而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测量的相对误差.

若数 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字所对应的位数的单位的一半, 则说 x 有 n 位精确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何正整数 n 皆成立:

$$1. 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2. 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$3. 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

$$4. 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

5. 设 $a^{[n]} = a(a-h) \cdots [a - (n-1)h]$ 及 $a^{[0]} = 1$, 求证

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个的组合数, 由此推出牛顿二项式公式.

6. 证明伯努利不等式:

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdots (1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 x_1, x_2, \cdots, x_n 是符号相同且大于 -1 的数.

7. 证明: 若 $x > -1$, 则不等式

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1)$$

为真, 且仅当 $x = 0$ 时, 等式成立.

8. 证明不等式:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n > 1).$$

提示: 利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

9. 证明如下不等式:

$$(a) 2! \cdot 4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n \quad (n > 1);$$

$$(b) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

10. 证明如下不等式:

$$(a) 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n \geq 2);$$

$$(b) n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n \geq 3);$$

$$(c) \left| \sin \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k \quad (0 \leq x_k \leq \pi, k = 1, 2, \cdots, n);$$

$$(d) (2n)! < 2^{2n}(n!)^2.$$

11. 设 c 为正整数, 而不为整数的平方, 且 A/B 为确定实数 \sqrt{c} 的分割, 其中 B 类包含所有满足 $b^2 > c$ 的正有理数 b , 而 A 类包含所有其余的有理数. 求证: 在 A 类中无最大数, 而在 B 类中无最小数.

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来建立: A 类包含所有满足 $a^3 < 2$ 的有理数 a ; B 类包含所有其余的有理数. 证明: 在 A 类中无最大数, 而在 B 类中无最小数.

13. 作出适当的分割, 然后证明等式:

$$(a) \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18};$$

$$(b) \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

14. 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割.

15. 求证: 任何非空且下方有界的数集有下确界, 而且何非空且上方有界的数集有上确界.

16. 证明: 一切有理真分数 $\frac{m}{n}$ (式中 m 及 n 为正整数, 且 $0 < m < n$) 的集合无最小及最大的元素. 求这个集合的上确界及下确界.

17. 求满足不等式

$$r^2 < 2$$

的有理数 r 所成集合的下确界和上确界.

18. 设 $\{-x\}$ 为数 $x \in \{x\}$ 的相反数的集合, 证明:

$$(a) \inf\{-x\} = -\sup\{x\};$$

$$(b) \sup\{-x\} = -\inf\{x\}.$$

19. 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合, 其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$, 证明等式:

$$(a) \inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\};$$

$$(b) \sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$$

20. 设 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合, 其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$, 且 $x \geq 0$ 及 $y \geq 0$. 证明等式:

$$(a) \inf\{xy\} = \inf\{x\} \inf\{y\};$$

$$(b) \sup\{xy\} = \sup\{x\} \sup\{y\}.$$

21. 求证不等式:

$$(a) |x-y| \geq ||x|-|y||;$$

$$(b) |x+x_1+\cdots+x_n| \geq |x| - (|x_1|+\cdots+|x_n|).$$

解不等式:

$$22. |x+1| < 0.01.$$

$$23. |x-2| \geq 10.$$

$$24. |x| > |x+1|.$$

$$25. |2x-1| < |x-1|.$$

26. $|x + 2| + |x - 2| \leq 12.$

27. $|x + 2| - |x| > 1.$

28. $||x + 1| - |x - 1|| < 1.$

29. $|x(1 - x)| < 0.05.$

30. 证明恒等式:

$$\left(\frac{x + |x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - |x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

31. 当测量长度 10 cm 时, 绝对误差为 0.5 mm; 当测量距离 500 km 时, 绝对误差等于 200 m. 那种测量较为精确?

32. 设数 $x = 2.3752$ 的相对误差为 1%, 试确定此数包含多少位精确数字?

33. 数 $x = 12.125$ 包含 3 位精确数字. 试求此数的相对误差.

34. 矩形的边长等于:

$$x = 2.50 \text{ cm} \pm 0.01 \text{ cm}, \quad y = 4.00 \text{ cm} \pm 0.02 \text{ cm}.$$

这个矩形的面积 S 界于什么范围内? 当其边长取平均值时, 矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 是多少?

35. 物体的质量 $P = 12.59 \text{ g} \pm 0.01 \text{ g}$, 其体积 $v = 3.2 \text{ cm}^3 \pm 0.2 \text{ cm}^3$. 若对物体的质量和体积都取其平均值, 试求物体的密度, 并估计密度的绝对误差和相对误差.

36. 圆半径

$$r = 7.2 \text{ m} \pm 0.1 \text{ m}.$$

若取 $\pi = 3.14$, 则求出的圆面积的最小相对误差是多少?

37. 已测得长方体各边长为

$$x = 24.7 \text{ m} \pm 0.2 \text{ m}, \quad y = 6.5 \text{ m} \pm 0.1 \text{ m}, \quad z = 1.2 \text{ m} \pm 0.1 \text{ m}.$$

此长方体的体积 V 界于什么范围内? 若测量的各结果都取其平均值, 则所求出的体积可能的绝对误差和相对误差是多少?

38. 正方形的边长 x 满足 $2 \text{ m} < x < 3 \text{ m}$. 应当以多小的绝对误差来测量边长, 在计算此正方形的面积时才有可能精确到 0.001 m^2 ?

39. 假设矩形每边的长皆不超过 10 m, 为了使根据测量所计算出来的面积与原面积之差不超过 0.01 cm^2 , 问测量矩形的边 x 与 y 时, 许可的绝对误差 Δ 的值多大?

40. 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相对误差, $\delta(xy)$ 为数 xy 的相对误差. 求证

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

§2. 数列理论

1. 数列极限的概念. 若对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N = N(\varepsilon)$, 使得

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 有极限 a (或者说, 收敛于 a), 亦即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

特别地, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则称 x_n 为无穷小量.

没有极限的数列, 称为发散的.

2. 极限存在的判别法.

(1) 若 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

(2) 单调而且有界的数列有极限.

(3) 柯西准则: 数列 $\{x_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的极限存在的充分必要条件是: 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时 $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

3. 关于数列极限的基本定理. 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{和} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

存在, 则有:

(1) 若 $x_n \leq y_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

(4) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$.

4. 数 e. 数列

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

具有有限的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718\ 281\ 828\ 4\dots$$

5. 无穷极限. 符号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

表示: 对于任何的 $E > 0$, 存在数 $N = N(E)$, 使得

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n| > E.$$

6. 极限点. 若已知数列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 有子数列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}, \dots \quad (1 \leq p_1 < p_2 < \dots)$$

满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \xi,$$

则称数 ξ (或符号 ∞) 为已知数列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 的子列极限 (极限点)^①.

任何有界的数列至少有一个有限的子列极限 (波尔查诺-魏尔斯特拉斯原理). 若这个子列极限是唯一的, 则它即为已知数列的有限极限.

数列 x_n 的最小子列极限 (有限的或无穷的)

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

称为此数列的下极限, 而它的最大子列极限

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

称为上极限.

等式

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

^①极限点也称为聚点. 一般地, 若 x 的任何邻域中至少有一个不同于 x 且属于给定集合 X 的点, 则称点 x 为集合 X 的极限点. ——译注

为数列 x_n 的 (有限或无穷) 极限存在的充分必要条件.

41. 设

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1,$$

即对于任一个给定的 $\varepsilon > 0$, 求出数 $N = N(\varepsilon)$, 使得

$$\text{在 } n > N \text{ 时, } |x_n - 1| < \varepsilon.$$

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
N					

42. 设

$$(a) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$(b) x_n = \frac{2n}{n^3 + 1};$$

$$(c) x_n = \frac{1}{n!};$$

$$(d) x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n,$$

对于任何的 $\varepsilon > 0$, 求出数 $N = N(\varepsilon)$, 使得

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n| < \varepsilon;$$

从而证明: $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 为无穷小量 (就是说, 它的极限值为 0).

对应着上面四种情形, 填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	...
N				

43. 证明: 数列

$$(a) x_n = (-1)^n n, \quad (b) x_n = 2^{\sqrt{n}}, \quad (c) x_n = \lg(\lg n) \quad (n \geq 2)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时有无穷极限 (即成为无穷大), 即: 对任意的 $E > 0$, 求出数 $N = N(E)$, 使得

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n| > E.$$

对应着上面的每一种情形, 填下表:

E	10	100	1000	10000	...
N					

44. 求证:

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

无界, 但当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它并不成为无穷大.

45. 用不等式表述下列命题:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

设 n 遍历正整数列, 求下列各式之值:

$$46. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10\,000n}{n^2 + 1}.$$

$$47. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

$$48. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}.$$

$$49. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

$$50. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1).$$

$$51. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$52. \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right|.$$

$$53. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right].$$

$$54. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right].$$

$$55. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right).$$

$$56. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]. \quad 57. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}).$$

证明下列等式:

$$58. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

$$59. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

$$60. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1).$$

$$61. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

$$62. \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0, \text{ 若 } |q| < 1.$$

$$63. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

$$64. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1).$$

$$65. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$66. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

67. 当 n 充分大时, 下列各组表达式中哪个更大?

$$(a) 100n + 200, 0.01n^2; \quad (b) 2^n, n^{1000}; \quad (c) 1000^n, n!.$$

68. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

提示: 参阅习题 9 (b).

69. 证明: 数列

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

是单调增的, 且上方有界, 而数列

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

是单调减的,且上方有界.由此推出这些数列有公共的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

提示:先作出比 $\frac{x_{n+1}}{x_n}, \frac{y_n}{y_{n-1}}$, 并利用习题 7 的不等式.

70. 证明:

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

当指数 n 是什么样的数值时, 表达式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差小于 0.001?

71. 设 $p_n (n = 1, 2, \dots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列, 而 $q_n (n = 1, 2, \dots)$ 为趋于 $-\infty$ 的任意数列 ($p_n, q_n \notin [-1, 0]$). 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

72. 已知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

由此推出公式

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, \quad (*)$$

其中 $0 < \theta_n < 1$, 并计算数 e , 精确到 10^{-5} .

73. 证明: 数 e 为无理数.

74. 证明不等式:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. 证明不等式:

$$(a) \frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \text{ 其中 } n \text{ 为任意的正整数.}$$

$$(b) 1 + a < e^a, \text{ 其中 } a \text{ 为异于零的实数.}$$

76. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \ln a \quad (a > 0),$$

式中 $\ln a$ 是取 $e = 2.718\dots$ 作底时, 数 a 的对数.

利用关于单调有界数列极限存在的定理, 证明以下各数列的收敛性:

77. $x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \dots + \frac{p_n}{10^n} (n = 1, 2, \dots)$, 其中 $p_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ 是非负整数, 并且从 p_1 起不大于 9.

$$78. x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}.$$

$$79. x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

$$80. x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

$$81. x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \cdots, x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}, \cdots.$$

利用柯西准则, 证明以下各数列的收敛性:

$$82. x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n, \text{ 其中 } |a_k| < M \ (k = 0, 1, 2, \cdots) \text{ 且 } |q| < 1.$$

$$83. x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

$$84. x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$$

$$85. x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

提示: 利用不等式 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ ($n = 2, 3, \cdots$).

86. 对于数列 x_n ($n = 1, 2, \cdots$), 若存在数 C , 使得

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < C \quad (n = 2, 3, \cdots),$$

则称数列 x_n 有有界变差.

证明: 凡有有界变差的数列是收敛的.

举出一个收敛数列而无有界变差的例子.

87. 试述“某数列不满足柯西准则”的含义.

88. 利用柯西准则, 证明数列:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

的发散性.

89. 证明: 若数列 x_n ($n = 1, 2, \cdots$) 收敛, 则它的任何子数列 x_{p_n} 也收敛且有同一极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

90. 证明: 若单调数列的某一子数列收敛, 则此单调数列本身是收敛的.

91. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

92. 设 $x_n \rightarrow a$, 则极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

是什么?

93. 证明: 收敛的数列是有界的.

94. 证明: 收敛的数列或达到其上确界, 或达到其下确界, 或两者都达到. 举出这三类数列的例子.

95. 证明: 趋于 $+\infty$ 的数列 x_n ($n = 1, 2, \cdots$) 必定达到其下确界.

求数列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 的最大项, 设:

$$96. x_n = \frac{n^2}{2^n}. \quad 97. x_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n}. \quad 98. x_n = \frac{1000^n}{n!}.$$

求数列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 的最小项, 设:

$$99. x_n = n^2 - 9n - 100. \quad 100. x_n = n + \frac{100}{n}.$$

求数列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 的 $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, 设:

$$101. (a) x_n = 1 - \frac{1}{n}; \quad (b) x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n} \right).$$

$$102. x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}. \quad 103. x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

$$104. x_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$$105. x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}. \quad 106. x_n = (-1)^n n.$$

$$107. x_n = -n[2 + (-1)^n]. \quad 108. x_n = n^{(-1)^n}.$$

$$109. x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}. \quad 110. x_n = \frac{1}{n-10.2}.$$

求 $\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, 设:

$$111. x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3}. \quad 112. x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}.$$

$$113. x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}. \quad 114. x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}.$$

$$115. x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}.$$

求以下各数列的子列极限:

$$116. \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots$$

$$117. 1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

$$118. \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

$$119. x_n = 3 \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 2(-1)^n. \quad 120. x_n = \frac{1}{2} [(a+b) + (-1)^n(a-b)].$$

121. 试举出以已知数

$$a_1, a_2, \dots, a_p$$

作为子列极限的数列的例子.

122. 试举出数列的例子, 对此数列而言, 已知数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

的所有各项皆为其子列极限. 所举数列还必有怎样的子列极限?

123. 举出数列的例子:

- (a) 没有有限的子列极限;
- (b) 有唯一有限的子列极限, 但不收敛;
- (c) 有无穷多的子列极限;
- (d) 以每一实数作为子列极限.

124. 证明: 数列 x_n 和 $y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 有相同的子列极限.

125. 证明: 从有界的数列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 中, 永远可选出收敛的子数列 x_{p_n} ($n = 1, 2, \dots$).

126. 证明: 若数列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 无界, 则存在子数列 x_{p_n} , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \infty.$$

127. 设数列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 收敛, 而数列 y_n ($n = 1, 2, \dots$) 发散, 则能否断定关于数列 (a) $x_n + y_n$, (b) $x_n y_n$ 的收敛性? 举出适当的例子.

128. 设数列 x_n 和 y_n 发散 ($n = 1, 2, \dots$). 可否断定数列 (a) $x_n + y_n$, (b) $x_n y_n$ 也发散呢?

129. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, y_n ($n = 1, 2, \dots$) 为任意数列. 能否断定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0?$$

举出适当的例子.

130. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 是否由此可得出: 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$? 考虑例子:

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad y_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

131. 证明^①:

$$(a) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(b) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

举出在上面关系式中严格不等式成立的例子.

132. 设 $x_n \geq 0$ 且 $y_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明:

$$(a) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(b) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

举出在这些关系式中严格不等式成立的例子.

133. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则对于任何数列 y_n ($n = 1, 2, \dots$) 有:

$$(a) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(b) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (x_n \geq 0).$$

^①在习题 131—133 中, 假设极限之和或积皆有意义. ——译注

134. 证明: 若对于某数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$, 无论数列 $y_n (n = 1, 2, \dots)$ 如何选取, 以下两个等式中都至少有一个成立:

$$(a) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(b) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (x_n \geq 0),$$

则数列 x_n 收敛或发散于 $+\infty$ ①.

135. 证明: 若 $x_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ 及

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1,$$

则数列 x_n 是收敛的.

136. 证明: 若数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 有界, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0,$$

则此数列的子列极限充满于下极限和上极限

$$l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{和} \quad L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

之间, 即区间 $[l, L]$ 中的任意一个数都是该数列的子列极限.

137. 设数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 满足条件

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n \quad (m, n = 1, 2, \dots),$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 存在.

138. 证明: 若数列 x_n 收敛, 则算术平均值数列

$$\xi_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

也收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

逆命题不成立, 举例说明.

139. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = +\infty.$$

140. 证明: 若数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 收敛且 $x_n > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

141. 证明: 若 $x_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 1}{x_n}$ 存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

142. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

143. 证明施托尔茨定理: 若

$$(a) y_{n+1} > y_n \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty;$$

①此处的原文是: 则序列 x_n 收敛. —— 译注

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ 存在,

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

144. 求:

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{a^n} \quad (a > 1);$ (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lg n}{n}.$

145. 证明: 若 p 为正整数, 则

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2},$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$

146. 证明: 数列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

收敛.

因此有公式

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

式中 $C = 0.577216 \cdots$ 称为欧拉常数, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

147. 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

148. 数列 x_n ($n = 1, 2, \cdots$) 由下列各式

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n = 3, 4, \cdots)$$

所确定, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

149. 设 x_n ($n = 1, 2, \cdots$) 为由以下各式

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

所确定的数列. 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

150. 证明: 由下列各式

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

确定的数列 x_n 和 y_n ($n = 1, 2, \cdots$) 有共同的极限

$$\mu(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(数 a 和 b 的算术几何平均值).

§3. 函数的概念

1. 函数的概念. 若对于集合 $X = \{x\}$ 中的每一个 x , 有一个确定的实数 $y \in Y = \{y\}$ 与之对应, 则变量 y 称为变量 x 在所给变化域 X 上的单值函数, 并记为 $y = f(x)$.

集合 X 称为函数 $f(x)$ 的定义域或存在域; Y 称为这个函数的值域. 在最简单的情形下, 集合 X 或为开区间 $]a, b[= (a, b) : a < x < b$, 或为半开区间 $]a, b] = (a, b] : a < x \leq b$ 或 $[a, b[= [a, b) : a \leq x < b$, 或为闭区间 (线段) $[a, b] : a \leq x \leq b$, 其中 a 和 b 为某实数或符号 $-\infty$ 或 $+\infty$ (在这种情形下, 没有等号).

若对于 X 中的每一个值 x 有若干个值 $y = f(x)$ 与之对应, 则 y 称为 x 的多值函数.

2. 反函数. 若把 x 理解为满足方程

$$f(x) = y$$

(式中 y 为属于函数 $f(x)$ 的值域 Y 的一个固定数值) 的任何数值, 则这个对应关系确定出在集合 Y 上的某函数

$$x = f^{-1}(y),$$

这个函数称为函数 $f(x)$ 的反函数. 它一般而言是多值函数. 若函数 $y = f(x)$ 是严格单调的, 即当 $x_2 > x_1$ 时, $f(x_2) > f(x_1)$ (或相应地 $f(x_2) < f(x_1)$), 则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 为单值而且严格单调的函数.

求下列函数的存在域:

$$151. y = \frac{x^2}{1+x}.$$

$$152. y = \sqrt{3x - x^3}.$$

$$153. y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$154. (a) y = \log(x^2 - 4);$$

$$(b) y = \log(x+2) + \log(x-2).$$

$$155. y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}.$$

$$156. y = \sqrt{\cos x^2}.$$

$$157. y = \lg\left(\sin \frac{\pi}{x}\right).$$

$$158. y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}.$$

$$159. y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$$

$$160. y = \arccos(2 \sin x).$$

$$161. y = \lg[\cos(\lg x)].$$

$$162. y = (x + |x|)\sqrt{x \sin^2 \pi x}.$$

$$163. y = \cot \pi x + \arccos(2^x).$$

$$164. y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x).$$

$$165. (a) y = (2x)!;$$

$$(b) y = \log_2 \log_3 \log_4 x;$$

$$(c) y = \sqrt[4]{\lg \tan x};$$

$$(d) y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x} \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

求下列函数的存在域和值域:

$$166. y = \sqrt{2+x-x^2}.$$

$$167. y = \lg(1-2\cos x).$$

$$168. y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$169. y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right).$$

$$170. y = (-1)^x.$$

171. 在底 $AC = b$ 和高 $BD = h$ 的三角形 ABC 中 (图 1) 内接一个高 $NM = x$

的矩形 $KLMN$. 把矩形 $KLMN$ 的周长 P 及其面积 S 表示为 x 的函数.

作函数 $P = P(x)$ 及 $S = S(x)$ 的图像.

172. 在三角形 ABC 中, 边 $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, 角 $BAC = x$. 把边 $BC = a$ 和面积 $ABC = S$ 表示为变量 x 的函数. 作函数 $a = a(x)$ 及 $S = S(x)$ 的图像.

173. 在等腰梯形 $ABCD$ 中 (图 2), 底 $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$), 高 $HB = h$, 引直线 $MN \parallel BH$, MN 与顶点 A 相距 $AM = x$. 把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表示为变量 x 的函数. 作函数 $S = S(x)$ 的图像.

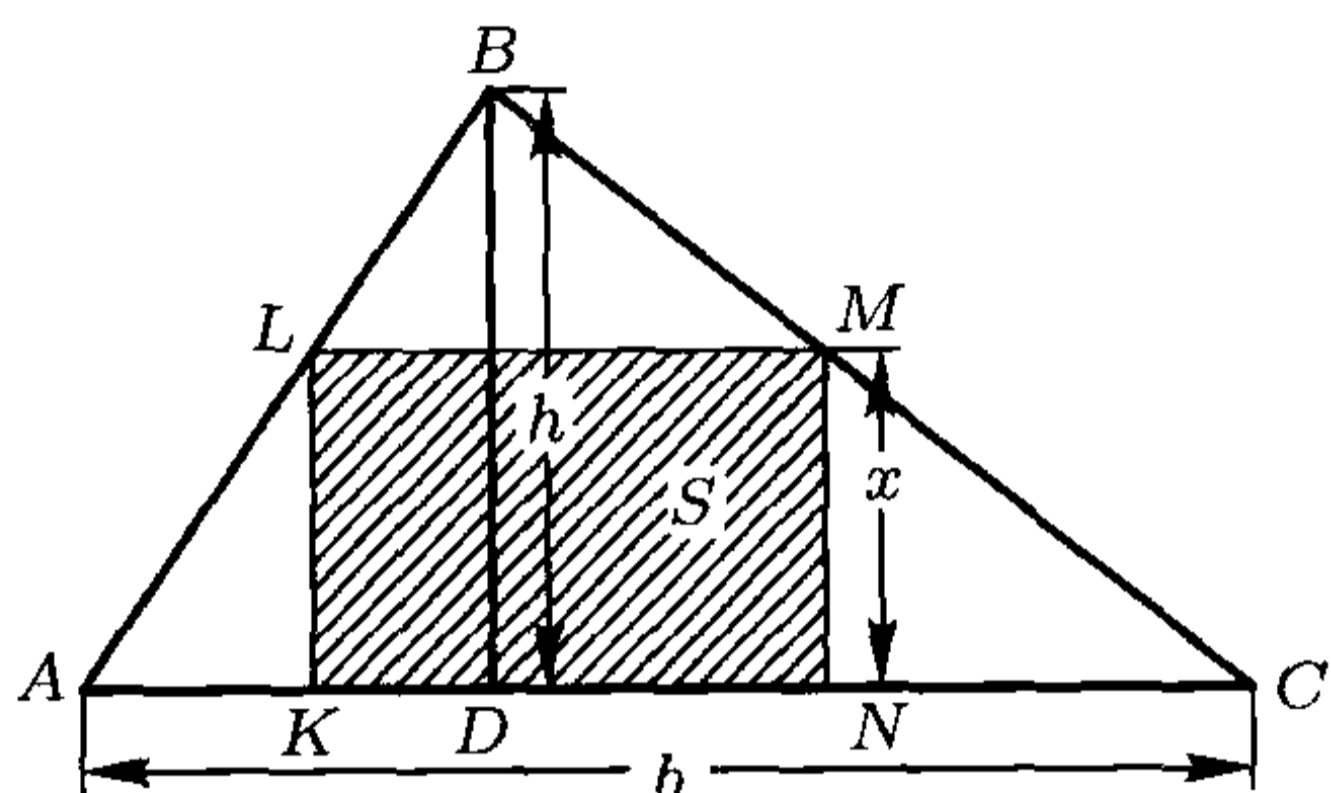


图 1

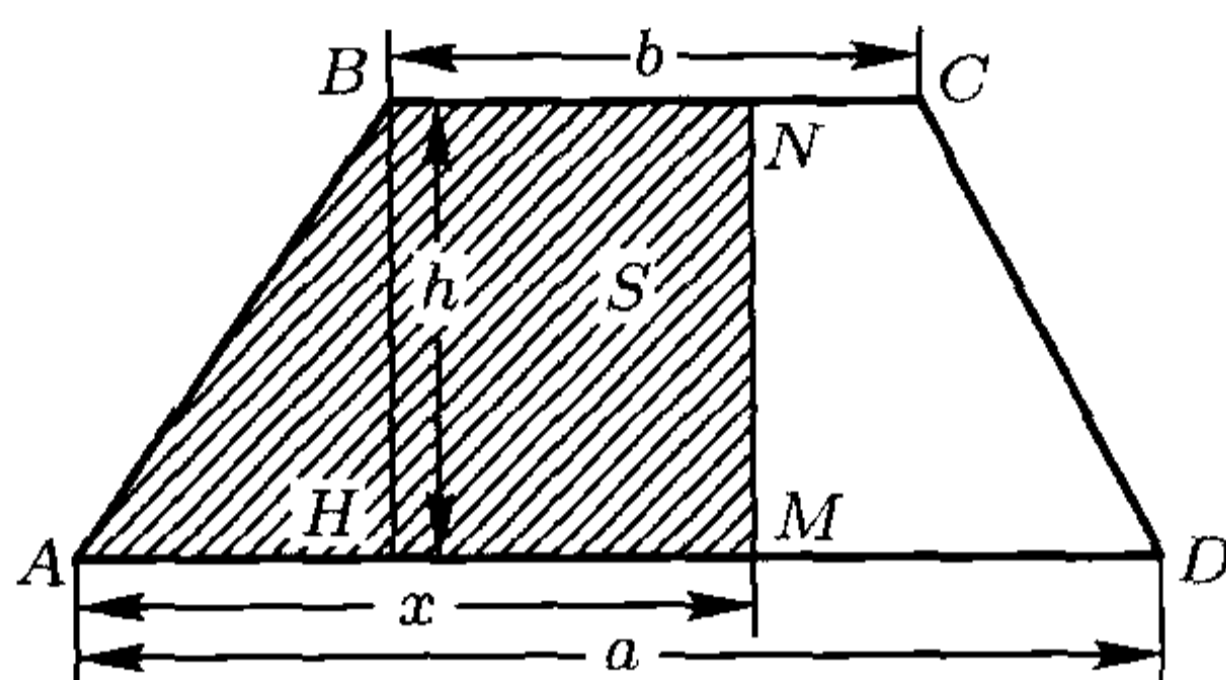


图 2

174. 有 $2g$ 质量均匀分布在 Ox 轴上的闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上, 另有两个质量为 $1g$ 的质点分别位于点 $x = 2$ 和 $x = 3$.

设 $m(x)$ 是区间 $(-\infty, x)$ 内的质量的值, 求函数 $m = m(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的解析表达式, 并作这个函数的图像.

175. 函数 $y = \operatorname{sgn} x$ 被定义为:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

作这个函数的图像. 证明:

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

176. 函数 $y = [x]$ (数 x 的整数部分) 用下法定义: 若 $x = n + r$, 式中 n 为整数且 $0 \leq r < 1$, 则

$$[x] = n.$$

作这个函数的图像.

177. 设

$$y = \pi(x) \quad (x \geq 0)$$

表示不超过数 x 的素数的数目, 作这个函数在 $0 \leq x \leq 20$ 时的图像.

下列函数 $y = f(x)$ 把集合 E_x 映射成怎样的集合 E_y ?

178. $y = x^2, E_x = \{-1 \leq x \leq 2\}$.

179. $y = \lg x, E_x = \{10 < x < 1000\}$.

$$180. y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccot} x, E_x = \{-\infty < x < +\infty\}.$$

$$181. y = \cot \frac{\pi x}{4}, E_x = \{0 < |x| \leq 1\}. \quad 182. y = |x|, E_x = \{1 \leq |x| \leq 2\}.$$

设变量 x 遍历区间 $0 < x < 1$, 试确定变量 y 所遍历的集合:

$$183. y = a + (b - a)x.$$

$$184. y = \frac{1}{1 - x}.$$

$$185. y = \frac{x}{2x - 1}.$$

$$186. y = \sqrt{x - x^2}.$$

$$187. y = \cot \pi x.$$

$$188. y = x + [2x].$$

$$189. \text{ 设 } f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x, \text{ 求 } f(0), f(1), f(2), f(3), f(4).$$

$$190. \text{ 设 } f(x) = \lg x^2, \text{ 求 } f(-1), f(-0.001), f(100).$$

$$191. \text{ 设 } f(x) = 1 + [x], \text{ 求 } f(0.9), f(0.99), f(0.999), f(1).$$

192. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -\infty < x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x < +\infty, \end{cases}$$

求 $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$.

193. 设

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x},$$

求 $f(0), f(-x), f(x + 1), f(x) + 1, f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}$.

194. 设

$$(a) f(x) = x - x^3;$$

$$(b) f(x) = \sin \frac{\pi}{x};$$

$$(c) f(x) = (x + |x|)(1 - x).$$

求满足以下各式的 x 值: (1) $f(x) = 0$; (2) $f(x) > 0$; (3) $f(x) < 0$.

195. 设

$$(a) f(x) = ax + b; \quad (b) f(x) = x^2; \quad (c) f(x) = a^x,$$

求 $\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

196. 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 证明:

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0.$$

197. 若 $f(0) = -2, f(3) = 5$, 求线性函数

$$f(x) = ax + b.$$

$f(1)$ 及 $f(2)$ 等于什么 (线性插值法)?

198. 若 $f(-2) = 0, f(0) = 1, f(1) = 5$, 求二次有理函数:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

$f(-1)$ 及 $f(0.5)$ 等于什么 (二次插值法)?

199. 设 $f(-1) = 0, f(0) = 2, f(1) = -3, f(2) = 5$. 求三次有理函数:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

200. 设 $f(0) = 15, f(2) = 30, f(4) = 90$. 求形为

$$f(x) = a + bc^x$$

的函数.

201. 证明: 对于线性函数

$$f(x) = ax + b,$$

若自变量的值 $x = x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 组成等差数列, 则对应的函数值 $y_n = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) 也组成等差数列.

202. 证明: 对于指数函数

$$f(x) = a^x \quad (a > 0),$$

若自变量的值 $x = x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 组成等差数列, 则对应的函数值 $y_n = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) 组成等比数列.

203. 设当 $0 < u < 1$ 时函数 $f(u)$ 有定义. 求下列函数的定义域:

$$(a) f(\sin x); \quad (b) f(\ln x); \quad (c) f\left(\frac{[x]}{x}\right).$$

204. 设

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) \quad (a > 0).$$

证明:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

205. 设 $f(x) + f(y) = f(z)$. 求出 z , 若

$$(a) f(x) = ax; \quad (b) f(x) = \frac{1}{x};$$

$$(c) f(x) = \arctan x (|x| < 1); \quad (d) f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}.$$

求 $\varphi[\varphi(x)], \psi[\psi(x)], \varphi[\psi(x)]$ 及 $\psi[\varphi(x)]$, 设

$$206. \varphi(x) = x^2 \text{ 及 } \psi(x) = 2^x. \quad 207. \varphi(x) = \operatorname{sgn} x \text{ 及 } \psi(x) = \frac{1}{x}.$$

$$208. \varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases} \text{ 及 } \psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -x^2, & x > 0. \end{cases}$$

209. 设

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

求 $f[f(x)], f\{f[f(x)]\}$.

210. 设

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n \text{ 次}},$$

若

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

求 $f_n(x)$.

211. 设 $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, 求 $f(x)$.

212. 设

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (|x| \geq 2),$$

求 $f(x)$.

213.1. 设

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0),$$

求 $f(x)$.

213.2. 设

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2,$$

求 $f(x)$.

证明: 下列各函数在所给区间内是单调增函数:

214. $f(x) = x^2$ ($0 \leq x < +\infty$).

215. $f(x) = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$).

216. $f(x) = \tan x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$).

217. $f(x) = 2x + \sin x$ ($-\infty < x < +\infty$).

证明: 下列各函数在所给区间内是单调减函数:

218. $f(x) = x^2$ ($-\infty < x \leq 0$).

219. $f(x) = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

220. $f(x) = \cot x$ ($0 < x < \pi$).

221. 研究下列函数的单调性:

(a) $f(x) = ax + b$; (b) $f(x) = ax^2 + bx + c$; (c) $f(x) = x^3$;

(d) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; (e) $f(x) = a^x$ ($a > 0$).

222. 不等式能否逐项取对数?

223. 设 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数. 证明: 若

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),$$

则

$$\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)].$$

求反函数 $x = \varphi(y)$ 和它的存在域, 若:

224. $y = 2x + 3$ ($-\infty < x < +\infty$).

225. $y = x^2$; (a) ($-\infty < x \leq 0$); (b) ($0 \leq x < +\infty$).

226. $y = \frac{1-x}{1+x}$ ($x \neq -1$).

227. $y = \sqrt{1-x^2}$; (a) ($-1 \leq x \leq 0$); (b) ($0 \leq x \leq 1$).

228. $y = \sinh x$, 式中 $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ($-\infty < x < +\infty$).

229. $y = \tanh x$, 其中 $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ($-\infty < x < +\infty$).

$$230. y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

231. 设函数 $f(x)$ 定义于对称区间 $(-l, l)$, 若

$$f(-x) \equiv f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数; 若

$$f(-x) \equiv -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

确定下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数:

(a) $f(x) = 3x - x^3$;

(b) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

(c) $f(x) = a^x + a^{-x} \quad (a > 0)$;

(d) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

(e) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

232. 证明: 定义于对称区间 $(-l, l)$ 的任何函数 $f(x)$ 可以表示为偶函数与奇函数之和的形式.

233. 若存在数 $T > 0$ (函数的周期——在广义的意义上!), 使定义于集合 E 的函数 $f(x)$ 满足等式

$$f(x \pm T) = f(x) \quad (x \in E),$$

则函数 $f(x)$ 称为周期函数.

说明下列函数中哪些是周期函数, 并求它们的最小周期:

(a) $f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$;

(b) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$;

(c) $f(x) = 2 \tan \frac{x}{2} - 3 \tan \frac{x}{3}$;

(d) $f(x) = \sin^2 x$;

(e) $f(x) = \sin x^2$;

(f) $f(x) = \sqrt{\tan x}$;

(g) $f(x) = \tan \sqrt{x}$;

(h) $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$.

234. 证明: 对于狄利克雷函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

任何有理数皆为其周期.

235.1. 证明: 定义于共同的集合且周期可公度的两个周期函数之和及其乘积也是周期函数.

235.2. 若

$$f(x+T) \equiv -f(x) \quad (T > 0),$$

则函数 $f(x)$ 称为反周期函数. 证明: 此函数是以 $2T$ 为周期的函数.

236. 证明: 若函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 满足等式 $f(x+T) = kf(x)$, 式中 k 和 T 为正的常数, 则 $f(x) = a^x \varphi(x)$, 式中 a 为常数, 而 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数.

§4. 函数的图像表示法

1. 要作函数 $y = f(x)$ 的图像, 可按以下方式进行:

(1) 确定函数的存在域 $X = \{x\}$;

(2) 从 X 中选出充分密集的自变量值 x_1, x_2, \dots, x_n , 与相应函数值组成对应数值表

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

(3) 在坐标平面 Oxy 上绘出一系列的点 $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 并用线把它们连接起来, 连线时应考虑中间各点的位置对曲线形状的影响.

2. 为了得到函数的正确图像, 应当研究这个函数的一般性质.

首先必须:

(1) 解方程 $f(x) = 0$, 求出函数图像与 Ox 轴的交点 (函数的零点);

(2) 确定函数为正或为负时自变量的变化域;

(3) 若有可能, 说明函数的单调 (增或减) 区间;

(4) 研究当自变量无限趋于函数存在域边界点时函数的情况.

这一节里, 要假定读者已经知道最简单的初等函数的性质, 如幂函数、指数函数、三角函数等.

利用这些性质, 不用作大量的计算工作, 立即可以画出许多函数的草图, 其他的图像有时就是这些最简单图像的组合 (和或乘积等等).

237. 作出线性齐次函数 $y = ax$ 当 $a = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, -1$ 时的图像.

238. 作出线性函数 $y = x + b$ 当 $b = 0, 1, 2, -1$ 时的图像.

239. 作出线性函数的图像:

$$(a) y = 2x + 3; \quad (b) y = 2 - 0.1x; \quad (c) y = -\frac{x}{2} - 1.$$

240. 铁的线膨胀系数 $\alpha = 1.2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. 在适当的尺度下作出函数

$$l = f(T) \quad (233 \text{ K} \leq T \leq 373 \text{ K})$$

的图像, 其中 T 表示温度, l 表示当温度为 T 时细长铁棒的长, 已知当 $T = 273 \text{ K}$ 时, $l = 100 \text{ cm}$.

241. 二质点沿数轴运动, 第一个质点在初始时刻 $t = 0$ 时位于坐标原点左方 20 m 处, 其速度为 $v_1 = 10 \text{ m/s}$; 第二个质点在 $t = 0$ 时位于原点 O 右方 30 m 处, 其速度为 $v_2 = -20 \text{ m/s}$. 作出此二点运动方程的图像并求它们相遇的时刻和位置.

242. 作出二次有理函数的图像 (抛物线):

$$(a) y = ax^2, \text{ 当 } a = 1, \frac{1}{2}, 2, -1;$$

$$(b) y = (x - x_0)^2, \text{ 当 } x_0 = 0, 1, 2, -1;$$

(c) $y = x^2 + c$, 当 $c = 0, 1, 2, -1$.

243. 把二次三项式 $y = ax^2 + bx + c$ 化为 $y = y_0 + a(x - x_0)^2$ 的形式, 再作出它的图像. 研究例子:

(a) $y = 8x - 2x^2$; (b) $y = x^2 - 3x + 2$; (c) $y = -x^2 + 2x - 1$; (d) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

244. 质点以初速度 $v_0 = 600 \text{ m/s}$ 沿与水平面成角 $\alpha = 45^\circ$ 的方向射出. 作出运动轨迹的图像并求最大上升高度及射程 (取 $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, 不计空气阻力).

作出下列高于二次的有理函数的图像:

245. $y = x^3 + 1$.

246. $y = (1 - x^2)(2 + x)$.

247. $y = x^2 - x^4$.

248. $y = x(a - x)^2(a + x)^3$ ($a > 0$).

作出下列分式线性函数的图像 (双曲线):

249. $y = \frac{1}{x}$.

250. $y = \frac{1 - x}{1 + x}$.

251. 把分式线性函数

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ad - bc \neq 0, c \neq 0)$$

化为以下形式:

$$y = y_0 + \frac{m}{x - x_0},$$

再作出它的图像.

研究例子

$$y = \frac{3x + 2}{2x - 3}.$$

252. 设气体当压强 $p_0 = 1 \text{ Pa}$ 时占有体积 $V_0 = 12 \text{ m}^3$. 若气体的温度保持不变, 作出气体体积 V 对压强 p 的依赖关系的图像 (玻意耳-马略特定律).

作下列分式有理函数的图像:

253. $y = x + \frac{1}{x}$.

254. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (牛顿三叉线).

255. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

256. $y = \frac{1}{1 + x^2}$ (箕舌线).

257. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$ (牛顿蛇形线).

258. $y = \frac{1}{1 - x^2}$.

259. $y = \frac{x}{1 - x^2}$.

260. $y = \frac{1}{1 + x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1 - x}$.

261. $y = \frac{1}{1 + x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1 - x}$.

262. $y = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 2)}$.

263. 把函数

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1x + b_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

化为以下形式:

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_0},$$

然后作出它的草图.

研究例子

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$$

264. 一质点与引力中心相距 x , 质点所受引力的大小为 F , 并且当 $x = 1\text{ m}$ 时 $F = 10\text{ N}$. 作出引力 F 的图像 (牛顿定律).

265. 根据范德瓦耳斯定律, 当温度不变时, 真实气体的体积 V 与压强 p 以关系式

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = c$$

相联系. 若 $a = 2, b = 0.1$ 及 $c = 10$, 作出函数 $p = p(V)$ 的图像.

作下列无理函数的图像:

266. $y = \pm\sqrt{-x-2}$ (抛物线).

267. $y = \pm x\sqrt{x}$ (半三次抛物线).

268. $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$ (椭圆).

269. $y = \pm\sqrt{x^2-1}$ (双曲线).

270. $y = \pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

271. $y = \pm x\sqrt{100-x^2}$.

272. $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (蔓叶线).

273. $y = \pm\sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

274. 作幂函数 $y = x^n$ 当 (a) $n = 1, 3, 5$; (b) $n = 2, 4, 6$ 时的图像.

275. 作幂函数 $y = x^n$ 当 (a) $n = -1, -3$; (b) $n = -2, -4$ 时的图像.

276. 作根式 $y = \sqrt[m]{x}$ 当 (a) $m = 2, 4$; (b) $m = 3, 5$ 时的图像.

277. 设:

(a) $m = 2, k = 1$;

(b) $m = 2, k = 3$;

(c) $m = 3, k = 1$;

(d) $m = 3, k = 2$;

(e) $m = 3, k = 4$;

(f) $m = 4, k = 2$;

(g) $m = 4, k = 3$.

作根式 $y = \sqrt[m]{x^k}$ 的图像.

278. 作指数函数 $y = a^x$ 当 $a = \frac{1}{2}, 1, 2, e, 10$ 时的图像.

279. 作复合指数函数 $y = e^{y_1}$ 的图像, 设:

(a) $y_1 = x^2$;

(b) $y_1 = -x^2$;

(c) $y_1 = \frac{1}{x}$;

(d) $y_1 = \frac{1}{x^2}$;

(e) $y_1 = -\frac{1}{x^2}$;

(f) $y_1 = \frac{2x}{1-x^2}$.

280. 作对数函数 $y = \log_a x$ 当 $a = \frac{1}{2}, 2, e, 10$ 时的图像.

281. 作下列函数的图像:

(a) $y = \ln(-x)$;

(b) $y = -\ln(x)$.

282. 设

(a) $y_1 = 1 + x^2$;

(b) $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

(c) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$;

(d) $y_1 = \frac{1}{x^2}$;

(e) $y_1 = 1 + e^x$.

作出对数复合函数 $y = \ln y_1$ 的图像.

283. 作函数 $y = \log_x 2$ 的图像.

284. 作函数 $y = A \sin x$ 当 $A = 1, 10, -2$ 时的图像.

285. 作函数 $y = \sin(x - x_0)$ 在 $x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 时的图像.

286. 作函数 $y = \sin nx$ 的图像. 设 $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

287. 把函数 $y = a \cos x + b \sin x$ 化为以下形式 $y = A \sin(x - x_0)$, 再作它的图像.

研究例子: $y = 6 \cos x + 8 \sin x$.

作下列三角函数的图像:

288. $y = \cos x$.

289. $y = \tan x$.

290. $y = \cot x$.

291. $y = \sec x$.

292. $y = \csc x$.

293. $y = \sin^2 x$.

294. $y = \sin^3 x$.

295. $y = \cot^2 x$.

296. $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

297. $y = \pm \sqrt{\cos x}$.

作下列函数的图像:

298. $y = \sin x^2$.

299. $y = \sin \frac{1}{x}$.

300. (a) $y = x \cos \frac{\pi}{x}$;

(b) $y = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$.

301. (a) $y = \tan \frac{\pi}{x}$;

(b) $y = \sec \frac{1}{x}$.

302. $y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$.

303. $y = \pm \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\pi}{x}$.

304. $y = \frac{\sin x}{x}$.

305. $y = e^x \cos x$.

306. $y = \pm 2^{-x} \sqrt{\sin \pi x}$.

307. $y = \frac{\cos x}{1+x^2}$.

308. $y = \ln(\cos x)$.

309. $y = \cos(\ln x)$.

310. $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$.

作下列反三角函数的图像:

311. $y = \arcsin x$.

312. $y = \arccos x$.

313. $y = \arctan x$.

314. $y = \operatorname{arccot} x$.

315. $y = \arcsin \frac{1}{x}$.

316. $y = \arccos \frac{1}{x}$.

317. $y = \arctan \frac{1}{x}$.

318. $y = \arcsin(\sin x)$.

319. $y = \arcsin(\cos x)$.

320. $y = \arccos(\cos x)$.

321. $y = \arctan(\tan x)$.

322. $y = \arcsin(2 \sin x)$.

323. 设:

(a) $y_1 = 1 - \frac{x}{2}$;

(b) $y_1 = \frac{2x}{1+x^2}$;

(c) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$;

(d) $y_1 = e^x$.

作函数 $y = \arcsin y_1$ 的图像.

324.1. 设:

(a) $y_1 = x^2$;

(b) $y_1 = \frac{1}{x^2}$;

(c) $y_1 = \ln x$;

(d) $y_1 = \frac{1}{\sin x}$.

作函数 $y = \arctan y_1$ 的图像.

324.2. 作下列函数的图像:

(a) $y = x^3 - 3x + 2$;

(b) $y = \frac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$;

(c) $y = \frac{x^2}{|x|-1}$;

(d) $y = \sqrt{x(1-x^2)}$;

(e) $y = 3 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;

(f) $y = \cot \frac{\pi x}{1+x^2}$;

(g) $y = \frac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$;

(h) $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$;

(i) $y = \arcsin\left(\frac{3}{2} - \sin x\right)$;

(j) $y = \arctan\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)$;

(k) $y = \log_{\cos x} \sin x$;

(l) $y = (\sin x)^{\cot x}$.

325. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像, 作下列各函数的图像:

(a) $y = -f(x)$;

(b) $y = f(-x)$;

(c) $y = -f(-x)$;

(d) $y = f(x - x_0)$;

(e) $y = y_0 + f(x - x_0)$;

(f) $y = f(2x)$;

(g) $y = f(kx + b) (k \neq 0)$.

326. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

作函数

$$y = \frac{1}{2}(f(x-t) + f(x+t))$$

当 $t = 0, t = 1$ 及 $t = 2$ 时的图像.

327. 作函数的图像:

(a) $y = 2 + \sqrt{1-x}$;

(b) $y = 1 - e^{-x}$;

(c) $y = \ln(1+x)$;

(d) $y = -\arcsin(1+x)$;

$$(e) y = 3 + 2 \cos 3x.$$

328. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像, 作下列函数的图像:

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $y = f(x) ;$ | (b) $y = \frac{1}{2}(f(x) + f(x));$ |
| (c) $y = \frac{1}{2}(f(x) - f(x));$ | (d) $y = f^2(x);$ |
| (e) $y = \sqrt{f(x)};$ | (f) $y = \ln f(x);$ |
| (g) $y = f(f(x));$ | (h) $y = \operatorname{sgn} f(x);$ |
| (i) $y = [f(x)].$ | |

329.1. 设

$$f(x) = (x - a)(b - x) \quad (a < b),$$

作下列函数的图像:

- | | |
|---------------------------------------|------------------------|
| (a) $y = f(x);$ | (b) $y = f^2(x);$ |
| (c) $y = \frac{1}{f(x)};$ | (d) $y = \sqrt{f(x)};$ |
| (e) $y = e^{f(x)};$ | (f) $y = \lg f(x);$ |
| (g) $y = \operatorname{arccot} f(x).$ | |

329.2. 若 (1) $f(x) = x^2$; (2) $f(x) = x^3$, 作如下函数的图像:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| (a) $y = \arcsin(\sin f(x));$ | (b) $y = \arcsin(\cos f(x));$ |
| (c) $y = \arccos(\sin f(x));$ | (d) $y = \arccos(\cos f(x));$ |
| (e) $y = \arctan(\tan f(x)).$ | |

330. 已知函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像, 作下列函数的图像:

- (a) $y = f(x) + g(x);$ (b) $y = f(x)g(x);$ (c) $y = f(g(x)).$

利用图像的加法, 作下列函数的图像:

331. $y = 1 + x + e^x.$

332. $y = (x + 1)^{-2} + (x - 1)^{-2}.$

333. $y = x + \sin x.$

334. $y = x + \arctan x.$

335. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x.$

336. $y = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x.$

337. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

338. $y = |1 - x| + |1 + x|.$

339. $y = |1 - x| - |1 + x|.$

340. 作双曲函数的图像:

(a) $y = \cosh x$, 式中 $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x});$

(b) $y = \sinh x$, 式中 $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x});$

(c) $y = \tanh x$, 式中 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$

利用图像的乘法, 作下列函数的图像:

341. $y = x \sin x.$

342. $y = x \cos x.$

343. $y = x^2 \sin^2 x.$

344. $y = \frac{\sin x}{1 + x^2}.$

345. $y = e^{-x^2} \cos 2x.$

346. $y = x \operatorname{sgn}(\sin x).$

347. $y = [x] |\sin \pi x|.$

348. $y = \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x).$

349. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

作函数 $y = f(x)f(a-x)$ 当 (a) $a = 0$; (b) $a = 1$; (c) $a = 2$ 时的图像.350. 作函数 $y = x + \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$ 的图像.作函数 $y = \frac{1}{f(x)}$ 的图像, 设:

351. $f(x) = x^2(1-x^2).$

352. $f(x) = x(1-x)^2.$

353. $f(x) = \sin^2 x.$

354. $f(x) = \ln x.$

355. $f(x) = e^x \sin x.$

356. 设

$$f(u) = \begin{cases} -1, & -\infty < u < -1, \\ u, & -1 \leq u \leq 1, \\ 1, & 1 < u < +\infty. \end{cases}$$

作复合函数 $y = f(u)$ 的图像, 其中 $u = 2 \sin x$.

357. 设

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \quad \text{和} \quad \psi(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

作下列函数的图像:

(a) $y = \varphi(\varphi(x));$

(b) $y = \varphi(\psi(x));$

(c) $y = \psi(\varphi(x));$

(d) $y = \psi(\psi(x)).$

358. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{及} \quad \psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 2, \\ 2, & |x| > 2. \end{cases}$$

作函数

(a) $y = \varphi(\varphi(x));$

(b) $y = \varphi(\psi(x));$

(c) $y = \psi(\varphi(x));$

(d) $y = \psi(\psi(x)).$

的图像.

359. 把定义于正数区域 $x > 0$ 的函数 $f(x)$ 延拓到负数区域 $x < 0$, 使所得的函数为: (1) 偶函数; (2) 奇函数, 并分别作出所得函数的图像:

(a) $f(x) = 1 - x;$

(b) $f(x) = 2x - x^2;$

(c) $f(x) = \sqrt{x};$

(d) $f(x) = \sin x;$

(e) $f(x) = e^x;$

(f) $f(x) = \ln x.$

360. 确定下列函数的图像在竖直方向上的对称轴:

$$(a) y = ax^2 + bx + c; \quad (b) y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2};$$

$$(c) y = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x} \quad (0 < a < b); \quad (d) y = a + b \cos x.$$

361. 确定下列函数的图像的对称中心:

$$(a) y = ax + b; \quad (b) y = \frac{ax + b}{cx + d};$$

$$(c) y = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad (d) y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3};$$

$$(e) y = 1 + \sqrt[3]{x-2}.$$

362. 作周期函数的图像:

$$(a) y = |\sin x|; \quad (b) y = \operatorname{sgn} \cos x;$$

$$(c) y = f(x), \text{ 其中 } f(x) = A \frac{x}{l} \left(2 - \frac{x}{l}\right), \text{ 假设 } 0 \leq x \leq 2l \text{ 和 } f(x+2l) \equiv f(x);$$

$$(d) y = [x] - 2 \left[\frac{x}{2}\right];$$

$$(e) y = (x),$$

此处 (x) 为从数 x 到最近的整数的距离.

363. 证明: 若函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图像关于竖直方向上的两条直线 $x = a$ 和 $x = b$ ($b > a$) 对称, 则函数 $f(x)$ 为周期函数.

364. 证明: 若函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图像关于两点 $A(a, y_0)$ 和 $B(b, y_1)$ ($b > a$) 对称, 则函数 $f(x)$ 是线性函数与周期函数的和. 特别是, 若 $y_0 = y_1$, 则函数 $f(x)$ 是周期函数.

365. 证明: 若函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图像关于点 $A(a, y_0)$ 和直线 $x = b$ ($b \neq a$) 对称, 则函数 $f(x)$ 为周期函数.

366. 设 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $f(x) = x(1-x)$, 作函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图像.

367. 设 $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$, 且当 $0 \leq x \leq \pi$ 时 $f(x) = 0$. 作函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图像.

368. 作函数 $y = y(x)$ 的图像, 设:

$$(a) x = y - y^3; \quad (b) x = \frac{1-y}{1+y^2};$$

$$(c) x = y - \ln y; \quad (d) x^2 = \sin y.$$

369. 作出下列用参数形式表示的函数的图像:

$$(a) x = 1 - t, y = 1 - t^2; \quad (b) x = t + \frac{1}{t}, y = t + \frac{1}{t^2};$$

$$(c) x = 10 \cos t, y = \sin t \text{ (椭圆)}; \quad (d) x = \cosh t, y = \sinh t \text{ (双曲线)};$$

$$(e) x = 5 \cos^2 t, y = 3 \sin^2 t;$$

$$(f) x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t) \text{ (摆线)};$$

$$(g) x = \sqrt[t+1]{t}, y = \sqrt[t+1]{t+1} \quad (t > 0).$$

370.1. 作下列隐函数的图像:

- (a) $x^2 - xy + y^2 = 1$ (椭圆);
 (b) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (笛卡儿叶形线);
 (c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (抛物线);
 (d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ (星形线);
 (e) $\sin x = \sin y$;
 (f) $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$;
 (g) $x^y = y^x$ ($x > 0, y > 0$);
 (h) $x - |x| = y - |y|$.

370.2. 作下列隐函数的图像:

- (a) $\min(x, y) = 1$;
 (b) $\max(x, y) = 1$;
 (c) $\max(|x|, |y|) = 1$;
 (d) $\min(x^2, y) = 1$.

371.1. 在极坐标系 (r, φ) 中作出下列函数 $r = r(\varphi)$ 的图像:

- (a) $r = \varphi$ (阿基米德螺线);
 (b) $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (双曲螺线);
 (c) $r = \frac{\varphi}{\varphi + 1}$ ($0 \leq \varphi < +\infty$);
 (d) $r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$ (对数螺线);
 (e) $r = 2(1 + \cos \varphi)$ (心脏线);
 (f) $r = 10 \sin 3\varphi$ (三瓣玫瑰线);
 (g) $r^2 = 36 \cos 2\varphi$ (伯努利双纽线);
 (h) $\varphi = \frac{r}{r-1}$ ($r > 1$);
 (i) $\varphi = 2\pi \sin r$.

371.2. 在极坐标系 (r, φ) 中作出下列函数的图像:

- (a) $\varphi = 4r - r^2$;
 (b) $\varphi = \frac{12r}{1+r^2}$;
 (c) $r^2 + \varphi^2 = 100$.

371.3. 在极坐标系 (r, φ) 中作出以参数方程表示的函数的图像 ($t \geq 0$ 为参数):

- (a) $\begin{cases} \varphi = t \cos^2 t, \\ r = t \sin^2 t; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \varphi = 1 - 2^{-t} \sin \frac{\pi t}{2}, \\ r = 1 - 2^{-t} \cos \frac{\pi t}{2}. \end{cases}$

372. 利用函数 $y = x^3 - 3x + 1$ 的图像近似地求解方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$.

用图解法解下列方程:

373. $x^3 - 4x - 1 = 0$.

374. $x^4 - 4x + 1 = 0$.

375. $x = 2^{-x}$.

376. $\lg x = 0.1x$.

377. $10^x = x^2$.

378. $\tan x = x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$).

用图解法解下列方程组:

379. $\begin{cases} x + y^2 = 1, \\ 16x^2 + y = 4. \end{cases}$

380. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ y = 10(x^2 - x - 2). \end{cases}$

§5. 函数的极限

1. 函数的有界性. 设存在某两数 m 和 M , 使得

$$\text{当 } x \in (a, b) \text{ 时, } m < f(x) < M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上为有界的. 数 $m_0 = \inf_{x \in (a, b)} \{f(x)\} = \max m$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的下确界, 而数 $M_0 = \sup_{x \in (a, b)} \{f(x)\} = \min M$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的上确界. 差 $M_0 - m_0$ 称为函数在区间 (a, b) 上的振幅.

2. 函数在某一点的极限. 设函数 $f(x)$ 定义在集合 $X = \{x\}$ 上, 且该集合以 a 为极限点. 记号

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (1)$$

表示, 对于任一个数 $\varepsilon > 0$, 都存在数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于满足条件 $0 < |x - a| < \delta$ 并使 $f(x)$ 有意义的一切 x , 下列不等式成立:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

函数的极限 (1) 存在的充分必要条件是: 对于每一个数列 $x_n \rightarrow a$ ($n = 1, 2, \dots$), 下面的等式都成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

有两个著名的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

柯西准则. 函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在的充分必要条件为: 对于每一个 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得只要

$$0 < |x' - a| < \delta \quad \text{且} \quad 0 < |x'' - a| < \delta,$$

就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

其中 x' 和 x'' 属于函数 $f(x)$ 的定义域.

3. 单侧极限. 若对于任何 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\text{当 } 0 < a - x < \delta(\varepsilon) \text{ 时, 有 } |A' - f(x)| < \varepsilon,$$

则称数 A' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的左极限:

$$A' = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0).$$

类似地, 若

$$\text{当 } 0 < x - a < \delta(\varepsilon) \text{ 时, 有 } |A'' - f(x)| < \varepsilon,$$

则称数 A'' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的右极限:

$$A'' = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0).$$

函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在的充分必要条件为: $f(a-0) = f(a+0)$.

4. 无穷极限. 约定记号

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$, 只要

$$0 < |x - a| < \delta(E), \quad \text{则有 } |f(x)| > E.$$

5. 子列极限. 若对于某数列 $x_n \rightarrow a$ 有等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B,$$

则称数 (或符号 ∞) B 为函数 $f(x)$ 在 a 点的子列极限 (有限的或无穷的).

这些子列极限中最小的和最大的用

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{和} \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$$

来表示, 分别称为函数 $f(x)$ 在 a 点的下极限和上极限.

等式

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$$

为函数 $f(x)$ 在 a 点有极限 (有限的或无穷的) 的充分必要条件.

381. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} n, & x = \frac{m}{n} \text{ (} m \text{ 和 } n \text{ 为互素的整数, 且 } n > 0\text{),} \\ 0, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

在每一点 x 为有限的, 但并非有界的 (即在这点的任何邻域中是无界的).

382. 若函数 $f(x)$ 在: (a) 开区间, (b) 闭区间内的每一点有定义且局部有界, 则此函数在该开区间或闭区间内是否为有界的? 举出适当的例子.

383. 证明: 函数

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

在区间 $-\infty < x < +\infty$ 中是有界的.

384. 证明: 函数

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

在点 $x = 0$ 的任何邻域内是无界的, 但在 $x \rightarrow 0$ 时不成为无穷大.

385. 研究函数 $f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$ 在区间 $0 < x < \varepsilon$ 内的有界性.

386. 证明: 函数

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

在区域 $0 \leq x < +\infty$ 内有下确界 $m = 0$ 和上确界 $M = 1$.

387. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且单调上升, 则在此闭区间内函数的下确界和上确界等于什么?

求下列函数的下确界和上确界:

388. $f(x) = x^2$ 在 $[-2, 5]$ 内. 389. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内.

390. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 内. 391. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内.

392. $f(x) = \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内. 393. $f(x) = \sin x + \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 内.

394. $f(x) = 2^x$ 在 $(-1, 2)$ 内.

395. $f(x) = [x]$: (a) 在 $(0, 2)$ 内, (b) 在 $[0, 2]$ 内.

396. $f(x) = x - [x]$ 在 $[0, 1]$ 内.

397. 求函数 $f(x) = x^2$ 在下列区间内的振幅:

(a) $(1, 3)$; (b) $(1.9, 2.1)$; (c) $(1.99, 2.01)$; (d) $(1.999, 2.001)$.

398. 求函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ 在下列区间内的振幅:

(a) $(-1, 1)$; (b) $(-0.1, 0.1)$; (c) $(-0.01, 0.01)$; (d) $(-0.001, 0.001)$.

399. 设 $m[f]$ 和 $M[f]$ 分别为函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的下确界和上确界.

证明: 若 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为定义于 (a, b) 的函数, 则

$$m[f_1 + f_2] \geq m[f_1] + m[f_2],$$

$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$$

举出函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的例子, 使上述两个关系式为: (a) 等式, (b) 不等式.

400. 设函数 $f(x)$ 定义于区域 $[a, +\infty)$, 并且在每一个闭区间 $[a, b]$ 上是有界的. 令

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} f(\xi), \quad M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} f(\xi).$$

作函数 $y = m(x)$ 和 $y = M(x)$ 的图像, 设

$$(a) f(x) = \sin x;$$

$$(b) f(x) = \cos x.$$

401. 利用 “ ε - δ ” 语言, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
δ					

402. 以 “ ε - δ ” 语言, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

填下表:

E	10	100	1000	10000	...
δ					

403. 利用不等式表示下列各式:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b;$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b.$$

举出适当的例子.

利用不等式表示下列结论, 并举出适当的例子:

$$404. (a) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b;$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

$$405. (a) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty;$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty;$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty;$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty;$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty;$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty;$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty;$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty.$$

$$406. (a) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty;$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty;$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty;$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty;$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty;$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty;$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty;$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

407. 命 $y = f(x)$. 利用不等式表示下列结论:

$$(a) \text{ 当 } x \rightarrow a \text{ 时, } y \rightarrow b-0;$$

$$(b) \text{ 当 } x \rightarrow a-0 \text{ 时, } y \rightarrow b-0;$$

- (c) 当 $x \rightarrow a+0$ 时, $y \rightarrow b-0$; (d) 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b+0$;
 (e) 当 $x \rightarrow a-0$ 时, $y \rightarrow b+0$; (f) 当 $x \rightarrow a+0$ 时, $y \rightarrow b+0$;
 (g) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b-0$; (h) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b-0$;
 (i) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b-0$; (j) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b+0$;
 (k) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b+0$; (l) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b+0$.

举出适当的例子.

408. 设

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

式中 a_i ($i = 0, 1, \cdots, n; n \geq 1, a_0 \neq 0$) 为实数.

证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |P(x)| = +\infty.$$

409. 设

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m},$$

式中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$,

证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |R(x)| = \begin{cases} \infty, & n > m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

410. 设 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多项式, 且 $P(a) = Q(a) = 0$.
 表达式

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

可能取何值?

求下列各式之值:

411. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

412. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$. 413. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$.

414. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$ (m 与 n 为正整数).

415. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

416. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

417. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

418. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$.

419. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.

420. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$.

422. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$.

424. (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}$;

421. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$.

423. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$.

425. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m 和 n 为正整数).

426. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2}$ (n 为正整数).

427. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x - 1)^2}$ (n 为正整数).

428. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n} \right)$ (m 和 n 为正整数).

429. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right]$.

430. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right]$.

提示: 参阅题 2.

431. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2}$.

432. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3} - \frac{\pi}{4} \right)$.

提示: 参阅题 3.

433. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3}{[1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)]^2}$.

434. 把由抛物线 $y = b \left(\frac{x}{a} \right)^2$, Ox 轴及直线 $x = a$ 所围成的曲边三角形 OAM (图 3) 的面积, 当作以 $\frac{a}{n}$ 为底的各内接矩形面积之和当 $n \rightarrow \infty$ 的极限值, 求此面积.

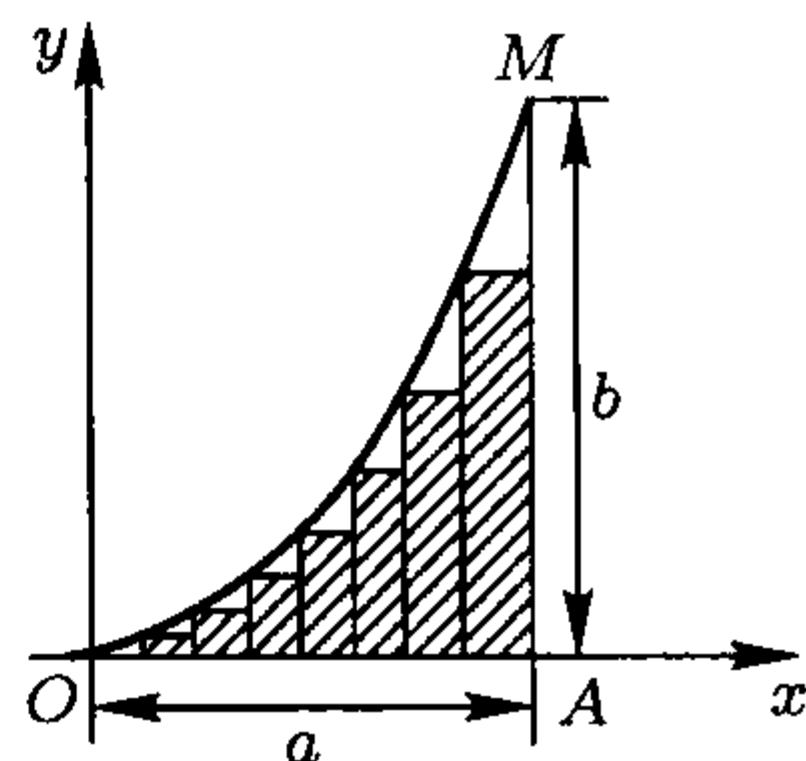


图 3

求极限:

435. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$.

437. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$.

439. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

441. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x - 6} + 2}{x^3 + 8}$.

436. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}}$.

438. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1 - x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$.

440. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 9}$.

442. $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$.

$$443. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}. \quad 444. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} \quad (n \text{ 为整数}).$$

$$445. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x}. \quad 446. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x+x^2}.$$

$$447. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}. \quad 448. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

$$449. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}. \quad 450. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}}}.$$

$$451. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}.$$

$$452. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}).$$

$$453. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}).$$

454. 设 $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 又 m 为整数, 求证:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+p(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}.$$

求下列的极限:

$$455.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}). \quad 455.2. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}} \right).$$

$$456. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}.$$

$$457. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right]. \quad 458. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right).$$

$$459. \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x).$$

$$460. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right).$$

$$461. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1}).$$

$$462. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x}).$$

$$463. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right].$$

$$464. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$$

$$465. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[n]{(x+a_1) \cdots (x+a_n)} - x \right].$$

$$466. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2-1})^n + (x + \sqrt{x^2-1})^n}{x^n} \quad (n \text{ 为正整数}).$$

$$467. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x} \quad (n \text{ 为正整数}).$$

468. 设二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的系数 a 趋于零, 系数 b 与 c 为常数, 且 $b \neq 0$, 试研究此二次方程之二根 x_1 及 x_2 的性质.

469. 从条件

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$$

求常数 a 和 b .

470. 从条件

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1x - b_1 \right) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - a_2x - b_2 \right) = 0$$

求常数 a_i 和 b_i ($i = 1, 2$).

求下列极限:

$$471. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

$$472. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

$$473. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}).$$

$$474. (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}; \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 3x.$$

$$475. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}. \quad 476. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$$

$$477. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}. \quad 478. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}.$$

$$479. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right). \quad 480. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}.$$

481. 证明等式:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a; \quad (b) \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a \left(a \neq \frac{2n-1}{2}\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right).$$

求下列极限:

$$482. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}. \quad 483. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}.$$

$$484. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}. \quad 485. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cot x - \cot a}{x - a}.$$

$$486. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a}. \quad 487. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\csc x - \csc a}{x - a}.$$

$$488. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}.$$

489. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$.
490. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+2x) - 2\tan(a+x) + \tan a}{x^2}$.
491. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot(a+2x) - 2\cot(a+x) + \cot a}{x^2}$.
492. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin^2 a}{x}$.
493. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$.
494. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$.
495. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$.
496. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$.
497. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+x)\tan(a-x) - \tan^2 a}{x^2}$.
498. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cot^3 x}{2 - \cot x - \cot^3 x}$.
499. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$.
500. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$.
501. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.
502. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$.
503. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})}$.
504. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.
505. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.
506. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.
507. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$.
508. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.
509. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin^n \frac{2n\pi}{3n+1}\right)$.
510. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+0} \left[\tan\left(\frac{\pi}{8} + x\right)\right]^{\tan 2x}$.
511. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.
512. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{x^2}$.
513. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2}\right)^{\frac{1}{x}}$.
514. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$.
515. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$.
516. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}\right)^x \quad (a_1 > 0, a_2 > 0)$.
517. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\cot^2 x}$.
518. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$.

$$519. (a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}.$$

$$520. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

$$521. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$522. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}.$$

$$523. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}.$$

$$524. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{\cot x}.$$

$$525. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$526. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$$

$$527. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n.$$

$$528. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}.$$

$$529. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

$$530. \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x].$$

$$531. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$532. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x].$$

$$533. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}.$$

$$534. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} \right).$$

$$535. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}.$$

$$536. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}.$$

$$537. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) - 2 \log x}{h^2} \quad (x > 0).$$

$$538. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + ax \right)}{\sin bx}.$$

$$539. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$$

$$540. (a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}} \right); \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(nx + \sqrt{1 - n^2 x^2})}{\ln(x + \sqrt{1 - x^2})}.$$

$$541. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0).$$

$$542. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$543. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$544. \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$545. (a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right)^{\cot^3 x};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^x)}{\ln(\cos(\pi \cdot 2^x))}.$$

$$546. \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right).$$

$$547. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}.$$

548. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} \quad (a > 0).$ 549. $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \quad (a > 0).$
550. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} \quad (a > 0).$ 551. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}.$
552. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad (x > 0).$ 553. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) \quad (x > 0).$
554. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-1 + \sqrt[n]{b}}{a} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$
555. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$
556. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$
557. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a+b+c} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$
558. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0).$
559. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} \quad (a > 0, b > 0).$ 560. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} \quad (a > 0).$
561. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)};$ (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}.$
562. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$ 563. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2.$

564. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1, n > 0).$$

565. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0 \quad (a > 1, \varepsilon > 0).$$

求下列极限:

566. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})};$ (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}.$
567. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}.$
568. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2) \ln(x+2) - 2(x+1) \ln(x+1) + x \ln x].$
569. $\lim_{x \rightarrow +0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right] \quad (a > 1).$
570. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right).$

571. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$.
572. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$.
573. $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}$.
574. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}$.
575. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^\alpha x)(1 - \sin^\beta x)}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$.
576. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x}$ (参考习题 340).
577. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh^2 x}{\ln(\cosh 3x)}$ (参考习题 340); (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh \sqrt{x^2+x} - \sinh \sqrt{x^2-x}}{\cosh x}$.
578. (a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sinh x - \sinh a}{x - a}$; (b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cosh x - \cosh a}{x - a}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cosh x}{\ln \cos x}$.
579. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \cosh x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\tanh x}$.
580. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cosh \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2}$.
581. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}$.
582. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x} - x)$.
583. $\lim_{x \rightarrow 2} \arctan \frac{x-4}{(x-2)^2}$.
584. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
585. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan(x+h) - \arctan x}{h}$.
586. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)}$.
587. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \arctan \frac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right]$.
588. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right)$.
589. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)$.
590. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\csc(\pi\sqrt{1+n^2})}$.
591. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}$; (b) $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$.
592. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$; (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$.
593. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$;
(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$.

594. 设

$$f(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{x + \sqrt{x^2 + b^2}},$$

求

$$h = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

$$595. (a) \lim_{x \rightarrow 1-0} \arctan \frac{1}{1-x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1+0} \arctan \frac{1}{1-x}.$$

$$596. (a) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

$$597. (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}.$$

598. 证明:

$$(a) \text{ 当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, } \frac{2x}{1+x} \rightarrow 2+0;$$

$$(b) \text{ 当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } \frac{2x}{1+x} \rightarrow 2-0.$$

599. 证明:

$$(a) \text{ 当 } x \rightarrow -0 \text{ 时, } 2^x \rightarrow 1-0;$$

$$(b) \text{ 当 } x \rightarrow +0 \text{ 时, } 2^x \rightarrow 1+0.$$

600. 设 $f(x) = x + [x^2]$, 求 $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$.

601. 设 $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$, 求 $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ ($n = 0, \pm 1, \dots$).

求:

$$602. \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}.$$

$$603. \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right].$$

$$604. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}).$$

$$605. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}).$$

$$606. \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_{n \text{ 次}}.$$

607. 设 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$ 及 $\lim_{x \rightarrow A} \psi(x) = B$, 则由此是否可推出

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(\varphi(x)) = B?$$

研究例子:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ (} p, q \text{ 是互素的整数)}, \\ 0, & x \text{ 为无理数,} \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

并且 $x \rightarrow 0$.

608. 证明柯西定理: 若函数 $f(x)$ 定义于区间 $(a, +\infty)$, 且在每一个有限的区间 (a, b) 内是有界的, 则

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)];$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \geq C > 0),$$

假定等式右端的极限都存在.

609. 证明: 若 (1) 函数 $f(x)$ 定义于区域 $x > a$; (2) $f(x)$ 在每一个有限的区域 $a < x < b$ 内是有界的; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \pm\infty$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty.$$

610. 证明: 若 (1) 函数 $f(x)$ 定义于区域 $x > a$; (2) $f(x)$ 在每一个有限的区域 $a < x < b$ 内是有界的; (3) 存在着有限的或无穷的极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = l,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

611. 证明:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x;$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x.$$

612. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!) = 2\pi.$$

提示: 利用 72 题的公式 (*).

作下列函数的图像:

$$613. (a) y = 1 - x^{100};$$

$$(b) y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2n}) \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$614. (a) y = \frac{x^{100}}{1 + x^{100}} \quad (x \geq 0);$$

$$(b) y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n} \quad (x \geq 0).$$

$$615. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \quad (x \neq 0).$$

$$616. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

$$617. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n} \quad (x \geq 0).$$

$$618. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0).$$

$$619. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}} \quad (x \geq 0).$$

$$620. (a) y = \sin^{1000} x;$$

$$(b) y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x.$$

$$621. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} \quad (x \geq 0).$$

$$622. y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x - 1) \arctan x^n.$$

$$623. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}.$$

$$624. (a) y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}};$$

$$(b) y = \lim_{t \rightarrow x} \frac{1}{t-x} \ln \frac{t}{x} \quad (x > 0).$$

$$625. (a) y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \tan^{2n} \frac{\pi x}{4} + \sqrt{x}}{\tan^{2n} \frac{\pi x}{4} + 1} \quad (x \geq 0);$$

$$(b) y = \lim_{n \rightarrow \infty} x \operatorname{sgn} |\sin^2(n! \pi x)|;$$

$$(c) \text{作曲线 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = 1.$$

626. 若有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则直线 $y = kx + b$ 称为曲线 $y = f(x)$ 的 (斜) 渐近线. 利用此方程推出渐近线存在的充分必要条件.

627. 求下列曲线的渐近线并作其图像:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y &= \frac{x^3}{x^2 + x - 2}; & \text{(b)} \quad y &= \sqrt{x^2 + x}; & \text{(c)} \quad y &= \sqrt[3]{x^2 - x^3}; \\ \text{(d)} \quad y &= \frac{xe^x}{e^x - 1}; & \text{(e)} \quad y &= \ln(1 + e^x); & \text{(f)} \quad y &= x + \arccos \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

求下列极限:

628. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right].$

629. $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})]$, 若 $|x| < 1$.

630. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right).$

631. 设

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1,$$

其中 $\psi(x) > 0$, 再设 $n \rightarrow \infty$ 时 $\alpha_{mn} \rightarrow 0$ ($m = 1, 2, \dots, n$), 换言之, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $m = 1, 2, \dots, n$ 且 $n > N(\varepsilon)$ 时 $0 < |\alpha_{mn}| < \varepsilon$.

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(\alpha_{1n}) + \varphi(\alpha_{2n}) + \dots + \varphi(\alpha_{nn})] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\psi(\alpha_{1n}) + \psi(\alpha_{2n}) + \dots + \psi(\alpha_{nn})], \quad (1)$$

此处假定等式 (1) 右端的极限存在.

利用上述定理, 求:

632. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right).$

633. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{ka}{n^2} \right).$

634. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(a^{\frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ ($a > 0$).

635. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right).$

636. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}.$

637.1. 数列 x_n 由以下的等式所给定:

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \quad \dots \quad (a > 0).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

637.2. 数列 x_n 按下述方式给定:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \quad (n = 3, 4, \dots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

637.3. 数列 y_n 借助于数列 x_n , 由下述关系式定义:

$$y_0 = x_0, \quad y_n = x_n - \alpha x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

其中 $|\alpha| < 1$. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

637.4. 数列 x_n 按下述方式给定:

$$x_0 = 1, \quad x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

提示: 考虑 x_n 与方程 $x = \frac{1}{1+x}$ 的根之差.

638. 函数序列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

用以下的方法来确定:

$$(a) \quad y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \dots);$$

$$(b) \quad y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

639.1. 设 $x > 0$ 且 $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明: 若 $y_i > 0$ ($i = 0, 1$), 则序列 y_n 收敛且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{x}.$$

提示: 研究差 $\frac{1}{x} - y_n$.

639.2. 为了求 $y = \sqrt{x}$, 其中 $x > 0$, 应用如下的步骤: $y_0 > 0$ 是任意的,

$$y_n = \frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}} \right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{x}.$$

提示: 利用公式

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}} \right)^2 \quad (n \geq 1).$$

640. 为了求开普勒方程

$$x - \varepsilon \sin x = m \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (1)$$

的近似解, 假设

$$x_0 = m, \quad x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \quad \dots, \quad x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}, \quad \dots$$

(逐步逼近法).

证明: 存在 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 且数 ξ 为方程 (1) 的唯一的根.

641. 若 $\omega_h(f)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $|x - \xi| \leq h$ ($h > 0$) 上的振幅, 则数

$$\omega_0(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \omega_h(f)$$

称为函数 $f(x)$ 在 ξ 点的振幅.

若 $f(x) = 0$, 而在 $x \neq 0$ 时 $f(x)$ 为下列函数, 求 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的振幅:

$$(a) f(x) = \sin \frac{1}{x};$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x};$$

$$(c) f(x) = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right);$$

$$(d) f(x) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1}{x};$$

$$(e) f(x) = \frac{|\sin x|}{x};$$

$$(f) f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$$

$$(g) f(x) = (1 + |x|)^{\frac{1}{x}}.$$

642. 命

$$f(x) = \sin \frac{1}{x},$$

证明: 对于满足条件 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 的任何数 α , 可以选出数列 $x_n \rightarrow 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha.$$

643. 设

$$(a) f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x}; \quad (b) f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x};$$

$$(c) f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x} \right)^{\sec^2 \frac{1}{x}}.$$

求

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{和} \quad L = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x).$$

644. 设

$$(a) f(x) = \sin x;$$

$$(b) f(x) = x^2 \cos^2 x;$$

$$(c) f(x) = 2^{\sin x^2};$$

$$(d) f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x} \quad (x \geq 0).$$

求

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{和} \quad L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

§6. 符号 O

1. 记号

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \quad \text{当 } x \in X$$

表示: 存在常数 A , 使得

$$|\varphi(x)| \leq A|\psi(x)| \quad \text{当 } x \in X. \quad (1)$$

若在点 a ($x \neq a$) 的某个邻域 U_a 内不等式 (1) 成立, 类似地可写出

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \quad \text{当 } x \rightarrow a. \quad (2)$$

特别地, 若当 $x \in U_a$ ($x \neq a$) 时 $\psi(x) \neq 0$, 则只要存在有限的 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0$, 关系式 (2) 就显然成立. 在这种情形下使用记号

$$\varphi(x) = O^*(\psi(x)).$$

若

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为关于无穷小量 x 的 p 阶无穷小量. 类似地, 若

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

则称 $\psi(x)$ 为关于无穷大量 x 的 p 阶无穷大量.

2. 记号

$$\varphi(x) = o(\psi(x)) \quad \text{当 } x \rightarrow a$$

表示

$$\varphi(x) = \alpha(x)\psi(x) \quad (x \in U_a, x \neq a), \quad (3)$$

其中当 $x \rightarrow a$ 时 $\alpha(x) \rightarrow 0$. 若当 $x \in U_a, x \neq a$ 时 $\psi(x) \neq 0$, 则等式 (3) 等价于

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3. 若

$$\varphi(x) - \psi(x) = o(\psi(x)) \quad \text{当 } x \rightarrow a, \quad (4)$$

则称函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时是等价的 ($\varphi(x) \sim \psi(x)$). 若当 $x \in U_a, x \neq a$ 时 $\psi(x) \neq 0$, 则由 (4) 有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 成立如下的等价关系:

$$\sin x \sim x; \quad \tan x \sim x; \quad a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0);$$

$$\ln(1+x) \sim x; \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

一般而言, $\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x)$.

在计算当 $x \rightarrow a$ 时两个无穷小 (或无穷大) 函数之比的极限时, 可用等价的函数来替换所给函数.

645. 把圆心角 $AOB = x$ (图 4) 当作 1 阶无穷小量, 求下列各无穷小量的阶:

- 弦 AB ;
- 拱高 CD ;
- 扇形 AOB 的面积;
- 三角形 ABC 的面积;
- 梯形 ABB_1A_1 的面积;
- 弓形 ABC 的面积.

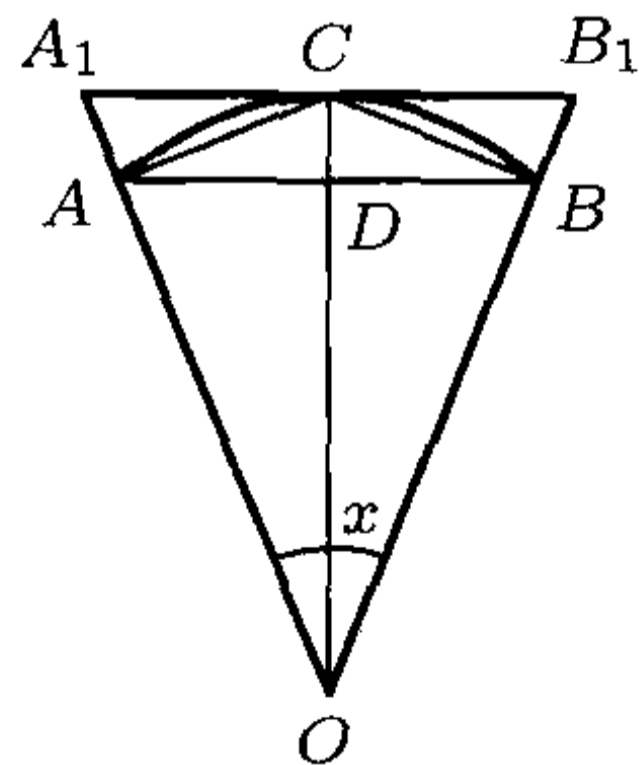


图 4

646. 设 $o(f(x))$ 是当 $x \rightarrow a$ 时比函数 $f(x)$ 低阶增长的任意函数, 并且 $O(f(x))$ 是当 $x \rightarrow a$ 时与函数 $f(x)$ 同阶增长的任意函数, 其中 $f(x) > 0$.

证明:

$$(a) \quad o(o(f(x))) = o(f(x));$$

$$(b) \quad O(o(f(x))) = o(f(x));$$

$$(c) o(O(f(x))) = o(f(x)); \quad (d) O(O(f(x))) = O(f(x));$$

$$(e) O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x)).$$

647. 设 $x \rightarrow 0$ 和 $n > 0$. 证明:

$$(a) CO(x^n) = O(x^n) \quad (C \neq 0 \text{ 为常数}); \quad (b) O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n < m);$$

$$(c) O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m}).$$

648. 设 $x \rightarrow +\infty, n > 0$. 证明:

$$(a) CO(x^n) = O(x^n) \quad (C \text{ 为常数});$$

$$(b) O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n > m);$$

$$(c) O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m}).$$

649. 证明符号 \sim 具有如下性质:

$$(1) \text{ 自反性: } \varphi(x) \sim \varphi(x);$$

$$(2) \text{ 对称性: 若 } \varphi(x) \sim \psi(x), \text{ 则 } \psi(x) \sim \varphi(x);$$

$$(3) \text{ 传递性: 若 } \varphi(x) \sim \psi(x) \text{ 及 } \psi(x) \sim \chi(x), \text{ 则 } \varphi(x) \sim \chi(x).$$

650. 设 $x \rightarrow 0$, 证明下列等式:

$$(a) 2x - x^2 = O(x); \quad (b) x \sin \sqrt{x} = O(x^{\frac{3}{2}});$$

$$(c) x \sin \frac{1}{x} = O(|x|); \quad (d) \ln x = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right) \quad (\varepsilon > 0);$$

$$(e) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}; \quad (f) \arctan \frac{1}{x} = O(1);$$

$$(g) (1+x)^n = 1 + nx + o(x).$$

651. 设 $x \rightarrow +\infty$. 证明下列等式:

$$(a) 2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3); \quad (b) \frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$(c) x + x^2 \sin x = O(x^2); \quad (d) \frac{\arctan x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$(e) \ln x = o(x^\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0); \quad (f) x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$(g) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}; \quad (h) x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2.$$

652.1. 证明: 当 x 充分大时, 下面的不等式成立:

$$(a) x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3; \quad (b) \ln^{1000} x < \sqrt{x};$$

$$(c) x^{10} e^x < e^{2x}.$$

652.2. 证明渐近公式: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x + \frac{p}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

653. 设 $x \rightarrow 0$. 分出下列函数的形如 Cx^n (C 为常数) 的主部, 并求其对于无穷小变量 x 的阶:

$$(a) f(x) = 2x - 3x^3 + x^5; \quad (b) f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x};$$

$$(c) f(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}; \quad (d) f(x) = \tan x - \sin x.$$

654. 设 $x \rightarrow 0$. 证明: 无穷小量

$$(a) f(x) = \frac{1}{\ln x};$$

$$(b) f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

无论对任何的 n , 也不能与无穷小量 $x^n (x > 0)$ 相比较. 即, 对于任何的 n , 等式

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = k$$

都不成立, 式中 k 为异于零的有限量.

655. 设 $x \rightarrow 1$. 分出下列函数的形如 $C(x-1)^n$ 的主部, 并求其对于无穷小量 $x-1$ 的阶:

$$(a) f(x) = x^3 - 3x + 2;$$

$$(b) f(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}};$$

$$(c) f(x) = \ln x;$$

$$(d) f(x) = e^x - e;$$

$$(e) f(x) = x^x - 1.$$

656. 设 $x \rightarrow +\infty$. 分出下列函数的形如 Cx^n 的主部, 并求其对于无穷大量 x 的阶:

$$(a) f(x) = x^2 + 100x + 10\,000;$$

$$(b) f(x) = \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1};$$

$$(c) f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x};$$

$$(d) f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}.$$

657. 设 $x \rightarrow +\infty$. 分出下列函数的形如 $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$ 的主部, 并求其对于无穷小量 $\frac{1}{x}$ 的阶:

$$(a) f(x) = \frac{x+1}{x^4+1};$$

$$(b) f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x};$$

$$(c) f(x) = \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x};$$

$$(d) f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

658. 设 $x \rightarrow 1$. 分出下列函数的形如 $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^n$ 的主部, 并求其对于无穷大量 $\frac{1}{x-1}$ 的阶:

$$(a) f(x) = \frac{x^2}{x^2-1};$$

$$(b) f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$(c) f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}};$$

$$(d) f(x) = \frac{1}{\sin \pi x};$$

$$(e) f(x) = \frac{\ln x}{(1-x)^2}.$$

659. 设 $x \rightarrow +\infty$, $f_n(x) = x^n (n = 1, 2, 3, \dots)$. 证明:

(1) 每一个函数 $f_n(x)$ 都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加得快;

(2) 函数 e^x 比函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每一个都增加得快.

660. 设 $x \rightarrow +\infty$, $f_n(x) = \sqrt[n]{x} (n = 1, 2, 3, \dots)$. 证明:

(1) 每一个函数 $f_n(x)$ 都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加得慢;

(2) 函数 $f(x) = \ln x$ 比函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每一个都增加得慢.

661. 证明: 对于任意的函数序列

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (x_0 < x < +\infty),$$

可举出一函数 $f(x)$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时它比函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每一个都增加得快.

§7. 函数的连续性

1. 函数的连续性. 设

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (1)$$

即, 函数 $f(x)$ 对 $x = x_0$ 有定义, 并且对于每一个 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 对于 $f(x)$ 的有意义一切值, 不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

都成立. 此时, 称函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时 (或在点 x_0) 是连续的.

若函数 $f(x)$ 在所给集合 $X = \{x\}$ (开区间, 闭区间等等) 上的每一点都是连续的, 则称函数 $f(x)$ 在集合 X 上是连续的.

若某值 x_0 属于函数 $f(x)$ 的定义域 $X = \{x\}$ 或为此集合的极限点, 而当 $x = x_0$ 时, 等式 (1) 不成立 (即, 或者 (a) 数 $f(x_0)$ 不存在, 换言之, 函数在点 $x = x_0$ 没有定义; 或者 (b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 或者 (c) 公式 (1) 的两端虽有意义, 但它们不相等), 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

间断点 x_0 分为两类: (1) 第一类间断点 —— 在这些点存在有限的单侧极限:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \quad \text{和} \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

(2) 第二类间断点 —— 其余的一切间断点. 差

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

称为函数在点 x_0 的突跃.

若等式

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

成立, 则间断点 x_0 称为可去的. 若极限 $f(x_0 - 0)$ 或 $f(x_0 + 0)$ 中至少有一个等于符号 ∞ , 则称 x_0 为无穷型间断点.

若等式

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \quad (\text{或} \quad f(x_0 + 0) = f(x_0))$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左 (或右) 连续. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分必要条件为下面三个数相等:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

2. 初等函数的连续性. 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 则函数

$$(a) f(x) \pm g(x); \quad (b) f(x)g(x); \quad (c) \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0)$$

也在 $x = x_0$ 连续.

特殊情形: (a) 有理函数

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

对任何的 x 值都是连续的; (b) 分式有理函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}$$

对所有不使其分母为零的 x 值, 都是连续的.

一般地说, 基本初等函数: $x^n, \sin x, \cos x, \tan x, a^x, \log_a x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \dots$ 在一切使其有意义的点都连续.

更为一般的结果如下: 若函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时连续, 函数 $g(y)$ 当 $y = f(x_0)$ 时连续, 则函数 $g(f(x))$ 当 $x = x_0$ 时连续.

3. 关于连续函数的基本定理. 若函数 $f(x)$ 在有限的闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则: (1) 函数 $f(x)$ 在此闭区间内是有界的; (2) 达到其下确界 m 和上确界 M (魏尔斯特拉斯定理); (3) 在每一个区间 $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ 中, 函数取到所有介于 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 间的值 (柯西定理). 例如, 若 $f(\alpha)f(\beta) < 0$, 则可找到一个数值 γ ($\alpha < \gamma < \beta$), 使得 $f(\gamma) = 0$.

662. 已给连续函数 $y = f(x)$ 的图像, 对于给定点 a 与给定数 $\varepsilon > 0$, 用几何方法表示出这样的数 $\delta > 0$, 使当 $|x - a| < \delta$ 时, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

663. 需要制造一块边长 $x_0 = 10$ cm 的正方形金属板, 其面积 $y = x^2$ 与设计值 $y_0 = 100$ cm² 之差不可超过: (a) ± 1 cm²; (b) ± 0.1 cm²; (c) ± 0.01 cm²; (d) $\pm \varepsilon$ cm², 问其边长 x 可以在什么范围内变化?

664. 立方体的边介于 2 m 和 3 m 之间, 在测量此立方体边长 x 时容许怎样的绝对误差 Δ , 方可使计算立方体体积时的绝对误差不超过: (a) $\varepsilon = 0.1$ m³; (b) $\varepsilon = 0.01$ m³; (c) $\varepsilon = 0.001$ m³?

665. 问在 $x_0 = 100$ 的尽可能多大的邻域内, 函数 $y = \sqrt{x}$ 的图像的纵坐标与 $y_0 = 10$ 之差小于 $\varepsilon = 10^{-n}$ ($n \geq 0$)? 求当 $n = 0, 1, 2, 3$ 时这个邻域的大小.

666. 利用“ ε - δ ”语言, 证明: 函数 $f(x) = x^2$ 当 $x = 5$ 时连续. 填下表:

ε	1	0.1	0.01	0.001	...
δ					

667. 设 $f(x) = \frac{1}{x}$, $\varepsilon = 0.001$. 对于数值 $x_0 = 0.1; 0.01; 0.001; \dots$ 求出最大的正数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, 使得可从不等式 $|x - x_0| < \delta$ 推出不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

可否对于已知的 $\varepsilon = 0.001$ 选出这样的 $\delta > 0$, 使它对区间 $(0, 1)$ 中的一切 x_0 值都适用? 换言之, 可否找到这样的 $\delta > 0$, 使得只要 $|x - x_0| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 而不论 $x_0 \in (0, 1)$ 为何值?

668. 用“ ε - δ ”语言以肯定的方式表述以下论断: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义, 而在这一点不连续.

669. 设对于某些数 $\varepsilon > 0$ 可找到对应的数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使得只要 $|x - x_0| < \delta$, 则 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

若 (a) 诸数 ε 组成一有限的集合; (b) 数 ε 组成分数 $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的无穷集合, 则可否断定函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续?

670. 设已知函数

$$f(x) = x + 0.001[x].$$

证明: 对于每一个 $\varepsilon > 0.001$, 可以选出 $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, 使得只要 $|x' - x| < \delta$, 则

$|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. 然而, 当 $0 < \varepsilon \leq 0.001$ 时, 对于所有 x 值都无法选出这样的 δ .

这个函数的连续性在哪些点遭到破坏?

671. 设对于每一个充分小的数 $\delta > 0$, 都存在 $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$, 使得只要 $|x - x_0| < \delta$ 则不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立. 由此是否可知函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续? 这些不等式描述了函数 $f(x)$ 的什么性质?

672. 设对于每一个数 $\varepsilon > 0$, 都存在数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使得若 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则 $|x - x_0| < \delta$. 由此是否可知函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续? 这些不等式描述了函数的什么性质?

673. 设对于每一个数 $\delta > 0$, 都存在数 $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$, 使得若 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则 $|x - x_0| < \delta$. 由此是否可知函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续? 这些不等式描述了函数的什么性质?

研究例子:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x, & x \text{ 为有理数,} \\ \pi - \arctan x, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

674. 利用 “ ε - δ ” 语言证明下列函数的连续性: (a) $ax + b$; (b) x^2 ; (c) x^3 ; (d) \sqrt{x} ; (e) $\sqrt[3]{x}$; (f) $\sin x$; (g) $\cos x$; (h) $\arctan x$.

研究下列函数的连续性并绘出其图像:

675. $f(x) = |x|$.

676. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ A, & x = 2. \end{cases}$

677. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & x \neq -1, \\ \text{任意值}, & x = -1. \end{cases}$

678. (a) $f_1(x) = \begin{cases} \left| \frac{\sin x}{x} \right|, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$ (b) $f_2(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

679. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \text{任意值}, & x = 0. \end{cases}$ **680.** $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

681. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ **682.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \neq 1, \\ \text{任意值}, & x = 1. \end{cases}$

683. $f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$ **684.** $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

685. $f(x) = [x]$. **686.** $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$.

求出下列函数的间断点并研究这些点的性质:

687. $y = \frac{x}{(1+x)^2}$.

688. $y = \frac{1+x}{1+x^3}$.

689. $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}.$

690. $y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}.$

691. $y = \frac{x}{\sin x}.$

692. $y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}.$

693. $y = \cos^2 \frac{1}{x}.$

694. $y = \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right).$

695. $y = \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{x}{\pi}}.$

696. $y = \arctan \frac{1}{x}.$

697. $y = \sqrt{x} \arctan \frac{1}{x}.$

698. $y = e^{x + \frac{1}{x}}.$

699. $y = \frac{1}{\ln x}.$

700. $y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}.$

研究下列函数的连续性并绘出其大略图像:

701. $y = \operatorname{sgn}(\sin x).$

702. $y = x - [x].$

703. $y = x[x].$

704. $y = [x] \sin \pi x.$

705. $y = x^2 - [x^2].$

706. $y = \left[\frac{1}{x} \right].$

707. $y = x \left[\frac{1}{x} \right].$

708. $y = \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{1}{x} \right).$

709. $y = \left[\frac{1}{x^2} \right] \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right).$

710. $y = \cot \frac{\pi}{x}.$

711. $y = \sec^2 \frac{1}{x}.$

712. $y = (-1)^{[x^2]}.$

713. $y = \arctan \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right).$

714. $y = \frac{1}{x^2 \sin^2 x}.$

715. $y = \frac{1}{\sin(x^2)}.$

716. $y = \ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}.$

717. $y = e^{-\frac{1}{x}}.$

718. $y = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}.$

719. $y = \tanh \frac{2x}{1-x^2}.$

研究下列函数的连续性并作出其图像:

720. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} \quad (x \geq 0).$

721. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}.$

722. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}.$

723. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x.$

724. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+(2 \sin x)^{2n}}.$

725. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} [x \arctan(n \cot x)].$

726. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$.

727. $y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{xt})}{\ln(1 + e^t)}$.

728. $y = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + x) \tanh tx$.

729. 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

是否连续?

730. 设

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

怎样选择数 a , 可使函数 $f(x)$ 连续?

731. 研究下列函数的连续性并说明间断点的性质:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1; \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1, \\ |x - 1|, & |x| > 1; \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} \cot^2 \pi x, & x \text{ 非整数}, \\ 0, & x \text{ 为整数}; \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$

732. 函数 $d = d(x)$ 是数轴 Ox 上的点 x 与由线段 $0 \leq x \leq 1$ 及 $2 \leq x \leq 3$ 所构成点集间的最短距离. 求函数 d 的解析表达式, 作出其图像并研究其连续性.

733. 图像 E 由高为 1 底为 1 的等腰三角形及底为 1 高为 2 及 3 的二矩形构成 (图 5). 函数 $S = S(y)$ ($0 \leq y < +\infty$) 是图像 E 介于平行线 $Y = 0$ 及 $Y = y$ 之间的那一部分面积, 而函数 $b = b(y)$ ($0 \leq y < +\infty$) 是用平行线 $Y = y$ 去截图像所得截痕之长. 求函数 S 及 b 的解析表达式, 作出它们的图像并研究其连续性.

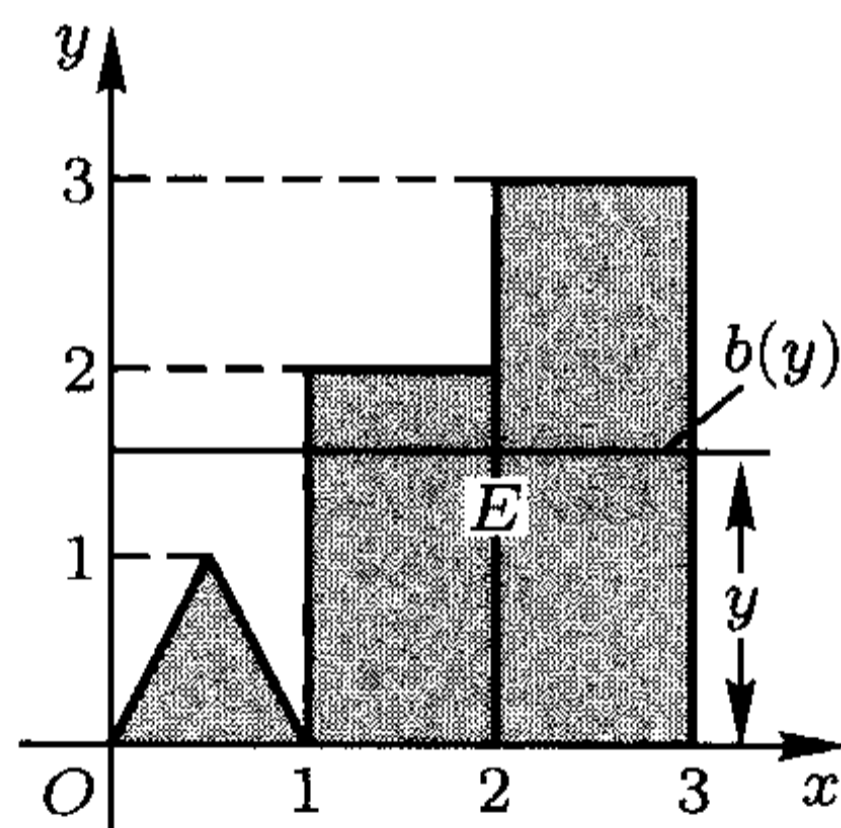


图 5

734. 证明: 狄利克雷函数

$$\chi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x) \right\}$$

对于每个 x 值都是不连续的.

735. 设有函数

$$f(x) = x\chi(x),$$

式中 $\chi(x)$ 为狄利克雷函数 (参阅上题), 研究函数 $f(x)$ 的连续性并作出它的草图.

736. 证明: 黎曼函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ 其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互素的数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

当 x 取任一个有理值时是不连续的, 而当 x 取任一个无理值时是连续的. 作出这个函数的草图.

737. 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{nx}{n+1}, & x \text{ 为既约的有理分数 } \frac{m}{n} (n \geq 1), \\ |x|, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

的连续性并作出此函数的草图.

738. 函数 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 当自变量 x 取一切非零值时都有定义. 为了使此函数在 $x = 0$ 时连续, 应当以什么数值作为函数在点 $x = 0$ 的值?

739. 证明: 无论怎样选取数 $f(1)$, 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在 $x = 1$ 时都是不连续的.

740. 下列函数 $f(x)$ 当 $x = 0$ 时没有意义. 定义 $f(0)$ 的值, 使得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续:

$$(a) f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1};$$

$$(b) f(x) = \frac{\tan 2x}{x};$$

$$(c) f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x};$$

$$(d) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(e) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}};$$

$$(f) f(x) = x^x (x > 0);$$

$$(g) f(x) = x \ln^2 x.$$

741. 设: (a) 函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时是连续的, 而函数 $g(x)$ 当 $x = x_0$ 时是不连续的; (b) 当 $x = x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不连续的, 则此二函数的和 $f(x) + g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续的? 举出适当的例子.

742. 设: (a) 函数 $f(x)$ 于 x_0 连续, 而函数 $g(x)$ 于 x_0 不连续; (b) 当 $x = x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都不连续, 则此二函数的乘积 $f(x)g(x)$ 在已知点 x_0 是否必不连续? 举出适当的例子.

743. 可否断定不连续函数的平方仍为不连续函数?

举出处处不连续但其平方连续的函数的例子.

744. 研究函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 的连续性:

$$(a) f(x) = \operatorname{sgn} x \text{ 及 } g(x) = 1+x^2; \quad (b) f(x) = \operatorname{sgn} x \text{ 及 } g(x) = x(1-x^2);$$

$$(c) f(x) = \operatorname{sgn} x \text{ 及 } g(x) = 1+x-[x].$$

745. 设

$$f(u) = \begin{cases} u, & 0 < u \leq 1, \\ 2-u, & 1 < u < 2, \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数,} \\ 2-x, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

其中 $0 < x < 1$.

研究复合函数 $y = f(u)$ 的连续性, 其中 $u = \varphi(x)$.

746. 证明: 若 $f(x)$ 是连续函数, 则下列函数也是连续的:

$$F(x) = |f(x)|.$$

747. 证明: 若函数 $f(x)$ 是连续的, 则函数

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c, \\ f(x), & |f(x)| \leq c, \\ c, & f(x) > c \end{cases}$$

(式中 c 为任意的正数) 也是连续函数.

748. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\} \quad \text{和} \quad M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

在 $[a, b]$ 上也是连续的.

749. 证明: 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的, 则函数

$$\varphi(x) = \min[f(x), g(x)] \quad \text{和} \quad \psi(x) = \max[f(x), g(x)]$$

也是连续的.

750. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并有界. 证明: 函数

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\} \quad \text{和} \quad M(x) = \sup_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\}$$

在闭区间 $[a, b]$ 上是左连续的.

751. 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 $a \leq x < +\infty$ 上连续, 且有有限的

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

则此函数在已知区间上是有界的.

752. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上连续并有界. 证明: 对于任何数 T , 可求得数列 $x_n \rightarrow +\infty$, 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

753. 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为定义于 $-\infty < x < +\infty$ 的连续周期函数, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

证明: $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

754. 证明: 单调有界函数的一切间断点皆为第一类间断点.

755. 证明: 若函数 $f(x)$ 具有下列性质: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且单调; (2) 取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间所有的数作为其函数值, 则此函数在 $[a, b]$ 上连续.

756. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x-a}, & x \neq a, \\ 0, & x = a \end{cases}$$

在任意闭区间 $[a, b]$ 上取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切中间值, 但在 $[a, b]$ 上并不连续.

757. 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续, 且 x_1, x_2, \dots, x_n 为此区间中的任意值, 则在它们之间可找到一个数值 ξ , 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

758. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 且

$$l = \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x), \quad L = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x).$$

证明: 对于满足 $l \leq \lambda \leq L$ 的任意的数 λ , 存在数列 $x_n \rightarrow a$ ($n = 1, 2, \dots$), 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda.$$

§8. 反函数. 用参数形式表示的函数

1. 反函数的存在性和连续性. 若函数 $y = f(x)$ 具有下列性质: (1) 在区间 (a, b) 上有定义并连续; (2) 在此区间上是严格单调的, 则存在单值的反函数 $x = f^{-1}(y)$, 此函数在区间 (A, B) 上有定义并连续, 而且是严格单调的, 其中

$$A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad \text{和} \quad B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

连续函数 $y = f(x)$ 的多值反函数的一个单值连续分支, 可被理解为在其有定义的最大区域上满足方程 $f[g(y)] = y$ 的任何一个单值连续函数 $x = g(y)$.

2. 以参数形式表示的函数的连续性. 若函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (α, β) 上有定义并且连续, 且函数 $\varphi(t)$ 在此区间上是严格单调的, 则方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

在区间 (a, b) 上把 y 定义成 x 的单值连续函数:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

其中 $a = \lim_{t \rightarrow \alpha+0} \varphi(t)$ 及 $b = \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t)$.

759. 求分式线性函数

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

的反函数. 在怎样的情形下, 反函数与已知函数相同?

760. 设 $y = x + [x]$, 求反函数 $x = x(y)$.

761. 证明: 存在唯一的连续函数 $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 满足开普勒方程

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

762. 证明: 对于每一个实数 k ($-\infty < k < +\infty$) 方程

$$\cot x = kx$$

在区间 $0 < x < \pi$ 中有唯一连续的根 $x = x(k)$.

763. 非单调的函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 可否有单值的反函数? 研究例子:

$$y = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数,} \\ -x, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

764. 在什么情况下, 函数 $y = f(x)$ 和反函数 $x = f^{-1}(y)$ 是同一个函数?

765. 证明: 不连续函数

$$y = (1 + x^2) \operatorname{sgn} x$$

的反函数是连续函数.

766. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是严格单调的, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \quad (a \leq x_n \leq b),$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

求下列函数的反函数的连续单值分支:

767. $y = x^2$.

768. $y = 2x - x^2$.

769. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

770. $y = \sin x$.

771. $y = \cos x$.

772. $y = \tan x$.

773. 证明: 连续函数 $y = 1 + \sin x$ 在区间 $0 < x < 2\pi$ 内的值域是闭区间.

774. 证明: 等式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. 证明: 等式

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0).$$

776. 证明反正切加法定理:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

式中 $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ 为取 $0, 1, -1$ 这三个值的函数.

当给定 x 的值时, 对于怎样的 y 值, 函数 ε 可能不连续? 在 Oxy 平面上作出函数 ε 连续的相应区域, 并求此函数在所得区域内的值.

777. 证明反正弦加法定理:

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^\varepsilon \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right) + \varepsilon\pi \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1),$$

式中

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & xy \leq 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \operatorname{sgn} x, & xy > 0 \text{ 和 } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

778. 证明反余弦相加的定理:

$$\arccos x + \arccos y = (-1)^\varepsilon \arccos \left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right) + 2\pi\varepsilon \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1),$$

式中

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & x+y \geq 0, \\ 1, & x+y < 0. \end{cases}$$

779. 作函数的图像:

(a) $y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{1-x^2}$;

(b) $y = \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) - 2\arcsin x$.

780. 函数 $y = y(x)$ 由下面的方程给出:

$$x = \arctan t, \quad y = \operatorname{arccot} t \quad (-\infty < t < +\infty),$$

求此函数. 此函数的定义域是什么?

781. 设

$$x = \operatorname{cosh} t, \quad y = \operatorname{sinh} t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

在参量 t 的哪些变化域中可以把变量 y 看作变量 x 的单值函数? 求 y 在不同变化域上的表达式.

782. 设 y 对 x 的函数关系由方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

给出, 问 $y = y(x)$ 是单值函数的充分必要条件是什么?

研究例子:

$$x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t.$$

783. 在怎样的条件下, 两个方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

和

$$x = \varphi(\chi(\tau)), \quad y = \psi(\chi(\tau)) \quad (\alpha < \tau < \beta)$$

定义出同一个函数 $y = y(x)$?

784. 设函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义并且连续, 且

$$A = \inf_{a < x < b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a < x < b} \varphi(x).$$

在何种情况下存在单值函数 $f(x)$, 它在区间 (A, B) 上有定义, 并且当 $a < x < b$ 时 $\psi(x) = f[\varphi(x)]$?

§9. 函数的一致连续性

1. 一致连续性的定义. 设函数 $f(x)$ 定义在集合 $X = \{x\}$ 上 (X 是开区间、闭区间等等), 若对于每一个 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于任何数值 $x', x'' \in X$, 由不等式

$$|x' - x''| < \delta$$

可得不等式

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上为一致连续的.

2. 康托尔定理. 在有限的闭区间 $[a, b]$ 上有定义的连续函数 $f(x)$ 在此闭区间上一致连续.

785. 某工厂车间制造正方形平板, 其边长 x 在 1 cm 至 10 cm 之间取值. 当边长的允许误差 δ 为何值时, 不论制造多大的平板 (边长在上述范围内), 其面积 y 与设计值之差都小于 ε ? 考虑下列情形:

$$(a) \varepsilon = 1 \text{ cm}^2; \quad (b) \varepsilon = 0.01 \text{ cm}^2; \quad (c) \varepsilon = 0.0001 \text{ cm}^2.$$

786. 圆柱形套筒的宽为 ε , 长为 δ . 将套筒套在曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 上并使它沿此曲线滑动, 但套筒的轴须保持平行于 Ox 轴. δ 应取何值, 才可以使此筒顺利地经过此曲线上由不等式 $-10 \leq x \leq 10$ 所限定的部分? 考虑下列情形: (a) $\varepsilon = 1$; (b) $\varepsilon = 0.1$; (c) $\varepsilon = 0.001$; (d) ε 为任意小数.

787. 以“ ε - δ ”语言用肯定的方式表达下述论断: 函数 $f(x)$ 在某集合 (开区间, 闭区间, 等等) 上连续, 但在此集合上并不一致连续.

788. 证明: 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上是连续的, 但在此区间上并非一致连续的.

789. 证明: 函数 $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上是连续的并且有界, 但在此区间上并非一致连续的.

790. 证明: 函数 $f(x) = \sin x^2$ 在无穷区间 $-\infty < x < +\infty$ 上连续并且有界, 但在此区间上并非一致连续的.

791. 证明: 若函数 $f(x)$ 在区域 $a \leq x < +\infty$ 上有定义并且连续, 而且有限的

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

存在, 则 $f(x)$ 在此区域上是一致连续的.

792. 证明: 无界函数 $f(x) = x + \sin x$ 于全轴 $-\infty < x < +\infty$ 上一致连续.

793. 函数 $f(x) = x^2$ 在下列区间中是否为一致连续的: (a) $(-l, l)$, 这里 l 为任意大的正数; (b) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上?

研究下列函数在给定区域上的一致连续性:

794. $f(x) = \frac{x}{4-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$

795. $f(x) = \ln x \quad (0 < x < 1).$

796. $f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (0 < x < \pi).$

797. $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x} \quad (0 < x < 1).$

798. $f(x) = \arctan x \quad (-\infty < x < +\infty).$

799. $f(x) = \sqrt{x} \quad (1 \leq x < +\infty).$

800. $f(x) = x \sin x \quad (0 \leq x < +\infty).$

801.1. 证明: 函数 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ 在每个区间

$$J_1 = (-1 < x < 0) \quad \text{及} \quad J_2 = (0 < x < 1)$$

上是一致连续的, 但在它们的和

$$J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}$$

上并非一致连续的.

801.2. 证明: 若函数 $f(x)$ 在每一个闭区间 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 上是一致连续的, 则这个函数在合起来的闭区间 $[a, b]$ 上也是一致连续的.

802. 对于 $\varepsilon > 0$, 求使下列函数 $f(x)$ 在所给区间上满足一致连续条件的 $\delta = \delta(\varepsilon)$ (任意的!):

(a) $f(x) = 5x - 3 \quad (-\infty < x < +\infty);$

(b) $f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad (-2 \leq x \leq 5);$

(c) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (0.1 \leq x \leq 1);$

(d) $f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x < +\infty);$

(e) $f(x) = 2 \sin x - \cos x \quad (-\infty < x < +\infty);$

(f) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq \pi).$

803. 将闭区间 $[1, 10]$ 等分为多少段, 就足以让函数 $f(x) = x^2$ 在每一段上的振幅

小于 0.0001?

804. 证明: 有限个在区间 (a, b) 上一致连续的函数的和与积在此区间上仍是一致连续的.

805. 证明: 若单调有界的函数 $f(x)$ 在有限或无穷的区间 (a, b) 上是连续的, 则此函数在区间 (a, b) 上是一致连续的.

806.1. 证明: 若函数 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 上一致连续, 则存在极限

$$A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad \text{及} \quad B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

这个定理对无穷区间 (a, b) 是否成立?

806.2. 证明: 在有限区间 (a, b) 上有定义且连续的函数 $f(x)$, 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a, b]$ 上, 其充分必要条件是函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是一致连续的.

807. 函数

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|$$

(式中 x_1 和 x_2 为 (a, b) 中受条件 $|x_1 - x_2| \leq \delta$ 限制的任意两点) 称为函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的连续模.

证明: 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上一致连续的充分必要条件是

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0.$$

808. 设

$$(a) f(x) = x^3 \quad (0 \leq x \leq 1);$$

$$(b) f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq a) \text{ 及 } (a < x < +\infty);$$

$$(c) f(x) = \sin x + \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

对 $f(x)$ 的连续模 $\omega_f(\delta)$ (参阅前题) 作如下形式的估计:

$$\omega_f(\delta) \leq C\delta^\alpha,$$

式中 C 和 α 为常数.

§10. 函数方程

809. 证明: 对于所有实数 x 和 y 都满足方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

的唯一的连续函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是线性齐次函数

$$f(x) = ax,$$

式中 $a = f(1)$ 是任意的常数.

810. 证明: 满足方程 (1) 的单调函数 $f(x)$ 是线性齐次的.

811. 证明: 满足方程 (1) 且在任意小区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上有界的函数 $f(x)$, 是线性齐次函数.

812. 证明: 对于所有 x 和 y 都满足方程

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (2)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是指数函数:

$$f(x) = a^x,$$

式中 $a = f(1)$ 为正的常数.

813. 证明: 在区间 $(0, \varepsilon)$ 中有界并满足方程 (2) 的不恒等于零的函数 $f(x)$ 是指数函数.

814. 证明: 对于所有正数 x 和 y 都满足方程

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$ ($0 < x < +\infty$) 是对数函数:

$$f(x) = \log_a x,$$

式中 a 为正的常数.

815. 证明: 对于所有正数 x 和 y 都满足方程

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad (3)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$ ($0 < x < +\infty$) 是幂函数:

$$f(x) = x^a,$$

式中 a 为常数.

816. 求对于所有实数 x 和 y 都满足方程 (3) 的所有的连续函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$).

817. 证明: 不连续函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 满足方程 (3).

818. 求对于所有实数 x 和 y 都满足方程

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

的所有的连续函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$).

819. 求对于所有实数 x 和 y 都满足方程组

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \quad g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

以及规范条件

$$f(0) = 1 \quad \text{和} \quad g(0) = 0$$

的所有的有界连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ ($-\infty < x < +\infty$).

提示: 研究函数 $F(x) = f^2(x) + g^2(x)$.

820. 设

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x), \quad \Delta^2 f(x) = \Delta\{\Delta f(x)\}$$

分别为函数 $f(x)$ 的一阶、二阶有限差分.

证明: 若函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是连续的且

$$\Delta^2 f(x) \equiv 0,$$

则此函数是线性函数, 即

$$f(x) = ax + b,$$

式中 a 和 b 为常数.

第二章 一元函数微分学

§1. 显函数的导数

1. 导数的定义. 若 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值, 则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[x, x_1]$ 上的增量. 表达式

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

若有意义, 则称为导数, 而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微函数.

导数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y = f(x)$ 的图像在 x 点切线的斜率 ($\tan \alpha = f'(x)$) (图 6).

2. 求导数的基本法则. 若 c 为常数且函数 $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ 都有导数, 则

$$(1) c' = 0; \quad (2) (cu)' = cu';$$

$$(3) (u + v - w)' = u' + v' - w';$$

$$(4) (uv)' = u'v + uv';$$

$$(5) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0);$$

$$(6) (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \text{ 为常数});$$

(7) 若函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导数, 则

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

3. 基本公式. 若 x 为自变量, 则

$$\text{I. } (x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \text{ 为常数}).$$

$$\text{III. } (\cos x)' = -\sin x.$$

$$\text{V. } (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\text{VII. } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{II. } (\sin x)' = \cos x.$$

$$\text{IV. } (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\text{VI. } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{VIII. } (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

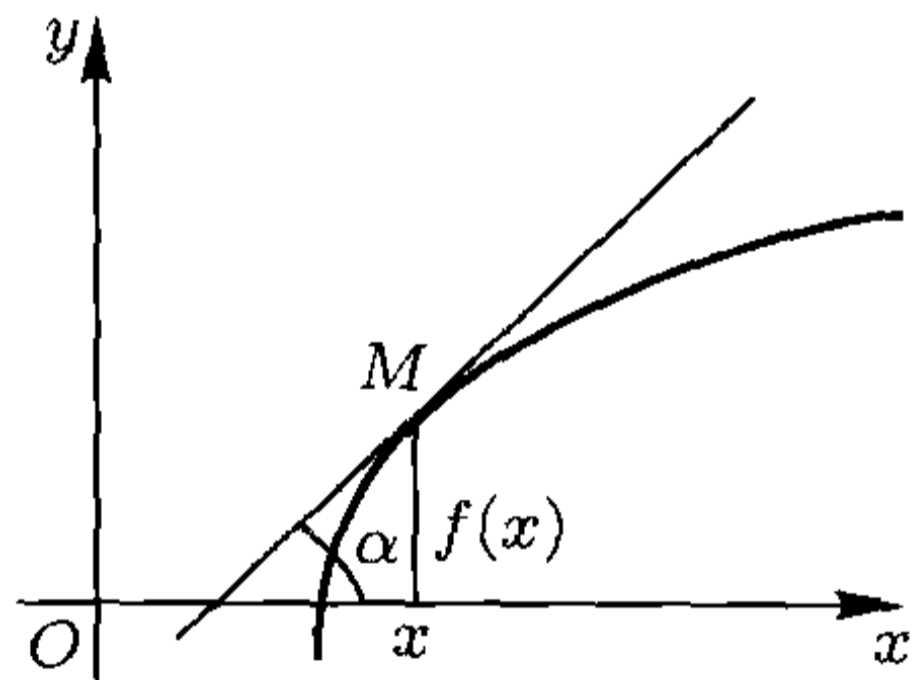


图 6

- IX. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
- X. $(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0), \ (e^x)' = e^x$.
- XI. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \ (a > 0), \ (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- XII. $(\sinh x)' = \cosh x$.
- XIII. $(\cosh x)' = \sinh x$.
- XIV. $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$.
- XV. $(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$.

4. 单侧导数. 表达式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的左导数和右导数.

导数 $f'(x)$ 存在的充分必要条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5. 无穷导数. 若函数 $f(x)$ 在点 x 连续, 且

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x 有无穷导数. 在此种情形下, 函数 $y = f(x)$ 的图像在 x 点的切线与 Ox 轴垂直.

821. 若 x 由 1 变到 1000, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \lg x$ 的相应增量 Δy .

822. 若 x 由 0.01 变到 0.001, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的相应增量 Δy .

823. 设:

- (a) $y = ax + b;$
- (b) $y = ax^2 + bx + c;$
- (c) $y = a^x.$

若变量 x 的增量为 Δx , 求增量 Δy .

824. 证明:

- (a) $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$
- (b) $\Delta[f(x)g(x)] = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).$

825. 过曲线 $y = x^2$ 上的二点 $A(2, 4)$ 和 $A'(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ 引割线 AA' , 求此割线的斜率, 设: (a) $\Delta x = 1;$ (b) $\Delta x = 0.1;$ (c) $\Delta x = 0.01;$ (d) Δx 为任意小量.

在该曲线上 A 点的切线的斜率等于什么?

826. 利用函数 $y = x^3$ 把 Ox 轴上的线段 $1 \leq x \leq 1 + h$ 映射到 Oy 轴上, 求其平均伸长系数. 设: (a) $h = 0.1;$ (b) $h = 0.01;$ (c) $h = 0.001,$ 计算此系数的值.

在 $x = 1,$ 此映射的伸长系数等于什么?

827. 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式给出:

$$x = 10t + 5t^2,$$

式中 t 为以 s (秒) 计的时间, x 为以 m (米) 计的距离. 求在 $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ 时间内运动的平均速度. 设: (a) $\Delta t = 1;$ (b) $\Delta t = 0.1;$ (c) $\Delta t = 0.01,$ 计算此速度的值.

当 $t = 20$ 时运动速度等于什么?

828. 根据导数的定义, 直接求下列函数的导数:

- (a) $x^2;$
- (b) $x^3;$
- (c) $\frac{1}{x};$
- (d) $\sqrt{x};$
- (e) $\sqrt[3]{x};$
- (f) $\tan x;$

(g) $\cot x$; (h) $\arcsin x$; (i) $\arccos x$; (j) $\arctan x$.

829. 设 $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, 求 $f'(1)$, $f'(2)$ 和 $f'(3)$.

830. 设 $f(x) = x^2 \sin(x-2)$, 求 $f'(2)$.

831. 设 $f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, 求 $f'(1)$.

832. 设函数 $f(x)$ 在 a 点可微, 求

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

833. 证明: 若函数 $f(x)$ 可微, n 为正整数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (1)$$

反之, 若对于函数 $f(x)$ 有极限 (1) 存在, 则可否断定此函数有导数? 研究狄利克雷函数的例子 (参阅习题 734).

利用导数表, 求下列函数的导数:

834. $y = 2 + x - x^2$. 问 $y'(0)$, $y'\left(\frac{1}{2}\right)$, $y'(1)$, $y'(-10)$ 等于什么?

835. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$. 当 x 为何值时:

(a) $y'(x) = 0$; (b) $y'(x) = -2$; (c) $y'(x) = 10$?

836. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$.

837. $y = \frac{ax+b}{a+b}$.

838. $y = (x-a)(x-b)$.

839. $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

840. $y = (x \sin \alpha + \cos \alpha)(x \cos \alpha - \sin \alpha)$.

841. $y = (1 + nx^m)(1 + mx^n)$.

842. (a) $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$; (b) $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$.

843. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

844. 证明: 公式 $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

求下列函数的导数:

845. $y = \frac{2x}{1-x^2}$.

846. $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

847. $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

848. $y = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$.

849. $y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$.

850. $y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

851. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

852. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

853. $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$

854. $y = x\sqrt{1+x^2}.$

855. $y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}.$

856. $y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}.$

857. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

858. $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$

859. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}.$

860. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$

861. $y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}.$

862. $y = \cos 2x - 2 \sin x.$

863. $y = (2-x^2) \cos x + 2x \sin x.$

864. $y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x).$

865. $y = \sin^n x \cos nx.$

866. $y = \sin[\sin(\sin x)].$

867. $y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}.$

868. $y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}.$

869. $y = \frac{1}{\cos^n x}.$

870. $y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}.$

871. $y = \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}.$

872. $y = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x.$

873. $y = 4\sqrt[3]{\cot^2 x} + \sqrt[3]{\cot^8 x}.$

874. $y = \sec^2 \frac{x}{a} + \csc^2 \frac{x}{a}.$

875. $y = \sin[\cos^2(\tan^3 x)].$

876. $y = e^{-x^2}.$

877. $y = 2^{\tan \frac{1}{x}}.$

878. $y = e^x(x^2 - 2x + 2).$

879. $y = \left[\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right] e^{-x}.$

880. $y = e^x \left(1 + \cot \frac{x}{2} \right).$

881. $y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}.$

882. $y = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

883. $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}.$

884. $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a > 0, b > 0).$

885. $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0).$

886. $y = \lg^3 x^2.$

887. $y = \ln(\ln(\ln x)).$

888. $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x)).$

889. $y = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)}.$

890. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}.$

891. $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}.$

892. $y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$

893. $y = \frac{1}{1-k} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \quad (0 < k < 1).$

$$894. y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1}). \quad 895. y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$896. y = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$$

$$897. y = x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x.$$

$$898. y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

$$899. y = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$900. y = \frac{2+3x^2}{x^4} \sqrt{1-x^2} + 3 \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$901. y = \ln \tan \frac{x}{2}.$$

$$902. y = \ln \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$903. y = \frac{1}{2} \cot^2 x + \ln \sin x.$$

$$904. y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}.$$

$$905. y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}.$$

$$906. y = \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x} \quad (0 \leq |a| < |b|).$$

$$907. y = \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6). \quad 908. y = \frac{1}{4x^4} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}.$$

$$909. y = \frac{3}{2} (1 - \sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3 \ln(1 + \sqrt[3]{1+x^2}).$$

$$910. y = \ln \left[\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right].$$

$$911. y = x [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)].$$

$$912. y = \ln \tan \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \tan x.$$

$$913. y = \arcsin \frac{x}{2}.$$

$$914. y = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}.$$

$$915. y = \arctan \frac{x^2}{a}.$$

$$916. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{2}}{x}.$$

$$917. y = \sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}.$$

$$918. y = x + \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos x.$$

$$919. y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x}.$$

$$920. y = \arccos \frac{1}{x}.$$

$$921. y = \arcsin(\sin x).$$

$$922. y = \arccos(\cos^2 x).$$

$$923. y = \arcsin(\sin x - \cos x).$$

$$924. y = \arccos \sqrt{1-x^2}.$$

$$925. y = \arctan \frac{1+x}{1-x}.$$

$$926. y = \operatorname{arccot} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right).$$

$$927. y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) \quad (a > b \geq 0).$$

$$928. y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$929. y = \frac{1}{\arccos^2(x^2)}.$$

$$930. y = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan(x^3).$$

$$931. y = \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \cdot \arctan(\sin x).$$

$$932. y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

$$933. y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \arctan \frac{x}{b}.$$

$$934. y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

$$935. y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$936. y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}.$$

$$937. y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

$$938. y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}. \quad 939. y = \arctan \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$940. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

$$941. y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}.$$

$$942. y = \frac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arccot} x^6.$$

$$943. y = \ln \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3} \arctan \frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$$

$$944. y = \arctan \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}.$$

$$945. y = \operatorname{arccot} \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} \quad (a > 0).$$

$$946. y = \frac{3-x}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2}}.$$

$$947. y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} - \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$$

$$948. y = \arctan(\tan^2 x).$$

$$949. y = \sqrt{1-x^2} \cdot \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

$$950. y = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x)^2 - \frac{1}{2} (\arctan x)^2.$$

$$951. y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}).$$

$$952. y = \arctan(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$953. y = \arcsin \left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x} \right).$$

$$954. y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

$$955. y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}.$$

$$956. y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$957. y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2).$$

$$958. y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2).$$

$$959. y = e^{m \arcsin x} [\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x)].$$

$$960. (a) y = \arctan e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}; (b) y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}};$$

$$(c) y = \operatorname{arccot} \frac{1}{\sqrt{\cot \frac{1}{x^2}}}; (d) y = \ln^2(\sec 2\sqrt[3]{x}).$$

$$961. y = x + x^x + x^{x^x} \quad (x > 0).$$

$$962. y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} \quad (a > 0, x > 0).$$

$$963. y = \sqrt[x]{x} \quad (x > 0).$$

$$964. y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}.$$

$$965.1. y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}.$$

$$965.2. y = \left[\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} \right]^{\arctan^2 x}.$$

$$966. y = \log_x e.$$

$$967. y = \ln(\cosh x) + \frac{1}{2 \cosh^2 x}.$$

$$968. y = \frac{\cosh x}{\sinh^2 x} - \ln \left(\coth \frac{x}{2} \right).$$

$$969. y = \arctan(\tanh x).$$

$$970. y = \arccos \left(\frac{1}{\cosh x} \right).$$

$$971. y = \frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tanh \frac{x}{2} \right) \quad (0 \leq |b| < a).$$

972. 引入中间变量 $u = \cos^2 x$, 求函数

$$y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$$

的导数.

利用 972 题所示的方法, 求下列函数的导数:

$$973. y = (\arccos x)^2 \left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2} \right].$$

$$974. y = \frac{1}{2} \arctan(\sqrt[4]{1+x^4}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + 1}{\sqrt[4]{1+x^4} - 1}.$$

$$975. y = \frac{e^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \frac{1}{2} \ln(1-e^{-2x^2}).$$

$$976. y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \operatorname{arccot} a^{-x}.$$

977. 求下列函数的导数并作出函数及其导数的图像:

(a) $y = |x|$; (b) $y = x|x|$; (c) $y = \ln |x|$.

978. 求下列函数的导数:

(a) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$; (b) $y = |\sin^3 x|$;
 (c) $y = \arccos \frac{1}{|x|}$; (d) $y = [x] \sin^2 \pi x$.

求下列函数的导数并作出函数及其导数的图像:

979. $y = \begin{cases} 1-x, & -\infty < x < 1, \\ (1-x)(2-x), & 1 \leq x \leq 2, \\ -(2-x), & 2 < x < +\infty. \end{cases}$

980. $y = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{在线段 } [a, b] \text{ 之外.} \end{cases}$

981. $y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0. \end{cases}$

982. $y = \begin{cases} \arctan x, & |x| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1. \end{cases}$ 983. $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$

984. 所给函数 $y = f(x)$ 的对数的导数称为此函数的对数导数:

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (f(x) > 0).$$

求下列函数 y 的对数导数:

(a) $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; (b) $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$;

(c) $y = (x-a_1)^{\alpha_1} (x-a_2)^{\alpha_2} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n}$; (d) $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$.

985. 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 x 的可微函数. 求下列函数 y 的导数:

(a) $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$; (b) $y = \arctan \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

(c) $y = \varphi(x) \sqrt{\psi(x)}$ ($\varphi(x) \neq 0, \psi(x) > 0$);

(d) $y = \log_{\varphi(x)} \psi(x)$ ($\varphi(x) > 0, \psi(x) > 0$).

986.1. 求 y' , 设

(a) $y = f(x^2)$;

(b) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$;

(c) $y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}$;

(d) $y = f\{f[f(x)]\}$,

其中 $f(u)$ 为可微函数.

986.2. 设 $f(x) = x(x-1)(x-2) \cdots (x-1000)$, 求 $f'(0)$.

987. 证明: n 阶行列式微分法:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

988. 设

$$F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$.

989. 设

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$.

990. 已知函数的图像, 近似地作出其导数的图像.

991. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

有不连续的导数.

992. 在什么条件下, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(a) 在 $x=0$ 处是连续的; (b) 在 $x=0$ 处可微; (c) 在 $x=0$ 处有连续的导数?

993. 在什么条件下, 函数

$$f(x) = \begin{cases} |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (m > 0)$$

(a) 于坐标原点的邻域上有有界的导数; (b) 在此邻域上有无穷导数?

994. 设

$$f(x) = (x-a)\varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的, 求 $f'(a)$.

995. 设

$$f(x) = |x-a|\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 为连续函数且 $\varphi(a) \neq 0$, 证明: 此函数在 a 点没有导数.

单侧导数 $f'_-(a)$ 及 $f'_+(a)$ 等于什么?

996. 举出在已知点 a_1, a_2, \dots, a_n 没有导数的连续函数的例子.

997. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 的任何邻域上都有不可微点, 但在该点是可微的. 作出此函数的略图.

998. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

仅在 $x = 0$ 时有导数.

999. 研究下列函数的可微性:

(a) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|;$

(b) $y = |\cos x|;$

(c) $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x;$

(d) $y = \arcsin(\cos x);$

(e) $y = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2, & |x| \leq 1, \\ |x| - 1, & |x| > 1. \end{cases}$

求函数 $f(x)$ 的左导数 $f'_-(x)$ 和右导数 $f'_+(x)$, 设:

1000. $f(x) = |x|.$

1001. $f(x) = [x] \sin \pi x.$

1002. $f(x) = \begin{cases} x \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1003. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}.$

1004. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1005. $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}.$

1006. $f(x) = |\ln|x|| \quad (x \neq 0).$

1007. $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$

1008. $f(x) = \begin{cases} (x-2) \arctan \frac{1}{x-2}, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2. \end{cases}$

1009.1. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 连续, 但在此点既无左导数, 又无右导数.

1009.2. 设 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 表达式

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-0)}{h},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0+0)}{h}$$

称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的广义单侧导数 (左导数和右导数).

求函数 $f(x)$ 在间断点 x_0 的 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$:

$$(a) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x}; \quad (b) f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}; \quad (c) f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

1010. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq x_0, \\ ax + b, & x > x_0. \end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续而且可微, 应当如何选取系数 a 和 b ?

1011. 设

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_0, \\ ax + b, & x > x_0, \end{cases}$$

其中函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处为左可微的. 应当如何选取系数 a 和 b , 使函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续而且可微?

1012. 适当地选定参数 A 和 c , 用立方抛物线

$$y = A(x-a)(x-b)(x-c)$$

在闭区间 $a \leq x \leq b$ 上把两条射线:

$$y = k_1(x-a) \quad (-\infty < x < a) \quad \text{及} \quad y = k_2(x-b) \quad (b < x < +\infty)$$

光滑地连接起来.

1013. 用抛物线 $y = a + bx^2$ ($|x| \leq c$) (其中 a 与 b 为未知的参数) 去补充曲线 $y = \frac{m^2}{|x|}$ ($|x| > c$), 以便得到一条光滑曲线.

1014. 若 (a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数, 而函数 $g(x)$ 在此点没有导数; (b) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者在点 x_0 都没有导数, 可否断定它们的和

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

在点 $x = x_0$ 没有导数?

1015. 若 (a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数, 而函数 $g(x)$ 在此点没有导数; (b) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者在点 x_0 都没有导数, 可否断定它们的积

$$F(x) = f(x)g(x)$$

在点 $x = x_0$ 没有导数?

研究两个例子:

$$(a) f(x) = x, g(x) = |x|, x_0 = 0; \quad (b) f(x) = |x|, g(x) = |x|, x_0 = 0.$$

1016. 若 (a) 函数 $f(x)$ 于点 $x = g(x_0)$ 有导数, 而函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 没有导数; (b) 函数 $f(x)$ 于点 $x = g(x_0)$ 没有导数, 而函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 有导数; (c) 函数 $f(x)$ 于点 $x = g(x_0)$ 没有导数, 函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 没有导数, 则函数

$$F(x) = f(g(x))$$

于已知点 $x = x_0$ 的可微性怎样?

研究三个例子:

$$(a) f(x) = x^2, g(x) = |x|, x_0 = 0; \quad (b) f(x) = |x|, g(x) = x^2, x_0 = 0;$$

$$(c) f(x) = 2x + |x|, g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|, x_0 = 0.$$

1017. 函数

$$y = x + \sqrt[3]{\sin x}$$

的图像在哪些点处有竖直切线? 作出此图像.

1018. 函数 $f(x)$ 在其间断点可否有: (a) 有限的导数; (b) 无穷的导数? 研究例子:

$$f(x) = \operatorname{sgn} x.$$

1019. 若函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a, b) 上可微, 且

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

则是否必有

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty; \quad (2) \overline{\lim}_{x \rightarrow a} |f'(x)| = +\infty?$$

研究例子: $f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时.

1020. 若函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a, b) 上可微, 且

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty,$$

则是否必有

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty?$$

研究例子: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时.

1021. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 由此能否推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在? 研究例子:

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}.$$

1022. 设有界函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在. 由此可否推出有限的或无穷的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在? 研究例子:

$$f(x) = \cos(\ln x).$$

1023. 对函数之间的不等式可否逐项微分?

1024. 导出求和公式:

$$(a) P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1},$$

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1};$$

提示: 研究 $(x + x^2 + \cdots + x^n)'$.

$$(b) S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx,$$

$$T_n = \cos x + 2 \cos 2x + \cdots + n \cos nx.$$

1025. 导出求和公式:

$$S_n = \cosh x + 2 \cosh 2x + \cdots + n \cosh nx.$$

提示: $S_n = (\sinh x + \sinh 2x + \cdots + \sinh nx)'$.

1026. 利用恒等式

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

推出求和公式:

$$S_n = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}.$$

1027. 证明: 可微偶函数的导数为奇函数, 而可微奇函数的导数为偶函数.

给出这个事实的几何解释.

1028. 证明: 可微周期函数的导数仍为具有相同周期的周期函数.

1029. 若圆半径以 2 cm/s 的速度匀速增加, 则当圆半径 $R = 10$ cm 时, 圆面积增加的速度如何?

1030. 若矩形的一边以 1 m/s 的速度缩短, 另一边以 2 m/s 的速度伸长, 则当这两条边达到 $x = 20$ m 和 $y = 15$ m 时, 矩形的面积和对角线变化的速度如何?

1031. 二轮船 A 和 B 从同一码头同时出发, A 船往北, B 船往东. 若 A 船的速度为 30 km/h, B 船的速度为 40 km/h, 问二船间的距离增加的速度如何?

1032. 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 2x - 2, & 2 < x < +\infty, \end{cases}$$

又设 $S(x)$ 表示由曲线 $y = f(x)$, 轴 Ox 及通过点 x ($x \geq 0$) 且垂直于 Ox 的直线三者围成的面积. 写出函数 $S(x)$ 的解析表达式, 求出导数 $S'(x)$, 并作出函数 $y = S'(x)$ 的图像.

1033. 函数 $S(x)$ 是由圆弧 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 、轴 Ox 及分别通过点 O 和 x ($|x| \leq a$) 且垂直于轴 Ox 的两条直线围成的面积. 写出函数 $S(x)$ 的解析表达式, 求出导数 $S'(x)$, 并作此导数 $y = S'(x)$ 的图像.

§2. 反函数的导数. 用参数形式给出的函数的导数. 隐函数的导数

1. 反函数的导数. 导数 $f'(x) \neq 0$ 的可微函数 $y = f(x)$ ($a < x < b$) 具有单值连续的反函数 $x = f^{-1}(y)$, 此反函数也可微, 并且成立公式

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

2. 用参数形式给出的函数的导数. 若方程组

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (a < t < b),$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微函数, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 在某区域内确定 y 为 x 的单值连续函数:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导数可用公式

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

求出.

3. 隐函数的导数. 若可微函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$F(x, y) = 0,$$

则此隐函数之导数 $y' = y'(x)$ 可从以下方程求得:

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0,$$

其中 $F(x, y)$ 是变量 x 的复合函数.

(关于隐函数微分法的更详细的叙述可参阅第六章 §3.)

1034. 证明: 由方程 $y^3 + 3y = x$ 确定的单值函数 $y = y(x)$ 存在, 并求它的导数 y'_x .

1035. 证明: 由方程 $y - \varepsilon \sin y = x$ ($0 \leq \varepsilon < 1$) 确定的单值函数 $y = y(x)$ 存在, 并求它的导数 y'_x .

1036. 设:

(a) $y = x + \ln x$ ($x > 0$);

(b) $y = x + e^x$;

(c) $y = \sinh x$;

(d) $y = \tanh x$.

求反函数 $x = x(y)$ 的存在域, 并求它们的导数.

1037. 设:

(a) $y = 2x^2 - x^4$; (b) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$; (c) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

选出反函数 $x = x(y)$ 的单值连续的各支, 求它们的导数并作其图像.

1038. 作出函数 $y = y(x)$ 的略图, 并求其导数 $y'_x(x)$. 设: $x = -1 + 2t - t^2$, $y = 2 - 3t + t^3$. 当 $x = 0$ 及 $x = -1$ 时, $y'_x(x)$ 等于什么? 在何点 $M(x, y)$ 的导数 $y'_x(x) = 0$?

求导数 y'_x (参数是正数), 设:

1039. $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$.

1040. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

1041. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

1042. $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$.

1043. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

1044. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1045. $x = e^{2t} \cos^2 t$, $y = e^{2t} \sin^2 t$.

1046. $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

1047. 证明: 由方程组

$$\begin{cases} x = 2t + |t|, \\ y = 5t^2 + 4t|t| \end{cases}$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微, 但它的导数在此点不能用普通的公式求得.

求下列隐函数的导数 y'_x :

1048. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$.

当 $x = 2$ 与 $y = 4$ 时及当 $x = 2$ 与 $y = 0$ 时, y' 等于什么?

1049. $y^2 = 2px$ (抛物线).

1050. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (椭圆).

1051. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (抛物线).

1052. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (星形线).

1053. $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (对数螺线).

1054. 设 y'_x , 设:

(a) $r = a\varphi$ (阿基米德螺线); (b) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (心脏线);

(c) $r = ae^{m\varphi}$ (对数螺线),

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ 是极坐标.

§3. 导数的几何意义

1. 切线和法线的方程. 可微函数 $y = f(x)$ 在其图像上之一点 $M(x, y)$ 处的切线 MT 和法线 MN (图 7) 的方程分别具有以下形式:

$$Y - y = y'(X - x), \quad Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

其中 X, Y 为切线或法线上的点的坐标, 而 $y' = f'(x)$ 为切点处导数的值.

2. 切线长和法线长. 对于与切线和法线有关的一些线段: PT 为次切线, PN 为次法线, MT 为切线, MN 为法线, 考虑到 $\tan \alpha = y'$ (图 7), 我们得到下列值:

$$PT = \left| \frac{y}{y'} \right|, \quad PN = |yy'|, \quad MT = \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2}, \quad MN = |y| \sqrt{1 + y'^2}.$$

3. 切线与切点的径向量间的夹角. 若 $r = f(\varphi)$ 为曲线的极坐标方程, β 为切线 MT 与切点 M 的径向量 OM 所成的角 (图 8), 则 $\tan \beta = \frac{r}{r'}$.

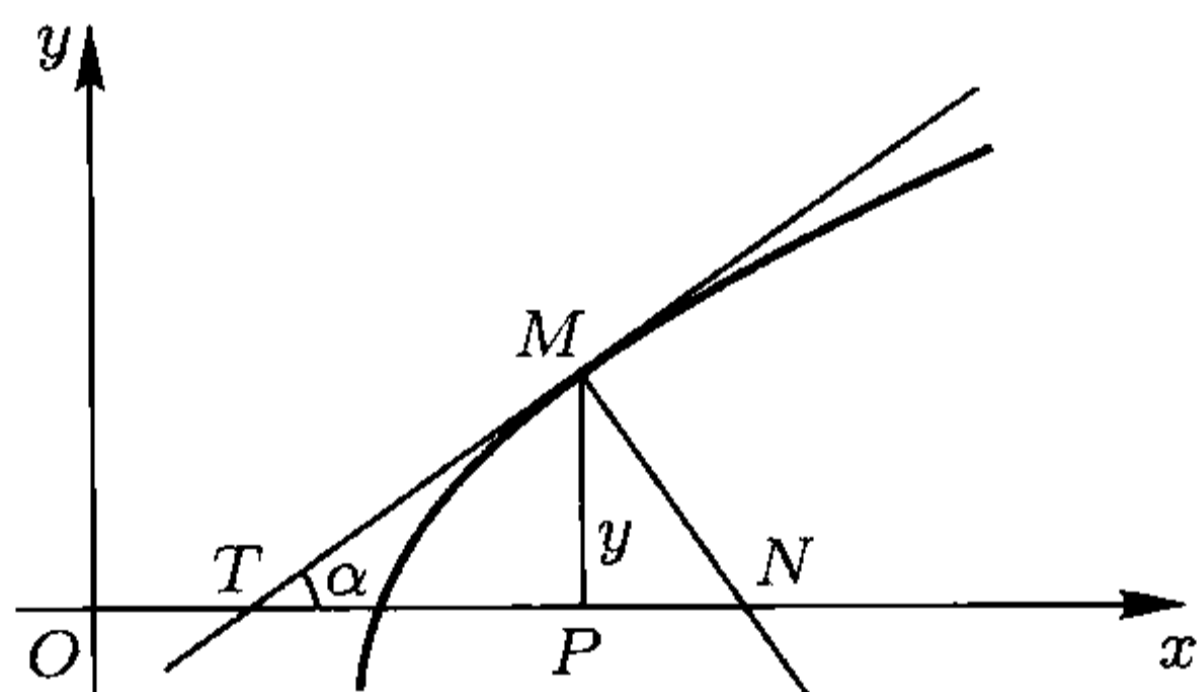


图 7

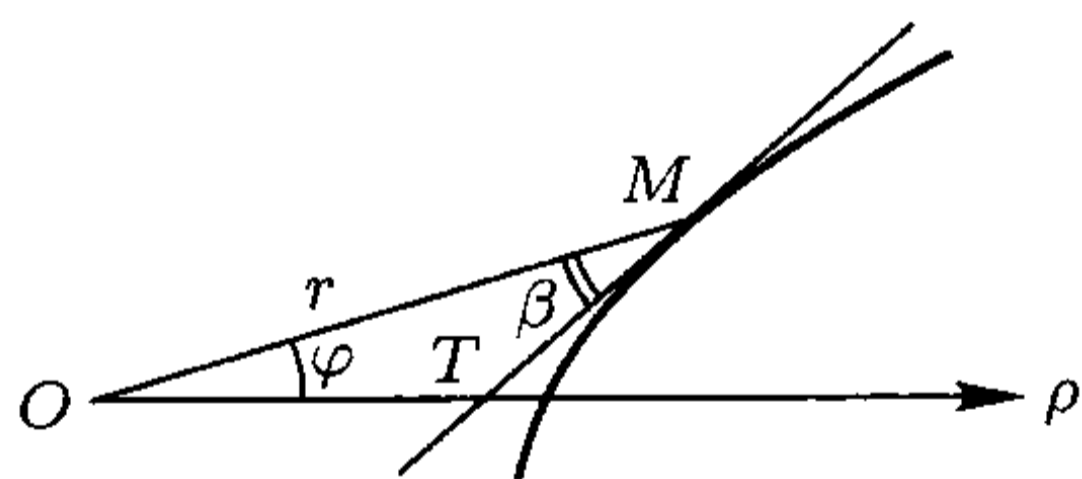


图 8

1055. 写出曲线

$$y = (x + 1) \sqrt[3]{3 - x}$$

在下列各点处的切线和法线方程:

(a) $A(-1, 0)$; (b) $B(2, 3)$; (c) $C(3, 0)$.

1056. 在曲线

$$y = 2 + x - x^2$$

上的哪些点, 其切线 (a) 平行于 Ox 轴; (b) 平行于第一象限角的平分线?

1057. 证明: 抛物线

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (a \neq 0, x_1 < x_2)$$

与 Ox 轴相交所成的两角 α 及 β ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) 彼此相等.

1058. 在曲线

$$y = 2 \sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

上求出“曲线的坡度”(即 $|y'|$) 大于 1 的部分.

1059. 函数

$$y = x \quad \text{及} \quad y_1 = x + 0.01 \sin 1000 \pi x$$

二者相差不大于 0.01. 这些函数的导数的差的最大值如何? 作出相应的图像.

1060. 曲线 $y = \ln x$ 与 Ox 轴相交的角如何?

1061. 曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 相交的角如何?

1062. 曲线 $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 相交的角如何?

1063.1. 如何选择参数 n , 可使曲线

$$y = \arctan nx \quad (n > 0)$$

与 Ox 轴相交所成的角大于 89° ?

1063.2. 证明: 曲线 $y = |x|^\alpha$ 在不同情形下与下列坐标轴相切:

(a) 当 $0 < \alpha < 1$ 时与 Oy 轴相切; (b) 当 $1 < \alpha < +\infty$ 时与 Ox 轴相切.

1063.3. 证明: 对于函数

$$y = \begin{cases} |x|^\alpha, & x \neq 0, \alpha \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

的图像, 经过点 $A(0, 1)$ 的割线的极限位置是 Oy 轴.

1064. 求出曲线: (a) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}$ 于点 $x = 0$ 处; (b) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ 于点 $x = 1$ 处的左切线与右切线间的夹角.

1065. 证明: 对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$ (a 及 m 为常数) 的切线与切点的径向量所成的角度为一常量.

1066. 求曲线 $y = ax^n$ 的次切线长, 由此给出作此曲线的切线的方法.

1067. 证明: 对于抛物线 $y^2 = 2px$, (a) 次切线长等于切点的横坐标 (绝对值) 的两倍; (b) 次法线为一常量. 给出作抛物线的切线的方法.

1068. 证明: 指数曲线 $y = a^x$ ($a > 0$) 有定长的次切线. 给出作指数曲线的切线的方法.

1069. 求悬链线

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

上任何点 $M(x_0, y_0)$ 处的法线长.

1070. 证明: 星形线

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$$

的切线介于坐标轴间的部分的长为一常量.

1071. 若抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 Ox 轴相切, 则系数 a, b, c 间的关系如何?

1072. 在什么条件下立方抛物线

$$y = x^3 + px + q$$

与 Ox 轴相切?

1073. 当参数 a 为何值时, 抛物线 $y = ax^2$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切?

1074. 证明: 曲线

$$y = f(x) \quad (f(x) > 0)$$

和

$$y = f(x) \sin ax$$

于公共点彼此相切, 其中 $f(x)$ 为可微函数.

1075. 证明: 双曲线族 $x^2 - y^2 = a$ 及 $xy = b$ 形成一正交网, 即这两族曲线成直角相交.

1076. 证明: 抛物线族

$$y^2 = 4a(a - x) \quad (a > 0)$$

及

$$y^2 = 4b(b + x) \quad (b > 0)$$

形成正交网.

1077. 写出曲线 $x = 2t - t^2$ 及 $y = 3t - t^3$ 在下列各点的切线和法线的方程:

(a) $t = 0$; (b) $t = 1$.

1078. 写出曲线

$$x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \quad y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

在下列各点的切线与法线方程: (a) $t = 0$, (b) $t = 1$, (c) $t = \infty$.

1079. 写出摆线 (旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

上任意一点 $t = t_0$ 处的切线方程. 给出摆线的切线的作法.

1080. 证明: 曳物线

$$x = a \left(\ln \tan \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t \quad (a > 0, 0 < t < \pi)$$

有长度不变的切线.

写出下列曲线在指定点的切线与法线方程:

1081. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, M(6, 6.4).$

1082. $xy + \ln y = 1, M(1, 1).$

§4. 函数的微分

1. 函数的微分. 若自变量为 x 的函数 $y = f(x)$ 之增量可表示为以下形式:

$$\Delta y = A(x) dx + o(dx),$$

其中 $dx = \Delta x$, 则此增量的线性部分称为函数 y 的微分:

$$dy = A(x) dx.$$

函数 $y = f(x)$ 的微分存在的充分必要条件为存在有限的导数 $y' = f'(x)$, 这时我们有

$$dy = y' dx. \quad (1)$$

若自变量 x 为另一自变量的函数, 公式 (1) 于这种情形下仍然有效 (一阶微分的不变性).

2. 函数的微小增量的估计. 为了计算可微函数 $f(x)$ 的微小增量, 可利用公式

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x;$$

若 $f'(x) \neq 0$, 则当 $|\Delta x|$ 充分小时, 此公式的相对误差可以任意的小.

例如, 若自变量 x 的绝对误差等于 Δx , 则函数 $y = f(x)$ 的绝对误差 Δy 和相对误差 δ_y 可用下列公式近似地表示出来:

$$\Delta y = |y'| \Delta x, \quad \delta_y = \left| \frac{y'}{y} \right| \Delta x.$$

1083. 设

$$(a) \Delta x = 1; \quad (b) \Delta x = 0.1; \quad (c) \Delta x = 0.01.$$

对于函数

$$f(x) = x^3 - 2x + 1,$$

求: (1) $\Delta f(1)$, (2) $df(1)$, 并进行对比.

1084. 设运动方程由公式

$$x = 5t^2$$

给出, 其中 t 以 s (秒) 来度量, x 以 m (米) 来度量. 若 (a) $\Delta t = 1$ s, (b) $\Delta t = 0.1$ s, (c) $\Delta t = 0.001$ s, 对于 $t = 2$ s 的时刻, 求路程的增量 Δx 及微分 dx , 并作比较.

求下列函数 y 的微分:

$$1085. y = \frac{1}{x}.$$

$$1086. y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad (a \neq 0).$$

$$1087. y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|.$$

$$1088. y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$$

$$1089. y = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a \neq 0).$$

1090. 求:

$$(a) d(xe^x);$$

$$(b) d(\sin x - x \cos x);$$

$$(c) d\left(\frac{1}{x^3}\right);$$

$$(d) d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right);$$

$$(e) d(\sqrt{a^2 + x^2});$$

$$(f) d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right);$$

$$(g) d \ln(1-x^2);$$

$$(h) d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right);$$

$$(i) d\left[\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right].$$

设 u, v, w 为 x 的可微函数, 求下列函数 y 的微分:

$$1091. y = uvw.$$

$$1092. y = \frac{u}{v^2}.$$

1093. $y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

1094. $y = \arctan \frac{u}{v}$.

1095. $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$.

1096. 求:

(a) $\frac{d}{dx^3}(x^3 - 2x^6 - x^9)$;

(b) $\frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$;

(c) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$;

(d) $\frac{d(\tan x)}{d(\cot x)}$;

(e) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

1097. 有半径为 $R = 100$ cm 及圆心角 $\alpha = 60^\circ$ 的扇形. 若 (a) 其半径 R 增加 1 cm; (b) 角 α 减少 $30'$, 则扇形面积的变化如何? 求出精确的和近似的解.

1098. 摆的振动周期按下式确定:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 l 为摆长, $g = 9.8$ m/s² 为重力加速度.

为了使周期 T 增大 0.05 s, 对摆长 $l = 20$ cm 需要作多少修改?

利用函数之微分代替其增量, 求下列各式之近似值:

1099. $\sqrt[3]{1.02}$.

1100. $\sin 29^\circ$.

1101. $\cos 151^\circ$.

1102. $\arctan 1.05$.

1103. $\lg 11$.

1104.1. 证明近似公式:

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a > 0),$$

其中 $|x| \ll a$ (正数 A 和 B 间的关系式 $A \ll B$ 表示 A 远小于 B). 利用此公式近似地计算:

(a) $\sqrt{5}$;

(b) $\sqrt{34}$;

(c) $\sqrt{120}$,

并与平方根表中的数值作比较.

1104.2. 证明公式:

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} - r \quad (a > 0, x > 0),$$

其中 $0 < r < \frac{x^2}{8a^3}$.

1105. 证明近似公式:

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0),$$

其中 $|x| \ll a$. 利用此公式近似地计算:

(a) $\sqrt[3]{9}$;

(b) $\sqrt[4]{80}$;

(c) $\sqrt[7]{100}$;

(d) $\sqrt[10]{1000}$.

1106. 正方形的边 $x = 2.4$ m \pm 0.05 m. 由此计算所得正方形的面积的相对误差和绝对误差如何?

1107. 为了在 1% 的精度下计算出球的体积, 问度量球半径 R 时所允许的相对误差如何?

1108. 为了确定重力加速度, 可以利用摆的振动公式 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$, 其中 l 为摆长, T 为振动周期. 当测量 (a) 长度 l , (b) 周期 T 时, 相对误差 δ 如何影响 g 的值?

1109. 求数 x ($x > 0$) 的常用对数 (以 10 为底) 的绝对误差, 设此数的相对误差等于 δ .

1110. 证明: 根据正切对数表求得的角度比根据具有同样多位小数的正弦对数表求得的角度更为精确.

§5. 高阶的导数和微分

1. 基本定义. 函数 $y = f(x)$ 的高阶导数由下列关系式顺次地定义出来 (假设相应运算都有意义!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n = 2, 3, \dots).$$

若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有连续的导数 $f^{(n)}(x)$, 则简写为: $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$. 特别地, 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上有各阶导数, 并且这些导数是连续的, 则使用记号 $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$.

函数 $y = f(x)$ 的高阶微分是根据下列公式顺次定义的:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

其中认为 $d^1 y = dy = y' dx$.

若 x 为自变量, 则认为:

$$d^2 x = d^3 x = \dots = 0.$$

这时成立公式

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad \text{及} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2. 基本公式.

$$\text{I. } (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0); \quad (e^x)^{(n)} = e^x. \quad \text{II. } (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$\text{III. } (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \quad \text{IV. } (x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}.$$

$$\text{V. } (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3. 莱布尼茨公式. 若函数 $u = \varphi(x)$ 及 $v = \psi(x)$ 有 n 阶导数 (n 阶可微), 则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

其中 $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v, C_n^i$ 为由 n 个元素每次取 i 个的组合数.

类似地对于微分 $d^n(uv)$ 得:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^n C_n^i d^{n-i}u d^i v,$$

其中认为 $d^0 u = u$ 及 $d^0 v = v$.

求 y'' , 设:

$$1111. y = x\sqrt{1+x^2}.$$

$$1112. y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1113. $y = e^{-x^2}$.

1114. $y = \tan x$.

1115. $y = (1 + x^2) \arctan x$.

1116. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1117. $y = x \ln x$.

1118. $y = \ln f(x)$.

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

1120. 设 $y = e^{\sin x} \cos(\sin x)$, 求 $y(0)$, $y'(0)$ 及 $y''(0)$.

设 $u = \varphi(x)$ 及 $v = \psi(x)$ 为二阶可微函数. 求 y'' , 设:

1121. $y = u^2$.

1122. $y = \ln \frac{u}{v}$.

1123. $y = \sqrt{u^2 + v^2}$.

1124. $y = u^v (u > 0)$.

设 $f(x)$ 为三阶可微函数. 求 y'' 及 y''' , 设:

1125. $y = f(x^2)$.

1126. $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

1127. $y = f(e^x)$.

1128. $y = f(\ln x)$.

1129. $y = f(\varphi(x))$, 其中 $\varphi(x)$ 是充分多次可微函数.

1130. 对于以下两种情形: (a) x 为自变量, (b) x 为中间变量, 求函数 $y = e^x$ 的 d^2y . 若 x 为自变量, 求 d^2y , 设:

1131. $y = \sqrt{1+x^2}$.

1132. $y = \frac{\ln x}{x}$.

1133. $y = x^x$.

令 u 及 v 为变量 x 的二阶可微函数, 求 d^2y , 设:

1134. $y = uv$.

1135. $y = \frac{u}{v}$.

1136. $y = u^m v^n$ (m 及 n 为常数).

1137. $y = a^u (a > 0)$.

1138. $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$.

1139. $y = \arctan \frac{u}{v}$.

对以参数形式给出的函数 $y = y(x)$ 的导数 y'_x , y''_{x^2} , y'''_{x^3} , 设:

1140. $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$.

1141. $x = a \cos t, y = a \sin t$.

1142. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

1143. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$.

1144. $x = f'(t), y = tf'(t) - f(t)$.

1145. 设函数 $y = f(x)$ 充分多次可微. 求反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的导数 x' , x'' , x''' , $x^{(4)}$ (设这些导数都存在).

求由下列隐函数给出的 $y = y(x)$ 的 y'_x , y''_{x^2} 及 y'''_{x^3} :

1146. $x^2 + y^2 = 25$. 在点 $M(3, 4)$ 的 y' , y'' 及 y''' 等于什么?

1147. $y^2 = 2px$.

1148. $x^2 - xy + y^2 = 1$.

求 y'_x 及 y''_{x^2} , 设:

1149. $y^2 + 2 \ln y = x^4$.

1150. $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\arctan \frac{y}{x}}$ ($a > 0$).

1151. 设函数 $f(x)$ 当 $x \leq x_0$ 时有定义且二阶可微. 应当如何选择系数 a, b 及 c , 使函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_0, \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & x > x_0 \end{cases}$$

是二阶可微的函数?

1152. 质点作直线运动的规律为

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

求其运动速度和加速度. 在 $t = 2$ 的时刻, 速度与加速度等于什么?

1153. 质点 $M(x, y)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 匀速运动, 运动一周的时间为 T . 若质点在时刻 $t = 0$ 位于点 $M_0(a, 0)$, 求质点的速度和加速度在 Ox 轴上的投影 v 和 w .

1154. 在重力场中, 质点 $M(x, y)$ 在竖直平面 Oxy 内以初速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛出. 建立运动方程 (忽略空气阻力), 并确定速度 v 和加速度 w 的大小及运动轨迹. 质点的最大上升高度和射程等于多少?

1155. 质点的运动方程为

$$x = 4 \sin \omega t - 3 \cos \omega t, \quad y = 3 \sin \omega t + 4 \cos \omega t \quad (\omega \text{ 为常数}).$$

求运动轨迹、速度与加速度的大小.

求下列指定阶的导数:

1156. $y = x(2x - 1)^2(x + 3)^3$, 求 $y^{(6)}$ 及 $y^{(7)}$.

1157. $y = \frac{a}{x^m}$, 求 y''' .

1158. $y = \sqrt{x}$, 求 $y^{(10)}$.

1159. $y = \frac{x^2}{1 - x}$, 求 $y^{(8)}$.

1160. $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$, 求 $y^{(100)}$.

1161. $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

1162. $y = \frac{e^x}{x}$, 求 $y^{(10)}$.

1163. $y = x \ln x$, 求 $y^{(5)}$.

1164. $y = \frac{\ln x}{x}$, 求 $y^{(5)}$.

1165. $y = x^2 \sin 2x$, 求 $y^{(50)}$.

1166. $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1 - 3x}}$, 求 y''' .

1167. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$, 求 $y^{(10)}$.

1168. $y = x \sinh x$, 求 $y^{(100)}$.

1169. $y = e^x \cos x$, 求 $y^{(4)}$.

1170. $y = \sin^2 x \ln x$, 求 $y^{(6)}$.

在下列各例中, 视 x 为自变量, 求指定阶的微分.

1171. $y = x^5$, 求 $d^5 y$.

1172. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 求 $d^3 y$.

1173. $y = x \cos 2x$, 求 $d^{10} y$.

1174. $y = e^x \ln x$, 求 $d^4 y$.

1175. $y = \cos x \cdot \cosh x$, 求 $d^6 y$.

设 u 为 x 的充分多次可微函数, 在下列各例中求指定阶的微分.

1176. $y = u^2$, 求 $d^{10} y$.

1177. $y = e^u$, 求 $d^4 y$.

1178. $y = \ln u$, 求 d^3y .

1179. 视 x 为某个自变量的函数, 由函数 $y = f(x)$ 求 d^2y , d^3y 及 d^4y .

1180. 以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y = f(x)$ 的导数 y'' 及 y''' , 但不假定 x 为自变量.

1181. 证明: 函数

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程

$$y'' + y = 0.$$

1182. 证明: 函数

$$y = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程

$$y'' - y = 0.$$

1183. 证明: 函数

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, λ_1 及 λ_2 为常数, 满足方程

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0.$$

1184. 证明: 函数

$$y = x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)],$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, n 为常数, 满足方程

$$x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0.$$

1185. 证明: 函数

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

其中 C_1, C_2, C_3 及 C_4 为任意常数, 满足方程

$$y^{(4)} + y = 0.$$

1186. 证明: 若函数 $f(x)$ 有 n 阶导数, 则

$$[f(ax + b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b).$$

1187. 若

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

求 $P^{(n)}(x)$.

求 $y^{(n)}$, 设:

$$1188. y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

$$1189. y = \frac{1}{x(1-x)}.$$

$$1190. y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}. \quad \text{提示: 分解函数为最简分式.}$$

$$1191. y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$$

$$1192. y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

1193. $y = \sin^2 x$.

1194. $y = \cos^2 x$.

1195. $y = \sin^3 x$.

1196. $y = \cos^3 x$.

1197. $y = \sin ax \sin bx$.

1198. $y = \cos ax \cos bx$.

1199. $y = \sin ax \cos bx$.

1200. $y = \sin^2 ax \cos bx$.

1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1202. $y = x \cos ax$.

1203. $y = x^2 \sin ax$.

1204. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

1205. $y = \frac{e^x}{x}$.

1206. $y = e^x \cos x$.

1207. $y = e^x \sin x$.

1208. $y = \ln \frac{a + bx}{a - bx}$.

1209. $y = e^{ax} P(x)$, 其中 $P(x)$ 为多项式. 1210. $y = x \sinh x$.

求 $d^n y$, 设:

1211. $y = x^n e^x$.

1212. $y = \frac{\ln x}{x}$.

1213. 证明等式:

(1) $[e^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx + c + n\varphi)$,

(2) $[e^{ax} \cos(bx + c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx + c + n\varphi)$,

其中 $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

1214. 求 $y^{(n)}$, 设:

(a) $y = \cosh ax \cos bx$;

(b) $y = \cosh ax \sin bx$.

1215. 将函数

$$f(x) = \sin^{2p} x,$$

其中 p 为正整数, 化为三角多项式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^p A_k \cos 2kx,$$

以求 $f^{(n)}(x)$.

提示: 令 $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$, 其中 $t = \cos x + i \sin x$ 及 $\bar{t} = \cos x - i \sin x$, 并且利用棣莫弗公式来计算.

1216. 设:

(a) $f(x) = \sin^{2p+1} x$; (b) $f(x) = \cos^{2p} x$; (c) $f(x) = \cos^{2p+1} x$,

其中 p 为正整数, 求 $f^{(n)}(x)$ (参阅前题).

若

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x),$$

其中 i 是虚数单位, $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为实变量 x 的实函数, 则按定义有:

$$f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x).$$

1217. 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right)$$

证明:

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1) \operatorname{arccot} x].$$

提示: 利用棣莫弗公式.

1218. 求函数 $f(x) = \arctan x$ 的 n 阶导数.

求 $f^{(n)}(0)$, 设:

1219. (a) $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)}$; (b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

1220. (a) $f(x) = x^2 e^{ax}$; (b) $f(x) = \arctan x$; (c) $f(x) = \arcsin x$.

1221. (a) $f(x) = \cos(m \arcsin x)$; (b) $f(x) = \sin(m \arcsin x)$.

1222. (a) $f(x) = (\arctan x)^2$; (b) $f(x) = (\arcsin x)^2$.

1223. 设

$$f(x) = (x-a)^n \varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 在点 a 的邻域内有 $n-1$ 阶的连续导数, 求 $f^{(n)}(a)$.

1224. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(n 为正整数), 于点 $x=0$ 有一直到 n 阶的导数, 而无 $n+1$ 阶导数.

1225. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处是无穷次可微的. 作出此函数的图像.

1226. 证明: 切比雪夫多项式

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

满足方程

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0.$$

1227. 证明: 勒让德多项式

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2-1)^m]^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

满足方程

$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

提示: 把等式 $(x^2-1)u' = 2mxu$ 作 $m+1$ 次微分, 其中 $u = (x^2-1)^m$.

1228. 切比雪夫-拉盖尔多项式定义如下:

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

求多项式 $L_m(x)$ 的显式表达式.

证明: $L_m(x)$ 满足方程

$$xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0.$$

提示: 利用等式 $xu' + (x - m)u = 0$, 其中 $u = x^m e^{-x}$.

1229. 设 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$, 其中 $f(u)$ 及 $\varphi(x)$ 为 n 阶可微函数. 证明:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u),$$

其中系数 $A_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) 与函数 $f(u)$ 无关.

1230. 证明: 对于复合函数 $y = f(x^2)$ 的 n 阶导数, 成立公式

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \dots \end{aligned}$$

1231. 切比雪夫-埃尔米特多项式定义如下:

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

求多项式 $H_m(x)$ 的显式表达式.

证明: $H_m(x)$ 满足方程

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

提示: 利用等式 $u' + 2xu = 0$, 其中 $u = e^{-x^2}$.

1232.1. 证明等式:

$$\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}.$$

提示: 运用数学归纳法.

1232.2. 证明公式:

$$(a) \frac{d^n}{dx^n} (x^n \ln x) = n! \left(\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \quad (x > 0);$$

$$(b) \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} [C_n(x) \sin x - S_n(x) \cos x],$$

其中

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

1233. 设 $\frac{d}{dx} = D$ 表示微分算子,

$$f(D) = \sum_{k=0}^n p_k(x) D^k$$

为微分符号的多项式, 其中 $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) 为 x 的某连续函数. 证明:

$$f(D)\{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} f(D + \lambda)u(x),$$

其中 λ 为常数.

1234. 证明: 若在方程

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k y_x^{(k)} = 0$$

中令

$$x = e^t,$$

其中 t 为自变量, 则此方程化为

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0,$$

其中 $D = \frac{d}{dt}$.

§6. 罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理

1. 罗尔定理. 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 在此区间内有有限的导数 $f'(x)$; (3) $f(a) = f(b)$, 则在区间 (a, b) 内至少存在一个数 c , 使

$$f'(c) = 0.$$

2. 拉格朗日定理. 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 在区间 (a, b) 内有有限的导数, 则

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \quad \text{其中 } a < c < b$$

(有限增量公式).

3. 柯西定理. 若函数 $f(x)$ 及 $g(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 于 (a, b) 内 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有有限的导数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$; (3) 当 $a < x < b$ 时, $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$; (4) $g(a) \neq g(b)$, 则

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad \text{其中 } a < c < b.$$

1235. 检验罗尔定理对于函数

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

的正确性.

1236. 函数 $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ 当 $x_1 = -1$ 及 $x_2 = 1$ 时为零, 但是当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f'(x) \neq 0$. 说明与罗尔定理表面上的矛盾.

1237. 设函数 $f(x)$ 在有限或无穷的区间 (a, b) 中的任意一点有有限的导数 $f'(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

证明:

$$f'(c) = 0,$$

其中 c 为区间 (a, b) 中的某点.

1238. 设函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[x_0, x_n]$ 上有定义且有 $n - 1$ 阶的连续导数 $f^{(n-1)}(x)$; (2) 在区间 (x_0, x_n) 内有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$; (3) 下列等式成立:

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \cdots < x_n).$$

证明: 在区间 (x_0, x_n) 内最少存在一点 ξ , 使

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

1239. 设函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且有 $p+q$ 阶的连续导数 $f^{(p+q)}(x)$; (2) 在区间 (a, b) 内有 $p+q+1$ 阶的导数 $f^{(p+q+1)}(x)$; (3) 下列等式成立:

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0,$$

$$f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0.$$

证明: 在此种情形下

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

其中 c 为区间 (a, b) 内的某点.

1240. 证明: 若具实系数 a_k ($k = 0, 1, \cdots, n$) 的多项式

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

之一切根为实数, 则其逐次的导数 $P'_n(x), P''_n(x), \cdots, P_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

1241. 证明: 勒让德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$$

的一切根都是实数且包含于区间 $(-1, 1)$ 中.

1242. 证明: 切比雪夫-拉盖尔多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

所有的根都是正数.

1243. 证明: 切比雪夫-埃尔米特多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

所有的根都是实数.

1244. 在曲线 $y = x^3$ 上某点的切线, 平行于连接点 $A(-1, -1)$ 及点 $B(2, 8)$ 所成的弦, 求出此点.

1245. 若 $ab < 0$, 有限增量公式对于函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在闭区间 $[a, b]$ 上是否正确?

1246.1. 设

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0); & \text{(b)} f(x) = x^3; \\ \text{(c)} f(x) = \frac{1}{x}; & \text{(d)} f(x) = e^x, \end{array}$$

求满足

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1)$$

的函数 $\theta = \theta(x, \Delta x)$.

1246.2. 设 $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$, 且对于任何 x 和 h 成立恒等式

$$f(x + h) - f(x) \equiv hf'(x).$$

证明:

$$f(x) = ax + b,$$

其中 a 和 b 为常数.

1246.3. 设 $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$, 且对于任何 x 和 h 成立恒等式

$$f(x + h) - f(x) \equiv hf' \left(x + \frac{h}{2} \right).$$

证明:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

其中 a, b 和 c 为常数.

1247. 证明: 若 $x \geq 0$, 则

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中 $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$, 并且 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{4}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

1248. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 < x < +\infty, \end{cases}$$

在闭区间 $[0, 2]$ 上对于函数 $f(x)$ 求有限增量公式中的中间值 c .

1249. 设

$$f(x) - f(0) = xf'[\xi(x)],$$

其中 $0 < \xi(x) < x$. 证明: 若

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\ln x), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则函数 $\xi = \xi(x)$ 在任意小的区间 $(0, \varepsilon)$ 内 ($\varepsilon > 0$) 是不连续的.

1250. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有连续的导数 $f'(x)$. 对于区间 (a, b) 内任何一点 ξ , 可否从此区间中指出另外的两点 x_1 及 x_2 , 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2)?$$

研究一个例子:

$$f(x) = x^3 \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad \xi = 0.$$

1251. 证明下列不等式:

(a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|;$

(b) $py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y) \quad (0 < y < x, p > 1);$

(c) $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|;$

(d) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \quad (0 < b < a).$

1252. 说明在闭区间 $[-1, 1]$ 上柯西定理对于函数 $f(x) = x^2$ 及 $g(x) = x^3$ 何以不真?

1253. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上可微, 并且 $x_1 x_2 > 0$. 证明:

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

其中 $x_1 < \xi < x_2$.

1254. 证明: 若函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a, b) 内可微但无界, 则其导数 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 内也无界. 逆命题不真 (举出例子).

1255. 证明: 若函数 $f(x)$ 在有限或无穷的区间 (a, b) 内有有界的导数 $f'(x)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 中一致连续.

1256. 证明: 若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

即当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = o(x)$.

1257. 证明: 若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微且

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) = o(x),$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0.$$

1258.1. 证明: 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[x_0, X]$ 上有定义并且是连续的; (2) 在区间 (x_0, X) 内有有限的导数 $f'(x)$; (3) 存在有限或无穷的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0),$$

则相应地存在有限或无穷的单侧导数 $f'_+(x_0)$ 且

$$f'_+(x_0) = f'(x_0+0).$$

1258.2. 证明: 对于函数

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1+x}{1-x}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

存在有限的极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x),$$

但是函数 $f(x)$ 没有单侧导数 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$. 给出这个事实的几何解释. 然而, 在这个点存在广义单侧导数 (见习题 1009.2).

1259. 证明: 若当 $a < x < b$ 时 $f'(x) = 0$, 则

$$\text{当 } a < x < b \text{ 时, } f(x) = \text{常数}.$$

1260. 证明: 导数为常数

$$f'(x) = k$$

的唯一函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是线性函数

$$f(x) = kx + b.$$

1261.1. 若 $f^{(n)}(x) = 0$, 则函数 $f(x)$ 有什么性质?

1261.2. 设 $f(x) \in C^{(\infty)}(-\infty, +\infty)$, 并且对每个 x 都存在正整数 n_x ($n_x \leq n$), 使得

$$f^{(n_x)}(x) = 0.$$

证明: 函数 $f(x)$ 是多项式.

1262. 证明: 满足方程

$$y' = \lambda y \quad (\lambda = \text{常数})$$

的唯一函数 $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是指数函数 $y = Ce^{\lambda x}$, 其中 C 为任意常数.

提示: 研究 $(ye^{-\lambda x})'$.

1263. 检验函数

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}, \quad g(x) = \arctan x$$

在区间: (1) $x < 1$ 及 (2) $x > 1$ 内有相同的导数. 推出这些函数间的关系.

1264. 证明下列恒等式:

$$(a) \quad 2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x, \quad \text{当 } |x| \geq 1;$$

$$(b) \quad 3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi, \quad \text{当 } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

1265. 证明: 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的; (2) 于此区间内有有限的导数 $f'(x)$; (3) 不是线性函数, 则在区间 (a, b) 内至少能找到一点 c , 使得

$$|f'(c)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

给出这个事实的几何解释.

1266. 证明: 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有二阶导数 $f''(x)$; (2) $f'(a) = f'(b) = 0$, 则在区间 (a, b) 内至少存在一点 c , 使得

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

1267. 汽车从某点开始行驶, 于 t 秒内走完了路程, 所经过的距离为 s . 证明: 汽车运动的加速度在某瞬时不小于 $\frac{4s}{t^2}$.

§7. 增函数与减函数. 不等式

1. 增函数与减函数. 若

当 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ 时, $f(x_2) > f(x_1)$ (或当 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ 时, $f(x_2) < f(x_1)$), 则称函数 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的增函数 (或减函数).

若可微函数 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的增函数 (或减函数), 则

$$\text{当 } a \leq x \leq b \text{ 时, } f'(x) \geq 0 \quad (\text{或当 } a \leq x \leq b \text{ 时, } f'(x) \leq 0).$$

2. 函数递增 (或递减) 的充分条件. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的, 并且在其内有正的 (或负的) 导数 $f'(x)$, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内递增 (或递减).

求下列函数的严格单调 (增或减) 区间:

$$1268. \quad y = 2 + x - x^2.$$

$$1269. \quad y = 3x - x^3.$$

$$1270. \quad y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$1271. \quad y = \frac{\sqrt{x}}{x+100} \quad (x \geq 0).$$

$$1272. \quad y = x + \sin x.$$

$$1273. \quad y = x + |\sin 2x|.$$

$$1274. \quad y = \cos \frac{\pi}{x}.$$

$$1275. \quad y = \frac{x^2}{2^x}.$$

1276. $y = x^n e^{-x} \quad (n > 0, x \geq 0).$

1277. $y = x^2 - \ln x^2.$

1278. 若 $f(x) = \begin{cases} x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1279. 证明: 圆的内接正 n 边形的周长 p_n 当边的数目 n 增加时增加, 而此圆的外切正 n 边形的周长 P_n 此时则减小. 利用这点来证明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, p_n 及 P_n 有相同的极限.

1280. 证明: 函数

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

在区间 $(-\infty, -1)$ 及 $(0, +\infty)$ 内递增.

1281. 证明: 有理函数

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

是区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 上的严格单调函数, 其中 x_0 为充分大的正数.

1282. 证明: 有理函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} \quad (a_n b_m \neq 0)$$

是区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 上的严格单调函数, 其中 x_0 为充分大的正数.

1283. 单调函数的导数是否也必为单调的? 研究一个例子:

$$f(x) = x + \sin x.$$

1284. 证明: 若 $\varphi(x)$ 为可微的单调增函数, 且当 $x \geq x_0$ 时, $|f'(x)| \leq \varphi'(x)$, 则

$$\text{当 } x \geq x_0 \text{ 时, } |f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

给出这个事实的几何解释.

1285. 设函数 $f(x)$ 在区间 $a \leq x < +\infty$ 内连续, 而且当 $x > a$ 时, $f'(x) > k > 0$, 其中 k 为常数. 证明: 若 $f(a) < 0$, 则在区间 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 内方程 $f(x) = 0$ 有且仅有一个实根.

1286. 若在某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内, 函数增量 $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ 的符号与自变量增量 $\Delta x_0 = x - x_0$ 的符号相同, 则称函数 $f(x)$ 为在 x_0 点的增函数.

证明: 若函数 $f(x)$ ($a < x < b$) 在有限或无穷的区间 (a, b) 内的每一点皆为增函数, 则它在此区间内为增函数.

1287. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{2}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 是增函数, 但在包含此点的任何区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中并非增函数, 其中 $\varepsilon > 0$ 为任意小的数. 作出此函数的略图.

1288. 证明定理: 设 (1) 函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 n 阶可微函数; (2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ($k = 0, 1, \cdots, n-1$); (3) 当 $x > x_0$ 时, $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$, 则当 $x > x_0$ 时有

不等式

$$\varphi(x) > \psi(x).$$

1289. 证明下列不等式:

$$(a) e^x > 1 + x \quad (x \neq 0); \quad (b) x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad (x > 0);$$

$$(c) x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad (x > 0); \quad (d) \tan x > x + \frac{x^3}{3} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(e) (x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \quad (x > 0, y > 0, 0 < \alpha < \beta).$$

给出不等式 (a)–(d) 的几何解释.

1290. 证明: 不等式

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时成立.

1291. 证明: 当 $x > 0$ 时有不等式

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

1292. 等差数列与等比数列的项的数目相同且有相同的首项与末项, 并且一切项都是正的. 证明: 等差数列各项之和大于等于等比数列各项之和.

1293. 用不等式

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0,$$

其中 x, a_k, b_k ($k = 1, \dots, n$) 为实数, 来证明柯西-布尼亚科夫斯基不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

1294. 证明: 正数的算术平均值的平方不大于这些数的平方平均值, 即

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

1295. 证明: 正数的几何平均值不大于这些数的算术平均值, 即

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

提示: 用数学归纳法.

1296. 设 a 及 b 为两个正数, 则由等式

$$\Delta_s(a, b) = \begin{cases} \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, & s \neq 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \Delta_t(a, b), & s = 0 \end{cases}$$

所定义之函数称为正数 a 与 b 之 s 阶平均值.

例如, 当 $s = -1$ 时得调和平均值, 当 $s = 0$ 时得几何平均值 (试证明!); 当 $s = 1$ 时得算术平均值; 当 $s = 2$ 时得平方平均值.

证明: (1) $\min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b)$;

(2) 当 $a \neq b$ 时, 函数 $\Delta_s(a, b)$ 是变量 s 的增函数;

$$(3) \lim_{s \rightarrow -\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b), \lim_{s \rightarrow +\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b).$$

提示: 考察 $\frac{d}{ds} [\ln \Delta_s(a, b)]$.

1297. 证明下列不等式:

- (a) $x^\alpha - 1 > \alpha(x - 1)$, 若 $\alpha \geq 2, x > 1$;
 (b) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x - a}$, 若 $n > 1, x > a > 0$;
 (c) $1 + 2 \ln x \leq x^2$, 若 $x > 0$.

§8. 凹凸性. 拐点

1. 凹凸性的充分条件. 若由可微函数定义的一段曲线 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) 位于其任意一点的切线之上 (或之下), 则称这个可微函数 $y = f(x)$ 的图像在闭区间 $[a, b]$ 上是凸 (或对应地, 凹) 的^①. 在假设二阶导数 $f''(x)$ 存在的情况下, 当 $a < x < b$ 时不等式

$$f''(x) > 0 \quad (\text{或对应地 } f''(x) < 0)$$

成立, 为图像是凸 (或对应地, 凹) 的充分条件.

2. 拐点的充分条件. 若函数的图像在某点的凹凸性改变, 则称此点为拐点.

若在点 x_0 有 $f''(x_0) = 0$, 或者 $f''(x_0)$ 虽不存在但 $f'(x_0)$ 有意义, 并且无论在何种情形下, $f''(x)$ 在 x 经过 x_0 时改变符号, 则 x_0 是拐点.

1298. 研究曲线

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

于 $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ 及 $C(0, 1)$ 诸点的凹凸性.

求下列函数的图像的凹或凸的区间及拐点:

1299. $y = 3x^2 - x^3$.

1300. $y = \frac{a^2}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$).

1301. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$.

1302. $y = \sqrt{1 + x^2}$.

1303. $y = x + \sin x$.

1304. $y = e^{-x^2}$.

1305. $y = \ln(1 + x^2)$.

1306. $y = x \sin(\ln x)$ ($x > 0$).

1307. $y = x^x$ ($x > 0$).

1308. 证明: 曲线

$$y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

在位于同一直线上的三个拐点. 作出这个函数的图像.

1309. 如何选择参量 h , 可使“概率曲线”

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (h > 0)$$

^①更一般的定义见习题 1312. 原书把凸称为下凸或上凹, 把凹称为下凹或上凸, 译文已按照国际上更通用的术语修改. 关于凹凸性更详细的讨论, 详见与本书配套的参考书: 沐定夷, 谢惠民. 吉米多维奇数学分析习题集学习指引 (第一册). 北京: 高等教育出版社, 2010. 第二章 §2.8. —— 译注

有拐点 $x = \pm\sigma$?

1310. 研究摆线 (旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0)$$

的凹凸性.

1311. 设函数 $f(x)$ 在区间 $a \leq x < +\infty$ 中二阶可微, 并且:

(1) $f(a) = A > 0$; (2) $f'(a) < 0$; (3) 当 $x > a$ 时, $f''(x) \leq 0$.

证明: 在区间 $(a, +\infty)$ 内方程 $f(x) = 0$ 有而且仅有一个实根.

1312. 若对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 与 x_2 及任意两数 λ_1 与 λ_2 ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 有不等式:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(或对应地, 相反的不等式 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是凸 (凹) 的.

证明: (1) 若当 $a < x < b$ 时, $f''(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凸的; (2) 若当 $a < x < b$ 时, $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凹的.

1313. 证明: 函数

$$x^n \quad (n > 1), \quad e^x, \quad x \ln x$$

在区间 $(0, +\infty)$ 上是凸的, 而函数

$$x^n \quad (0 < n < 1), \quad \ln x$$

在区间 $(0, +\infty)$ 上是凹的.

1314.1. 证明下列不等式, 并解释其几何意义:

$$(a) \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1);$$

$$(b) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y);$$

$$(c) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \quad (x > 0, y > 0).$$

1314.2. 设当 $a \leq x \leq b$ 时 $f''(x) \geq 0$, 证明: 对于任何 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 都有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)].$$

1315. 证明: 有界的凸函数处处连续, 并有左导数和右导数.

1316. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内二阶可微, 且 $f''(\xi) \neq 0$, 其中 $a < \xi < b$. 证明: 在区间 (a, b) 中可找出两个值 x_1 与 x_2 , 满足

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

1317. 证明: 若函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(x_0, +\infty)$ 内二阶可微, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

则在区间 $(x_0, +\infty)$ 内最少有一点 ξ , 满足 $f''(\xi) = 0$.

§9. 不定式的求值法

洛必达法则. 情形 1: 不定式 $\frac{0}{0}$ 的求值法. 若: (1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 a 的某邻域 U_ϵ ^① 内有定义并且连续 (此处 a 为数或符号 ∞), 并且当 $x \rightarrow a$ 时, 这两个函数都趋于零:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

(2) 导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 在点 a 的邻域 U_ϵ 内存在 (在点 a 本身可不存在), 并且当 $x \neq a$ 时, 二者不同时为零; (3) 有限或无穷的极限值

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在, 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

情形 2: 不定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 的求值法. 若: (1) 当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于无穷大:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

其中 a 为数或符号 ∞ ; (2) 对于异于 a 且属于点 a 的邻域 U_ϵ 的一切 x 值, 导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在, 并且对于这样的 x 有

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0;$$

(3) 有限或无穷的极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

对于单侧导数也有类似的法则.

利用代数变换与取对数的方法, 可使不定式 $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 等的求值法化为

$$\frac{0}{0} \quad \text{与} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

这两个基本类型的不定式的求值法.

求出下列各式之值:

$$1318. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

$$1319. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}.$$

$$1320. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}.$$

$$1321. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}.$$

$$1322. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x}.$$

$$1323. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2}.$$

$$1324. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$$

$$1325. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$1326. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$$

$$1327. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}.$$

^①所谓点 a 的邻域 U_ϵ , 系指满足下列不等式的数 x 的集合: (1) $0 < |x - a| < \epsilon$, 若 a 为一个数; (2) $|x| > \frac{1}{\epsilon}$, 若 a 为符号 ∞ . (这样定义的邻域通常叫做去心邻域. —— 译注)

1328. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right).$
1329. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad (a > 0).$ 1330. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right).$
1331. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}.$ 1332. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}.$
1333. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}.$ 1334. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\tanh x} - \frac{1}{\tan x} \right).$
1335. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arsinh}(\sinh x) - \operatorname{arsinh}(\sin x)}{\sinh x - \sin x}$, 其中 $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$
1336. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$ 1337. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \quad (a > 0, n > 0).$
1338. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{1000}}.$ 1339. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x}.$
1340. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x).$ 1341. $\lim_{x \rightarrow +0} x^\varepsilon \ln x \quad (\varepsilon > 0).$
1342. $\lim_{x \rightarrow +0} x^x.$ 1343. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{x^x - 1}.$
1344. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{x^x} - 1).$ 1345. $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1 + \ln x}}.$
1346. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$ 1347. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi x}{2}}.$
1348. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}.$ 1349. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x}.$
1350. $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$ 1351. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$
1352. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\tan x}{\tan a} \right)^{\cot(x-a)}.$ 1353. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$
1354. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$ 1355. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$
1356. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right).$ 1357. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right].$
1358. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x-a} \quad (a > 0).$ 1359. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$
1360. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \quad (a > 0).$ 1361. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x.$
1362. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tanh x)^x.$

$$1363. \quad (a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}; \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arsinh} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}, \text{ 其中 } \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$1364. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}. \quad 1365. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$1366. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cosh x} \right)^{\frac{1}{x^2}}. \quad 1367. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cosh x}{\sqrt[m]{\cosh x} - \sqrt[n]{\cosh x}}.$$

$$1368. \quad (a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\coth x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}.$$

$$1369. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right].$$

$$1370. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} \right].$$

1371. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 通过坐标原点 $(0, 0)$ [$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$], 且在此有倾角 α , 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}$.

1372. 若当 $x \rightarrow +0$ 时, 连续曲线 $y = f(x)$ 通过坐标原点 $(0, 0)$ [$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$], 并且当 $0 < x < \varepsilon$ 时, 此曲线完全位于两直线 $y = -kx$ 及 $y = kx$ ($k \neq \infty$) 所组成的锐角之内, 证明: $\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1$.

1373.1. 证明: 若函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 存在, 则

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

1373.2. 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 的可微性.

1373.3. 求曲线

$$y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} \quad (x > 0)$$

的渐近线.

1374. 研究运用洛必达法则于下列各例的可能性:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x) + e^{-x^2} \sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x)e^{\sin x}}.$$

1375. 设有一弓形, 其弦长为 b , 拱高为 h , 半径为 R , 又有内接于此弓形的等腰三角形. 若当 R 不变时弓形的弧长趋于零, 求弓形面积与内接等腰三角形面积之比的极限. 利用所得结果推出弓形面积的近似公式:

$$S \approx \frac{2}{3}bh.$$

§10. 泰勒公式

1. 泰勒局部公式. 若: (1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $|x - x_0| < \varepsilon$ 内有定义; (2) $f(x)$ 在此邻域内有一直到 $n-1$ 阶的导数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$; (3) 在点 x_0 存在 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad (1)$$

其中 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ ($k = 0, 1, \dots, n$). 特别地, 当 $x_0 = 0$ 时, 有:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \quad (2)$$

在上述条件下, (1) 式是唯一的.

若在点 x_0 存在导数 $f^{(n+1)}(x_0)$, 则公式 (1) 中的余项可以取为 $O^*((x - x_0)^{n+1})$ 的形式.

从泰勒局部公式 (2) 得出下列五个重要的展开式:

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n);$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

2. 泰勒公式. 若: (1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义; (2) $f(x)$ 在此闭区间上有连续的导数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$; (3) 当 $a < x < b$ 时存在有限的导数 $f^{(n)}(x)$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

(拉格朗日余项), 或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_1(x-a))}{(n-1)!} (1-\theta_1)^{n-1} (x-a)^n \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

(柯西余项).

1376. 将多项式

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

改写为二项式 $x + 1$ 的非负整数次幂多项式.

写出下列函数按变量 x 的非负整数次幂的展开式, 到含有所指阶数的项为止:

1377. $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 到含 x^4 的项. $f^{(4)}(0)$ 等于什么?

1378. $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ 到含 x^2 的项.

1379. $\sqrt[m]{a^m+x}$ ($a > 0$) 到含 x^2 的项.

1380. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 到含 x^3 的项.

1381. e^{2x-x^2} 到含 x^5 的项. 1382. $\frac{x}{e^x-1}$ 到含 x^4 的项.

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 到含 x^{13} 的项. 1384. $\ln \cos x$ 到含 x^6 的项.

1385. $\sin(\sin x)$ 到含 x^3 的项. 1386. $\tan x$ 到含 x^5 的项.

1387. $\ln \frac{\sin x}{x}$ 到含 x^6 的项.

1388. 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按照 $x-1$ 的非负整数次幂展开式的前三项.

1389. 将函数 $f(x) = x^x - 1$ 按照 $x-1$ 的非负整数次幂展开至含有 $(x-1)^3$ 的项.

1390. 在点 $x=0$ 的邻域中, 用抛物线 (二次多项式) 近似地代替函数

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

1391. 按公式 $\frac{1}{x}$ 的非负整数次幂展开函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ ($x > 0$) 到含 $\frac{1}{x^3}$ 的项.

1392. 求函数 $f(h) = \ln(x+h)$ ($x > 0$) 按增量 h 的正整数次幂的展开式, 到含 h^n 的项 (n 为正整数).

1393.1. 设

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h) \quad (0 < \theta < 1),$$

且 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

1393.2. 设当 $x \rightarrow 0$ 时有 $f(x) = 1 + kx + o(x)$. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = e^k.$$

1393.3. 设 $f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, 且当 $x \in (0, 1)$ 时 $|f''(x)| \leq A$. 证明: 当 $0 \leq x \leq 1$ 时

$$|f'(x)| \leq \frac{A}{2}.$$

1393.4. 设 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 为二阶可微函数, 且

$$M_k = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty \quad (k = 0, 1, 2).$$

证明不等式:

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2.$$

1394. 估计下列近似公式的绝对误差:

$$(a) e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \text{ 当 } 0 \leq x \leq 1;$$

$$(b) \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \text{ 当 } |x| \leq \frac{1}{2};$$

$$(c) \tan x \approx x + \frac{x^3}{3}, \text{ 当 } |x| \leq 0.1;$$

$$(d) \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \text{ 当 } 0 \leq x \leq 1.$$

1395.1. 近似公式

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

对于怎样的 x 精确到 0.0001?

1395.2. 证明公式:

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r \quad (n \geq 2, a > 0, x > 0),$$

其中 $0 < r < \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{x^2}{a^{2n-1}}$.

1396. 利用泰勒公式近似地计算并估计误差:

$$(a) \sqrt[3]{30};$$

$$(b) \sqrt[5]{250};$$

$$(c) \sqrt[12]{4000};$$

$$(d) \sqrt{e};$$

$$(e) \sin 18^\circ;$$

$$(f) \ln 1.2;$$

$$(g) \arctan 0.8;$$

$$(h) \arcsin 0.45;$$

$$(i) 1.1^{1.2}.$$

1397. 计算:

$$(a) e, \text{ 精确到 } 10^{-9};$$

$$(b) \sin 1^\circ, \text{ 精确到 } 10^{-8};$$

$$(c) \cos 9^\circ, \text{ 精确到 } 10^{-5};$$

$$(d) \sqrt{5}, \text{ 精确到 } 10^{-4};$$

$$(e) \lg 11, \text{ 精确到 } 10^{-5}.$$

利用展开式 I—V, 求下列极限:

$$1398. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

$$1399. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

$$1400. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

$$1401. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}).$$

$$1402. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right].$$

$$1403. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} \quad (a > 0).$$

$$1404. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

$$1405. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$1406. (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right);$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}; \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(\tan x) - x}{x^3}.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 求出无穷小量 y 的形如 Cx^n (C 为常数) 的主项, 设:

$$1407. y = \tan(\sin x) - \sin(\tan x). \quad 1408. y = (1+x)^x - 1.$$

$$1409. y = 1 - \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}.$$

1410.1. 当选择怎样的系数 a 与 b 时, 量

$$x - (a + b \cos x) \sin x$$

对于 x 为 5 阶无穷小?

1410.2. 选择系数 A 和 B , 使当 $x \rightarrow 0$ 时成立渐近公式

$$\cot x = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + O(x^5).$$

1410.3. 系数 A, B, C, D 为何值时, 在 $x \rightarrow 0$ 时有渐近公式

$$e^x = \frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} + O(x^5)?$$

1411. 假设 $|x|$ 为小量, 推出下列各式的简单的近似公式:

$$(a) \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} \quad (R > 0); \quad (b) \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$(c) \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right]; \quad (d) \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{x}{100} \right)}.$$

1412. 假设 x 的绝对值为小量, 推出形如

$$x = \alpha \sin x + \beta \tan x$$

且精确到 x^5 项的近似公式. 应用此公式近似地求小角度弧长.

1413. 估计下面的切比雪夫法则的相对误差: 圆弧长近似地等于以此弧的弦为底、以其拱高的 $\sqrt{\frac{4}{3}}$ 为高的等腰三角形的两腰之和.

§11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值

1. 极值存在的必要条件. 若函数在点 x_0 的双侧邻域中有定义, 且对于某区域 $0 < |x - x_0| < \delta$ 内的一切点 x , 下列不等式分别成立:

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{或} \quad f(x) > f(x_0),$$

则说函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值 (极大值或极小值). 在有极值的点导数 $f'(x_0) = 0$ (若它存在).

2. 极值存在的充分条件.

第一法则: 若

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内有定义并且是连续的, 且在 x_0 点导数 $f'(x_0) = 0$ 或不存在 (临界点);

(2) $f(x)$ 在区域 $0 < |x - x_0| < \delta$ 内有有限的导数 $f'(x)$;

(3) 导数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号, 则函数 $f(x)$ 的性质可用下表表示出来:

	导数的符号		结 论
	$x < x_0$	$x > x_0$	
I	+	+	无极值
II	+	-	极大值
III	-	+	极小值
IV	-	-	无极值

第二法则: 若函数 $f(x)$ 有二阶导数 $f''(x)$, 并且在点 x_0 下列条件成立:

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{与} \quad f''(x_0) \neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在这些点有极值, 并且当 $f''(x_0) < 0$ 时有极大值, 当 $f''(x_0) > 0$ 时有极小值.

第三法则: 设函数 $f(x)$ 在某区间 $|x - x_0| < \delta$ 内有导数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$, 在点 x_0 有导数 $f^{(n)}(x_0)$, 并且

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

这时, (1) 若 n 为偶数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值, 并且当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时有极大值, 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时有极小值; (2) 若 n 为奇数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值.

3. 绝对极值. 在闭区间 $[a, b]$ 上, 连续函数 $f(x)$ 或者在其临界点 (就是导数 $f'(x)$ 等于零或不存在的点) 达到最大 (最小) 值, 或者在所给闭区间的端点 a 或 b 达到其最大 (最小) 值.

研究下列函数的极值:

1414. $y = 2 + x - x^2$.

1415. $y = (x - 1)^3$.

1416. $y = (x - 1)^4$.

1417. $y = x^m(1 - x)^n$ (m 及 n 为正整数).

1418. $y = \cos x + \cosh x$.

1419. $y = (x + 1)^{10}e^{-x}$.

1420. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ (n 为正整数)

1421. $y = |x|$.

1422. $y = x^{\frac{1}{3}}(1 - x)^{\frac{2}{3}}$.

1423. 设

$$f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x) \quad (n \text{ 为正整数}),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x = x_0$ 时连续, 且 $\varphi(x_0) \neq 0$. 研究此函数在点 $x = x_0$ 的极值.

1424. 设

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)},$$

x_0 为函数 $f(x)$ 的临界点, 即

$$P_1(x_0) = 0, \quad Q(x_0) \neq 0.$$

证明:

$$\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0).$$

1425. 可否断定: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值, 则在此点的某充分小邻域内, 函

数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧递增, 而在其右侧递减? 研究一个例子:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

1426. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 有极小值, 而函数

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 没有极值, 尽管

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad g^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

作出这些函数的图像.

1427. 研究下列函数的极值并作出其图像:

$$(a) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \cos \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1428. 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} |x| \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 处的极值, 并作出此函数的图像.

求下列函数的极值:

1429. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$

1430. $y = 2x^2 - x^4.$

1431. $y = x(x-1)^2(x-2)^3.$

1432. $y = x + \frac{1}{x}.$

1433. $y = \frac{2x}{1+x^2}.$

1434. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}.$

1435. $y = \sqrt{2x - x^2}.$

1436. $y = x\sqrt[3]{x-1}.$

1437. $y = xe^{-x}.$

1438. $y = \sqrt{x} \ln x.$

1439. $y = \frac{\ln^2 x}{x}.$

1440. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x.$

1441. $y = \frac{10}{1 + \sin^2 x}.$

1442. $y = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$

1443. $y = e^x \sin x.$

1444. $y = |x|e^{-|x-1|}.$

求下列函数在所给闭区间上的最大值和最小值:

1445. $f(x) = 2^x, [-1, 5]$.

1446. $f(x) = x^2 - 4x + 6, [-3, 10]$.

1447. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|, [-10, 10]$.

1448. $f(x) = x + \frac{1}{x}, [0.01, 100]$.

1449. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}, [-1, 1]$.

求下列函数在所给区间上的下确界 (inf) 与上确界 (sup):

1450. $f(x) = xe^{-0.01x}, (0, +\infty)$.

1451. $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}, (0, +\infty)$.

1452. $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}, (0, +\infty)$.

1453. $f(x) = e^{-x^2} \cos x^2, (-\infty, +\infty)$.

1454.1. 求函数 $f(\xi) = \frac{1 + \xi}{3 + \xi^2}$ 在区间 $x < \xi < +\infty$ 内的下确界与上确界. 作出下列函数的图像:

$$M(x) = \sup_{x < \xi < +\infty} f(\xi), \quad m(x) = \inf_{x < \xi < +\infty} f(\xi).$$

1454.2. 设

$$M_k = \sup_x |f^{(k)}(x)| \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

若 $f(x) = e^{-x^2}$, 求 M_0, M_1 和 M_2 .

1455. 求以下各数列的最大项:

(a) $\frac{n^{10}}{2^n} (n = 1, 2, \cdots)$;

(b) $\frac{\sqrt{n}}{n + 10\,000} (n = 1, 2, \cdots)$;

(c) $\sqrt[n]{n} (n = 1, 2, \cdots)$.

1456.1. 证明下列不等式:

(a) $|3x - x^3| \leq 2 (|x| \leq 2)$;

(b) $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1 (0 \leq x \leq 1, p > 1)$;

(c) $x^m(a-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n} (0 \leq x \leq a, m > 0, n > 0)$;

(d) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a (x > 0, a > 0, n > 1)$;

(e) $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

1456.2. 证明不等式:

$$\frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

1457. 求多项式

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2)$$

在闭区间 $[-2, 1]$ 上“与零的偏差”，就是求

$$E_P = \sup_{-2 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

1458. 应当选择怎样的系数 q , 使多项式

$$P(x) = x^2 + q$$

在闭区间 $[-1, 1]$ 上与零的偏差最小, 即

$$E_P = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| = \min?$$

1459. 数

$$\Delta = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

称为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的绝对偏差.

求函数 $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = x^3$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的绝对偏差.

1460. 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上用线性函数

$$g(x) = (x_1 + x_2)x + b$$

近似地代替函数

$$f(x) = x^2,$$

使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的绝对偏差 (参阅上题) 最小, 并求此最小的绝对偏差.

1461. 求函数

$$f(x) = \max\{2|x|, |1 + x|\}$$

的极小值.

确定下列各方程实根的数目, 并划分出这些根所在的区间:

1462. $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0.$

1463. $x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0.$

1464. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0.$

1465. $x^5 - 5x = a.$

1466. $\ln x = kx.$

1467. $e^x = ax^2.$

1468. 当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $\sin^3 x \cdot \cos x = a.$

1469. $\cosh x = kx.$

1470. 在什么条件下方程

$$x^3 + px + q = 0$$

有: (a) 一个实根; (b) 三个实根? 在平面 (p, q) 上画出相应的区域.

§12. 依据函数的特征点作函数图像

为了作出函数 $y = f(x)$ 的图像, 必须: (1) 确定此函数的存在域并研究函数在其存在域边界点的性质; (2) 查明图像的对称性和周期性; (3) 求出函数的间断点及连续的区间; (4) 确定函数的零点及同号区间; (5) 求出极值点并查明函数上升和下降的区间; (6) 确定拐点及函数图像凹凸的区间; (7) 若有渐近线存在则求出渐近线; (8) 指出函数图像的各种特性.

记有星号的题, 只求其拐点的近似值.

作出下列函数的图像:

1471. $y = 3x - x^3.$

1473. $y = (x + 1)(x - 2)^2.$

1475*. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}.$

1477. $y = \frac{x^4}{(1 + x)^3}.$

1479. $y = \frac{x^2(x - 1)}{(x + 1)^2}.$

1481. $y = \frac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}.$

1483. $y = \frac{1}{1 + x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1 - x}.$

1485. (a) $y = \pm\sqrt{8x^2 - x^4};$

1486. $y = \pm\sqrt{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}.$

1488. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}.$

1490. $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}} + (x - 1)^{\frac{2}{3}}.$

1492. $y = \frac{x^2\sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}.$

1494. $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3 + x}}.$

1496*. $y = \sqrt{\frac{x^4 + 3}{x^2 + 1}}.$

1498. $y = (7 + 2\cos x)\sin x.$

1500. $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x.$

1502. $y = \sin x \cdot \sin 3x.$

1504. (a) $y = \frac{\cos x}{\cos 2x};$

1505. $y = 2x - \tan x.$

1507. $y = (1 + x^2)e^{-x^2}.$

1509. (a) $y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x};$

1510. $y = \frac{e^x}{1 + x}.$

1472. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}.$

1474*. $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}.$

1476*. $y = \frac{x}{(1 + x)(1 - x)^2}.$

1478. $y = \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^4.$

1480. $y = \frac{x}{(1 - x^2)^2}.$

1482*. $y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}.$

1484. $y = (x - 3)\sqrt{x}.$

(b) $y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

1487*. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}.$

1489. $y = (x + 2)^{\frac{2}{3}} - (x - 2)^{\frac{2}{3}}.$

1491. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$

1493. $y = \frac{|1 + x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}.$

1495. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x + 1}}.$

1497. $y = \sin x + \cos^2 x.$

1499. $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x.$

1501. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

1503. $y = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$

(b) $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$

1506. $y = e^{2x - x^2}.$

1508. $y = x + e^{-x}.$

(b) $y = e^{-2x}\sin^2 x.$

1511. $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$

1512. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1513. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

1514. $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

1515. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

1516. $y = x + \arctan x$.

1517. $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arccot} x$.

1518. $y = x \arctan x$.

1519. $y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$.

1520. $y = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

1521. $y = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$.

1522. $y = 2\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$.

1523*. $y = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$.

1524. $y = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$.

1525. $y = \arccos \frac{1 - x}{1 - 2x}$.

1526. $y = x^x$.

1527. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

1528. $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

1529*. $y = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (x > 0)$.

1530*. $y = \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$ (不研究凹凸性).

作出下列参数方程所表示的曲线:

1531. $x = \frac{(t+1)^2}{4}, y = \frac{(t-1)^2}{4}$.

1532. $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$.

1533*. $x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1}$.

1534. $x = \frac{t^2}{1-t^2}, y = \frac{1}{1+t^2}$.

1535. $x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-2t}$.

1536. $x = a \cos 2t, y = a \cos 3t \quad (a > 0)$.

1537. $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t$.

1538. $x = t \ln t, y = \frac{\ln t}{t}$.

1539. $x = \frac{a}{\cos^3 t}, y = a \tan^3 t \quad (a > 0)$.

1540. $x = a(\sinh t - t), y = a(\cosh t - 1) \quad (a > 0)$.

把下列曲线方程化为参数方程, 然后作出这些曲线的图像:

1541. $x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$.

提示: 令 $y = tx$.

1542. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

1543. $x^2 y^2 = x^3 - y^3$.

1544. $x^y = y^x \quad (x > 0, y > 0)$.

1545. 作出曲线 $\cosh^2 x - \cosh^2 y = 1$ 的图像.

作出下列用极坐标 (φ, r) ($r \geq 0$) 表示的函数的图像:

1546. $r = a + b \cos \varphi \quad (0 < a \leq b)$.

1547. $r = a \sin 3\varphi \quad (a > 0)$.

1548. $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} \quad (a > 0).$

1549*. $r = a \frac{\tanh \varphi}{\varphi - 1}$, 其中 $\varphi > 1 \quad (a > 0).$

1550*. $\varphi = \arccos \frac{r-1}{r^2}.$

作出下列曲线族的图像 (a 为参变量):

1551. $y = x^2 - 2x + a.$

1552. $y = x + \frac{a^2}{x}.$

1553. $y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)}.$

1554. $y = \frac{x}{2} + e^{-ax}.$

1555. $y = xe^{-\frac{x}{a}}.$

§13. 函数的极大值与极小值问题

1556. 证明: 若函数 $f(x)$ 不为负, 则函数

$$F(x) = Cf^2(x) \quad (C > 0)$$

与函数 $f(x)$ 有相同的极值点.

1557. 证明: 若当 $-\infty < x < +\infty$ 时函数 $\varphi(x)$ 严格单调递增, 则函数

$$f(x) \text{ 和 } \varphi(f(x))$$

有相同的极值点.

1558. 若二正数之和等于常数 a , 求此二数的 m 次幂与 n 次幂 ($m > 0, n > 0$) 之积的最大值.

1559. 若二正数之积等于常数 a , 求此二数的 m 次幂与 n 次幂 ($m > 0, n > 0$) 之和的最小值.

1560. 当对数之底取何值时存在这样的数, 它本身和它的对数相等?

1561. 从面积为给定值 S 的一切矩形中, 求其周长为最小者.

1562. 若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数, 求具有最大面积的直角三角形.

1563. 要使容积为给定值 V 的圆柱形闭合容器具有最小的表面积, 其尺寸如何?

1564. 在不超过半圆的给定弓形内作出具有最大面积的内接矩形.

1565. 在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

内作出具有最大面积而边平行于椭圆轴的内接矩形.

1566. 在底边为 b 及高为 h 的三角形内作出具有最大周长的内接矩形. 研究此问题有解的可能性.

1567. 从直径为 d 的原木 (圆形横截面) 切出横截面为矩形的梁, 此矩形的底等于 b , 高等于 h . 若梁的强度^①与 bh^2 成正比, 问梁的尺寸如何其强度最大?

1568. 在半径为 R 的半球中作出具有最大体积且底为正方形的内接长方体.

^①此处的强度指梁的截面模量. —— 译注

1569. 在半径为 R 的球内作出具有最大体积的内接圆柱体.

1570. 在半径为 R 的球内作出具有最大表面积的内接圆柱体.

1571. 在已知球外作出具有最小体积的外切圆锥体.

1572. 求母线为给定值 l 的圆锥之最大体积.

1573. 在顶角为 2α 底半径为 R 的直圆锥体中作出具有最大表积的内接圆柱体.

1574. 求从点 $M(p, p)$ 到抛物线 $y^2 = 2px$ 的最短距离.

1575. 求从点 $A(2, 0)$ 到圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的最短与最长距离.

1576. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$) 的经过顶点 $B(0, -b)$ 的最大弦.

1577. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的点 $M(x, y)$ 引切线, 使由此切线与坐标轴构成的三角形具有最小的面积.

1578. 直径相同的圆柱体与半球体拼接在一起构成一物体, 其体积为 V . 要使此物体具有最小的表面积, 其尺寸如何?

1579. 设明渠的横截面为等腰梯形, 渠中流水的横截面面积为 S , 水面的高为 h . 问水渠侧边的倾角 φ 如何, 才使其横截面边界被水浸湿的部分具有最小的长度?

1580. 设封闭曲线所围面积为 S , 则该曲线的周长与面积同为 S 的圆的周长之比称为封闭曲线的弯曲度.

设等腰梯形 $ABCD$ ($AD // BC$) 的底边 $AD = 2a$, 锐角 $BAD = \alpha$, 问等腰梯形的形状如何, 才有最小的弯曲度?

1581. 从半径为 R 的圆中应切去怎样的扇形, 才能使余下的部分可卷成一漏斗, 其容积为最大?

1582. 从南至北的铁路经过 B 城, 工厂 A 距此铁路的最短距离为 a , 距偏北方的 B 城所在纬线的距离为 b . 为了从 A 至 B 运输货物最经济, 从工厂修建一条专线铁路. 若每吨货物沿专线运输的价格是 p 元/km, 而沿常规铁路为 q 元/km ($p > q$), 则支线应向常规铁路取怎样的角度 φ ?

1583. 二船各以恒定的速度 u 和 v 沿直线前进, 二者前进方向所成的角为 θ . 若在某时刻它们到其路线交点的距离分别为 a 和 b , 求二船的最小距离.

1584. 在 A 与 B 二点处各有一光源, 其发光强度分别为 S_1 与 S_2 . 在线段 $AB = a$ 上求出最小照度的点 M .

1585. 发光点位于半径为 R 与 r ($R > r$) 的二互不相交之球的连心线上, 并在此二球的外面. 此发光点的位置如何, 才可使二球表面上被照明部分之和为最大?

1586. 设圆桌面的半径为 a . 应当在正对桌面中央多高的地方安置电灯, 才可使桌面边缘的照度为最大?

提示: 照度可用下列公式表示:

$$I = I_0 \frac{\sin \varphi}{r^2},$$

式中 φ 为光线对桌面的倾角, r 为光源与被照面的距离, I_0 为光源的发光强度.

1587. 向宽为 a 的河修建一宽为 b 的运河, 二者成直角相交, 问能驶进这运河的船, 其最大的长度如何?

1588. 船航行一昼夜的耗费由两部分组成: 固定部分等于 a 元, 变动部分与速度的立方成正比增加. 在怎样的速度 v 时, 航行最为经济?

1589. 重量为 P 的物体位于粗糙的水平面上, 需用力把物体从原位置移动. 若物体摩擦因子等于 k , 问作用力对水平面的倾斜程度如何, 才使所需的力为最小?

1590. 有一茶杯, 其形状是半径为 a 的半球, 在茶杯中放一长为 $l > 2a$ 的杆, 求杆的平衡位置.

§14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线

1. n 阶相切. 对于两曲线 $y = \varphi(x)$ 及 $y = \psi(x)$, 若在点 x_0 有

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad \text{且} \quad \varphi^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0),$$

便说这两曲线在此点 n 阶相切 (在严格的意义上讲!). 在这种情形下, 当 $x \rightarrow x_0$ 时有:

$$\varphi(x) - \psi(x) = O^*(x - x_0)^{n+1}.$$

2. 曲率圆. 若圆周

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2$$

与已知曲线 $y = f(x)$ 二阶或更高阶相切, 则称此圆为在相应点的曲率圆. 这个圆的半径

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

称为曲率半径, 而量 $k = \frac{1}{R}$ 称为曲率.

3. 渐屈线. 曲率圆中心 (ξ, η) (曲率中心)

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

的轨迹称为已知曲线 $y = f(x)$ 的渐屈线.

1591. 选择直线

$$y = kx + b$$

的参数 k 与 b , 使它与曲线

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

二阶或更高阶相切.

1592. 应该怎样选择系数 a, b 和 c , 才能使抛物线

$$y = ax^2 + bx + c$$

在点 $x = x_0$ 与曲线 $y = e^x$ 二阶相切?

1593. 下列曲线与 Ox 轴在点 $x = 0$ 相切的阶如何:

$$(a) y = 1 - \cos x; \quad (b) y = \tan x - \sin x; \quad (c) y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

1594. 证明: 曲线

$$y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 与 Ox 轴相切的阶为无穷大.

1595. 求双曲线

$$xy = 1$$

在下列各点的曲率半径和曲率中心:

(a) $M(1, 1)$;

(b) $N(100, 0.01)$.

求下列曲线的曲率半径:

1596. 抛物线 $y^2 = 2px$.

1597. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a \geq b > 0$).

1598. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1599. 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1600. 椭圆 $x = a \cos t, y = b \sin t$.

1601. 摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

1602. 圆的渐伸线 $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)$.

1603. 证明: 二次曲线

$$y^2 = 2px - qx^2$$

的曲率半径与法线段的立方成正比.

1604. 写出以极坐标表示的曲线的曲率半径公式.

求下列极坐标方程所表示的曲线的曲率半径:

1605. 阿基米德螺线 $r = a\varphi$.

1606. 对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$.

1607. 心脏线 $r = a(1 + \cos \varphi)$.

1608. 双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

1609. 在曲线 $y = \ln x$ 上求曲率最大的点.

1610. 三次抛物线 $y = \frac{kx^3}{6}$ ($0 \leq x < +\infty, k > 0$) 的最大曲率等于 $\frac{1}{1000}$, 求达到此最大曲率的点 x .

求下列各曲线的渐屈线方程:

1611. 抛物线 $y^2 = 2px$.

1612. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1613. 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1614. 曳物线 $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

1615. 对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$.

1616. 证明: 摆线

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

的渐屈线仍为一摆线, 仅其位置与所给摆线不同而已.

§15. 方程的近似解法

1. 比例法 (弦线法). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且

$$f(a)f(b) < 0,$$

而当 $a < x < b$ 时, $f'(x) \neq 0$, 则方程

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

在区间 (a, b) 内有而且仅有一个实根 ξ . 可取下面的值作为此根的第一个近似值:

$$x_1 = a + \delta_1$$

式中 $\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$.

进而, 对区间 (a, x_1) 和 (x_1, b) 中使函数 $f(x)$ 在其两端异号的那一个区间运用此方法, 得到根 ξ 的第二个近似值 x_2 , 并不断重复此过程. 对于第 n 个近似值 x_n , 有以下估计:

$$|x_n - \xi| \leq \left| \frac{f(x_n)}{m} \right|, \quad (2)$$

其中 $m = \inf_{a < x < b} |f'(x)|$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

2. 牛顿法 (切线法). 若在闭区间 $[a, b]$ 内 $f''(x) \neq 0$, 且 $f(a)f''(a) > 0$, 则可取数值

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

作为方程 (1) 的根 ξ 的第一个近似值 ξ_1 .

重复利用这个方法, 很快就得到趋于根 ξ 的一系列近似值 ξ_n ($n = 1, 2, \dots$), 这些近似值的精度可根据公式 (2) 来估计.

为了大致确定方程的根, 最好作出函数 $y = f(x)$ 的图像.

利用比例法求下列方程的根 (精确到 0.001):

1617. $x^3 - 6x + 2 = 0$.

1618. $x^4 - x - 1 = 0$.

1619. $x - 0.1 \sin x = 2$.

1620. $\cos x = x^2$.

利用牛顿法求下列方程的根 (精确到所指定的精度):

1621. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x$ (精确到 10^{-3}). 1622. $x \lg x = 1$ (精确到 10^{-4}).

1623. $\cos x \cdot \cosh x = 1$ (精确到 10^{-3}) (二正根).

1624. $x + e^x = 0$ (精确到 10^{-5}). 1625. $x \tanh x = 1$ (精确到 10^{-6}).

1626. 求方程

$$\tan x = x$$

最小的三个正根 (精确到 0.001).

1627. 求方程

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$$

的二正根 (精确到 10^{-3}).

第三章 不定积分

§1. 最简单的不定积分

1. 不定积分的概念. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义且连续, $F(x)$ 是它的原函数, 即当 $a < x < b$ 时 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad a < x < b,$$

其中 C 为任意常数.

2. 不定积分的基本性质.

$$(a) \quad d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx; \quad (b) \quad \int d\Phi(x) = \Phi(x) + C;$$

$$(c) \quad \int Af(x) dx = A \int f(x) dx \quad (A \text{ 为常数}, A \neq 0);$$

$$(d) \quad \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

3. 最简积分表.

$$\text{I. } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0).$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctan x + C, \\ -\operatorname{arccot} x + C. \end{cases}$$

$$\text{IV. } \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

$$\text{V. } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$$

$$\text{VI. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C.$$

$$\text{VII. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1); \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

$$\text{VIII. } \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\text{IX. } \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

$$\text{XI. } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

$$\text{XII. } \int \sinh x dx = \cosh x + C.$$

$$\text{XIII. } \int \cosh x dx = \sinh x + C.$$

$$\text{XIV. } \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C. \quad \text{XV. } \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C.$$

4. 积分的基本方法.

(a) 引入新变量法. 若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

则

$$\int f(u) du = F(u) + C, \text{ 式中 } u = \varphi(x) \text{ 是连续可微函数.}$$

(b) 分项积分法. 若

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

则

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

(c) 代换法. 若 $f(x)$ 连续, 令

$$x = \varphi(t), \text{ 式中 } \varphi(t) \text{ 及其导数 } \varphi'(t) \text{ 皆连续,}$$

则得:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

(d) 分部积分法. 若 u 和 v 为 x 的可微函数, 则

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

利用最简积分表, 求下列积分:

1628. $\int (3 - x^2)^3 dx.$

1629. $\int x^2(5 - x)^4 dx.$

1630. $\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x) dx.$

1631. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$

1632. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx.$

1633. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx.$

1634. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx.$

1635. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx.$

1636. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx.$

1637. $\int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx.$

1638. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$

1639. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}.$

1640. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^2}.$

1641. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx.$

1642. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$

1643. $\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx.$

1644. $\int (2^x + 3^x)^2 dx.$

1645. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$

1646. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$

1647. $\int (1 + \sin x + \cos x) dx.$

1648. $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx \quad (0 \leq x \leq \pi).$

1649. $\int \cot^2 x dx.$

1650. $\int \tan^2 x dx.$

1651. $\int (a \sinh x + b \cosh x) dx.$

1652. $\int \tanh^2 x dx.$

1653. $\int \coth^2 x dx.$

1654. 证明: 若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

则

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad (a \neq 0).$$

求下列积分:

1655. $\int \frac{dx}{x + a}.$

1656. $\int (2x - 3)^{10} dx.$

1657. $\int \sqrt[3]{1 - 3x} dx.$

1658. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 5x}}.$

1659. $\int \frac{dx}{(5x - 2)^{\frac{5}{2}}}.$

1660. $\int \frac{\sqrt[5]{1 - 2x + x^2}}{1 - x} dx.$

1661. $\int \frac{dx}{2 + 3x^2}.$

1662. $\int \frac{dx}{2 - 3x^2}.$

1663. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}.$

1664. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}.$

1665. $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx.$

1666. $\int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx.$

1667. $\int \frac{dx}{\sin^2 \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}.$

1668. $\int \frac{dx}{1 + \cos x}.$

1669. $\int \frac{dx}{1 - \cos x}.$

1670. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}.$

1671. $\int [\sinh(2x + 1) + \cosh(2x - 1)] dx.$

1672. $\int \frac{dx}{\cosh^2 \frac{x}{2}}.$

1673. $\int \frac{dx}{\sinh^2 \frac{x}{2}}.$

用适当地变换被积函数的方法求下列积分:

1674. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1676. $\int \frac{x dx}{3-2x^2}.$

1678. $\int \frac{x dx}{4+x^2}.$

1680. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$

1681. $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}.$

1683. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

1685. $\int \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$

1687. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$

1689. $\int xe^{-x^2} dx.$

1691. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$

1693. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$

1695. $\int \sin^5 x \cos x dx.$

1697. $\int \tan x dx.$

1699. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$

1700. (a) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx;$

(c) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx;$

1701. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\cot x}}.$

1703. $\int \frac{dx}{\sin x}.$

1705. $\int \frac{dx}{\sinh x}.$

1675. $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx.$

1677. $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}.$

1679. $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}.$

提示: $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 d(\sqrt{x}).$

1682. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

1684. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$

1686. $\int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}.$

1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

1690. $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}.$

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

1694. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$

1696. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx.$

1698. $\int \cot x dx.$

(b) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx;$

(d) $\int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}} dx.$

1702. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}.$

1704. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

1706. $\int \frac{dx}{\cosh x}.$

1707. $\int \frac{\sinh x \cosh x}{\sqrt{\sinh^4 x + \cosh^4 x}} dx.$

1709. $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx.$

1711. $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx.$

1712. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$

1713. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx.$

1715. $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}.$

1717. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}.$

1719. $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx.$

1708. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x \sqrt{\tanh^2 x}}.$

1710. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$

提示: $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = d\left(x - \frac{1}{x}\right).$

1714. $\int \frac{x^4 dx}{(x^5+1)^4}.$

1716. $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

1718. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

1720. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}.$

用分项积分法计算下列积分:

1721. (a) $\int x^2(2-3x^2)^2 dx;$

(b) $\int x(1-x)^{10} dx.$

1722. $\int \frac{1+x}{1-x} dx.$

1723. $\int \frac{x^2}{1+x} dx.$

1724. $\int \frac{x^3}{3+x} dx.$

1725. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx.$

1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx.$

1727. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx.$

1728. $\int \frac{x^5}{x+1} dx.$

1729. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$

1730. $\int x\sqrt{2-5x} dx.$

提示: $x \equiv -\frac{1}{5}(2-5x) + \frac{2}{5}.$

1731. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x}}.$

1732. $\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx.$

1733. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$

提示: $1 \equiv \frac{1}{4}[(x+3) - (x-1)].$

1734. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}.$

1735. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$

1736. $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}.$

1737. $\int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)}.$

$$1738. \int \frac{x dx}{x^4 + 3x^2 + 2}. \quad 1739. \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} \quad (a \neq b).$$

$$1740. \int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (a^2 \neq b^2). \quad 1741. \int \sin^2 x dx.$$

$$1742. \int \cos^2 x dx. \quad 1743. \int \sin x \sin(x+\alpha) dx.$$

$$1744. \int \sin 3x \cdot \sin 5x dx. \quad 1745. \int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} dx.$$

$$1746. \int \sin \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cos \left(3x + \frac{\pi}{4}\right) dx. \quad 1747. \int \sin^3 x dx.$$

$$1748. \int \cos^3 x dx. \quad 1749. \int \sin^4 x dx.$$

$$1750. \int \cos^4 x dx. \quad 1751. \int \cot^2 x dx.$$

$$1752. \int \tan^3 x dx. \quad 1753. \int \sin^2 3x \sin^3 2x dx.$$

$$1754. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}. \quad \text{提示: } 1 \equiv \sin^2 x + \cos^2 x.$$

$$1755. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}. \quad 1756. \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$$

$$1757. \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx. \quad 1758. \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$1759. \int \frac{dx}{1+e^x}. \quad 1760. \int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx.$$

$$1761. \int \sinh^2 x dx. \quad 1762. \int \cosh^2 x dx.$$

$$1763. \int \sinh x \sinh 2x dx. \quad 1764. \int \cosh x \cdot \cosh 3x dx.$$

$$1765. \int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x}.$$

用适当的代换, 求下列积分:

$$1766. \int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx. \quad 1767. \int x^3 (1-5x^2)^{10} dx.$$

$$1768. \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx. \quad 1769. \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$1770. \int x^5 (2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx. \quad 1771. \int \cos^5 x \cdot \sqrt{\sin x} dx.$$

$$1772. \int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx. \quad 1773. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$$

1774. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

1775. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}$.

1776. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

1777. $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

用三角函数代换 $x = a \sin t$, $x = a \tan t$, $x = a \sin^2 t$ 等, 求下列积分 (参数为正的):

1778. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

1779. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

1780. $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

1781. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

1782. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$.

1783. $\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx$.

1784. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

提示: 用代换 $x-a = (b-a) \sin^2 t$.

1785. $\int \sqrt{(x-a)(b-a)} dx$.

用双曲函数代换 $x = a \sinh t$, $x = a \cosh t$ 等, 求下列积分 (参数为正的):

1786. $\int \sqrt{a^2+x^2} dx$.

1787. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

1788. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx$.

1789. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

1790. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx$.

提示: 令 $x+a = (b-a) \sinh^2 t$.

用分部积分法, 求下列积分:

1791. $\int \ln x dx$.

1792. $\int x^n \ln x dx$ ($n \neq -1$).

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

1794. $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$.

1795. $\int x e^{-x} dx$.

1796. $\int x^2 e^{-2x} dx$.

1797. $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

1798. $\int x \cos x dx$.

1799. $\int x^2 \sin 2x dx$.

1800. $\int x \sinh x dx$.

1801. $\int x^3 \cosh 3x dx$.

1802. $\int \arctan x dx$.

1803. $\int \arcsin x dx$.

1804. $\int x \arctan x dx$.

1805. $\int x^2 \arccos x dx.$

1806. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$

1807. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$

1808. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

1809. $\int \arctan \sqrt{x} dx.$

1810. $\int \sin x \cdot \ln(\tan x) dx.$

求下列积分:

1811. $\int x^5 e^{x^3} dx.$

1812. $\int (\arcsin x)^2 dx.$

1813. $\int x(\arctan x)^2 dx.$

1814. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$

1815. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

1816. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.$

1817. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$

1818. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx.$

1819. $\int \sqrt{x^2+a} dx.$

1820. $\int x^2 \sqrt{a^2+x^2} dx.$

1821. $\int x \sin^2 x dx.$

1822. $\int e^{\sqrt{x}} dx.$

1823. $\int x \sin \sqrt{x} dx.$

1824. $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

1825. $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

1826. $\int \sin(\ln x) dx.$

1827. $\int \cos(\ln x) dx.$

1828. $\int e^{ax} \cos bx dx.$

1829. $\int e^{ax} \sin bx dx.$

1830. $\int e^{2x} \sin^2 x dx.$

1831. $\int (e^x - \cos x)^2 dx.$

1832. $\int \frac{\operatorname{arccot} e^x}{e^x} dx.$

1833. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$

1834. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$

1835. $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx.$

在求下面的积分时, 需要把二次三项式化成标准形式, 并利用下列公式:

I. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$

II. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0).$

III. $\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C.$

$$\text{IV. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$\text{V. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a > 0).$$

$$\text{VI. } \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0).$$

$$\text{VII. } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$\text{VIII. } \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a > 0).$$

求下列积分:

$$1836. \int \frac{dx}{a + bx^2} \quad (ab \neq 0).$$

$$1837. \int \frac{dx}{x^2 - x + 2}.$$

$$1838. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}.$$

$$1839. \int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1}.$$

$$1840. \int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} dx.$$

$$1841. \int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}.$$

$$1842. \int \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 2}.$$

$$1843. \int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2}.$$

$$1844. \int \frac{dx}{3 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}.$$

$$1845. \int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 3}.$$

$$1846. \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} \quad (b \neq 0).$$

$$1847. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

$$1848. \int \frac{dx}{\sqrt{x + x^2}}.$$

$$1849. \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}}.$$

1850. 证明: 若

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),$$

则

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C,$$

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C.$$

$$1851. \int \frac{x dx}{\sqrt{5 + x - x^2}}.$$

$$1852. \int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx.$$

$$1853. \text{(a) } \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - 3x^2 - 2x^4}};$$

$$\text{(b) } \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin x + \cos^2 x}}.$$

$$1854. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}}.$$

$$1855. \int \frac{x + x^3}{\sqrt{1 + x^2 - x^4}} dx.$$

$$1856. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$1857. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

1858. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

1859. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

1860. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

1861. $\int \sqrt{2+x-x^2} dx$.

1862. $\int \sqrt{2+x+x^2} dx$.

1863. $\int \sqrt{x^4+2x^2-1} x dx$.

1864. $\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}} dx$.

1865. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx$.

§2. 有理函数的积分法

利用待定系数法, 求下列积分:

1866. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$.

1867. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1868. $\int \frac{x^{10} dx}{x^2+x-2}$.

1869. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$.

1870. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx$.

1871. $\int \frac{x dx}{x^3-3x+2}$.

1872. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$.

1873. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2} \right)^2 dx$.

1874. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

1875. $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$.

1876. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx$.

1877. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

1878. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

1879. $\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

1880. $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

1881. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

1882. $\int \frac{x dx}{x^3-1}$.

1883. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

1884. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

1885. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

1886. $\int \frac{dx}{x^6+1}$.

1887. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$.

1888. $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

1889. $\int \frac{x^2 dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$.

1890. 在什么条件下, 积分

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} dx$$

为有理函数?

利用奥斯特罗格拉茨基方法求积分:

$$1891. \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

$$1892. \int \frac{dx}{(x^3+1)^2}.$$

$$1893. \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

$$1894. \int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2}.$$

$$1895. \int \frac{dx}{(x^4+1)^2}.$$

$$1896. \int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$$

$$1897. \int \frac{dx}{(x^4-1)^3}.$$

分出下列积分的代数部分:

$$1898. \int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx.$$

$$1899. \int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}.$$

$$1900. \int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2} dx.$$

1901. 计算积分

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

1902. 在什么条件下, 积分

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2} dx$$

为有理函数?

利用不同方法, 计算下列积分:

$$1903. \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx.$$

$$1904. \int \frac{x dx}{x^8-1}.$$

$$1905. \int \frac{x^3 dx}{x^8+3}.$$

$$1906. \int \frac{x^2+x}{x^6+1} dx.$$

$$1907. \int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)} dx.$$

$$1908. \int \frac{x^4 dx}{(x^{10}-10)^2}.$$

$$1909. \int \frac{x^{11} dx}{x^8+3x^4+2}.$$

$$1910. \int \frac{x^9 dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}.$$

$$1911. \int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1} dx.$$

$$1912. \int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2} dx.$$

$$1913. \int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}.$$

$$1914. \int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}.$$

$$1915. \int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx.$$

$$1916. \int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)} dx.$$

1917. $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx.$

1918. $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} dx.$

1919. $\int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1} dx.$

1920. $\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$

1921. 试导出用于计算积分

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad (a \neq 0)$$

的递推公式. 利用这个公式计算:

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}.$$

提示: 利用恒等式 $4a(ax^2 + bx + c) \equiv (2ax + b)^2 + (4ac - b^2)$.1922. 利用代换 $t = \frac{x+a}{x+b}$ 计算积分:

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n} \quad (m \text{ 和 } n \text{ 为正整数}).$$

利用这个代换, 求

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$$

1923. 若 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式, 计算

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx.$$

提示: 利用泰勒公式.

1924. 设 $R(x) = R^*(x^2)$, 其中 R^* 为有理函数. 函数 $R(x)$ 分解为有理公式时有什么特性?

1925. 计算

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

式中 n 为正整数.

§3. 无理函数的积分法

利用化被积函数为有理函数的方法, 求下列积分:

1926. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

1927. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$

1928. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx.$

1929. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx.$

1930. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}.$

1931. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx.$

1932. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

1933. $\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} \quad (a > 0).$

1934. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} \quad (n \text{ 为正整数}).$

$$1935. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}. \quad \text{提示: 令 } x = \left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2.$$

1936. 考虑积分

$$\int R[x(x-a)^{\frac{p}{n}}, (x-b)^{\frac{q}{n}}] dx,$$

其中 R 为有理函数, p, q, n 为整数. 证明: 若 $p+q=kn$, 其中 k 为整数, 则该积分为初等函数.

求最简单二次无理式的积分:

$$1937. \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

$$1938. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$1939. \int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1940. \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx.$$

$$1941. \int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}.$$

$$1942. \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx.$$

利用公式

$$\int \frac{P_n(x)}{y} dx = Q_{n-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y},$$

式中 $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ 为 n 次多项式, $Q_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式, λ 为常数, 求下列积分:

$$1943. \int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$$

$$1944. \int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$1945. \int x^4 \sqrt{a^2-x^2} dx.$$

$$1946. \int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx.$$

$$1947. \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}.$$

$$1948. \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}.$$

$$1949. \int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}.$$

$$1950. \int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$$

1951. 在什么条件下, 积分

$$\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

是代数函数?

分解有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为最简分式, 求积分 $\int \frac{P(x)}{Q(x)y} dx$, 式中 $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$:

$$1952. \int \frac{x dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

$$1953. \int \frac{x dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}.$$

$$1954. \int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx.$$

$$1955. \int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$$

$$1956. \int \frac{x dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

$$1957. \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

1958. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 1}}$.

1959. $\int \frac{dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + x^2}}$.

1960. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 1} dx$.

化二次三项式为标准形式, 计算下列积分:

1961. $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x - 1}}$.

1962. $\int \frac{x^2 dx}{(4 - 2x + x^2)\sqrt{2 + 2x - x^2}}$.

1963. $\int \frac{(x + 1) dx}{(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

1964. 利用分式线性代换 $x = \frac{\alpha + \beta t}{1 + t}$ 计算积分:

$$\int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

1965. 求

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2)\sqrt{2x^2 - 2x + 5}}$$

利用欧拉代换:

(1) 若 $a > 0$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{ax} + z$;

(2) 若 $c > 0$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xz \pm \sqrt{c}$;

(3) $\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = z(x - x_1)$,

求下列积分:

1966. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

1967. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

1968. $\int x\sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$.

1969. $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$.

1970. $\int \frac{dx}{[1 + \sqrt{x(1+x)}]^2}$.

利用不同方法, 计算下列积分:

1971. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}$.

1972. $\int \frac{x dx}{(1 - x^3)\sqrt{1 - x^2}}$.

1973. $\int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}}$.

1974. $\int \frac{x + \sqrt{1 + x + x^2}}{1 + x + \sqrt{1 + x + x^2}} dx$.

1975. $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx$.

1976. $\int \frac{(x^2 - 1) dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}$.

1977. $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^2 - 1)\sqrt{x^4 + 1}}$.

1978. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1}}$.

$$1979. \int \frac{(x^2 + 1) dx}{x\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

1980. 证明: 积分

$$\int R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d}) dx \quad (R \text{ 为有理函数})$$

的求法归结为有理函数的积分法.

二项微分式的积分

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (m, n \text{ 和 } p \text{ 为有理数})$$

仅在下列三种情形下可化为有理函数的积分 (切比雪夫定理):

第一种情形, p 为整数. 此时令 $x = z^N$, 其中 N 为分数 m 和 n 的公分母.

第二种情形, $\frac{m+1}{n}$ 为整数. 此时令 $a + bx^n = z^N$, 其中 N 为分数 p 的分母.

第三种情形, $\frac{m+1}{n} + p$ 为整数. 此时利用代换 $ax^{-n} + b = z^N$, 其中 N 为分数 p 的分母.

若 $n = 1$, 则这些情形等价于: (1) p 为整数; (2) m 为整数; (3) $m + p$ 为整数.

计算下列积分:

$$1981. \int \sqrt{x^3 + x^4} dx.$$

$$1982. \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx.$$

$$1983. \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}.$$

$$1984. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$1985. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}.$$

$$1986. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}.$$

$$1987. \int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1 + x^6}}.$$

$$1988. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}}.$$

$$1989. \int \sqrt[3]{3x - x^3} dx.$$

1990. 在什么情形下, 积分

$$\int \sqrt{1 + x^m} dx \quad (m \text{ 为有理数})$$

为初等函数?

§4. 三角函数的积分法

形如

$$\int \sin^m x \cos^n x dx \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数})$$

的积分可利用巧妙的变换或运用递推公式计算.

求下列积分:

$$1991. \int \cos^5 x dx.$$

$$1992. \int \sin^6 x dx.$$

1993. $\int \cos^6 x dx.$

1994. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

1995. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx.$

1996. $\int \sin^5 x \cos^5 x dx.$

1997. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$

1998. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$

1999. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

2000. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$

2001. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$

2002. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$

2003. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}.$

2004. $\int \tan^5 x dx.$

2005. $\int \cot^6 x dx.$

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx.$

2007. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}.$

2008. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

2009. $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}.$

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\tan x}}.$

2011. 推出下列积分的递推公式:

$$(a) I_n = \int \sin^n x dx; \quad (b) K_n = \int \cos^n x dx \quad (n > 2).$$

利用这些公式计算

$$\int \sin^6 x dx \quad \text{和} \quad \int \cos^8 x dx.$$

2012. 推出下列积分的递推公式:

$$(a) I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}; \quad (b) K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \quad (n > 2).$$

利用这些公式计算

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \quad \text{和} \quad \int \frac{dx}{\cos^7 x}.$$

为了计算下面的积分, 可以运用公式:

$$\text{I. } \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\text{II. } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\text{III. } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$

求积分:

2013. $\int \sin 5x \cos x dx.$

2014. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$

2015. $\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx.$

2016. $\int \sin x \sin(x + a) \sin(x + b) dx.$

2017. $\int \cos^2 ax \cos^2 bx dx.$

2018. $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 3x dx.$

为了计算下面的积分, 可以运用恒等式:

$$\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin[(x + \alpha) - (x + \beta)],$$

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos[(x + \alpha) - (x + \beta)].$$

求积分:

2019. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}.$

2020. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}.$

2021. $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}.$

2022. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}.$

2023. $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}.$

2024. $\int \tan x \tan(x+a) dx.$

形如

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (R \text{ 为有理函数})$$

的积分, 在一般情形下可利用代换 $\tan \frac{x}{2} = t$ 化为有理函数的积分.

(a) 若等式

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

或

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

成立, 则最好利用相应的代换 $\cos x = t$ 或 $\sin x = t$.

(b) 若等式

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$$

成立, 则最好利用代换 $\tan x = t$.

求积分:

2025. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$

2026. $\int \frac{dx}{(2 + \cos x)\sin x}.$

2027. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx.$

2028. $\int \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x},$ (a) $0 < \varepsilon < 1;$ (b) $\varepsilon > 1.$

2029. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx.$

2030. $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$

2031. $\int \frac{\cos^2 x dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2}.$

2032. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$

2033. $\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2}.$

2034. $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}.$

2035. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

2036. $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx$.

2037. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$.

2038. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$.

2039. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

2040. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2}$.

2041. 把分母化为对数的形式, 求积分

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

2042. 证明:

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C,$$

式中 A, B, C 为常数.提示: 令 $a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x)$, 式中 A 和 B 为常数.

求积分:

2043. (a) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx$;

(b) $\int \frac{\sin x}{\sin x - 3 \cos x} dx$.

2044. $\int \frac{dx}{3 + 5 \tan x}$.

2045. $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx$.

2046. 证明:

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx$$

$$= Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$

式中 A, B, C 都是常系数.

求积分:

2047. $\int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3} dx$.

2048. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} dx$.

2049. $\int \frac{2 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x - 2} dx$.

2050. 证明:

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx = A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

式中 A, B, C 都是常系数.

求积分:

2051. $\int \frac{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx$.

2052. $\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2 \cos^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx$.

2053. 证明: 若 $(a - c)^2 + b^2 \neq 0$, 则

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx = A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

式中 A, B 为待定系数, λ_1, λ_2 为方程

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

的根, 而

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x, \quad k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} \quad (i = 1, 2).$$

求积分:

$$2054. \int \frac{2 \sin x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx. \quad 2055. \int \frac{(\sin x + \cos x) dx}{2 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}.$$

$$2056. \int \frac{\sin x - 2 \cos x}{1 + 4 \sin x \cos x} dx.$$

2057. 证明:

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x + B \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n-2}},$$

式中 A, B, C 为待定系数.

$$2058. \text{ 求 } \int \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^3}.$$

2059. 若 n 为大于 1 的正整数, 证明:

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x}{(a + b \cos x)^{n-1}} + B \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-2}},$$

其中 $|a| \neq |b|$, 并求出系数 A, B 和 C .

求积分:

$$2060. \int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

$$2061. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}} dx.$$

$$2062. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}}.$$

$$2063. \int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2} \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

$$2064. \int \frac{\cos^{n-1} \frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1} \frac{x-a}{2}} dx.$$

$$\text{提示: 令 } t = \frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}}.$$

2065. 推出积分

$$I_n = \int \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^n dx \quad (n \text{ 为正整数})$$

的递推公式.

§5. 各种超越函数的积分法

2066. 证明: 若 $P(x)$ 为 n 次多项式, 则

$$\int P(x)e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right] + C.$$

2067. 证明: 若 $P(x)$ 为 n 次多项式, 则

$$\begin{aligned} \int P(x) \cos ax dx &= \frac{\sin ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots \right] \\ &\quad + \frac{\cos ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \cdots \right] + C, \\ \int P(x) \sin ax dx &= -\frac{\cos ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots \right] \\ &\quad + \frac{\sin ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \cdots \right] + C. \end{aligned}$$

求积分:

2068. $\int x^3 e^{3x} dx.$

2069. $\int (x^2 - 2x + 2)e^{-x} dx.$

2070. $\int x^5 \sin 5x dx.$

2071. $\int (1 + x^2)^2 \cos x dx.$

2072. $\int x^7 e^{-x^2} dx.$

2073. $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx.$

2074. $\int e^{ax} \cos^2 bx dx.$

2075. $\int e^{ax} \sin^3 bx dx.$

2076. $\int xe^x \sin x dx.$

2077. $\int x^2 e^x \cos x dx.$

2078. $\int xe^x \sin^2 x dx.$

2079. $\int (x - \sin x)^3 dx.$

2080. $\int \cos^2 \sqrt{x} dx.$

2081. 证明: 若 R 为有理函数, 数 a_1, a_2, \dots, a_n 为可公约的, 则积分

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx$$

是初等函数.

求下列积分:

2082. $\int \frac{dx}{(1 + e^x)^2}.$

2083. $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx.$

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}.$

2085. $\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}.$

2086. $\int \frac{1 + e^{\frac{x}{2}}}{(1 + e^{\frac{x}{4}})^2} dx.$

2087. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$

2088. $\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx.$

2089. $\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} dx.$

2090. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}}.$

2091. 证明: 若 R 为有理函数, 其分母仅有实根, 则积分

$$\int R(x)e^{ax} dx$$

可用初等函数和超越函数

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = \text{li}(e^{ax}) + C, \quad \text{式中 } \text{li } x = \int \frac{dx}{\ln x}$$

来表示.

2092. 若 $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$, a_0, a_1, \cdots, a_n 为常数, 则在什么情形下, 积分

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x dx$$

为初等函数?

求积分:

2093. $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx.$

2094. $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx.$

2095. $\int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx.$

2096. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx.$

2097. $\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx.$

求含有 $\ln f(x)$, $\arctan f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$ 等函数的积分, 其中 $f(x)$ 为代数函数:

2098. $\int \ln^n x dx$ (n 为正整数).

2099. $\int x^3 \ln^3 x dx.$

2100. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx.$

2101. $\int \ln [(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}] \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

2102. $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$

2103. $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx.$

2104. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

2105. $\int x \arctan(x+1) dx.$

2106. $\int \sqrt{x} \arctan \sqrt{x} dx.$

2107. $\int x \arcsin(1-x) dx.$

2108. $\int \arcsin \sqrt{x} dx.$

2109. $\int x \arccos \frac{1}{x} dx.$

2110. $\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx.$

2111. $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

2112. $\int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

2113. $\int x \arctan x \ln(1+x^2) dx.$

2114. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

2115. $\int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

求含有双曲函数的积分:

2116. $\int \sinh^2 x \cosh^2 x dx.$

2117. $\int \cosh^4 x dx.$

2118. $\int \sinh^3 x dx.$

2119. $\int \sinh x \sinh 2x \sinh 3x dx.$

2120. $\int \tanh x dx.$

2121. $\int \coth^2 x dx.$

2122. $\int \sqrt{\tanh x} dx.$

2123. (a) $\int \frac{dx}{\sinh x + 2 \cosh x};$

(b) $\int \frac{dx}{\sinh^2 x - 4 \sinh x \cosh x + 9 \cosh^2 x};$

(c) $\int \frac{dx}{0.1 + \cosh x};$

(d) $\int \frac{\cosh x dx}{3 \sinh x - 4 \cosh x}.$

2124. $\int \sinh ax \sin bx dx.$

2125. $\int \sinh ax \cos bx dx.$

§6. 求函数积分的各种例子

求积分:

2126. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}.$

2127. $\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3}.$

2128. $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}.$

2129. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

2130. $\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx.$

2131. $\int \frac{x+2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx.$

2132. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx.$

2133. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

2134. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$

2135. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}.$

2136. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}.$

2137. $\int \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} dx.$

2138. $\int \frac{(1+x) dx}{x + \sqrt{x+x^2}}.$

2139. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx.$

2140. $\int (2x + 3) \arccos(2x - 3) dx.$
2141. $\int x \ln(4 + x^4) dx.$
2142. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$
2143. $\int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$
2144. $\int x \sqrt{x^2 + 1} \ln \sqrt{x^2 - 1} dx.$
2145. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1 - x}} dx.$
2146. $\int \frac{dx}{(2 + \sin x)^2}.$
2147. $\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx.$
2148. $\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}}.$
2149. $\int \frac{ax^2 + b}{x^2 + 1} \arctan x dx.$
2150. $\int \frac{ax^2 + b}{x^2 - 1} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| dx.$
2151. $\int \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx.$
2152. $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$
2153. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}} dx.$
2154. $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$
2155. $\int \frac{x^4 \arctan x}{1 + x^2} dx.$
2156. $\int \frac{x \arctan x}{(1 + x^2)^2} dx.$
2157. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{(1 - x^2)^2} dx.$
2158. $\int \sqrt{1 - x^2} \arcsin x dx.$
2159. $\int x(1 + x^2) \operatorname{arccot} x dx.$
2160. $\int x^x(1 + \ln x) dx.$
2161. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$
2162. $\int \frac{\arctan e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1 + e^x)} dx.$
2163. $\int \frac{dx}{(e^{x+1} + 1)^2 - (e^{x-1} + 1)^2}.$
2164. $\int \sqrt{\tanh^2 x + 1} dx.$
2165. $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx.$
2166. $\int |x| dx.$
2167. $\int x|x| dx.$
2168. $\int (x + |x|)^2 dx.$
2169. $\int \{|1 + x| - |1 - x|\} dx.$
2170. $\int e^{-|x|} dx.$
2171. $\int \max(1, x^2) dx.$
2172. $\int \varphi(x) dx$, 其中 $\varphi(x)$ 为数 x 到最近整数的距离.
2173. $\int [x] |\sin \pi x| dx$ ($x \geq 0$).
2174. $\int f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1, \\ 1 - |x|, & |x| > 1. \end{cases}$

$$2175. \int f(x) dx, \text{ 式中 } f(x) = \begin{cases} 1, & -\infty < x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

$$2176. \text{ 求 } \int x f''(x) dx.$$

$$2177. \text{ 求 } \int f'(2x) dx.$$

$$2178. \text{ 设 } f'(x^2) = \frac{1}{x} \ (x > 0), \text{ 求 } f(x).$$

$$2179. \text{ (a) 设 } f'(\sin^2 x) = \cos^2 x, \text{ 求 } f(x).$$

$$\text{ (b) 设 } f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ x, & 1 < x < +\infty, \end{cases} \text{ 且 } f(0) = 0, \text{ 求 } f(x).$$

2180. 设 $f(x)$ 为单调的连续函数, $f^{-1}(x)$ 为其反函数. 证明: 若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

则

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$

研究例子:

$$(a) f(x) = x^n \ (n > 0);$$

$$(b) f(x) = e^x;$$

$$(c) f(x) = \arcsin x;$$

$$(d) f(x) = \operatorname{artanh} x.$$

第四章 定积分

§1. 定积分是积分和的极限

1. 黎曼积分. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 则数

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \quad (x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}, \Delta x_i = x_{i+1} - x_i) \quad (1)$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分^①.

极限 (1) 存在的充分必要条件为: 下积分和

$$\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

及上积分和

$$\bar{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

当 $\max |\Delta x_i| \rightarrow 0$ 时有共同的极限, 其中

$$m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x), \quad M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x).$$

若等式 (1) 右端的极限存在, 则函数 $f(x)$ 称为相应区间上的可积函数 (常义的). 例如, (a) 连续函数, (b) 具有有限个间断点的有界函数, (c) 单调有界的函数, 这些都是任意有限闭区间上的可积函数. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上无界, 则它在 $[a, b]$ 上不可积 (常义的).

2. 可积条件. 函数 $f(x)$ 在已知闭区间 $[a, b]$ 上可积的充分必要条件为成立等式

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

式中 ω_i 为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅.

2181. 把区间 $[-1, 4]$ 分为 n 个相等的子区间, 并取这些子区间中点的坐标作自变量 ξ_i 的值 ($i = 0, 1, \cdots, n-1$). 求函数 $f(x) = 1 + x$ 在此区间上的积分和 S_n .

^①这里的 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ 称为积分和. —— 译注

2182. 把所给区间分为 n 个相等的部分, 求下列函数 $f(x)$ 在相应区间上的下积分和 \underline{S}_n 与上积分和 \overline{S}_n :

(a) $f(x) = x^3 \quad (-2 \leq x \leq 3);$ (b) $f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq 1);$

(c) $f(x) = 2^x \quad (0 \leq x \leq 10).$

2183. 把闭区间 $[1, 2]$ 分为 n 份, 使这 n 份的长构成一等比数列, 求函数 $f(x) = x^4$ 在此区间上的下积分和. 当 $n \rightarrow \infty$ 时此和的极限等于什么?

2184. 从积分的定义出发, 求

$$\int_0^T (v_0 + gt) dt,$$

其中 T, v_0, g 为常数.

以适当的方法分割积分区间, 并视积分为相应积分和的极限, 计算下列定积分:

2185. $\int_{-1}^2 x^2 dx.$

2186. $\int_0^1 a^x dx \quad (a > 0).$

2187. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

2188. $\int_0^x \cos t dt.$

2189. $\int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0 < a < b).$ 提示: 令 $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$

2190. $\int_a^b x^m dx \quad (0 < a < b; m \neq -1).$

提示: 选择诸分点, 使它们的横坐标 x_i 构成一等比数列.

2191. $\int_a^b \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b).$

2192. 计算泊松积分

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx,$$

考虑两种情形: (a) $|\alpha| < 1;$ (b) $|\alpha| > 1.$

提示: 分解多项式 $\alpha^{2n} - 1$ 为二次因式.

2193.1. 设函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\theta_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx,$$

其中 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}, x_i \leq \theta_i \leq x_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$ 且 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (x_0 = a, x_n = b).$

2193.2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有界且单调, 证明:

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2193.3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界并凹 (参考习题 1312), 证明:

$$(b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2193.4. 设 $f(x) \in C^{(2)}[1, +\infty),$ 且当 $x \in [1, +\infty)$ 时 $f(x) \geq 0, f'(x) \geq 0,$

$f''(x) \leq 0$. 证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{2}f(n) + \int_1^n f(x) dx + O(1).$$

2193.5. 设 $f(x) \in C^{(1)}[a, b]$,

$$\Delta_n = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right),$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n\Delta_n$.

2194. 证明: 不连续函数

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$$

在区间 $[0, 1]$ 上可积.

2195. 证明: 黎曼函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数,} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \quad (m \text{ 及 } n (n \geq 1) \text{ 为互素的整数}) \end{cases}$$

在任何有限的区间上可积.

2196. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上可积.

2197. 证明: 狄利克雷函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数,} \\ 1, & x \text{ 为有理数} \end{cases}$$

在任何区间上不可积.

2198. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$f_n(x) = \sup f(x) \quad (x_i \leq x \leq x_{i+1}),$$

其中 $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ ($i = 0, 1, \dots, n; n = 1, 2, \dots$). 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2199. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则存在连续函数 $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 的序列, 使得在 $a \leq c \leq b$ 时

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c \varphi_n(x) dx.$$

2200. 证明: 若有界函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 则其绝对值 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上也可积, 并且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

2201. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上绝对可积, 即积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 存在. 这个函数在

$[a, b]$ 上是否为可积函数? 研究例子:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ -1, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

2202. 设函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[A, B]$ 上有定义并连续, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 并且当 $a \leq x \leq b$ 时 $A \leq f(x) \leq B$. 证明: 函数 $\varphi(f(x))$ 在 $[a, b]$ 上可积.

2203. 若函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 可积, 则函数 $f(\varphi(x))$ 是否也必定可积? 研究例子:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0, \end{cases}$$

$\varphi(x)$ 为黎曼函数 (见习题 2195).

2204. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[A, B]$ 上可积, 证明: 函数 $f(x)$ 有积分连续性, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^{a+h} |f(x+h) - f(x)| dx = 0,$$

其中 $[a, b] \subset [A, B]$.

2205. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 证明: 等式

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0$$

当且仅当对属于闭区间 $[a, b]$ 内函数 $f(x)$ 连续的一切点有 $f(x) = 0$ 时方成立.

§2. 利用不定积分计算定积分的方法

1. 牛顿-莱布尼茨公式. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且连续, $F(x)$ 为它的原函数, 即 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

当 $f(x) \geq 0$ 时, 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 在几何上表示由曲线 $y = f(x)$, Ox 轴及垂直于 Ox 轴的二直线 $x = a$ 和 $x = b$ 所围成的面积 S (图 9).

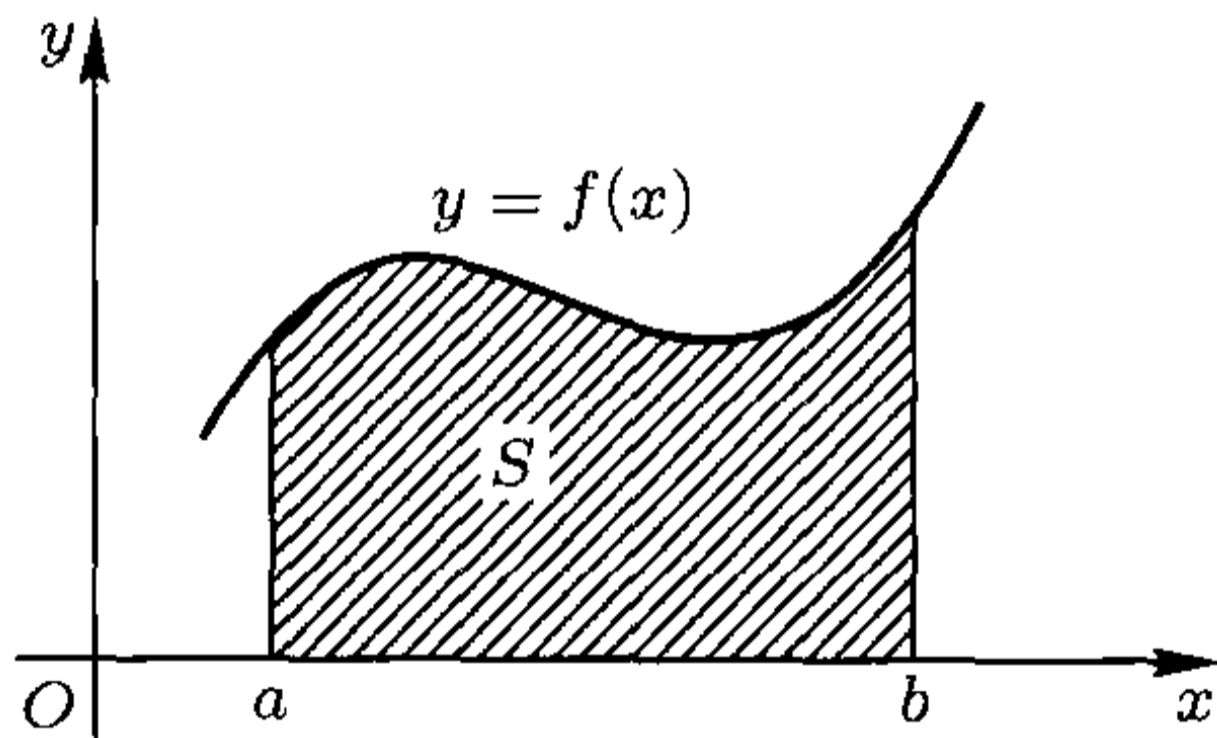


图 9

2. 分部积分法. 若 $f(x), g(x) \in C^{(1)}[a, b]$, 则

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx.$$

3. 变量代换. 若: (1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 函数 $\varphi(t)$ 及其导数 $\varphi'(t)$ 皆在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 其中 $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$; (3) 复合函数 $f[\varphi(t)]$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上有定义并连续, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

利用牛顿-莱布尼茨公式, 求下列定积分并绘出相应的曲边图形面积:

2206. $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx.$

2207. $\int_0^{\pi} \sin x dx.$

$$2208. \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$2209. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2210. \int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$2211. \int_0^2 |1-x| dx.$$

$$2212. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi). \quad 2213. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

$$2214. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \quad (|a| < 1, |b| < 1, ab > 0).$$

$$2215. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \neq 0).$$

2216. 对于下列定积分:

$$(a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}; \quad (b) \int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x dx}{2 + \tan^2 x}; \quad (c) \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1}{x} \right) dx,$$

说明为什么运用牛顿-莱布尼茨公式会得到不正确的结果.

$$2217. \text{求} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx. \quad 2218. \text{求} \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx.$$

利用定积分求下列和的极限值:

$$2219. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$2220. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right).$$

$$2221. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$$

$$2222. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

$$2223. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0).$$

$$2224. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right).$$

$$2225. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

$$2226. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right].$$

弃掉高阶无穷小量, 求下列和的极限值:

$$2227. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n} \right) \sin \frac{2\pi}{n^2} + \cdots + \left(1 + \frac{n-1}{n} \right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right].$$

$$2228. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}.$$

$$2229. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} \quad (x > 0).$$

$$2230. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right).$$

2231. 求:

$$\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx; \quad \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx; \quad \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx.$$

2232. 求:

$$(a) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt; \quad (b) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}; \quad (c) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

2233. 求:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}; \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt};$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx, \text{ 其中 } f(x) \in C[0, +\infty), \text{ 且当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时 } f(x) \rightarrow A.$$

2234. 证明: 当 $x \rightarrow \infty$ 时

$$\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}.$$

2235. 求

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}.$$

2236. 设 $f(x)$ 为连续正值函数. 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 函数

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

递增.

2237. 求:

$$(a) \int_0^2 f(x) dx, \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$(b) \int_0^1 f(x) dx, \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq t, \\ t \cdot \frac{1-x}{1-t}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2238. 计算下列积分并作出这些积分对参数 α 的函数关系 $I = I(\alpha)$ 的图像:

$$(a) I = \int_0^1 x|x-\alpha| dx; \quad (b) I = \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1+2\alpha \cos x + \alpha^2} dx;$$

$$(c) I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}}.$$

利用分部积分公式, 求下列定积分:

$$2239. \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx.$$

$$2240. \int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

$$2241. \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx.$$

$$2242. \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx.$$

$$2243. \int_0^1 \arccos x dx.$$

$$2244. \int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx.$$

利用适当的变量代换, 求下列定积分:

$$2245. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}}.$$

$$2246. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$2247. \int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$2248. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

$$2249. \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

2250. 令 $x - \frac{1}{x} = t$, 计算积分

$$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.$$

2251. 对于下列定积分和代换 $x = \varphi(t)$:

$$(a) \int_{-1}^1 dx, t = x^{\frac{2}{3}}; \quad (b) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}, x = \frac{1}{t}; \quad (c) \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}, \tan x = t.$$

说明为什么用 $\varphi(x)$ 代换 x 会引致不正确的结果.

2252. 在积分

$$\int_0^3 x \sqrt{1-x^2} dx$$

中, 令 $x = \sin t$ 是否可以?

2253. 若在积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 中作变量代换 $x = \sin t$, 可否取数 π 和 $\frac{\pi}{2}$ 作为新的积分上下限?

2254. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内连续, 则:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f(a+(b-a)x) dx.$$

2255. 证明等式:

$$\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx \quad (a > 0).$$

2256. 设 $f(x)$ 为闭区间 $[A, B] \supset [a, b]$ 上的连续函数, 当 $[a-x, b-x] \subset [A, B]$ 时, 求 $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y) dy$.

2257. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 则:

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx;$$

$$(b) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

2258. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-l, l]$ 上连续, 则

(1) 当函数 $f(x)$ 为偶函数时

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx,$$

(2) 当函数 $f(x)$ 奇函数时

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0.$$

给出这些事实的几何解释.

2259. 证明: 偶函数的原函数中之一为奇函数, 而奇函数的一切原函数皆为偶函数.

2260. 引入新变量

$$t = x + \frac{1}{x},$$

计算积分

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx.$$

2261. 在积分

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$$

中进行变量代换 $\sin x = t$.

2262. 计算积分

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left| \left[\cos x \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right]' \right| dx \quad (n \text{ 为正整数}).$$

2263. 求积分

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

2264. 设

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)},$$

求积分

$$\int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx.$$

2265. 证明: 若 $f(x)$ 为定义于 $-\infty < x < +\infty$ 而周期为 T 的连续的周期函数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx,$$

式中 a 为任意的数.

2266. 证明: 当 n 为奇数时, 函数

$$F(x) = \int_0^x \sin^n t dt \quad \text{和} \quad G(x) = \int_0^x \cos^n t dt$$

为以 2π 为周期的周期函数; 而当 n 为偶数时, 其中的每一个皆为线性函数与周期函数之和.

2267. 证明: 若 $f(x)$ 为以 T 为周期的连续的周期函数, 则函数

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

在一般情形下是线性函数与周期等于 T 的周期函数的和,

计算下列积分:

$$2268. \int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx.$$

$$2269. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2 + x + 1}.$$

$$2270. \int_1^e (x \ln x)^2 dx.$$

$$2271. \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx.$$

$$2272. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$2273. \int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx.$$

$$2274. \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx.$$

$$2275. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$$

$$2276. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$2277. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

$$2278. \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx.$$

$$2279. \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx.$$

$$2280. \int_0^{\ln 2} \sinh^4 x dx.$$

利用递推公式来计算下列依赖于取正整数值的参数 n 的积分:

$$2281. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

$$2282. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

$$2283. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx.$$

$$2284. I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

$$2285. I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2286. I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx.$$

$$2287. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^{2n+1} dx.$$

设 $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ 是实变量 x 的复函数, 其中 $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$, $i^2 = -1$, 则按定义有:

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx.$$

显然,

$$\operatorname{Re} \int f(x) dx = \int \operatorname{Re} f(x) dx, \quad \operatorname{Im} \int f(x) dx = \int \operatorname{Im} f(x) dx.$$

2288. 利用欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

证明:

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2\pi, & m = n \end{cases} \quad (n \text{ 及 } m \text{ 为整数}).$$

2289. 证明:

$$\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x} dx = \frac{e^{b(\alpha+i\beta)} - e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha + i\beta} \quad (\alpha \text{ 及 } \beta \text{ 为常数}).$$

利用欧拉公式:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

计算下列积分 (m 及 n 为正整数):

$$2290. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx.$$

$$2291. \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx.$$

$$2292. \int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx.$$

$$2293. \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx.$$

$$2294. \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx.$$

求下列积分 (n 为正整数):

$$2295. \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx.$$

$$2296. \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx.$$

$$2297. \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x dx.$$

$$2298. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cdot \cos 2nx dx.$$

2299. 多次利用分部积分法, 计算欧拉积分:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为正整数}).$$

2300. 勒让德多项式 $P_n(x)$ 可由以下公式定义:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

证明:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

2301. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 函数 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 内除了有限个内点 c_i ($i = 1, \dots, p$) 及点 a 与 b 外皆满足等式 $F'(x) = f(x)$, 而在这些点上 $F(x)$ 有第一类间断点

(广义原函数). 证明:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^p [F(c_i+0) - F(c_i-0)].$$

2302. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 而

$$F(x) = C + \int_a^x f(\xi) d\xi$$

为 $f(x)$ 的不定积分. 证明: 函数 $F(x)$ 连续, 且在函数 $f(x)$ 连续的一切点处成立等式

$$F'(x) = f(x).$$

问在函数 $f(x)$ 的间断点处函数 $F(x)$ 的导数是什么?

研究例子:

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$), 当 $x \neq \frac{1}{n}$ 时 $f(x) = 0$;

(b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

求下列有界不连续函数的不定积分:

2303. $\int \operatorname{sgn} x dx$.

2304. $\int \operatorname{sgn}(\sin x) dx$.

2305. $\int [x] dx$ ($x \geq 0$).

2306. $\int x[x] dx$ ($x \geq 0$).

2307. $\int (-1)^{[x]} dx$.

2308. $\int_0^x f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < l, \\ 0, & |x| > l. \end{cases}$

计算下列有界不连续函数的定积分:

2309. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx$.

2310. $\int_0^2 [e^x] dx$.

2311. $\int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx$.

2312. $\int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) dx$.

2313. $\int_1^{n+1} \ln[x] dx$ (n 为正整数).

2314. $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)] dx$.

2315. 求 $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$, 其中 E 为闭区间 $[0, 4\pi]$ 中使被积函数有意义的一切值的集合.

§3. 中值定理

1. 函数的平均值. 数

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值.

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则可求得一点 $c \in (a, b)$, 使得

$$M[f] = f(c).$$

2. 第一中值定理. 若: (1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界并可积; (2) 当 $a < x < b$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 不变号, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx,$$

式中 $m \leq \mu \leq M$ 且 $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$; (3) 此外, 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $\mu = f(c)$, 其中 $a \leq c \leq b$.

3. 第二中值定理. 若: (1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界并可积; (2) 当 $a < x < b$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 是单调的, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x) dx + \varphi(b-0) \int_\xi^b f(x) dx,$$

式中 $a \leq \xi \leq b$; (3) 此外, 若函数 $\varphi(x)$ 单调下降 (广义的) 且不为负, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b);$$

若函数 $\varphi(x)$ 单调上升 (广义的) 且不为负, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \varphi(b-0) \int_\xi^b f(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2316. 确定下列定积分的符号:

(a) $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$;

(b) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$;

(c) $\int_{-2}^2 x^3 2^x dx$;

(d) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx$.

2317. 确定哪个积分较大:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ 或 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$; (b) $\int_0^1 e^{-x} dx$ 或 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$;

(c) $\int_0^\pi e^{-x^2} \cos^2 x dx$ 或 $\int_\pi^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$.

2318. 求下列函数在所给区间内的平均值:

(a) $f(x) = x^2$, 在 $[0, 1]$ 上;

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, 在 $[0, 100]$ 上;

(c) $f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x$, 在 $[0, 2\pi]$ 上;

(d) $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$, 在 $[0, 2\pi]$ 上.

2319.1. 求椭圆之焦径

$$r = \frac{\rho}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

之长的平均值.

2319.2. 求初速度为 v_0 之自由落体的速度之平均值.

2320. 电流强度依规律

$$i = i_0 \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right)$$

变化, 其中 i_0 为振幅, t 为时间, T 为周期, φ 为初相. 求电流强度之平方的平均值.

2321. 设 $f(x) \in C[0, +\infty)$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. 研究例子 $f(x) = \arctan x$.

2322. 命

$$\int_0^x f(t) dt = x f(\theta x).$$

求 θ , 设: (a) $f(t) = t^n$ ($n > -1$); (b) $f(t) = \ln t$; (c) $f(t) = e^t$. $\lim_{x \rightarrow +0} \theta$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta$ 等于什么?

利用第一中值定理, 估计积分:

2323. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0.5 \cos x}$.

2324. $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx$.

2325. $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx$.

2326.1. 证明等式:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

2326.2. 求:

$$(a) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^2 + 1}; \quad (b) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x} \quad (a > 0, b > 0, f(x) \in C[0, 1]).$$

2327. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且在 (a, b) 上可微, 并且当 $a < x < b$ 时 $\varphi'(x) \geq 0$. 应用分部积分法及第一中值定理, 证明第二中值定理.

利用第二中值定理, 估计积分:

2328. $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

2329. $\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x dx$ ($\alpha \geq 0; 0 < a < b$).

2330. $\int_a^b \sin x^2 dx$ ($0 < a < b$).

2331. 设函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 和它们的平方在区间 $[a, b]$ 上可积. 证明柯西-布尼亚科夫斯基不等式:

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx.$$

2332. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续可微且 $f(a) = 0$. 证明不等式:

$$M^2 \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx,$$

其中 $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

2333. 证明等式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0 \quad (p > 0).$$

§4. 广义积分

1. 函数的广义可积性. 若函数 $f(x)$ 在每一个有限区间 $[a, b]$ 上依寻常的意义是可积的, 则可定义

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

若函数 $f(x)$ 在点 b 的邻域内无界且在每一个区间 $[a, b - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) 上依寻常的意义是可积的, 则取

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (2)$$

若极限 (1) 或 (2) 存在, 则相应的积分称为收敛的, 否则称为发散的 (在基本的意义上).

2. 柯西准则. 积分 (1) 收敛的充要条件为: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $b = b(\varepsilon)$, 当 $b' > b$ 及 $b'' > b$ 时, 下面的不等式成立:

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

对于形如 (2) 的积分, 柯西准则的表述是类似的.

3. 绝对收敛的判别法. 若 $|f(x)|$ 是广义可积的, 则函数 $f(x)$ 所对应的积分 (1) 或 (2) 称为绝对收敛的, 而且显然也是收敛的.

比较判别法 I. 设当 $x \geq a$ 时 $|f(x)| \leq F(x)$. 若 $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ 收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛.

比较判别法 II. 若 $\psi(x) > 0$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$, 则积分 $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ 及 $\int_a^{+\infty} \psi(x) dx$ 同时收敛或同时发散. 就特别情形来说, 若当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\varphi(x) \sim \psi(x)$, 则上面的结果也成立.

比较判别法 III. (a) 设

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

在这种情况下, 当 $p > 1$ 时, 积分 (1) 收敛; 当 $p \leq 1$ 时, 积分 (1) 发散.

(b) 设

$$\text{当 } x \rightarrow b-0 \text{ 时, } f(x) = O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right).$$

在这种情况下, 当 $p < 1$ 时, 积分 (2) 收敛; 当 $p \geq 1$ 时, 积分 (2) 发散.

4. 收敛性的较精密的判别法. 若 (1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 单调地趋于零; (2) 函数 $f(x)$ 有有界的原函数

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi,$$

则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx$$

收敛, 但一般地说, 并非绝对收敛.

在特殊情形下, 若 $p > 0$, 则积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad \text{及} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (a > 0)$$

收敛.

5. 柯西主值. 若对于任意的 $\varepsilon > 0$, 函数 $f(x)$ 的积分

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx \quad \text{及} \quad \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (a < c < b)$$

存在, 则柯西主值 (v.p.) 为

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right].$$

相仿地,

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx.$$

计算下列积分:

$$2334. \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (a > 0).$$

$$2335. \int_0^1 \ln x dx.$$

$$2336. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$2337. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2338. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}.$$

$$2339. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

$$2340. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$2341. \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

$$2342. \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

$$2343. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$$

$$2344. \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$2345. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$2346. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0).$$

$$2347. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0).$$

利用递推公式计算下列广义积分 (n 为正整数):

$$2348. I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

$$2349. I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \quad (ac-b^2 > 0).$$

$$2350. I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

$$2351. I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.$$

$$2352. I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^{n+1} x}.$$

$$2353. (a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx;$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx.$$

2354. 求

$$\int_E \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} e^{-\frac{x}{2}} dx,$$

其中 E 为区间 $(0, +\infty)$ 中使被积函数有意义的一切 x 值的集合.

2355. 证明等式:

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2 + 4ab}\right) dx,$$

其中 $a > 0, b > 0$ (假定等式左端的积分有意义).

2356. 数

$$M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) d\xi$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的平均值. 求下列函数在此区间上的平均值:

$$(a) f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2}); \quad (b) f(x) = \arctan x; \quad (c) f(x) = \sqrt{x} \sin x.$$

2357. 求:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt; \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1} e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}}; \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt,$$

其中 $\alpha > 0, f(t)$ 为闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数.

研究下列积分的收敛性:

2358.
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}.$$

2359.
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}}.$$

2360.
$$\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

2361.
$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

2362.
$$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx.$$

2363.
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$$

2364.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n} dx \quad (a \neq 0).$$

2365.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx.$$

2366.
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m \arctan x}{2+x^n} dx \quad (n \geq 0).$$

2367.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$$

2368.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

2369.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$$

2370. (a)
$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}.$$

2371.
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}.$$

2372.
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$$

2373.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$$

$$2374. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$$

$$2375. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}.$$

$$2376. (a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x - a_1|^{p_1} |x - a_2|^{p_2} \cdots |x - a_n|^{p_n}} \quad (a_1 < a_2 < \cdots < a_n);$$

$$(b) \int_0^{+\infty} x^\alpha |x - 1|^\beta dx.$$

2377. $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$, 式中 $P_m(x)$ 和 $P_n(x)$ 为次数分别为 m 及 n 的互素的多项式.

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性:

$$2378. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad \text{提示: } |\sin x| \geq \sin^2 x. \quad 2379. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x + 100} dx.$$

$$2380. (a) \int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx \quad (q \neq 0); \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x) dx;$$

$$(c) \int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx.$$

$$2381. \int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1 + x^q} dx \quad (q \geq 0).$$

$$2382. \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx.$$

2383. $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$, 式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为整多项式, 且若 $x \geq a \geq 0$, 则 $P_n(x) > 0$.

2384.1. 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则当 $x \rightarrow +\infty$ 时是否必有 $f(x) \rightarrow 0$? 研究例子:

$$(a) \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx; \quad (b) \int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx.$$

2384.2. 设 $f(x) \in C^{(1)}[x_0, +\infty)$, 当 $x_0 \leq x < +\infty$ 时 $|f'(x)| < C$, 且

$$\int_{x_0}^{+\infty} |f(x)| dx$$

收敛. 证明: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) \rightarrow 0$. 提示: 研究积分 $\int_{x_0}^{+\infty} f(x) f'(x) dx$.

2385. 设函数在 $[a, b]$ 上有定义且无界. 可否把函数 $f(x)$ 的收敛广义积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

看作相应积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \quad (x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}, \Delta x_i = x_{i+1} - x_i)$$

的极限?

2386. 设:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

收敛, 函数 $\varphi(x)$ 有界, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx \quad (2)$$

是否必定收敛? 举出适当的例子.

若积分 (1) 绝对收敛, 问积分 (2) 的收敛性如何?

2387. 证明: 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $f(x)$ 为单调函数, 则 $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

2388. 设函数 $f(x)$ 在区间 $0 < x \leq 1$ 内是单调函数, 且在点 $x = 0$ 的邻域内是无界的. 证明: 若

$$\int_0^1 f(x) dx$$

存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

2389. 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 $0 < x < a$ 内单调且有界, 且

$$\int_0^a x^p f(x) dx$$

存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

2390. 证明:

$$(a) \text{ v.p. } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0; \quad (b) \text{ v.p. } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0; \quad (c) \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0.$$

2391. 证明: 当 $x \geq 0$ 且 $x \neq 1$ 时存在

$$\text{li } x = \text{v.p. } \int_0^x \frac{d\xi}{\ln \xi}.$$

求下列积分:

$$2392. \text{ v.p. } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$2393. \text{ v.p. } \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$2394. \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx.$$

$$2395. \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \arctan x dx.$$

§5. 面积的计算法

1. 直角坐标系中的面积. 以两条连续的曲线 $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$ [$y_2(x) \geq y_1(x)$] 与两条直线 $x = a$ 和 $x = b$ ($a > b$) 为界的图形 $A_1A_2B_2B_1$ (图 10), 其面积等于

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx.$$

2. 用参数方程给出的曲线所围成的面积. 若 $x = x(t), y = y(t) (0 \leq t \leq T)$ 为一段光滑的简单封闭曲线 C 的参数方程, 并且沿曲线的环绕方向为逆时针方向, 使得该曲线所围图形总是位于其左侧 (图 11), 则此图形的面积 S 等于

$$S = - \int_0^T y(t)x'(t) dt = \int_0^T x(t)y'(t) dt,$$

或

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)] dt.$$

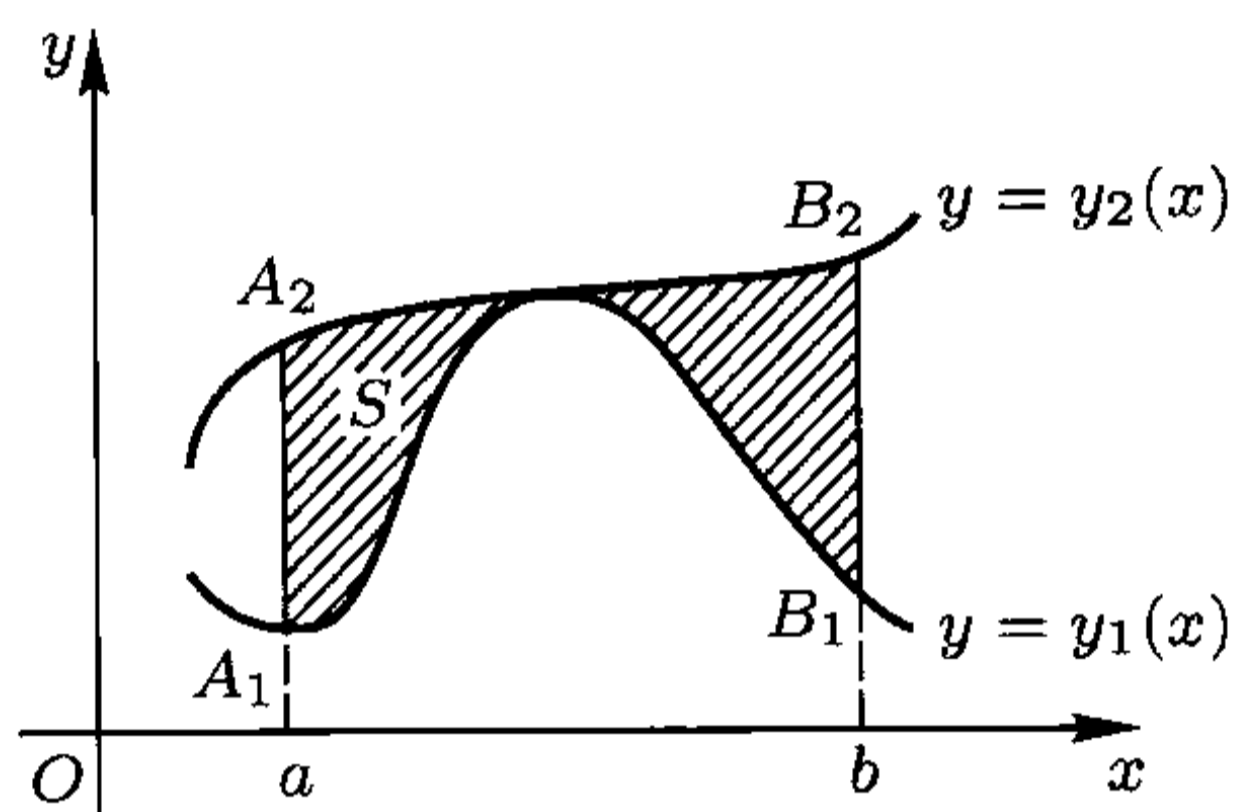


图 10

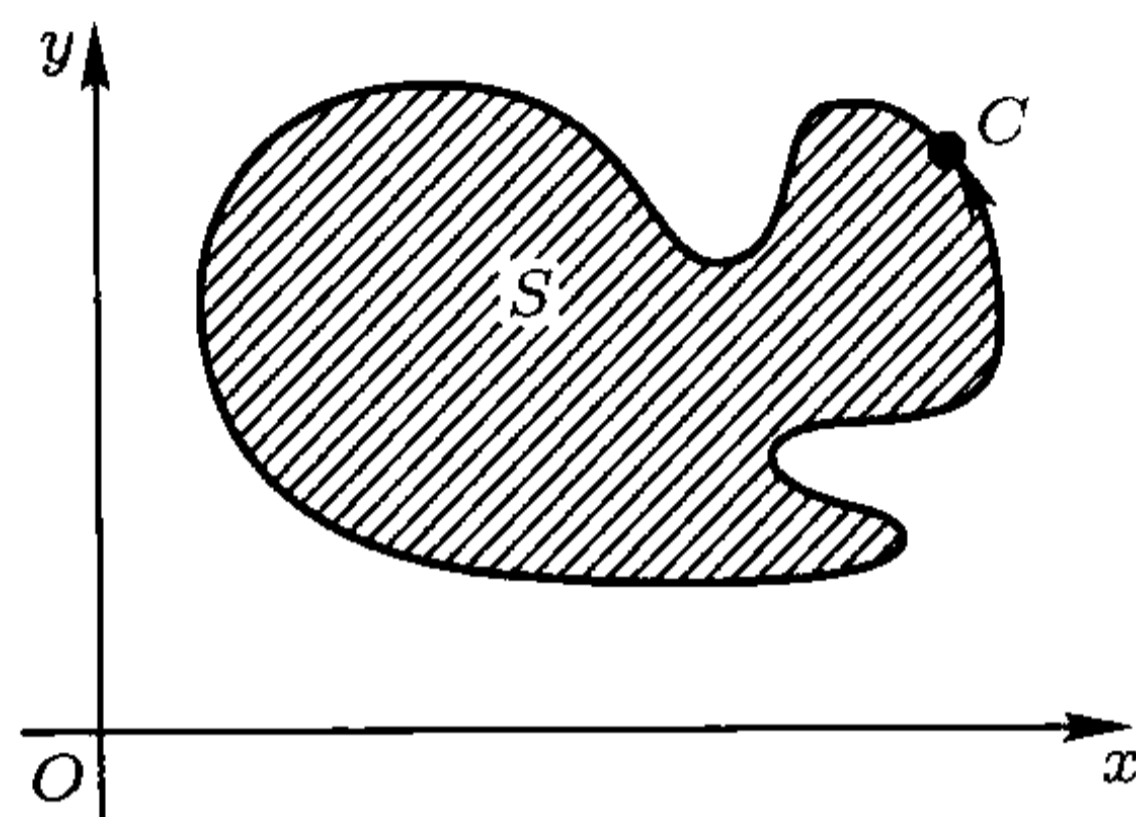


图 11

3. 极坐标系中的面积. 以连续的曲线 $r = r(\varphi)$ 和两条射线 $\varphi = \alpha, \varphi = \beta (\alpha < \beta)$ 为界的扇形 OAB (图 12), 其面积 S 等于

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

2396. 证明: 正抛物线弓形的面积等于

$$S = \frac{2}{3}bh,$$

式中 b 为弓形的底, h 为高 (图 13).

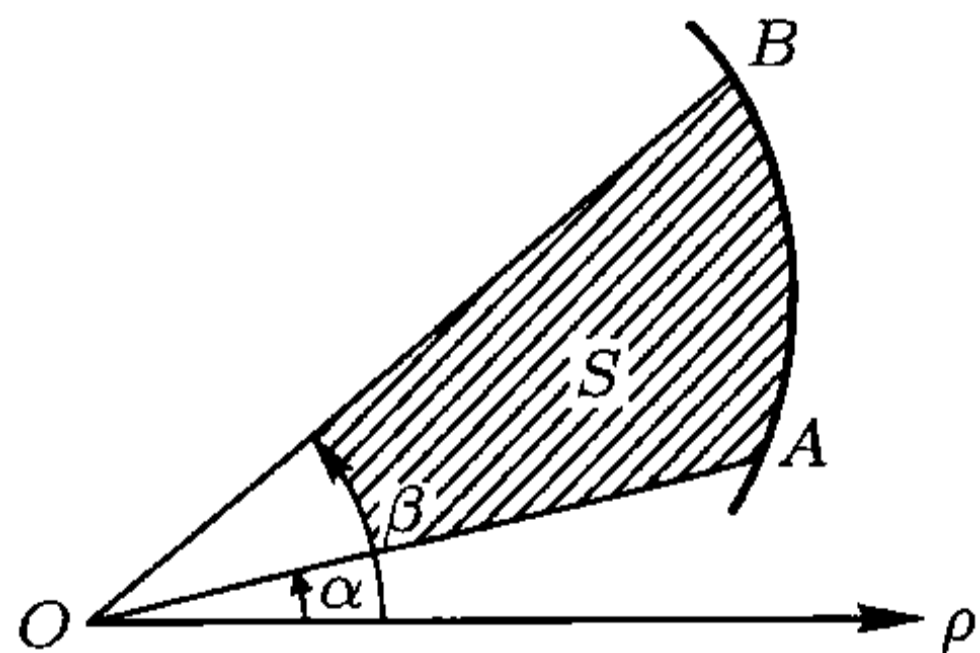


图 12

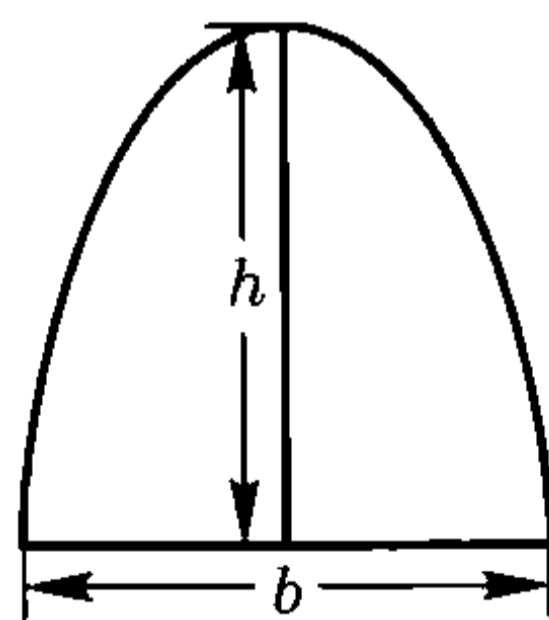


图 13

求以下列直角坐标方程所给曲线为界的图形的面积^①.

2397. $ax = y^2, ay = x^2.$

2398. $y = x^2, x + y = 2.$

^①在第四章的这一节和以后各节都把一切参数当作是正的.

2399. $y = 2x - x^2, x + y = 0$.

2400. (a) $y = |\lg x|, y = 0, x = 0, 1, x = 10$;

(b) $y = 2^x, y = 2, x = 0$;

(c) $y = (x + 1)^2, y = \sin \pi y, y = 0 (0 \leq y \leq 1)$.

2401. $y = x, y = x + \sin^2 x (0 \leq x \leq \pi)$.

2402. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}, y = 0$.

2403. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2404. $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

2405. $y^2 = 2px, 27py^2 = 8(x - p)^3$.

2406. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 (A > 0, AC - B^2 > 0)$.

2407. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (蔓叶线), $x = 2a$.

2408. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ (曳物线), $y = 0$.

2409. $y^2 = \frac{x^n}{(1 + x^{n+2})^2} (x > 0; n > -2)$.

2410. $y = e^{-x} |\sin x|, y = 0 (x \geq 0)$.

2411. 抛物线 $y^2 = 2x$ 把圆 $x^2 + y^2 = 8$ 的面积分为两部分, 这两部分的比如何?

2412. 把双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上的点 $M(x, y)$ 的坐标表示为双曲线扇形 $OM'M$ 的面积 S 的函数, 此扇形以双曲线的弧 $M'M$ 与二射线 OM 及 OM' 为界, 其中 $M'(x, -y)$ 是点 M 相对于 Ox 轴的对称点.

求下列参数方程所给曲线所围图形的面积:

2413. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ (摆线) 及 $y = 0$.

2414. $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$.

2415. $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ (圆的渐伸线) 及 $x = a, y \leq 0$.

2416. $x = a(2 \cos t - \cos 2t), y = a(2 \sin t - \sin 2t)$.

2417. (a) $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t (c^2 = a^2 - b^2)$ (椭圆的渐屈线);

(b) $x = a \cos t, y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin t}$.

求下列极坐标方程所给曲线所围图形 S 的面积:

2418. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (双纽线). 2419. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (心脏线).

2420. $r = a \sin 3\varphi$ (三叶线). 2421. $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ (抛物线), $\varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

2422. (a) $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} (0 < \varepsilon < 1)$ (椭圆); (b) $r = 3 + 2 \cos \varphi$;

(c) $r = \frac{1}{\varphi}, r = \frac{1}{\sin \varphi} (0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2})$.

2423. $r = a \cos \varphi, r = a(\cos \varphi + \sin \varphi)$ ($M(\frac{a}{2}, 0) \in S$).

2424. 求由曲线 $\varphi = r \arctan r$ 及二射线 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 所围成之扇形的面积.

2425. 求下列曲线所围图形的面积:

(a) $r^2 + \varphi^2 = 1$; (b) 曲线 $\varphi = \sin(\pi r)$ ($0 \leq r \leq 1$) 的蔓叶线;

(c) $\varphi = 4r - r^3, \varphi = 0$; (d) $\varphi = r - \sin r, \varphi = \pi$;

(e) 封闭曲线 $r = \frac{2at}{1+t^2}, \varphi = \frac{\pi t}{1+t}$.

变换为极坐标, 求下列曲线所围图形的面积:

2426. $x^3 + y^3 = 3axy$ (笛卡儿叶形线). 2427. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

2428. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (双纽线).

用参数方程的形式给出下列曲线, 再求曲线所围图形的面积:

2429. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (星形线).

2430. $x^4 + y^4 = ax^2y$.

提示: 令 $y = tx$.

§6. 弧长的计算法

1. 直角坐标系中的弧长. 一段光滑 (连续可微) 曲线

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

的弧长等于

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

2. 参数方程所给曲线的弧长. 若曲线 C 由参数方程

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_0 \leq t \leq T)$$

给出, 式中 $x(t), y(t) \in C^{(1)}[t_0, T]$, 则曲线 C 的弧长等于

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

3. 极坐标系中的弧长. 若

$$r = r(\varphi) \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta),$$

式中 $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$, 则相应曲线段的弧长等于

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi.$$

关于空间曲线的弧长可参阅第八章.

求下列曲线的弧长:

2431. $y = x^{\frac{3}{2}}$ ($0 \leq x \leq 4$).

2432. $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$).

2433. $y = a \cosh \frac{x}{a}$, 从点 $A(0, a)$ 至点 $B(b, h)$.

2434. $y = e^x$ ($0 \leq x \leq x_0$).

2435. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ ($1 \leq y \leq e$).

$$2436. y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2} \quad (0 \leq x \leq b < a). \quad 2437. y = \ln \cos x \quad \left(0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}\right).$$

$$2438. x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \quad (0 < b \leq y \leq a).$$

$$2439. y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{5}{3}a\right). \quad 2440. x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (\text{星形线}).$$

$$2441. x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t, c^2 = a^2 - b^2 \quad (\text{椭圆的渐屈线}).$$

$$2442. x = a \cos^4 t, y = a \sin^4 t.$$

$$2443. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

$$2444. x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (\text{圆的渐伸线}).$$

$$2445. (a) x = a(\sinh t - t), y = a(\cosh t - 1) \quad (0 \leq t \leq T);$$

$$(b) x = \cosh^3 t, y = \sinh^3 t \quad (0 \leq t \leq T).$$

$$2446. r = a\varphi \quad (\text{阿基米德螺线}) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

$$2447. r = ae^{m\varphi} \quad (m > 0, 0 < r < a).$$

$$2448. r = a(1 + \cos \varphi).$$

$$2449. r = \frac{p}{1 + \cos \varphi} \quad \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$2450. r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}.$$

$$2451. r = a \tanh \frac{\varphi}{2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

$$2452. (a) \varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r}\right) \quad (1 \leq r \leq 3); \quad (b) \varphi = \sqrt{r} \quad (0 \leq r \leq 5);$$

$$(c) \varphi = \int_0^r \frac{\sinh \rho}{\rho} d\rho \quad (0 \leq r \leq R);$$

$$(d) r = 1 + \cos t, \varphi = t - \tan \frac{t}{2} \quad (0 \leq t \leq T < \pi).$$

2453. 证明: 椭圆

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

的弧长等于正弦曲线 $y = c \sin \frac{x}{b}$ 的一波之长. 其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

2454. 抛物线 $4ay = x^2$ 沿 Ox 轴滚动. 证明: 抛物线的焦点的轨迹是悬链线.

2455. 求曲线

$$y = \pm \left(\frac{1}{3} - x\right) \sqrt{x}$$

的封闭部分与等周长圆周所分别围成的面积之比.

§7. 体积的计算法

1. 由已知横截面计算物体的体积. 若物体的体积 V 存在, 且 $S = S(x)$ ($a \leq x \leq b$) 为物体的横截面面积, 此横截面经过点 x 且垂直于 Ox 轴, 则

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

2. 旋转体的体积. 曲边梯形

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq y(x)$$

绕 Ox 轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx,$$

这里 $y(x)$ 为单值连续函数.

在更一般的情形下, 图形

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

绕 Ox 轴旋转所成的环状体的体积等于

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx,$$

这里 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是非负连续函数.

2456. 求顶楼的体积, 其底是边长等于 a 及 b 的矩形, 其顶的棱边等于 c , 而高等于 h .

2457. 求截楔形的体积, 其平行的上下底为边长分别等于 A, B 和 a, b 的矩形, 而高等于 h .

2458. 求截锥体的体积, 其上下底为半轴长分别等于 A, B 和 a, b 的椭圆, 而高等于 h .

2459. 求旋转抛物体的体积, 其底为 S , 而高等于 H .

2460. 设一物体之垂直于 Ox 轴的横截面的面积 $S = S(x)$ 依下面的二次式规律变化:

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (a \leq x \leq b),$$

其中 A, B 及 C 为常数. 证明: 此物体之体积等于

$$V = \frac{H}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right],$$

其中 $H = b - a$ (辛普森公式).

2461. 物体是点 $M(x, y, z)$ 的集合, 其中 $0 \leq z \leq 1$, 而且当 z 为有理数时, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$; 当 z 为无理数时, $-1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0$. 证明: 此物体的体积不存在, 尽管相应积分

$$\int_0^1 S(z) dz = 1.$$

求下列曲面所围成的体积:

$$\mathbf{2462.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = \frac{c}{a}x, z = 0.$$

$$\mathbf{2463.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (椭球面).}$$

$$\mathbf{2464.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, z = \pm c.$$

$$\mathbf{2465.} \quad x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2.$$

$$\mathbf{2466.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax.$$

$$\mathbf{2467.} \quad z^2 = b(a - x), x^2 + y^2 = ax.$$

$$\mathbf{2468.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1 \quad (0 < z < a).$$

$$\mathbf{2469.} \quad x + y + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0$$

$$\mathbf{2470.} \quad x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2.$$

2471. 证明: 将平面图形

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq y(x)$$

绕 Oy 轴旋转所成的旋转体的体积等于

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx,$$

这里 $y(x)$ 为单值连续函数.

求下列曲线段旋转所成旋转体的体积:

2472. $y = b \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ ($0 \leq x \leq a$) 绕 Ox 轴 (半立方抛物线).

2473. $y = 2x - x^2, y = 0$: (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2474. $y = \sin x, y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$): (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2475. $y = b \left(\frac{x}{a}\right)^2, y = b \left|\frac{x}{a}\right|$: (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2476. $y = e^{-x}, y = 0$ ($0 \leq x < +\infty$): (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2477. $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$), 绕 Ox 轴.

2478. $x^2 - xy + y^2 = a^2$, 绕 Ox 轴.

2479. $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ ($0 \leq x < +\infty$), 绕 Ox 轴.

2480. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y = 0$:

(a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴; (c) 绕直线 $y = 2a$.

2481. $x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$):

(a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2482.1. 求曲线

$$x = 2t - t^2, \quad y = 4t - t^3$$

所围图形绕 (a) Ox 轴; (b) Oy 轴旋转所成旋转体的体积.

2482.2. 证明: 把平面图形

$$0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq r(\varphi) \quad (\varphi \text{ 与 } r \text{ 为极坐标})$$

绕极轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

求下列由极坐标或直角坐标给的平面图形经旋转后所成旋转体的体积:

2483.1. $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

(a) 绕极轴; (b) 绕直线 $r \cos \varphi = -\frac{a}{4}$.

2483.2. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$:

(a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴; (c) 绕直线 $y = x$.

提示: 化为极坐标.

2484.1. 求半圈阿基米德螺线

$$r = a\varphi \quad (a > 0; 0 \leq \varphi \leq \pi)$$

绕极轴旋转所成旋转体的体积.

2484.2. 求曲线

$$\varphi = \pi r^3, \quad \varphi = \pi$$

所围图形绕极轴旋转所成旋转体的体积.

2485. 求图形

$$a \leq r \leq a\sqrt{2 \sin 2\varphi}$$

绕极轴旋转而成的旋转体的体积.

§8. 旋转曲面表面积的计算法

平滑曲线 AB 绕 Ox 轴旋转所成曲面的面积等于

$$P = 2\pi \int_A^B |y| ds,$$

式中 ds 为弧的微分.

求旋转下列曲线所成曲面的面积:

2486. $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$ ($0 \leq x \leq a$), 绕 Ox 轴.

2487. $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$ ($|x| \leq b$), 绕 Ox 轴.

2488. $y = \tan x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$), 绕 Ox 轴.

2489. $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$), (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2490. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b \leq a$), (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2491. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ ($b \geq a$), 绕 Ox 轴.

2492. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, 绕 Ox 轴.

2493. $y = a \cosh \frac{x}{a}$ ($|x| \leq b$), (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

2494. $\pm x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$, 绕 Ox 轴.

2495. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$),

(a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴; (c) 绕直线 $y = 2a$.

2496. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$, 绕直线 $y = x$.

2497. $r = a(1 + \cos \varphi)$, 绕极轴.

2498. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, (a) 绕极轴; (b) 绕轴 $\varphi = \frac{\pi}{2}$; (c) 绕轴 $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2499. 由抛物线 $ay = a^2 - x^2$ 及 Ox 轴围成的图形绕 Ox 轴旋转而构成一旋转体, 求其表面积与等体积球的表面积之比.

2500. 由直线 $x = \frac{p}{2}$ 与抛物线 $y^2 = 2px$ 围成的图形绕直线 $y = p$ 旋转而构成一旋转体, 求其体积和表面积.

§9. 矩的计算法. 质心的坐标

1. 矩. 若密度为 $\rho = \rho(y)$ 的质量 M 充满了 Oxy 平面上的某有界连续统 Ω (曲线, 平面区域), 而 $\omega = \omega(y)$ 为 Ω 中纵坐标不超过 y 的部分的相应度量 (弧长, 面积), 则数

$$M_k = \lim_{\max |\Delta y_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(y_i) y_i^k \Delta \omega(y_i) = \int_{\Omega} \rho y^k d\omega(y) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

称为质量 M 对 Ox 轴的 k 次矩.

作为特殊情形, 当 $k = 0$ 时得质量 M , 当 $k = 1$ 时得静矩, 当 $k = 2$ 时得转动惯量.

类似地可定义出质量对坐标平面的矩.

若 $\rho = 1$, 则相应的矩称为几何矩 (线矩, 面积矩, 体积矩等).

2. 质心. 均质平面图形 S 的质心^①的坐标 (x_0, y_0) 可由以下公式来定义:

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S},$$

式中 $M_1^{(y)}, M_1^{(x)}$ 为图形 S 对 Oy 轴和 Ox 轴的几何静矩.

2501.1. 求半径为 a 的半圆弧对过此弧两端点的直径的静矩和转动惯量.

2501.2. 求抛物线弧 $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq \frac{p}{2}$) 对直线 $x = \frac{p}{2}$ 的静矩.

2502.1. 求底为 b , 高为 h 的均质三角形平板对其底边的静矩和转动惯量 ($\rho = 1$).

2502.2. 求曲线

$$ay = 2ax - x^2 \quad (a > 0), \quad y = 0$$

所围抛物线弓形对 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量 $I_x = M_2^{(x)}$ 和 $I_y = M_2^{(y)}$. 由关系式 $I_x = Sr_x^2$, $I_y = Sr_y^2$ (S 为弓形面积) 定义的惯性半径 r_x 和 r_y 等于什么?

2503. 求半轴长为 a 和 b 的均质椭圆形平板对其主轴的转动惯量 ($\rho = 1$).

2504.1. 求底半径为 r 高为 h 的均质圆锥对其底平面的静矩和转动惯量 ($\rho = 1$).

2504.2. 求半径为 R 质量为 M 的均质球体对其直径的转动惯量.

2505. 证明古尔丹第一定理: 平面曲线弧 C 绕此弧所在平面上不与它相交的轴旋转而成的旋转面, 其面积等于此弧的长度与它的质心所画出的圆周之长的乘积.

2506. 证明古尔丹第二定理: 平面图形 S 绕此图形所在平面上不与它相交的轴旋转而成的旋转体, 其体积等于图形 S 的面积与此图形的质心所画出的圆周之长的乘积.

2507. 求圆弧 $x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi$ ($|\varphi| \leq \alpha \leq \pi$) 质心的坐标.

2508. 求抛物线 $ax = y^2, ay = x^2$ ($a > 0$) 所围图形的质心的坐标.

2509. 求图形

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$$

的质心的坐标.

2510. 求半径为 a 的均质半球的质心坐标.

^①质心与重心是不同的概念, 重心是物体所受重力的合力的作用点, 它在重力加速度为常量时与物体的质心重合. 对于尺寸不大的物体, 可以认为质心等同于重心. 在下文中, 凡几何对象的质心均指同样形状的均质物体的质心. ——译注

2511. 求对数螺线

$$r = ae^{m\varphi} \quad (m > 0)$$

上由点 $O(-\infty, 0)$ 到点 $P(\varphi, r)$ 的弧 OP 的质心 $C(\varphi_0, r_0)$ 之坐标. 当点 P 移动时, 点 C 画出怎样的曲线?

2512. 求曲线 $r = a(1 + \cos \varphi)$ 所围图形的质心坐标.

2513. 求摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的第一拱与 Ox 轴所围图形的质心的坐标.

2514. 求图形 $0 \leq x \leq a; y^2 \leq 2px$ 绕 Ox 轴旋转所成旋转体的质心的坐标.

2515. 求半球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$) 的质心的坐标.

§10. 力学和物理学中的问题

组成适当的积分和并求出其极限, 以便求解下列问题:

2516. 杆的长度 $l = 10$ m, 若该杆的线密度按规律 $\delta = 6 + 0.3x$ kg/m 而变, 其中 x 为到杆的一个端点的距离, 求杆的质量.

2517. 把质量为 m 的物体从地球 (其半径为 R) 表面抬升到高度为 h 的地方, 需要对它作多少功? 若物体远离至无穷远处, 则功等于多少?

2518. 若 10 N 的力能使弹簧伸长 1 cm, 现在要使这弹簧伸长 10 cm, 问要作多少功?
提示: 利用胡克定律.

2519. 直径为 20 cm, 长为 80 cm 的圆柱形汽缸充满压强为 100 N/cm² 的蒸汽. 假定蒸汽的温度保持不变, 要使其体积减小一半, 需要作多少功?

2520. 求水对竖直放置的半圆形档板的压力, 该档板的半径为 a , 而水面位于挡板顶部直径的位置.^①

2521. 求水对竖直壁面的压力, 此壁面的形状为梯形, 其下底 $a = 10$ m, 上底 $b = 6$ m, 高 $h = 5$ m, 下底位于水面以下 $c = 20$ m 的深度.^②

写出微分方程并求解下列问题:

2522. 一质点的速度按规律

$$v = v_0 + at \quad (v_0 = \text{常数}, a = \text{常数})$$

变化, 问在时间间隔 $[0, T]$ 内此质点经过怎样的路程?

2523. 半径为 R 而密度为 δ 的均质球体以角速度 ω 绕其直径旋转. 求此球的动能.

2524. 线密度 μ_0 为常数的无穷直线以怎样的力吸引距此直线距离为 a 质量为 m 的质点?

^①此题是流体静力学问题, 在实际求解时还应知道水面上的压强 p_0 , 以及水的密度 ρ . 原书所给答案对应着 $p_0 = 0$ 的特例. 类似情形还出现于习题 2521, 4070, 4071, 4072. ——译注

^②此题应考虑水面处大气压 p_0 的影响. 书后的答案对应 $p_0 = 0$ 的情形, 与实际结果有较大差别. ——译注

2525. 计算半径为 a 且面密度 δ_0 为常数的圆形薄板以怎样的力吸引质量为 m 的质点 P , 此质点位于通过薄板中心 Q 且垂直于薄板平面的直线上, 距离 PQ 等于 b .

2526. 根据托里拆利定律, 液体通过小孔从容器中流出的速度等于

$$v = c\sqrt{2gh},$$

式中 g 为重力加速度, h 为液体表面在小孔以上的高度, $c = 0.6$ 为实验系数. 直径为 $D = 1\text{ m}$ 高为 $H = 2\text{ m}$ 的直立圆柱形大桶, 其底部有一个直径为 $d = 1\text{ cm}$ 的圆孔, 问此桶充满液体后经过多长时间方可完全排空?

2527. 旋转体容器应当具有什么形状, 才能使液体从容器底部流出时, 液体表面的下降是均匀的?

2528. 镭在每一时刻的衰变速度与其现存的数量成正比. 设镭的量在初始时刻 $t = 0$ 为 Q_0 , 经过时间 $T = 1600$ 年它的量减少了一半. 求镭的衰变规律.

2529. 在一种把物质 A 变为物质 B 的二阶化学反应中, 反应速度与此二物质浓度之积成正比. 若在 $t = 0$ 时在容器中有 20% 的物质 B , 而当 $t = 15\text{ min}$ 时其浓度变为 80%, 问在 $t = 1\text{ h}$ 时其浓度如何?

2530. 根据胡克定律, 杆的相对伸长 ε 与相应横截面上的应力 σ 成正比, 即

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

式中 E 为杨氏模量. 求圆锥形杆在自重作用下的伸长量, 此锥形的顶向下而底固定, 设底半径等于 R , 圆锥的高为 H , 密度为 ρ .

§11. 定积分的近似计算法

1. 矩形公式. 若函数 $y = y(x)$ 在有限的闭区间 $[a, b]$ 上连续且充分多次可微, 并且 $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), $y_i = y(x_i)$, 则

$$\int_a^b y(x) dx = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) + R_n,$$

式中

$$R_n = \frac{(b-a)h}{2} y'(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2. 梯形公式. 在相同的记号下, 有

$$\int_a^b y(x) dx = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) + R_n,$$

式中

$$R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12} y''(\xi') \quad (a \leq \xi' \leq b).$$

3. 抛物线公式 (辛普森公式). 命 $n = 2k$, 得:

$$\int_a^b y(x) dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2k-2})] + R_n,$$

式中

$$R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{(4)}(\xi'') \quad (a \leq \xi'' \leq b).$$

2531. 利用矩形公式 ($n = 12$), 近似地计算

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx,$$

并把结果同精确答案进行比较.

利用梯形公式计算下列积分并估计它们的误差:

2532. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n = 8).$

2533. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \quad (n = 12).$

2534. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} \, dx \quad (n = 6).$

利用辛普森公式计算下列积分:

2535. $\int_1^9 \sqrt{x} \, dx \quad (n = 4).$

2536. $\int_0^\pi \sqrt{3 + \cos x} \, dx \quad (n = 6).$

2537. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \, dx \quad (n = 10).$

2538. $\int_0^1 \frac{x \, dx}{\ln(1+x)} \quad (n = 6).$

2539. 取 $n = 10$, 计算卡塔兰常数

$$G = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \, dx.$$

2540. 利用公式

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

计算数 π , 精确到 10^{-5} .

2541. 精确到 0.001, 计算

$$\int_0^1 e^{x^2} \, dx.$$

2542. 精确到 10^{-4} , 计算

$$\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} \, dx.$$

2543. 精确到 0.001, 计算概率积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx.$$

2544. 近似地求出半轴为 $a = 10$ 及 $b = 6$ 的椭圆的周长.

2545. 取 $\Delta x = \frac{\pi}{3}$, 描点作出函数

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

的图像.

第五章 级数

§1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法

1. 一般概念. 对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

若存在极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (\text{级数的和}),$$

式中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则称级数 (1) 为收敛的. 反之, 则称级数 (1) 发散的.

2. 柯西准则. 级数 (1) 收敛的充分必要条件为: 对于任何 $\varepsilon > 0$, 都存在数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

成立. 特别是, 若级数收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

3. 比较判别法 I. 设除级数 (1) 外, 还有级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \quad (2)$$

若当 $n \geq n_0$ 时, 不等式

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

成立, 则: (a) 从级数 (2) 收敛可推得级数 (1) 收敛; (b) 从级数 (1) 发散可推得级数 (2) 发散.

特别地, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_n \sim b_n$, 则正项级数 (1) 和 (2) 同时收敛或同时发散.

4. 比较判别法 II. 若

$$a_n = O^* \left(\frac{1}{n^p} \right) \textcircled{1},$$

则 (a) 当 $p > 1$ 时级数 (1) 收敛, (b) 当 $p \leq 1$ 时级数 (1) 发散.

5. 达朗贝尔判别法. 若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \cdots$) 及

①关于记号 O^* 的意义, 参阅第二章, §6, 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

则 (a) 当 $q < 1$ 时级数 (1) 收敛, (b) 当 $q > 1$ 时级数 (1) 发散.

6. 柯西判别法. 若 $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

则 (a) 当 $q < 1$ 时级数 (1) 收敛, (b) 当 $q > 1$ 时级数 (1) 发散.

7. 拉比判别法. 若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

则 (a) 当 $p > 1$ 时级数 (1) 收敛, (b) 当 $p < 1$ 时级数 (1) 发散.

8. 高斯判别法. 若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 及

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

式中 $|\theta_n| < C$ 而 $\varepsilon > 0$, 则 (a) 当 $\lambda > 1$ 时级数 (1) 收敛; (b) 当 $\lambda < 1$ 时级数 (1) 发散; (c) 当 $\lambda = 1$ 时, 若 $\mu > 1$ 则级数 (1) 收敛, 若 $\mu \leq 1$ 时级数 (1) 发散.

9. 柯西积分判别法. 若 $f(x)$ ($x \geq 1$) 是非负不增函数, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

与积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同时收敛或同时发散.

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和:

$$2546. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$$

$$2547. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \dots$$

$$2548. \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$$

$$2549. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

$$2550. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$$

$$2551. (a) q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \dots + q^n \sin n\alpha + \dots \quad (|q| < 1);$$

$$(b) q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \dots + q^n \cos n\alpha + \dots \quad (|q| < 1).$$

$$2552. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

$$2553. \text{研究级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \text{ 的收敛性.}$$

提示: 证明: 当 $x \neq k\pi$ (k 是整数) 时, 要 $\sin nx \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 是不可能的.

$$2554. \text{证明: 若级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛, 则把该级数的各项在不变更其先后次序的情况下}$$

分别组合起来, 所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\text{其中 } A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \text{ (} p_1 = 1, p_1 < p_2 < \dots \text{)} \right),$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

2555. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项是正的, 且把这级数的各项分别组合而得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 则原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

研究下列级数的收敛性:

2556. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ **2557.** $0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \dots$

2558. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

2559. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$

2560. $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots$

2561. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$

2562. $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \dots$

2564. $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \dots$

2565. 证明: 由等差数列各项的倒数组成的级数是发散的.

2566. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) 皆收敛且 $a_n \leq c_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (C) 也收敛. 若级数 (A) 和 (B) 皆发散, 问级数 (C) 的收敛性若何?

2567. 设已知二发散级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

的各项不为负数, 问下列级数的收敛性若何:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ 及 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$?

2568. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 逆命题不成立, 举出例子.

2569. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

2570. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a \neq 0,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

2571. 证明: 若各项为正且其值单调递减的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0.$$

2572. 若当 $p = 1, 2, 3, \dots$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0$, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

是否收敛?

利用柯西准则, 证明下列正项级数的收敛性:

2573. $a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$ ($|a_n| < 10$).

2574. $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$.

2575.1. $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \dots$.

2575.2. $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots$.

提示: 利用不等式

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

利用柯西准则, 证明下列级数的发散性:

2576. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$.

2577. (a) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$;

(b) $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$.

运用比较判别法、达朗贝尔判别法或柯西判别法, 研究下列级数的收敛性:

2578. $\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \dots + \frac{1000^n}{n!} + \dots$.

2579. $\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \dots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \dots$ 2580. $\frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots$.

$$2581. (a) \frac{2 \cdot 1!}{1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \cdots + \frac{2^n n!}{n^n} + \cdots;$$

$$(b) \frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \cdots + \frac{3^n n!}{n^n} + \cdots.$$

$$2582. \frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \cdots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \cdots.$$

$$2583. \frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots.$$

$$2584. \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \cdots.$$

$$2585. (a) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2});$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ 其中 } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = m^2, \\ \frac{1}{n^2}, & n \neq m^2 \end{cases} \quad (m \text{ 为正整数});$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} nx \prod_{k=1}^n \frac{\sin^2 k\alpha}{1 + x^2 + \cos^2 k\alpha}.$$

$$2586. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

$$2587. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

$$2588. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$$

$$2589. (a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}; \quad (c) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)};$$

$$(d) \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \cdots.$$

提示: $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$.

2590. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (a_n > 0),$$

则 $a_n = o(q_1^n)$, 其中 $q_1 > q$.

2591.1. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) 的各项在 $n \geq n_0$ 时满足不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho < 1.$$

证明: 对于级数的余项

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

在 $n \geq n_0$ 时有以下估计:

$$R_n \leq a_{n_0} \cdot \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}.$$

2591.2. 已知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(4n)!!},$$

其中 $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots 2n$. 为使此级数的和与部分和 S_n 之差小于 $\varepsilon = 10^{-6}$, 应取多少项方可?

2592. 证明: 若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \quad (a_n > 0),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

逆命题不成立. 研究例子

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

2593. 证明: 若对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 存在极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

则

(A)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

(B)

也存在.

逆命题不成立: 若极限 (B) 存在, 则极限 (A) 可以不存在. 研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}.$$

2594. 证明: 若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad (a_n \geq 0),$$

则 (a) 当 $q < 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (b) 当 $q > 1$ 时该级数发散 (柯西判别法的推广).

研究下列级数的收敛性:

$$2595. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}.$$

$$2596. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}.$$

$$2597. (a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^{2n - \ln n}.$$

利用拉比判别法和高斯判别法, 研究下列级数的收敛性:

$$2598. \left(\frac{1}{2} \right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^p + \cdots$$

$$2599. \frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \cdots \quad (a > 0, b > 0, d > 0).$$

$$2600. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}. \quad 2601. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}.$$

$$2602. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)} \quad (p > 0, q > 0).$$

$$2603. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q} \quad (p > 0, q > 0).$$

$$2604. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q} \quad (p > 0, q > 0).$$

$$2605. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots(q+n-1)} \right]^\alpha \quad (p > 0, q > 0).$$

2606. 证明: 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$), 若在 $n \rightarrow \infty$ 时成立条件

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

则

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right),$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是任意小量; 并且若 $p > 0$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_n \downarrow 0$, 即从 $n \geq n_0$ 开始, a_n 单调递减, 且在 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_n \rightarrow 0$.

求出通项 a_n 的减小的阶, 从而研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性:

$$2607. a_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q}, \text{ 其中 } n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q > 0.$$

$$2608. a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}. \quad 2609. a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1} \quad (n > 1).$$

$$2610. a_n = \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{n} \right). \quad 2611. a_n = \log_{b^n} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right) \quad (a > 0, b > 0).$$

$$2612. a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p. \quad 2613. (a) a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{k}{\ln n}}}; \quad (b) a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

2614. 证明热梅判别法: 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$), 若当 $n > n_0$ 时

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} \geq p > 1,$$

则此级数收敛; 若当 $n > n_0$ 时

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} \leq 1,$$

则此级数发散.

2615. 证明: 若存在 $\alpha > 0$ 使当 $n \geq n_0$ 时 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$ ($a_n > 0$), 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) 收敛; 若 $n \geq n_0$ 时 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$, 则此级数发散 (对数差法).

研究具有如下通项的级数的收敛性:

$$2616. a_n = n^{\ln x} \quad (x > 0). \quad 2617. a_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} \quad (n > 1).$$

$$2618. a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} \quad (n > 1).$$

2619. 利用柯西积分判别法, 研究具有如下通项的级数的收敛性:

$$(a) a_n = \frac{1}{n \ln^p n} \quad (n > 1); \quad (b) a_n = \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q} \quad (n > 2).$$

2620. 研究下列级数的收敛性:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln(n+1)}{\ln(2+p) \cdot \ln(3+p) \cdots \ln(n+1+p)} \quad (p > 0);$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}, \text{ 其中 } \nu(n) \text{ 为数 } n \text{ 的位数}; \quad (c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}.$$

2621. 设 λ_n ($n = 1, 2, \dots$) 依次是方程 $\tan x = x$ 的各个正根. 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$ 的收敛性.

2622. 证明: 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调递减, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时收敛或同时发散.

2623. 设 $f(x)$ 为单调不增的正值函数. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛, 则对于它的余项 $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ 有以下估计:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq R_n \leq f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx.$$

利用此式, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的和, 精确到 0.01.

2624. 证明叶尔马科夫判别法: 若 $f(x)$ 为单调递减的正值函数, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda.$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 在 $\lambda < 1$ 时收敛, 在 $\lambda > 1$ 时发散.

2625. 证明罗巴切夫斯基判别法: 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调趋于零, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{m=0}^{\infty} p_m \cdot 2^{-m}$ 同时收敛或者同时发散, 其中 p_m 是满足不等式

$$a_n \geq 2^{-m} \quad (n = 1, 2, \dots, p_m)$$

的项 a_n 的最大的序号.

研究下列级数的收敛性:

$$2626. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}.$$

$$2627. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}).$$

$$2628. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cot \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right).$$

$$2629. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right).$$

$$2630. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}.$$

$$2631. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}.$$

$$2632. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$$

$$2633. \sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1).$$

$$2634. \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}.$$

$$2635. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}.$$

$$2636. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}.$$

$$2637. \sum_{n=3}^{\infty} \ln \left(\frac{\cosh \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right).$$

$$2638. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}.$$

$$2639. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

$$2640. \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2} \right) \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

$$2641. \sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^\alpha} - 1).$$

$$2642. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^\alpha} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^\alpha} \right) \right].$$

$$2643. \sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)} \quad (a > 0).$$

$$2644. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$2645. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!}.$$

研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性, 其通项如下:

$$2646. u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}.$$

$$2647. u_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx}.$$

$$2648. u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

$$2649. u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$2650. u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx.$$

$$2651. u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}.$$

$$2652. u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \ln^2 k}{n^\alpha}.$$

用相应的级数来代替数列 x_n ($n = 1, 2, \dots$), 然后研究它们的收敛性, 设:

$$2653. x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

$$2654. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}.$$

2655. 对于下列级数:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!},$$

大约应取多少项来求级数的和方可精确到 10^{-5} ?

§2. 变号级数收敛性的判别法

1. 级数的绝对收敛性. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

称为绝对收敛, 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

收敛. 这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. 绝对收敛级数的和与各项相加的顺序无关.

要确定级数 (1) 的绝对收敛性, 只须把对于同号级数收敛性的已知判别法应用于级数 (2) 即可.

若级数 (1) 收敛, 而级数 (2) 发散, 则称级数 (1) 为条件收敛 (非绝对收敛). 通过改变各项的顺序, 可以让条件收敛级数的和等于任何数 (黎曼定理).

2. 莱布尼茨判别法. 若交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^{n-1} b_n + \dots \quad (b_n \geq 0)$$

满足条件 (a) $b_n \geq b_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) 和 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 则该级数收敛 (一般说来, 非绝对收敛). 在这种情形下, 对于级数的余项

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \dots$$

有以下估计:

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leq \theta_n \leq 1).$$

3. 阿贝尔判别法. 若 (a) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, (b) 数 b_n ($n = 1, 2, \dots$) 构成单调有界数列, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

收敛.

4. 狄利克雷判别法. 若 (a) 全体部分和 $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 是有界的, (b) 当 $n \rightarrow \infty$ 时 b_n 单调地趋于零, 则级数 (3) 收敛.

2656. 证明: 可把非绝对收敛级数的各项在不变更其顺序的情况下分别组合起来, 使所得的新级数绝对收敛.

2657. 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 若 (a) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 此级数的通项 a_n 趋于零; (b) 在不变更其顺序的情况下分别组合该级数的各项, 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛; (c) 在项 $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ ($1 = p_1 < p_2 < \dots$) 中相加项 a_i 的数目是有界的, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的.

2658. 证明: 若将收敛级数的各项重新排列, 使每一项离开原有的位置不超过 m 个位置 (m 为预先给定的数), 则级数的和不变.

证明下列级数的收敛性并求它们的和:

2659. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$

2660. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$

2661. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

提示: 运用公式 $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$, 其中 C 为欧拉常数, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

2662. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$. 将该级数的各项重排, 得到下列级数:

(a) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$; (b) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$

求这些级数的和.

2663. 把收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 的各项重排, 使它成为发散的.

研究下列变号级数的收敛性:

2664. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$.

2665. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$;

(b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$

2666. 设

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \quad (1)$$

其中 $b_n > 0$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $b_n \rightarrow 0$. 由此是否可知级数 (1) 收敛? 考察例子

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 + (-1)^n}{n}.$$

研究下列变号级数的收敛性:

$$2667. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

$$2668. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$2669. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}.$$

$$2670. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

$$2671. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + k^2} \right).$$

$$2672. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}.$$

$$2673. (a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}};$$

$$(b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}.$$

2674. 证明: 若

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 $p > 0$ (参阅习题 2606), 则交错级数 $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$ ($b_n > 0$) 收敛.

研究下列级数的绝对收敛性 (除了习题 2690) 和条件收敛性:

$$2675. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

$$2676. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}.$$

$$2677. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right].$$

$$2678. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}.$$

$$2679. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

$$2680. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}.$$

$$2681. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p}.$$

$$2682. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}.$$

$$2683. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}.$$

$$2684. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{2^n}.$$

$$2685. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt[n]{n}}.$$

$$2686. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}.$$

$$2687. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}.$$

$$2688. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}.$$

$$2689. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$$

$$2690. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}.$$

$$2691. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2. \quad \text{提示: 证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 \neq 0.$$

2692. 设

$$R(x) = \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q}$$

为有理函数, 式中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, 且当 $x \geq n_0$ 时 $|b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q| > 0$. 研究级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$$

的绝对收敛性和条件收敛性.

研究下列级数的收敛性:

2693. $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \cdots$

2694. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots$

2695. (a) $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \cdots$;

(b) $1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \cdots$

2696. 证明: 级数

(a) $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots$; (b) $\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots$

在区间 $(0, \pi)$ 内不绝对收敛.

2697. 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0 < x < \pi)$$

对全体参数 (p, x) 定出: (a) 绝对收敛域; (b) 非绝对收敛域.

2698. 研究下列级数的收敛性:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$; (c) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n}$.

2699. 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n! n^q}$$

定出: (a) 绝对收敛域; (b) 条件收敛域.

2700. 研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$$

的收敛性, 其中 $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$.

2701. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1,$$

则可断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛? 研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{和} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right].$$

2702.1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为非绝对收敛的级数,

$$P_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| + a_i}{2}, \quad N_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| - a_i}{2}.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1.$$

2702.2. 证明: 对于每一个 $p > 0$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

的和在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间.

2703. 在下列级数中:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}},$$

应取多少项来计算级数的和, 方可使其精度达到 $\varepsilon = 10^{-6}$?

2704. 证明: 若把级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

的各项重排, 使依次 p 个正项的一组与依次 q 个负项的一组相交替, 则新级数的和为

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

2705. 证明: 若改变调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

部分项的符号, 使得 p 个正项之后跟随着 q 个负项 ($p \neq q$), 但不变更原来的顺序, 则此级数仍是发散的. 仅当 $p = q$ 时得到收敛级数.

§3. 级数的运算

级数的和与积. 我们定义:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n); \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

式中 $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收敛, 则等式 (a) 并非仅有形式上的意义; 至于等式 (b), 则要

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收敛, 并且其中最有一个是绝对收敛的.

2706. 若两个级数, (a) 一个收敛, 而另一个发散; (b) 两个都发散, 则关于这两个级数的和可下何种断言?

2707. 求二级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right].$$

求下列级数的和:

$$2708. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right].$$

$$2709. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}.$$

$$2710. \sum_{n=0}^{\infty} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \quad (|xy| < 1).$$

2711. 证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

2712. 证明:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n \quad (|q| < 1).$$

2713. 证明: 收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的平方是发散级数.

2714. 证明: 下面二收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} \quad (\beta > 0)$$

之积当 $\alpha + \beta > 1$ 时是收敛级数, 而当 $\alpha + \beta < 1$ 时是发散级数.

2715. 验证下面二发散级数

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n \quad \text{和} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

之积是绝对收敛级数.

§4. 函数项级数

1. 收敛域. 使函数项级数

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (1)$$

收敛的 x 值的集合 X 叫做此级数的收敛域, 而函数

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (x \in X_0)$$

称为级数的和.

2. 一致收敛性. 对于函数序列

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (*)$$

若: 1) 存在极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in X);$$

2) 对于任何的数 $\varepsilon > 0$, 可以确定 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $x \in X$ 时,

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

成立, 则称此函数序列在集合 X 上一致收敛.

当序列 (*) 一致收敛于 $f(x)$ 时, 我们使用记号 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

若函数项级数 (1) 的部分和序列

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

在集合 X 上一致收敛, 则称 (1) 在此集合上一致收敛.

3. 柯西准则. 级数 (1) 在集合 X 上一致收敛的充分必要条件为: 对于每一个 $\varepsilon > 0$, 都存在数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时不等式

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \varepsilon$$

对一切 $x \in X$ 都成立.

4. 魏尔斯特拉斯判别法. 对于级数 (1), 若存在收敛的数项级数

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots, \quad (2)$$

使得对于 $x \in X$ 下列不等式都成立:

$$|u_n(x)| \leq c_n,$$

则级数 (1) 在集合 X 上绝对并一致收敛.

5. 阿贝尔判别法. 若: 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在集合 X 上一致收敛; 2) 函数 $b_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 全体是有界的并对每一个 x 组成一单调序列, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \quad (3)$$

在集合 X 上一致收敛.

6. 狄利克雷判别法. 若: 1) 级数 (3) 的部分和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 全体是有界的; 2) 序列 $b_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 对于每一个 x 都是单调的, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时在 X 上一致地趋于零, 则级数 (3) 在集合 X 上一致收敛.

7. 函数项级数的性质. (a) 以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

(b) 若函数项级数 (1) 在每一个区间 $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ 上一致收敛且有有限的极限 $\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = A_n (n = 1, 2, \dots)$, 则 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛; 2) 成立等式

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \right\}.$$

(c) 若收敛级数 (1) 的各项当 $a < x < b$ 时皆连续可微, 并且导数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在区间 (a, b) 内一致收敛, 则

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

(d) 若级数 (1) 的各项连续, 并且此级数在有限闭区间 $[a, b]$ 内一致收敛, 则

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \quad (4)$$

一般说来, 若当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\int_a^b R_n(x) dx \rightarrow 0$, 这里 $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$, 则公式 (4) 成立.

最后这个条件也适合于积分限无穷大的情况.

定出下列函数项级数的绝对收敛域和条件收敛域.

$$2716. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$$

$$2717. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

$$2718. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n.$$

$$2719. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n.$$

$$2720. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n.$$

$$2721. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}.$$

$$2722. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}.$$

$$2723. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} \quad (q > 0; 0 < x < \pi).$$

$$2724. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (\text{兰伯特级数}).$$

$$2725. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n.$$

$$2726. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

$$2727. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2) \dots (1+x^n)}.$$

$$2728. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}.$$

$$2729. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1+a^{2n}x^2}.$$

$$2730. \sum_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}}) \dots (2-x^{\frac{1}{n}}) \quad (x > 0).$$

$$2731. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}.$$

$$2732. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n + y^n} \quad (x > 0; y > 0).$$

$$2733. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n} \quad (y \geq 0).$$

$$2734. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}}.$$

$$2735. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y} \quad (x \geq 0). \quad 2736. \sum_{n=1}^{\infty} \tan^n \left(x + \frac{y}{n} \right).$$

2737. 证明: 若洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ ($|x_1| < |x_2|$) 时收敛, 则此级数当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时也收敛.

2738. 求洛朗级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$$

的收敛域并求它的和.

2739. 求牛顿级数的绝对收敛域和条件收敛域:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \frac{x^{[n]}}{n!}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}.$$

其中 $x^{[n]} = x(x-1)\cdots[x-(n-1)]$.

2740. 证明: 若狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x = x_0$ 时收敛, 则此级数当 $x > x_0$ 时也收敛.

2741. 证明: 序列 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在集合 X 上一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in X} r_n(x) \right\} = 0,$$

式中 $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

2742. 序列 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$): (a) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上收敛; (b) 在每一个有限的区间 $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$ 上一致收敛; (c) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上一致收敛, 这分别是什么意思?

2743. 对于序列

$$f_n(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1),$$

求出其项的最小序号 $N = N(\varepsilon, x)$, 使从这项起序列的项在已知点 x 与极限函数的差不超过 0.001, 设 $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[n]{10}}, \dots$. 此序列在区间 $(0, 1)$ 内是否一致收敛?

2744. 应当取级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

的多少项方可使部分和 $S_n(x)$ 当 $-\infty < x < +\infty$ 时与级数的和之差小于 ε ? 对于下列 ε 值, 给出具体的计算结果:

$$(a) \varepsilon = 0.1; \quad (b) \varepsilon = 0.01; \quad (c) \varepsilon = 0.001.$$

2745. 对怎样的 n , 不等式

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0.001 \quad (0 \leq x \leq 10)$$

能保证成立?

研究序列在所给区间上的一致收敛性:

2746. $f_n(x) = x^n$; (a) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$; (b) $0 \leq x \leq 1$.

2747. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$; $0 \leq x \leq 1$. 2748. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$; $0 \leq x \leq 1$.

2749. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$; $0 < x < +\infty$. 2750. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$; $0 \leq x \leq 1$.

2751. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$;

(a) $0 \leq x \leq 1 - \varepsilon$; (b) $1 - \varepsilon \leq x \leq 1 + \varepsilon$; (c) $1 + \varepsilon \leq x < +\infty$, 其中 $\varepsilon > 0$.

2752. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$; (a) $0 \leq x \leq 1$; (b) $1 < x < +\infty$.

2753. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$; $-\infty < x < +\infty$.

2754. $f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)$; $1 < x < +\infty$.

2755. (a) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$; $-\infty < x < +\infty$;

(b) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$; $-\infty < x < +\infty$.

2756. (a) $f_n(x) = \arctan nx$; $0 < x < +\infty$;

(b) $f_n(x) = x \arctan nx$; $0 < x < +\infty$.

2757. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$; $0 < x < 1$.

2758. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$; (a) $-l < x < l$, 其中 l 为任意正数; (b) $-\infty < x < +\infty$.

2759. $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$; $0 < x < 1$.

2760. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$; (a) 在有限的区间 (a, b) 上; (b) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上.

2761. $f_n(x) = n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$; $1 \leq x \leq a$. 2762. $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$; $0 \leq x \leq 2$.

2763. $f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x\right), & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, \\ 0, & x \geq \frac{2}{n}; \end{cases}$ 在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上.

2764. 设 $f(x)$ 为定义于闭区间 $[a, b]$ 上的任意函数, 且

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$f_n(x) \Rightarrow f(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

2765. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有连续的导数 $f'(x)$, 且

$$f_n(x) = n \left[f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right].$$

证明: 在闭区间 $\alpha \leq x \leq \beta$ 上 (其中 $a < \alpha < \beta < b$), $f_n(x) \Rightarrow f'(x)$.

2766. 设 $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f \left(x + \frac{i}{n} \right)$, 其中 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. 证

明: 序列 $f_n(x)$ 在任何有限闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

研究下列级数的收敛性:

2767. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; (a) 在区间 $|x| < q$ 内, 此外 $q < 1$; (b) 在区间 $|x| < 1$ 内.

2768. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; 在闭区间 $-1 \leq x \leq 1$ 上; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

2769. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$; 在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上.

2770. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$; $-1 \leq x \leq 1$.

2771. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$; $0 < x < +\infty$.

2772. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $0 < x < +\infty$.

2773. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$;

(a) $0 \leq x \leq \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$;

(b) $\varepsilon \leq x < +\infty$.

2774. 利用魏尔斯特拉斯判别法, 证明下列函数项级数在所指区间内的一致收敛性:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$, $-\infty < x < +\infty$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}$, $-2 < x < +\infty$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$, $0 \leq x < +\infty$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}$, $|x| < +\infty$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n})$, $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$;

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, $|x| < a$, a 为任意正数;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$, $|x| < +\infty$;

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $|x| < +\infty$;

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, |x| < +\infty;$

(j) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right), |x| < a;$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, 0 \leq x < +\infty;$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2x}{x^2 + n^3}, |x| < +\infty.$

研究下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性:

2775. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; (a) 在闭区间 $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ 上, 其中 $\varepsilon > 0$; (b) 在闭区间 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上.

2776. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}; 0 < x < +\infty.$

2777. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}; 0 < x < +\infty.$

提示: 估计级数的余项.

2778. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}; 0 \leq x \leq 2\pi.$

2779. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2 + e^x}}; |x| \leq 10.$

2780. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}}; -\infty < x < +\infty.$

2781. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}; 0 \leq x < +\infty.$

2782. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}; 0 \leq x < +\infty.$

2783. 不连续函数序列可否一致收敛于连续函数? 研究例子

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \psi(x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

其中

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数,} \\ 1, & x \text{ 为有理数.} \end{cases}$$

2784. 证明: 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上也一致收敛.

2785. 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

在 $[a, b]$ 上是否必定一致收敛? 研究例子

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n,$$

其中 $0 \leq x \leq 1$.

2786. 证明: 绝对且一致收敛的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

其中

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}, \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x), & 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}, \\ 0, & 2^{-n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

不能用非负项的收敛数项级数作为其强级数.

2787. 证明: 若函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

的各项是闭区间 $[a, b]$ 上的单调函数, 此级数在闭区间 $[a, b]$ 的两个端点绝对收敛, 则此级数在闭区间 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛.

2788. 证明: 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛.

2789. 设 $a_n \rightarrow \infty$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ 收敛. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

在不包含点 $a_n (n = 1, 2, \dots)$ 的任何有界闭集合上绝对并一致收敛.

2790. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则狄利克雷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

在 $x \geq 0$ 时一致收敛.

2791. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

在区域 $x \geq 0$ 内一致收敛.

2792. 证明: 函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

在区域 $-\infty < x < +\infty$ 内连续并有连续的导数.

2793. 证明: 函数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

(a) 在除整数点 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 外的一切点有定义并且连续;

(b) 为周期函数, 其周期等于 1.

2794. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]$$

在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上收敛但不一致收敛, 而它的和是此区间上的连续函数.

2795. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究其连续性, 设:

$$(a) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n; \quad (b) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}; \quad (c) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

2796. 设 r_k ($k = 1, 2, \dots$) 是闭区间 $[0, 1]$ 上的有理数. 证明函数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

具有下列性质: 1) 连续; 2) 在无理点可微而在有理点不可微.

2797. 证明: 黎曼 ζ 函数

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

在区域 $x > 1$ 内是连续的并且在此区域内有连续的各阶导数.

2798. 证明: θ 函数

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

当 $x > 0$ 时有定义并无穷多次可微.

2799. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的可微性, 设:

$$(a) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}; \quad (b) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

2800. 证明: 序列

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan x^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]'_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1).$$

2801. 证明: 序列

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x).$$

2802. 试确定参数 α 取何值时下列命题为真:

(a) 序列

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

$(n = 1, 2, \dots)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛;

(b) 序列 (1) 在 $[0, 1]$ 上一致收敛;

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限.

2803. 证明: 序列

$$f_n(x) = n x e^{-n x^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛, 但

$$\int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

2804. 证明: 序列

$$f_n(x) = n x (1-x)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛, 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

2805. 在表达式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n x}{1 + n^2 x^4} dx$$

中, 在积分符号下取极限是否合理?

求极限:

$$\mathbf{2806.} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n + 1}.$$

$$\mathbf{2807.} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}).$$

$$\mathbf{2808.} \quad (\text{a}) \quad \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n x};$$

$$(\text{b}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2 x^2}.$$

2809. 逐项微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$ 合理否?

2810. 在闭区间 $[0, 1]$ 上逐项积分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right)$$

合理否?

2811.1. 设 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是无穷多次可微的函数, 且其导数 $f^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 的序列在每一个有限区间 (a, b) 内一致收敛于函数 $\varphi(x)$. 证明: $\varphi(x) = C e^x$, 其中 C 为常数. 考察例子 $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $n = 1, 2, \dots$.

2811.2. 设函数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义且有界, 且在任何闭区间 $[a, b]$ 上 $f_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$. 由此是否可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x f_n(x) = \sup_x \varphi(x)?$$

§5. 幂级数

1. 收敛区间. 对于每一个幂级数

$$a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

都存在封闭的收敛区间: $|x-a| \leq R$, 该级数在其内收敛, 而在其外发散. 收敛半径 R 可按柯西-阿达马公式

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

来确定. 收敛半径 R 也可按公式

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

来计算 (若此极限存在).

2. 阿贝尔定理. 若幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($|x| < R$) 在收敛区间的端点 $x = R$ 收敛, 则

$$S(R) = \lim_{x \rightarrow R-0} S(x).$$

3. 泰勒级数. 在点 a 解析的函数 $f(x)$ 在该点的某邻域内可展开为幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

此级数的余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

可以表示为

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

(拉格朗日形式) 或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x-a))}{n!} (1 - \theta_1)^n (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

(柯西形式).

必须记住下列五个基本展开式:

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

4. 幂级数的运算. 在公共的收敛区间 $|x - a| < R$ 内有:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-a)^n;$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \text{ 式中 } c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0;$$

$$(c) \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-a)^n;$$

$$(d) \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right] dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)}(x-a)^{n+1}.$$

5. 在复数域内的幂级数. 研究级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

式中

$$c_n = a_n + ib_n, \quad a = \alpha + i\beta, \quad z = x + iy, \quad i^2 = -1.$$

对于每一个这样的级数都有一封闭的收敛圆 $|z - a| \leq R$, 该级数在其内收敛 (并且绝对收敛), 而在其外发散. 收敛半径 R 等于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

在实数域内的收敛半径.

求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质:

$$2812. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}.$$

$$2813. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n.$$

$$2814. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

$$2815. \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} x^n \quad (0 < \alpha < 1).$$

$$2816. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

$$2817. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1).$$

$$2818. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \left(\frac{x-1}{2} \right)^n.$$

$$2819. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p x^n.$$

$$2820. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n.$$

$$2821. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n \quad (a > 0, b > 0). \quad 2822. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$2823. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a > 0).$$

$$2824. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

$$2825. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n.$$

$$2826. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$$

$$2827. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

$$2828. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n.$$

$$2829. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2 \cos \frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n.$$

$$2830. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

$$2831. (a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n \text{ (普林斯海姆级数).}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n} (1-x)^n, \text{ 其中 } \nu(n) \text{ 为数 } n \text{ 的位数;}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n}\right)^n.$$

2832. 求超几何级数

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots \\ + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} x^n + \cdots$$

的收敛域.

求下列广义幂级数的收敛域:

$$2833. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n. \quad 2834. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$2835. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}. \quad 2836. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}. \quad 2837. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \tan^n x.$$

2838. 按二项式 $x+1$ 的非负整数次幂展开函数

$$f(x) = x^3.$$

2839. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{a-x} \quad (a \neq 0)$$

按以下方式展开为幂级数: (a) 依 x 的幂展开; (b) 依二项式 $x-b$ 的幂展开, 此处 $b \neq a$; (c) 依 $\frac{1}{x}$ 的幂展开. 求出相应的收敛域.

2840. 按差 $x-1$ 的非负整数次幂展开函数 $f(x) = \ln x$, 并说明展开式的收敛区间. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的和.

写出下列函数按变量 x 的非负整数次幂的展开式, 并求出相应的收敛区间:

$$2841. f(x) = \sinh x.$$

$$2842. f(x) = \cosh x.$$

$$2843. f(x) = \sin^2 x.$$

$$2844. f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

2845. $f(x) = \sin(\mu \arcsin x)$.

2846. $f(x) = \cos(\mu \arcsin x)$.

2847. 写出函数 $f(x) = x^x$ 按差 $x - 1$ 的非负整数次幂展开式的前三项.2848. 写出函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} (x \neq 0)$ 和 $f(0) = e$ 按变量 x 的非负整数次幂展开式的前三项.2849. 将函数 $\sin(x+h)$ 和 $\cos(x+h)$ 按变量 h 的非负整数次幂展开.2850.1. 不进行实际的展开工作而求函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$ 的幂级数展开式的收敛区间: (a) 依 x 的幂展开; (b) 依二项式 $x - 5$ 的幂展开.2850.2. 能否下结论说: 在 $(-\infty, +\infty)$ 上当 $N \rightarrow \infty$ 时

$$\sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \Rightarrow \sin x?$$

利用基本展开式 I—V, 写出下列函数关于 x 的幂级数展开式:

2851. e^{-x^2} .

2852. $\cos^2 x$.

2853. $\sin^3 x$.

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$.

2855. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

2856. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

2857. $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

2858. $\frac{x}{1+x-2x^2}$.

提示: 把所给分式分解为简单分式.

2859. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$.

2860. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

2861. $\frac{1}{1-x-x^2}$.

2862. (a) $\frac{1}{1+x+x^2}$; (b) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$. 计算 $f^{(1000)}(0)$.

2863. $\frac{x \cos \alpha - x^2}{1-2x \cos \alpha + x^2}$.

2864. $\frac{x \sin \alpha}{1-2x \cos \alpha + x^2}$.

2865. $\frac{x \sinh \alpha}{1-2x \cosh \alpha + x^2}$.

2866. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

2868. $e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$. 提示: 运用欧拉公式.

首先展开导数, 然后用逐项积分的方法求下列函数的幂级数展开式.

2869. $f(x) = \arctan x$. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和.

2870. $f(x) = \arcsin x$.

2871. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

2872. $f(x) = \ln(1-2x \cos \alpha + x^2)$.

2873. 利用不同方法, 求下列函数的幂级数展开式:

$$(a) f(x) = (1+x)\ln(1+x); \quad (b) f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x;$$

$$(c) f(x) = \arctan \frac{2-2x}{1+4x}; \quad (d) f(x) = \arctan \frac{2x}{2-x^2};$$

$$(e) f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}; \quad (f) f(x) = \arccos(1-2x^2);$$

$$(g) f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2};$$

$$(h) f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$$

2874. 利用展开式

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

的唯一性, 求下列函数的 n 阶导数:

$$(a) f(x) = e^{x^2}; \quad (b) f(x) = e^{\frac{x}{2}}; \quad (c) f(x) = \arctan x.$$

2875. 依二项式 $x+1$ 的正整数次幂展开函数

$$f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}.$$

2876. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

按变量 x 的负整数次幂展开成幂级数.

2877. 把函数

$$f(x) = \ln x$$

按分式 $\frac{x-1}{x+1}$ 的正整数次幂展开成幂级数.

2878. 把函数

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

按分式 $\frac{x}{1+x}$ 的正整数次幂展开成幂级数.

2879. 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

直接证明:

$$f(x)f(y) = f(x+y).$$

2880. 若我们定义

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

证明: (a) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$; (b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2881. 写出函数 $f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n+1} \right) \right]^{-1}$ 的幂级数展开式中的若干项.

对幂级数进行相应的运算, 从而求出下列函数的幂级数展开式:

2882. $f(x) = (1 + x)e^{-x}$.

2883. $f(x) = (1 - x)^2 \cosh \sqrt{x}$.

2884. $f(x) = \ln^2(1 - x)$.

2885. $f(x) = (1 + x^2) \arctan x$.

2886. $f(x) = e^x \cos x$.

2887. $f(x) = e^x \sin x$.

2888. $f(x) = \frac{\ln(1 + x)}{1 + x}$.

2889. $f(x) = (\arctan x)^2$.

2890. $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

将下列函数按变量 x 的正整数次幂展开成幂级数, 写出展开式 (异于零) 的前三项:

2891. $f(x) = \tan x$.

2892. $f(x) = \tanh x$.

2893. $f(x) = \cot x - \frac{1}{x}$.

2894. 设 $\sec x$ 的展开式写为以下形式:

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n},$$

求出系数 E_n (欧拉数) 的递推公式.

2895. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + x^2}} \quad (|x| < 1)$$

展开成幂级数.

2896. 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 写出函数

$$F(x) = \frac{f(x)}{1 - x}$$

的展开式.

2897. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有收敛半径为 R_1 , 而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 有收敛半径 R_2 , 则级数:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$

的收敛半径 R 是怎样的?

2898. 设

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{和} \quad L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

证明: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 R 满足不等式

$$l \leq R \leq L.$$

2899.1. 证明: 若函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 且 $|n! a_n| < M (n = 1, 2, \dots)$, 其中 M 是常数, 则: (1) $f(x)$ 在任何点 a 无穷次可微; (2) 下述展开式成立:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

2899.2. 设 $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$, 且当 $x \in (a, b)$ 时 $|f^{(n)}(x)| \leq c^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 证明: 函数 $f(x)$ 可展开为幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (x_0 \in (a, b)),$$

此幂级数在区间 (a, b) 上收敛.

2899.3. 设 $f(x) \in C^{(\infty)}[-1, 1]$, 且当 $x \in [-1, 1]$ 时 $f^{(n)}(x) \geq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内可展开为幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

提示: 对于函数 $f(x)$ 的泰勒级数余项 $R_n(x)$, 利用导数 $f^{(n)}(x)$ 的单调性得到以下估计:

$$|R_n(x)| \leq |x|^{n+1} f(1).$$

2900. 证明: 若 1) $a_n \geq 0$; 2) 存在

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S, \quad \text{则} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

将下列函数展开成幂级数:

2901. $\int_0^x e^{-t^2} dt.$

2902. $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$

2903. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$

2904. $\int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt.$

2905. $\int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)}$ (写出四项).

运用逐项微分法计算下列级数的和:

2906. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

2907. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$

2908. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

2909. $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$

2910. $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$ 提示: 以 $1-x$ 乘级数的导数.

运用逐项积分法计算下列级数的和:

2911. $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

2912. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

2913. $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

2914. 证明: 级数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

满足方程

$$y^{(4)} = y.$$

2915. 证明: 级数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

满足方程

$$xy'' + y' - y = 0.$$

求在复数域内 ($z = x + iy$) 下列幂级数的收敛半径及收敛圆:

2916. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n \cdot 2^n}$.

2917. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.

2918. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{(1+i)(1+2i) \cdots (1+ni)}$.

2919. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}$.

2920. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - e^{i\alpha})^n}{n(1 - e^{i\alpha})^n}$.

2921. 利用牛顿二项式公式近似地计算 $\sqrt[3]{9}$, 并且估计当只取展开式三项时的误差.

2922. 近似地计算并估计相应误差:

(a) $\arctan 1.2$; (b) $\sqrt[10]{1000}$; (c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; (d) $\ln 1.25$.

利用适当的展开式, 计算下列函数的值:

2923. $\sin 18^\circ$, 精确到 10^{-5} .

2924. $\cos 1^\circ$, 精确到 10^{-6} .

2925. $\tan 9^\circ$, 精确到 10^{-3} .

2926. e , 精确到 10^{-6} .

2927. $\ln 1.2$, 精确到 10^{-4} .

2928. 由等式

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$$

求数 π , 精确到 10^{-4} .

2929. 利用等式

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3},$$

计算数 π , 精确到 0.001.

2930. 利用等式

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239},$$

求数 π , 精确到 10^{-9} .

2931. 利用公式

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \cdots \right],$$

求 $\ln 2$ 和 $\ln 3$, 精确到 10^{-5} .

2932. 将被积函数展开成级数, 从而计算下列积分之值, 精确到 0.001:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^1 e^{-x^2} dx; & \text{(b)} \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx; & \text{(c)} \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx; \\
 \text{(d)} \int_0^1 \cos x^2 dx; & \text{(e)} \int_0^1 \frac{\sinh x}{x} dx; & \text{(f)} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}; \\
 \text{(g)} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}; & \text{(h)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}; & \text{(i)} \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx; \\
 \text{(j)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx; & \text{(k)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx; & \text{(l)} \int_0^1 x^x dx.
 \end{array}$$

2933. 求一段正弦曲线

$$y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

之弧长, 精确到 0.01.

2934. 椭圆之半轴为 $a = 1$ 及 $b = \frac{1}{2}$, 求椭圆的周长, 并精确到 0.01.

2935. 两根电线杆相距 $2l = 20$ m, 电线成抛物线的形状^①. 若电线下垂高度 $h = 40$ cm, 计算电线的长度, 并精确到 1 cm.

§6. 傅里叶级数

1. 展开定理. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-l, l)$ 内分段连续并有分段连续的导数 $f'(x)$, 并且一切间断点 ξ 是正则的 [即 $f(\xi) = \frac{1}{2}[f(\xi-0) + f(\xi+0)]$], 则函数 $f(x)$ 在此区间上可用傅里叶级数表示:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (1)$$

式中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2')$$

特别是:

(a) 若函数 $f(x)$ 是偶函数, 则有:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (3)$$

式中

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

(b) 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 则得:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

^①严格地说, 若不计电线的伸长, 电线形状应为悬链线. 请读者研究抛物线近似的误差. —— 译注

式中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

一个在区间 $(0, l)$ 中有定义并且具有上述连续性的函数 $f(x)$, 可在该区间内用公式 (3) 及公式 (4) 表示.

2. 完备性条件. 对于任何在区间 $(-l, l)$ 上可积且其平方也可积的函数 $f(x)$, 组成具有系数 (2), (2') 的级数 (1), 则李雅普诺夫等式成立:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx.$$

3. 傅里叶级数的积分法. 在区间 $(-l, l)$ 内按黎曼意义可积的函数 $f(x)$ 之傅里叶级数 (1) (即使是发散的), 可以在此区间内逐项积分.

2936. 将函数

$$f(x) = \sin^4 x$$

展开成傅里叶级数.

2937. 三角多项式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)$$

的傅里叶级数是怎样的?

2938. 将函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi)$$

展开成傅里叶级数. 绘出函数的图像及此函数之傅里叶级数之若干部分和的图像.

利用该展开式, 求莱布尼茨级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

的和.

把下列函数展开为傅里叶级数:

2939. 在区间 $(0, 2l)$ 内展开 $f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l, \\ 0, & l < x < 2l, \end{cases}$ 其中 A 为常数.

2940. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = x$.

2941. 在区间 $(0, 2\pi)$ 内展开 $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

2942. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = |x|$.

2943. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x < 0, \\ bx, & 0 < x < \pi, \end{cases}$ 其中 a 和 b 为常数.

2944. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = \pi^2 - x^2$.

2945. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = \cos ax$ (a 不是整数).

2946. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = \sin ax$ (a 不是整数).

2947. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = \sinh ax$.

2948. 在区间 $(-h, h)$ 内展开 $f(x) = e^{ax}$.

2949. 在区间 $(a, a + 2l)$ 内展开 $f(x) = x$.

2950. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内展开 $f(x) = x \sin x$.

2951. 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内展开 $f(x) = x \cos x$.

将下列周期函数展开成傅里叶级数:

2952. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

2953. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

2954. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

2955. $f(x) = x - [x]$.

2956. $f(x) = (x)$, 其中 (x) 是 x 到与它最近的整数的距离.

2957. $f(x) = |\sin x|$.

2958. $f(x) = |\cos x|$.

2959. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}$ ($|\alpha| < 1$).

2960. 把函数

$$f(x) = \sec x \quad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right)$$

展开为傅里叶级数.

提示: 推出系数 a_n 与 a_{n-2} 之间的关系.

2961. 将函数 $f(x) = x^2$ 展开成傅里叶级数: (a) 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内按倍角的余弦展开; (b) 在区间 $(0, \pi)$ 内按倍角的正弦展开; (c) 在区间 $(0, 2\pi)$ 内展开. 给出函数的图像及情形 (a), (b) 与 (c) 的傅里叶级数之和的图像.

利用这些展开式, 求下列级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

2962. 由展开式

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi)$$

用逐项积分的方法, 求函数 x^2, x^3 和 x^4 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数.

2963. 写出函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \alpha, \\ 0, & \alpha < |x| < \pi \end{cases}$$

的李雅普诺夫等式. 利用李雅普诺夫等式, 求下列级数之和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

2964. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

展开成傅里叶级数.

利用公式

$$\cos x = \frac{1}{2}(t + \bar{t}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t}),$$

式中 $t = e^{ix}$ 及 $\bar{t} = e^{-ix}$.

2965. $\cos^{2m} x$ (m 为正整数).

2966. $\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}$ ($|q| < 1$).

2967. $\frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2}$ ($|q| < 1$).

2968. $\frac{1 - q \cos x}{1 - 2q \cos x + q^2}$ ($|q| < 1$).

2969. $\ln(1 - 2q \cos x + q^2)$ ($|q| < 1$).

将下列无界周期函数展开成傅里叶级数:

2970. $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$.

2971. $f(x) = \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|$.

2972. $f(x) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$.

2973. 将函数

$$f(x) = \int_0^x \ln \sqrt{\left| \cot \frac{t}{2} \right|} dt \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

展开成傅里叶级数.

2974. 函数

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq 4a)$$

是正方形 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a$ 的围线的参数方程, 其中 s 为依逆时针方向从点 $O(0,0)$ 起计算的弧长. 试将这两个函数展开成傅里叶级数.

2975. 应当如何把给定在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延拓到区间 $(-\pi, \pi)$ 内, 使得它展开成傅里叶级数后具有以下形式:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)?$$

2976. 应当如何把给定在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延拓到区间 $(-\pi, \pi)$ 内, 使得它展开成傅里叶级数后具有以下形式:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)?$$

2977. 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内把函数

$$f(x) = x \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

展开: (a) 依角的奇倍数的余弦展开; (b) 依角的奇倍数的正弦展开. 给出情形 (a) 与 (b)

的傅里叶级数之和的图像.

2978. 设 $f(x)$ 是以 π 为周期的反周期函数, 即

$$f(x + \pi) \equiv -f(x).$$

问此函数在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数具有怎样的特性?

2979. 若 $f(x + \pi) \equiv f(x)$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数具有怎样的特性?

2980. 对于一个周期为 2π 的函数 $y = f(x)$, 若函数的图像: (a) 以点 $(0, 0)$, $(\pm\frac{\pi}{2}, 0)$ 为对称中心; (b) 以坐标原点为对称中心并以 $x = \pm\frac{\pi}{2}$ 为对称轴, 问其傅里叶系数 a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) 具有怎样的特性?

2981. 若

$$\varphi(-x) \equiv \psi(x),$$

问函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 之间有何关系?

2982. 若

$$\varphi(-x) \equiv -\psi(x),$$

问函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 之间有何关系?

2983. 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), 试计算“平移”后的函数 $f(x+h)$ (h 为常数) 的傅里叶系数 \bar{a}_n, \bar{b}_n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

2984. 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), 试计算斯捷克洛夫函数

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi$$

的傅里叶系数 A_n, B_n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

2985. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 而 a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 为其傅里叶系数. 求卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t) dt$$

的傅里叶系数 A_n, B_n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

利用所得的结果, 推出李雅普诺夫等式.

§7. 级数求和法

1. 直接求和法. 若

$$u_n = v_{n+1} - v_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{及} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_\infty,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1.$$

特别地, 若

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}},$$

其中数 a_i ($i = 1, 2, \dots$) 组成以 d 为公差的等差数列, 则

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情形下, 未知级数能表示为下列已知级数的线性组合:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \text{ 等等.}$$

2. 阿贝尔方法. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

在最简单的例子中, 借助于逐项微分法或积分法来求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和.

3. 三角级数求和法. 为了求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

的和, 通常把前者视为复数域内的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (其中 $z = e^{ix}$) 的实的实部, 而把后者视为该幂级数的和的虚部的系数.

在许多情形下级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1)$$

是有用的.

求下列级数的和:

$$2986. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots \quad 2987. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$$

$$2988. \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots \quad 2989. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$2990. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} \quad (m \text{ 为正整数}). \quad 2991. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$$

$$2992. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}. \quad 2993. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$2994. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}. \quad 2995. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$2996. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}. \quad 2997. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

$$2998. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}. \quad 2999. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$$

$$3000. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}.$$

3001. 设 $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$ 的和.

求下列级数的和:

$$3002. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n n!} x^n.$$

$$3003. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n.$$

$$3004. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + 1)}{(2n)!} x^{2n}.$$

$$3005. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}.$$

利用逐项微分法求级数的和:

$$3006. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$3007. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

$$3008. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

3009. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n$ ($d > 0$). 提示: 用 $1-x$ 去乘级数的导数.

$$3010. \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots.$$

利用逐项积分法求级数的和:

$$3011. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}. \quad 3012. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n. \quad 3013. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

利用阿贝尔方法, 求下列级数的和:

$$3014. 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots.$$

$$3015. 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

$$3016. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots.$$

$$3017. 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \cdots.$$

求下列三角级数的和:

$$3018. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

$$3019. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

$$3020. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}.$$

$$3021. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

$$3022. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

$$3023. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}.$$

$$3024. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

$$3025. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

$$3026. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$$

$$3027. \text{画出曲线 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2} = 0.$$

求下列级数的和:

$$3028. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$$

$$3029. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

$$3030. \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots$$

$$3031. \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \cdots, \text{在 } x > 0, a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots), \text{且级数}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散的条件下.

$$3032. \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \cdots, \text{若 (a) } |x| < 1; \text{(b) } |x| > 1.$$

$$3033. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}, \text{若 (a) } |x| < 1; \text{(b) } |x| > 1.$$

§8. 利用级数求定积分

利用被积函数的级数展开式计算下列积分:

$$3034. \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx.$$

$$3035. \int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx.$$

$$3036. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

$$3037. \int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx \quad (p > 0, q > 0).$$

$$3038. \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx.$$

$$3039. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1}.$$

$$3040. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1}.$$

3041. 按模数 k ($0 \leq k < 1$) 的正整数次幂展开第一类完全椭圆积分

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

3042. 按模数 k ($0 \leq k < 1$) 的正整数次幂展开第二类完全椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

3043. 利用按椭圆离心率的正整数次幂展开的级数表示椭圆

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的弧长.

证明下列等式:

$$3044. \int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}. \quad 3045. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax \, dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

$$3046. \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \, dx = \frac{\pi}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

求:

$$3047. \int_0^{2\pi} e^{a \cos x} \cos(a \sin x - nx) \, dx \quad (n \text{ 是正整数}).$$

$$3048. \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} \, dx. \quad \text{提示: 参考习题 2864.}$$

$$3049. \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) \, dx.$$

3050. 证明公式:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} \, dx = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \quad (1)$$

其中 $a > 0$ 且 $0 < \theta_n < 1$. 若于公式 (1) 中取两项来表示积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} \, dx,$$

其精确程度如何?

§9. 无穷乘积

1. 无穷乘积的收敛性. 若存在有限而且异于零的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$$

则称无穷乘积

$$p_1 p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad (1)$$

是收敛的.

若 $P = 0$ 而因子 p_n 中无一为零, 则称乘积 (1) 发散于零; 在相反的情形下则称无穷乘积收敛于零.

乘积 (1) 的收敛性与级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n \quad (2)$$

的收敛性是一样的.

收敛性的必要条件为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1.$$

若 $p_n = 1 + \alpha_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 且 α_n 不变号, 则乘积 (1) 收敛的充分必要条件为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1) \quad (3)$$

收敛.

在一般的情形下, 当 α_n 不保持固定的符号而级数 (3) 收敛时, 乘积 (1) 与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2$$

同时收敛或同时发散, 且在发散的情形下, 乘积发散于零.

2. 绝对收敛性. 若级数 (2) 绝对收敛或条件收敛, 则称乘积 (1) 为绝对收敛或条件 (非绝对) 收敛. 级数 (3) 绝对收敛是乘积 (1) 绝对收敛的充分必要条件.

3. 函数的无穷乘积展开. 当 $-\infty < x < +\infty$ 时有展开式

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right), \quad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right].$$

特别是, 由第一式当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时和沃利斯公式

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

证明下列等式:

$$3051. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$3052. \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

$$3053. \prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{3}.$$

$$3054. \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right] = 2.$$

$$3055. \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$$

$$3056. \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$$

$$3057. \prod_{n=1}^{\infty} \cosh \frac{x}{2^n} = \frac{\sinh x}{x}.$$

$$3058. \prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

$$3059. \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$$

$$3060. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

试证下列无穷乘积的收敛性并求出其值:

$$3061. \prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1}.$$

$$3062. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right].$$

$$3063. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}.$$

$$3064. \prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}} \quad (a > 0).$$

3065. 可否由乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 的收敛性得出下列乘积:

$$(a) \prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n); \quad (b) \prod_{n=1}^{\infty} p_n^2; \quad (c) \prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n; \quad (d) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}?$$

的收敛性?

研究下列无穷乘积的收敛性:

$$3066. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

$$3067. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

$$3068. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right).$$

$$3069. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$$3070. \prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p.$$

$$3071. \prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{n^2 + a_1 n + b_1}{n^2 + a n + b}, \text{ 其中当 } n \geq n_0 \text{ 时 } n^2 + a n + b > 0.$$

$$3072. \prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)}, \text{ 其中 } n_0 > b_i \ (i=1, 2, \dots, p).$$

$$3073. \prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}.$$

$$3074. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

$$3075. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[1+\frac{1}{n}]{1+\frac{1}{n}}.$$

$$3076. \prod_{n=1}^{\infty} n^2 \sqrt[n]{n}.$$

$$3077. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

$$3078. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{\frac{x}{n}}, \text{ 其中 } c > 0.$$

$$3079. \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$$

$$3080. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right).$$

$$3081. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right].$$

$$3082. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}}.$$

$$3083. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^q}.$$

$$3084. \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p.$$

$$3085. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n}.$$

$$3086. \text{证明: 若级数 } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{ 收敛, 则乘积 } \prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n \text{ 收敛.}$$

3087. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛, 则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_n\right)$ ($|\alpha_n| < \frac{\pi}{4}$) 收敛.

研究下列无穷乘积的绝对收敛性和条件收敛性:

3088. $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$. 3089. $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$.

3090. $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$. 3091. $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\ln n}\right]$.

3092. $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. 3093. $\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$.

3094. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$. 3095. $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right]$.

3096. $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) \dots$
 $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots$

3097. $\left(1 + \frac{1}{1^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{4^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{5^\alpha}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{6^\alpha}\right) \dots$

3098. 证明: 乘积

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots$$

收敛, 尽管级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots$$

发散.

3099. 证明: 乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ 收敛, 其中

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{k}}, & n = 2k - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & n = 2k, \end{cases}$$

尽管级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ 二者发散,

3100. 设

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(黎曼 ζ 函数), 而 p_n ($n = 1, 2, \dots$) 是素数数列. 证明:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x).$$

3101. 设 $p_n (n = 1, 2, \dots)$ 是素数数列, 证明: 乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$$

和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

发散 (欧拉).

3102. 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon > 0),$$

证明:

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

提示: 研究

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^p = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p.$$

3103. 利用沃利斯公式证明:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3104. 证明: 表达式

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时有异于零的极限 A . 由此推出斯特林公式

$$n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \varepsilon_n),$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, A = \sqrt{2\pi}$.

提示: 把所求极限表示为无穷乘积的形式:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

为了确定常数 A , 可利用沃利斯公式.

3105. 根据欧拉的定义, Γ 函数 $\Gamma(x)$ 由下面的公式来确定:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

由这个公式出发: (a) 把函数 $\Gamma(x)$ 表示为无穷乘积的形状; (b) 证明: $\Gamma(x)$ 对于不为负整数的一切实数 x 皆有意义; (c) 推出下面这个性质: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; (d) 对于正整数 n 求 $\Gamma(n)$ 之值.

3106. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, \quad f_{in} = f(a + i\delta_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x) dx}.$$

3107. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\sum_{i=0}^{n-1} (a+ib)}}{\sum_{i=0}^{n-1} (a+ib)} = \frac{2}{e},$$

其中 $a > 0$ 和 $b > 0$.

3108. 设 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在区间 (a, b) 内为连续函数且 $|f_n(x)| \leq c_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛. 证明: 函数

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)] \quad (|f_n(x)| < 1)$$

在区间 (a, b) 上是连续的.

3109. 求函数

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

的导数之表达式. $F'(x)$ 存在的充分条件为何?

3110. 证明: 若 $0 < x < y$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1) \cdots (x+n)}{y(y+1) \cdots (y+n)} = 0.$$

§10. 斯特林公式

斯特林公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1),$$

可用来计算当值 n 甚大时的 $n!$.

利用斯特林公式, 近似地计算:

3111. $\lg 100!$.

3112. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 1999$.

3113. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100}$.

3114. C_{100}^{40} .

3115. $\frac{100!}{20!30!50!}$.

3116. $\int_0^1 (1-x^2)^{50} dx$.

3117. $\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx$.

3118. 推出乘积

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

的渐近公式.

3119. 若 n 甚大, 近似地计算 C_{2n}^n .

3120. 利用斯特林公式求下列极限:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!}; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}};$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}; \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}.$$

§11. 用多项式逼近连续函数

1. 拉格朗日插值公式. 拉格朗日多项式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)} y_i$$

具有性质 $P_n(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

2. 伯恩斯坦多项式. 若 $f(x)$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数, 则伯恩斯坦多项式

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时在闭区间 $[0, 1]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

3121. 求在给定点按下表取值的最低次的 n 次多项式 $P_n(x)$:

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

$P_n(-1), P_n(1), P_n(6)$ 近似地等于什么?

3122. 写出经过 $A(x_0 - h, y_{-1}), B(x_0, y_0), C(x_0 + h, y_1)$ 这三点的抛物线方程

$$y = ax^2 + bx + c.$$

3123. 利用数值 $x_0 = 1, y_0 = 1; x_1 = 25, y_1 = 5; x_2 = 100, y_2 = 10$ 推出开平方根 $y = \sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 100$) 的近似公式.

3124. 利用数值

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 90^\circ = 1$$

推出如下形式的近似公式:

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3 \quad (0 \leq x \leq 90; x = \text{arc } x^\circ)$$

利用这个公式, 近似地求:

$$\sin 20^\circ, \quad \sin 40^\circ, \quad \sin 80^\circ$$

3125. 取点 $x_i = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ 为拉格朗日多项式的插值节点, 对函数 $f(x) = |x|$ 作出在闭区间 $[-1, 1]$ 上的拉格朗日插值多项式.

3126. 以拉格朗日多项式代换函数 $y(x)$, 近似地计算

$$\int_0^2 y(x) dx$$

其中

x	0	0.5	1	1.5	2
$y(x)$	5	4.5	3	2.5	5

3127. 对于函数 x, x^2, x^3 , 试在闭区间 $[0, 1]$ 上作出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$.

3128. 对于在闭区间 $[a, b]$ 上的已知函数 $f(x)$ 写出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$ 的公式.

3129. 在闭区间 $[-1, 1]$ 上用伯恩斯坦多项式 $B_4(x)$ 逼近函数 $f(x) = \frac{|x| + x}{2}$.

作出函数 $y = \frac{|x| + x}{2}$ 和 $y = B_4(x)$ 的图像.

3130. 在 $-1 \leq x \leq 1$ 时用偶数次伯恩斯坦多项式逼近函数,

$$f(x) = |x|.$$

3131. 对于函数

$$f(x) = e^{kx} \quad (a \leq x \leq b)$$

写出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$.

3132. 在闭区间 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 上, 对于函数 $f(x) = \cos x$ 计算多项式 $B_n(x)$.

3133.1. 证明: 在闭区间 $[-1, 1]$ 上 $|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$, 其中

$$P_n(x) = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{i=2}^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2i-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2i)} (1-x^2)^i.$$

3133.2. 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且

$$M_k = \int_a^b x^k f(x) dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

证明: 当 $x \in [a, b]$ 时有 $f(x) \equiv 0$.

提示: 利用关于用多项式逼近连续函数的魏尔斯特拉斯定理.

3134. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 并且在闭区间 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上连续, 而 $a_n, b_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 是它的傅里叶系数. 证明: 费耶尔三角多项式

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

3135. 对于函数

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

作出费耶尔多项式 $\sigma_{2n-1}(x)$.

第二部分

多元函数

第六章 多元函数微分学

§1. 函数的极限. 连续性

1. 函数的极限. 设函数 $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在以 P_0 为极限点的集合 E 上有定义. 若对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, P_0) > 0$, 使得只要 $P \in E$ 及 $0 < \rho(P, P_0) < \delta$, 其中 $\rho(P, P_0)$ 为 P 和 P_0 二点间的距离, 则有

$$|f(P) - A| < \varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

2. 连续性. 若

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$ 在 P_0 点是连续的.

若函数 $f(P)$ 在所给区域内的每一点连续, 则称函数 $f(P)$ 在此区域内是连续的.

3. 一致连续性. 若对于每一个 $\varepsilon > 0$ 都存在仅与 ε 有关的 $\delta > 0$, 使得对于区域 G 中的任何点 P', P'' , 只要

$$\rho(P', P'') < \delta,$$

便成立不等式

$$|f(P') - f(P'')| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(P)$ 在区域 G 内是一致连续的.

有界闭区域内的连续函数在此区域内是一致连续的.

确定并画出下列函数的存在域:

3136. $u = x + \sqrt{y}$.

3137. $u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$.

3138. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

3139. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

3140. $u = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$.

3141. $u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$.

3142. $u = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$.

3144. $u = \arcsin \frac{y}{x}$.

3146. $u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$.

3148. $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3150. $u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2)$.

3143. $u = \ln(-x - y)$.

3145. $u = \arccos \frac{x}{x + y}$.

3147. $u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.

3149. $u = \ln(xyz)$.

作出下列函数的等值线:

3151. $z = x + y$.

3153. $z = x^2 - y^2$.

3155. $z = \frac{y}{x}$.

3157. $z = \sqrt{xy}$.

3159. (a) $z = |x| + |y| - |x + y|$;

(c) $z = \max(|x|, |y|)$;

3160. $z = e^{\frac{2x}{x^2 + y^2}}$.

3162. $z = x^y e^{-x} (x > 0)$.

3164. $z = \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} (a > 0)$.

3152. $z = x^2 + y^2$.

3154. $z = (x + y)^2$.

3156. $z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$.

3158. $z = |x| + y$.

(b) $z = \min(x, y)$;

(d) $z = \min(x^2, y)$.

3161. $z = x^y (x > 0)$.

3163. $z = \ln \sqrt{\frac{(x - a)^2 + y^2}{(x + a)^2 + y^2}} (a > 0)$.

3165. $z = \operatorname{sgn}(\sin x \sin y)$.

求下列函数的等值面:

3166. $u = x + y + z$.

3168. $u = x^2 + y^2 - z^2$.

3170. $u = \operatorname{sgn} \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

3167. $u = x^2 + y^2 + z^2$.

3169. $u = (x + y)^2 + z^2$.

根据曲面的已知方程研究其性质:

3171. $z = f(y - ax)$.

3173. $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

3175. 作出函数

$$F(t) = f(\cos t, \sin t)$$

的图像, 式中

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y \geq x, \\ 0, & y < x. \end{cases}$$

3176. 若

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

求 $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

3177. 若

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad (x > 0),$$

求 $f(x)$.

3178. 设

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1).$$

若当 $y = 1$ 时 $z = x$, 求函数 f 和 z .

3179. 设

$$z = x + y + f(x - y).$$

若当 $y = 0$ 时 $z = x^2$, 求函数 f 和 z .

3180. 若 $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.

3181. 证明: 对于函数

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y},$$

有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = -1,$$

从而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

3182. 证明: 对于函数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2},$$

有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = 0,$$

然而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

3183.1. 证明: 对于函数

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y},$$

累次极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 和 $\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 不存在, 但存在 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

3183.2. 是否存在极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}?$$

3183.3. 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 函数

$$f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$$

沿任意射线 $x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha$ ($0 \leq t < +\infty$) 的极限等于什么? 当 $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$ 时, 可否称此函数为无穷小量?

3184. 求 $\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right\}$ 及 $\lim_{y \rightarrow b} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right\}$, 设:

$$(a) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, a = \infty, b = \infty; \quad (b) f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}, a = \infty, b = +0;$$

$$(c) f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}, a = \infty, b = \infty;$$

$$(d) f(x, y) = \frac{1}{xy} \tan \frac{xy}{1 + xy}, a = 0, b = \infty; \quad (e) f(x, y) = \log_x(x + y), a = 1, b = 0.$$

求下列二重极限:

$$3185. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}.$$

$$3186. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}.$$

$$3187. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x}.$$

$$3188. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}.$$

$$3189. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}.$$

$$3190. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$$

$$3191. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

$$3192. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

3193. 若 $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$, 问沿怎样的方向 φ 存在有限的极限值:

$$(a) \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2 + y^2}};$$

$$(b) \lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{x^2 - y^2} \cdot \sin 2xy.$$

求下列函数的间断点:

$$3194. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$3195. u = \frac{xy}{x + y}.$$

$$3196. u = \frac{x + y}{x^3 + y^3}.$$

$$3197. u = \sin \frac{1}{xy}.$$

$$3198. u = \frac{1}{\sin x \sin y}.$$

$$3199. u = \ln(1 - x^2 - y^2).$$

$$3200. u = \frac{1}{xyz}.$$

$$3201. u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

3202. 证明: (a) 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

分别对每一个变量 x 或 y (当另一变量的值固定时) 是连续的, 但对这些变量的总体不是连续的;

(b) 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $O(0, 0)$ 处沿过此点的每一射线

$$x = t \cos \alpha, \quad y = t \sin \alpha \quad (0 \leq t < +\infty)$$

连续, 即存在

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0),$$

但此函数在点 $(0, 0)$ 并非连续的.

3203.1. 研究线性函数

$$u = 2x - 3y + 5$$

在平面 $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ 上的一致连续性.

3203.2. 研究函数

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

在平面 $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ 上的一致连续性.

3203.3. 函数

$$f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$$

在区域 $x^2 + y^2 < 1$ 内是否一致连续?

3203.4. 给定函数

$$u = \arcsin \frac{x}{y}$$

此函数在其定义域 E 内是否连续? 是否一致连续?

3204. 证明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

的间断点的集合不是闭集.

3205. 证明: 若函数 $f(x, y)$ 在某区域 G 内对变量 x 是连续的, 而关于 x 对变量 y 是一致连续的, 则此函数在该区域内是连续的.

3206. 证明: 若在某区域 G 内函数 $f(x, y)$ 对变量 x 是连续的, 并满足对变量 y 的利普希茨条件, 即

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L |y' - y''|,$$

式中 $(x, y') \in G, (x, y'') \in G$, 而 L 为常数, 则此函数在该区域内是连续的.

3207. 证明: 若函数 $f(x, y)$ 分别对每一个变量 x 和 y 是连续的, 并对其中的一个是单调的, 则此函数对两个变量的总体是连续的 (杨定理).

3208. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ 上是连续的, 而函数序列 $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 $[a, A]$ 上一致收敛并满足条件 $b \leq \varphi_n(x) \leq B$. 证明: 函数序列

$$F_n(x) = f(x, \varphi_n(x)) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

也在 $[a, A]$ 上一致收敛.

3209. 设: 1) 函数 $f(x, y)$ 在区域 R ($a < x < A; b < y < B$) 内连续; 2) 函数 $\varphi(x)$ 在区间 (a, A) 内连续, 且函数值属于区间 (b, B) . 证明: 函数

$$F(x) = f(x, \varphi(x))$$

在区间 (a, A) 内连续.

3210. 设: 1) 函数 $f(x, y)$ 在区域 R ($a < x < A; b < y < B$) 内连续; 2) 函数 $x = \varphi(u, v)$ 及 $y = \psi(u, v)$ 在区域 R' ($a' < u < A'; b' < v < B'$) 内连续, 且函数值分别属于区间 (a, A) 和 (b, B) . 证明: 函数

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

在区域 R' 内连续.

§2. 偏导数. 函数的微分

1. **偏导数.** 在求多元函数的偏导数时, 若计算中出现的所有偏导数均连续, 则求导的结果与求导的次序无关.

2. **函数的微分.** 若自变量 x, y, z 的函数 $f(x, y, z)$ 的全增量可写为以下形式:

$$\Delta f(x, y, z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),$$

式中 A, B, C 与 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 无关而 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, 则称函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 可微, 而增量的线性部分 $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$, 即

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z) dx + f'_y(x, y, z) dy + f'_z(x, y, z) dz \quad (1)$$

(其中 $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$), 称为此函数的微分.

当变量 x, y, z 是其他自变量的可微函数时, 公式 (1) 仍有其意义.

若 x, y, z 为自变量, 且函数 $f(x, y, z)$ 有连续的直至 n 阶的偏导数, 则对于高阶的微分, 有符号公式

$$d^n f(x, y, z) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(x, y, z).$$

3. **复合函数的导数.** 若 $w = f(x, y, z)$ 可微, 其中 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)$, 且函数 φ, ψ, χ 可微, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$

计算函数 w 的二阶导数时最好用下列符号公式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 w + \frac{\partial P_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} &= \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(P_2 \frac{\partial}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial}{\partial y} + R_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) w \\ &\quad + \frac{\partial P_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial x}{\partial u}, & Q_1 &= \frac{\partial y}{\partial u}, & R_1 &= \frac{\partial z}{\partial u}; \\ P_2 &= \frac{\partial x}{\partial v}, & Q_2 &= \frac{\partial y}{\partial v}, & R_2 &= \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$

4. 方向导数. 若用方向余弦 $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 表示 $Qxyz$ 空间内的方向 l , 且函数 $u = f(x, y, z)$ 可微, 则沿方向 l 的导数按下式来计算:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

函数在给定点的最大增长速度的大小与方向可用一个向量——函数的梯度

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

给出, 它的大小等于

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211.1. 证明:

$$f'_x(x, b) = \frac{d}{dx} [f(x, b)].$$

3211.2. 设

$$f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}},$$

求 $f'_x(x, 1)$.

3212.1. 设 $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$, 求 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$. 此函数在点 $O(0, 0)$ 是否可微?

3212.2. 函数 $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ 在点 $O(0, 0)$ 是否可微?

3212.3. 研究函数

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $O(0, 0)$ 的可微性.

求下列函数的一阶和二阶偏导数:

3213. $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

3214. $u = xy + \frac{x}{y}$.

3215. $u = \frac{x}{y^2}$.

3216. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3217. $u = x \sin(x + y)$.

3218. $u = \frac{\cos x^2}{y}$.

3219. $u = \tan \frac{x^2}{y}$.

3220. $u = x^y$.

3221. $u = \ln(x + y^2)$.

3222. $u = \arctan \frac{y}{x}$.

3223. $u = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$.

3224. $u = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3225. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

3226. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

3227. $u = x^{\frac{y}{z}}$.

3228. $u = x^{y^z}$.

3229. 设 (a) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; (b) $u = x^{y^2}$; (c) $u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$,

3256. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, 若

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4.$$

3257. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, 若 $u = x \ln(xy)$. 3258. $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, 若 $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

3259. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, 若 $u = \arctan \frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz}$.

3260. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, 若 $u = e^{xyz}$.

3261. $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta}$, 若 $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}$.

3262. $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$, 若 $u = (x - x_0)^p (y - y_0)^q$.

3263. $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, 若 $u = \frac{x + y}{x - y}$. 3264. $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, 若 $u = (x^2 + y^2)e^{x+y}$.

3265. $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, 若 $u = xyz e^{x+y+z}$.

3266. 若 $f(x, y) = e^x \sin y$, 求 $f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0, 0)$.

3267. 证明: 若 $u = f(xyz)$, 则 $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = F(t)$, 式中 $t = xyz$, 并求函数 F .

3268. 设

$$u = x^4 - 2x^3y - 2xy^3 + y^4 + x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 + 2x^2 - xy + 2y^2 + x + y + 1,$$

求 $d^4 u$. 导数 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}$ 和 $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ 等于什么?

在下列各题中求所指出的阶的全微分:

3269. $d^3 u$, 若 $u = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$. 3270. $d^3 u$, 若 $u = \sin(x^2 + y^2)$.

3271. $d^{10} u$, 若 $u = \ln(x + y)$.

3272. $d^6 u$, 若 $u = \cos x \cosh y$.

3273. $d^3 u$, 若 $u = xyz$.

3274. $d^4 u$, 若 $u = \ln(x^x y^y z^z)$.

3275. $d^n u$, 若 $u = e^{ax+by}$.

3276. $d^n u$, 若 $u = X(x)Y(y)$.

3277. $d^n u$, 若 $u = f(x + y + z)$.

3278. $d^n u$, 若 $u = e^{ax+by+cz}$.

3279. 设 $P_n(x, y, z)$ 为 n 次齐次多项式. 证明:

$$d^n P_n(x, y, z) = n! P_n(dx, dy, dz).$$

3280. 设

$$Au = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}.$$

求 Au 和 $A^2 u = A(Au)$, 若 (a) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$; (b) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

3281. 设

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$(a) (1+x)^m(1+y)^n; \quad (b) \ln(1+x) \cdot \ln(1+y); \quad (c) \arctan \frac{x+y}{1+xy}.$$

3245. 用微分来代替函数的增量, 近似地计算:

$$(a) 1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3; \quad (b) \frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98} \cdot \sqrt[4]{1.05^3}};$$

$$(c) \sqrt{1.02^3 + 1.97^3}; \quad (d) \sin 29^\circ \cdot \tan 46^\circ; \quad (e) 0.97^{1.05}.$$

3246. 设矩形的边 $x = 6$ m 和 $y = 8$ m, 若第一个边增加 2 mm, 而第二个边减少 5 mm, 则矩形的对角线和面积变化多少?

3247. 扇形的中心角 $\alpha = 60^\circ$ 增加 $\Delta\alpha = 1^\circ$, 为了使扇形的面积仍然不变, 则应当把扇形的半径 $R = 20$ cm 减少多少?

3248. 证明: 乘积的相对误差近似地等于乘数的相对误差之和.

3249. 当测量圆柱的底半径 R 和高 H 时得到以下结果:

$$R = 2.5 \text{ m} \pm 0.1 \text{ m}; \quad H = 4.0 \text{ m} \pm 0.2 \text{ m},$$

则所计算出的圆柱体积会有怎样的绝对误差 Δ 和相对误差 δ ?

3250. 三角形的边 $a = 200 \text{ m} \pm 2 \text{ m}$, $b = 300 \text{ m} \pm 5 \text{ m}$, 它们之间的角 $C = 60^\circ \pm 1^\circ$. 则所计算出的三角形第三边 c 会有怎样的绝对误差?

3251. 证明: 在点 $(0, 0)$ 连续的函数

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|},$$

在点 $(0, 0)$ 有两个偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$, 但在点 $(0, 0)$ 并非可微的.

说明导数 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域中的性质.

3252. 证明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 的邻域中连续且有有界的偏导数 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$, 但此函数在点 $(0, 0)$ 不可微.

3253. 证明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 的邻域中有偏导数 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$, 这些偏导数在点 $(0, 0)$ 是不连续的, 且在此点的任何邻域中是无界的; 然而, 此函数在点 $(0, 0)$ 可微.

3254. 证明: 在某凸区域 E 内具有有界偏导数 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 的函数 $f(x, y)$ 在此区域 E 内一致连续.

3255. 证明: 若函数 $f(x, y)$ 对变量 x 连续 (对每一个固定的值 y) 且有对变量 y 的有界的导数 $f'_y(x, y)$, 则此函数对变量 x 和 y 的总体是连续的.

在下列问题中求所列偏导数:

验证等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

3230.1. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明:

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

3230.2. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

是否存在 $f''_{xy}(0, 0)$?

3231. 设 $u = f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数, 就下列各题验证关于齐次函数的欧拉定理:

$$(a) u = (x - 2y + 3z)^2; \quad (b) u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad (c) u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}}.$$

3232. 证明: 若可微函数 $u = f(x, y, z)$ 满足方程

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

则它为 n 次齐次函数.

提示: 研究辅助函数

$$F(t) = \frac{f(tx, ty, tz)}{t^n}.$$

3233. 证明: 若 $f(x, y, z)$ 是可微的 n 次齐次函数, 则其偏导数 $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ 是 $n-1$ 次齐次函数.

3234. 设 $u = f(x, y, z)$ 是二阶可微的 n 次齐次函数, 证明:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

求下列函数的一阶和二阶微分 (x, y, z 为自变量):

3235. $u = x^m y^n.$

3236. $u = \frac{x}{y}.$

3237. $u = \sqrt{x^2 + y^2}.$

3238. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$

3239. $u = e^{xy}.$

3240. $u = xy + yz + zx.$

3241. $u = \frac{z}{x^2 + y^2}.$

3242. 设 $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x}{y}}$, 求 $df(1, 1, 1)$ 及 $d^2f(1, 1, 1)$.

3243. 证明: 若 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $d^2u \geq 0$.

3244. 假设 x, y 的绝对值很小, 对下列各式推出近似公式:

求 Δu , 若 (a) $u = \sin x \cosh y$; (b) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

3282. 设

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \quad \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

求 $\Delta_1 u$ 和 $\Delta_2 u$, 若 (a) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$; (b) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

求下列复合函数的一阶和二阶导数:

3283. $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

3284. $u = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$.

3285. $u = f(x, xy, xyz)$.

3286. 设 $u = f(x + y, xy)$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

3287. 设 $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$, 求 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

求下列复合函数的一阶和二阶全微分 (x, y 及 z 为自变量):

3288. $u = f(t)$, 其中 $t = x + y$.

3289. $u = f(t)$, 其中 $t = \frac{y}{x}$.

3290. $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

3291. $u = f(t)$, 其中 $t = xyz$.

3292. $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

3293. $u = f(\xi, \eta)$, 其中 $\xi = ax, \eta = by$.

3294. $u = f(\xi, \eta)$, 其中 $\xi = x + y, \eta = x - y$.

3295. $u = f(\xi, \eta)$, 其中 $\xi = xy, \eta = \frac{x}{y}$.

3296. $u = f(x + y, z)$.

3297. $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$.

3298. $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

3299. $u = f(x, y, z)$, 其中 $x = t, y = t^2, z = t^3$.

3300. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, 其中 $\xi = ax, \eta = by, \zeta = cz$.

3301. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, 其中 $\xi = x^2 + y^2, \eta = x^2 - y^2, \zeta = 2xy$.

求 $d^n u$, 设:

3302. $u = f(ax + by + cz)$.

3303. $u = f(ax, by, cz)$.

3304. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, 其中

$$\xi = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad \eta = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \quad \zeta = a_3 x + b_3 y + c_3 z.$$

3305. 设 $u = f(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 和 f 为二阶可微的函数. 证明:

$$\Delta u = F(r),$$

其中 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, Δ 为拉普拉斯算子, 并求函数 F .

3306. 设 u 和 v 为二阶可微的函数, Δ 为拉普拉斯算子 (参阅习题 3305). 证明:

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\Delta(u, v),$$

其中

$$\Delta(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

3307. 证明: 函数

$$u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

(a 和 b 为常数) 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3308. 证明: 若函数 $u = u(x, y)$ 满足拉普拉斯方程 (参阅习题 3307), 则函数

$$v = u \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

也满足此方程.

3309. 证明: 函数

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$$

(a 和 b 为常数) 满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3310. 证明: 若函数 $u = u(x, t)$ 满足热传导方程 (参阅 3309 题), 则函数

$$v = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} u \left(\frac{x}{a^2 t}, -\frac{1}{a^4 t} \right) \quad (t > 0)$$

也满足该方程.

3311. 证明: 函数

$$u = \frac{1}{r} \quad (\text{式中 } r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2})$$

当 $r \neq 0$ 时满足拉普拉斯方程

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

3312. 证明: 若函数 $u = u(x, y, z)$ 满足拉普拉斯方程 (参阅 3311 题), 则函数

$$v = \frac{1}{r} u \left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \frac{k^2 z}{r^2} \right)$$

(式中 k 为常数, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 也满足该方程.

3313. 证明: 函数

$$u = \frac{C_1 e^{-ar} + C_2 e^{ar}}{r}$$

(式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, C_1, C_2 为常数) 满足亥姆霍兹方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u.$$

3314. 设函数 $u_1 = u_1(x, y, z)$ 及 $u_2 = u_2(x, y, z)$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$. 证明: 函数

$$v = u_1(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2)u_2(x, y, z)$$

满足双调和方程

$$\Delta(\Delta v) = 0.$$

3315. 设 $f(x, y, z)$ 是 m 阶可微的 n 次齐次函数. 证明:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^m f(x, y, z) = n(n-1) \cdots (n-m+1) f(x, y, z).$$

3316. 若

$$z = \sin y + f(\sin x - \sin y),$$

其中 f 为可微函数, 试简化表达式

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

3317. 证明: 函数

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

(其中 f 为任意的可微函数) 满足方程

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

3318. 证明:

$$z = yf(x^2 - y^2)$$

(其中 f 为任意的可微函数) 满足方程

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

3319. 若

$$u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y-x, z-x),$$

其中 f 为可微函数, 试简化表达式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

3320. 设

$$x^2 = vw, \quad y^2 = uw, \quad z^2 = uv,$$

$$f(x, y, z) = F(u, v, w),$$

证明:

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w.$$

假定任意函数 φ, ψ 等为足够多次可微的函数, 验证下列等式:

3321. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 若 $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

3322. $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, 若 $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$.

3323. $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$, 若 $z = e^y \varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

3324. $x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu$, 若 $u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right)$.

3325. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$, 若 $u = \frac{xy}{z} \ln x + x \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

3326. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 若 $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

$$3327. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ 若 } u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y).$$

$$3328. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ 若 } u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$3329. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u, \text{ 若 } u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$3330. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ 若 } u = \varphi[x + \psi(y)].$$

用逐次微分的方法消去任意函数 φ 和 ψ :

$$3331. z = x + \varphi(xy).$$

$$3332. z = x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right).$$

$$3333. z = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

$$3334. u = \varphi(x-y, y-z).$$

$$3335. u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right).$$

$$3336. z = \varphi(x) + \psi(y).$$

$$3337. z = \varphi(x)\psi(y).$$

$$3338. z = \varphi(x+y) + \psi(x-y).$$

$$3339. z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y\psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

$$3340. z = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

3341. 求函数

$$z = x^2 - y^2$$

在点 $M(1, 1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成角 $\alpha = 60^\circ$ 的方向 l 的导数.

3342. 求函数

$$z = x^2 - xy + y^2$$

在点 $M(1, 1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成 α 角的方向 l 的导数. 在怎样的方向上此导数: (a) 有最大值; (b) 有最小值; (c) 等于 0.

3343. 求函数

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

在点 $M(x_0, y_0)$ 沿与过此点的等值线垂直方向的导数.

3344. 求函数

$$z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

在点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 沿曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在此点的内法线方向的导数.

3345. 求函数

$$u = xyz$$

在点 $M(1, 1, 1)$ 沿方向 $l\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 的导数. 函数在该点的梯度的大小是什么?

3346. 求函数

$$u = \frac{1}{r}$$

(式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度的大小和方向.

3347. 求函数

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

在点 $A(\varepsilon, 0, 0)$ 及 $B(0, \varepsilon, 0)$ 二点的梯度之间的角度.

3348. 函数

$$u = x + y + z$$

和

$$v = x + y + z + 0.001 \sin \left(10^6 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

的梯度的大小相差多少?

3349. 证明: 函数

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2$$

和

$$v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$$

(a, b, c, m, n, p 为常数且 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度之间的角度当点 M_0 无限远移时趋于零.

3350. 设 $u = f(x, y, z)$ 为二阶可微的函数. 若 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为方向 l 的方向余弦, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)$.

3351. 设 $u = f(x, y, z)$ 为二阶可微的函数,

$$l_1 \{ \cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1 \}, \quad l_2 \{ \cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2 \}, \quad l_3 \{ \cos \alpha_3, \cos \beta_3, \cos \gamma_3 \}$$

为三个互相垂直的方向. 证明:

$$(a) \left(\frac{\partial u}{\partial l_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2;$$

$$(b) \frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3352. 设 $u = u(x, y)$ 为可微的函数, 且当 $y = x^2$ 时有

$$u(x, y) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = x,$$

求当 $y = x^2$ 时的 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

3353. 设函数 $u = u(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

以及下列条件:

$$u(x, 2x) = x, \quad u'_x(x, 2x) = x^2.$$

求 $u''_{xx}(x, 2x), u''_{xy}(x, 2x), u''_{yy}(x, 2x)$.

假设 $z = z(x, y)$, 解下列方程:

$$3354. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

$$3355. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$3356. \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0.$$

3357. 假定 $u = u(x, y, z)$ 解方程

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

3358. 求方程

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$$

的解 $z = z(x, y)$, 使它满足条件 $z(x, x^2) = 1$.

3359. 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

的解 $z = z(x, y)$, 使它满足条件 $z(x, 0) = 1, z'_y(x, 0) = x$.

3360. 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$$

的解 $z = z(x, y)$, 使它满足条件 $z(x, 0) = x, z(0, y) = y^2$.

§3. 隐函数的微分法

1. 存在定理. 设: 1) 函数 $F(x, y, z)$ 在某点 $\tilde{A}_0(x_0, y_0, z_0)$ 等于零; 2) $F(x, y, z)$ 和 $F'_x(x, y, z)$ 在点 \tilde{A}_0 的邻域内有定义并且是连续的; 3) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 则在点 $A_0(x_0, y_0)$ 的某充分小邻域内存在唯一的单值连续函数

$$z = f(x, y), \quad (1)$$

它满足方程

$$F(x, y, z) = 0$$

而且 $z_0 = f(x_0, y_0)$.

2. 隐函数的可微性. 若除了上述条件, 还有 4) 函数 $F(x, y, z)$ 在点 $\tilde{A}_0(x_0, y_0, z_0)$ 的邻域内可微, 则函数 (1) 在点 $A_0(x_0, y_0)$ 的邻域内也可微, 并且它的导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 可从方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

求得. 若函数 $F(x, y, z)$ 任意多次可微, 则采用对方程 (2) 逐次微分的方法也可计算函数 z 的高阶导数.

3. 由方程组定义的隐函数. 设函数 $F_i(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) (i = 1, 2, \dots, n)$ 满足下列条件:

(1) 在点 $\tilde{A}_0(x_{10}, \dots, x_{m0}; y_{10}, \dots, y_{n0})$ 等于零;

(2) 在点 \tilde{A}_0 的邻域内可微;

(3) 在点 \tilde{A}_0 函数行列式 $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$.

在这种情况下, 方程组

$$F_i(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

在点 $A_0(x_{10}, \dots, x_{m0})$ 的某邻域内唯一地确定出一组单值可微函数

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

它们满足方程 (3) 及初始条件

$$f_i(x_{10}, \dots, x_{m0}) = y_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

这些隐函数的微分可由以下方程组求得^①:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_k} dy_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3361. 证明: 在每一点都不连续的狄利克雷函数

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

满足方程 $y^2 - y = 0$.

3362. 设函数 $f(x)$ 定义于区间 (a, b) 内. 在怎样的情况下, 方程

$$f(x)y = 0$$

在 $a < x < b$ 时有唯一连续的解 $y = 0$?

3363. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义且连续. 在怎样的情况下, 方程

$$f(x)y = g(x)$$

在区间 (a, b) 内有唯一连续的解?

3364. 已知方程

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1}$$

设

$$y = y(x) \quad (-1 \leq x \leq 1) \tag{2}$$

为满足方程 (1) 的单值函数.

- 1) 有多少单值函数 (2) 满足方程 (1)?
- 2) 有多少单值连续函数 (2) 满足方程 (1)?
- 3) 设: (a) $y(0) = 1$; (b) $y(1) = 0$, 则有多少单值连续函数 (2) 满足方程 (1)?

3365. 已知方程

$$x^2 = y^2, \tag{1}$$

设

$$y = y(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{2}$$

是满足方程 (1) 的单值函数.

- 1) 有多少单值函数 (2) 满足方程 (1)?
- 2) 有多少单值连续函数 (2) 满足方程 (1)?
- 3) 有多少单值可微函数 (2) 满足方程 (1)?
- 4) 设: (a) $y(1) = 1$; (b) $y(0) = 0$, 则有多少单值连续函数 (2) 满足方程 (1)?

^①在陈述本节大多数题目时, 无条件地假定隐函数和它们的相应导数存在的条件满足.

5) 设 $y(1) = 1$, 且 δ 为充分小的数, 则有多少单值连续函数 $y = y(x)$ ($1 - \delta < x < 1 + \delta$) 满足方程 (1)?

3366. 方程

$$x^2 + y^2 = x^4 + y^4$$

定义出多值函数 $y(x)$. 函数在怎样的区域内: 1) 单值, 2) 有二个值, 3) 有三个值, 4) 有四个值? 求此函数的分支点及单值连续的各分支.

3367. 求由方程

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

定义的多值函数 y 的分支点和单值连续的各分支 $y = y(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$).

3368. 设函数 $f(x)$ 当 $a < x < b$ 时连续, 函数 $\varphi(y)$ 当 $c < y < d$ 时单调增加而且连续. 在怎样的条件下, 方程

$$\varphi(y) = f(x)$$

定义出单值函数

$$y = \varphi^{-1}(f(x))?$$

研究例子: (a) $\sin y + \sinh y = x$; (b) $e^{-y} = -\sin^2 x$.

3369. 设

$$x = y + \varphi(y), \quad (1)$$

其中 $\varphi(0) = 0$, 且当 $-a < y < a$ 时 $|\varphi'(y)| \leq k < 1$. 证明: 当 $-\varepsilon < x < \varepsilon$ 时存在唯一的可微函数 $y = y(x)$ 满足方程 (1) 且 $y(0) = 0$.

3370. 设 $y = y(x)$ 为由方程

$$x = ky + \varphi(y)$$

定义的隐函数, 其中常数 $k \neq 0$, $\varphi(y)$ 为以 ω 为周期的周期函数, 且 $|\varphi'(y)| < |k|$. 证明:

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

其中 $\psi(x)$ 为以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数.

对于由下列各方程定义的函数 y , 求 y' 和 y'' :

3371. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$.

3372. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$.

3373. $y - \varepsilon \sin y = x$ ($0 < \varepsilon < 1$).

3374. $x^y = y^x$ ($x \neq y$).

3375. $y = 2x \arctan \frac{y}{x}$.

3376. 证明: 若

$$1 + xy = k(x - y),$$

式中 k 为常数, 则成立等式

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

3377. 证明: 若

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

则当 $xy > 0$ 时成立等式

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

3378. 证明: 方程

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (a \neq 0)$$

在点 $x = 0, y = 0$ 的邻域中定义出两个可微函数: $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$. 求 $y_1'(0)$ 及 $y_2'(0)$.

3379. 设

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3,$$

求 y' 当 $x = 0$ 和 $y = 0$ 时的值.

3380. 设 $x^2 + xy + y^2 = 3$, 求 y', y'' 及 y''' .

3381. 设

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0,$$

求 y', y'' 及 y''' 当 $x = 0, y = 1$ 时的值.

3382. 证明: 对于二次曲线

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

成立等式

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[(y'')^{-\frac{2}{3}} \right] = 0.$$

求函数 $z = z(x, y)$ 的一阶和二阶偏导数, 设:

$$3383. \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

$$3384. \quad z^3 - 3xyz = a^3.$$

$$3385. \quad x + y + z = e^z.$$

$$3386. \quad z = \sqrt{x^2 - y^2} \cdot \tan \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

$$3387. \quad x + y + z = e^{-(x+y+z)}.$$

3388. 设

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \tag{1}$$

且

$$f(x, y, z) = xy^2z^3.$$

求 $f'_x(1, 1, 1)$, 若: (a) $z = z(x, y)$ 是由方程 (1) 定义的隐函数, (b) 若 $y = y(x, z)$ 是由方程 (1) 定义的隐函数. 说明为什么这些导数相异.

3389. 设 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 当 $x = 1, y = -2, z = 1$ 时的值.

求 dz 和 d^2z , 设

$$3390. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$3391. xyz = x + y + z.$$

$$3392. \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1.$$

$$3393. z = x + \arctan \frac{y}{z-x}.$$

$$3394. \text{ 设 } u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0, \text{ 求 } du.$$

$$3395. \text{ 设 } F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0, \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$$3396. \text{ 设 } F(x-y, y-z, z-x) = 0, \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ 和 } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$3397. \text{ 设 } F(x, x+y, x+y+z) = 0, \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ 和 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$3398.1. \text{ 设 } F(xz, yz) = 0, \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$3398.2. \text{ 设 (a) } F(x+z, y+z) = 0; \text{ (b) } F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0, \text{ 求 } d^2z.$$

3399. 设 $z = z(x, y)$ 为由方程 $z^3 - xz + y = 0$ 定义的可微函数, 且当 $x = 3, y = -2$ 时 $z = 2$. 求 $dz(3, -2)$ 和 $d^2z(3, -2)$.

3400. 设 $x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$ 为由方程 $F(x, y, z) = 0$ 定义的函数. 证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

$$3401. \text{ 设 } x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{ 求 } \frac{dx}{dz} \text{ 和 } \frac{dy}{dz}.$$

3402. (a) 设 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2, x + y + z = 2$, 求 $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, \frac{d^2x}{dz^2}$ 和 $\frac{d^2y}{dz^2}$ 当 $x = 1, y = -1, z = 2$ 时的值.

$$(b) \text{ 设 } xu - yv = 0, yu + xv = 1, \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \text{ 和 } \frac{\partial v}{\partial y}.$$

3403. 设由方程组

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1, \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

定义的可微函数 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 满足 $u(1, 2) = 0$ 和 $v(1, 2) = 0$, 求 $du(1, 2)$ 和 $dv(1, 2)$.

$$3404. \text{ 设 } u + v = x + y, \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}, \text{ 求 } du, dv, d^2u \text{ 和 } d^2v.$$

3405. 设

$$e^{\frac{u}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}},$$

求 du, dv, d^2u 和 d^2v 当 $x = 1, y = 1, u = 0, v = \frac{\pi}{4}$ 时的表达式.

3406. 设

$$x = t + t^{-1}, \quad y = t^2 + t^{-2}, \quad z = t^3 + t^{-3},$$

求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 和 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

3407. 在 Oxy 平面上怎样的区域内, 方程组

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3$$

(式中参数 u 和 v 取一切可能的实数值) 定义 z 为变量 x 和 y 的函数? 求导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3408. (a) 设

$$\begin{cases} x = u + \ln v, \\ y = v - \ln u, \\ z = 2u + v, \end{cases}$$

求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial x}{\partial y}$ 在点 $u = 1, v = 1$ 的值.

(b) 设

$$\begin{cases} x = u + v^2, \\ y = u^2 - v^3, \\ z = 2uv, \end{cases}$$

求 $\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y}$ 在点 $u = 2, v = 1$ 的值.

(c) 设 $x = \cos \varphi \cos \psi, y = \cos \varphi \sin \psi, z = \sin \varphi$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3409. 设 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3410. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程组

$$\begin{cases} x = e^{u+v}, \\ y = e^{u-v}, \\ z = uv \end{cases}$$

(u 及 v 为参数) 定义, 求当 $u = 0$ 及 $v = 0$ 时的 dz 及 d^2z .

3411. 设 $z = x^2 + y^2$, 其中 $y = y(x)$ 为由方程 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 定义的函数, 求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

3412. 设 $u = \frac{x+z}{y+z}$, 其中 z 为由方程 $ze^z = xe^x + ye^y$ 定义的函数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

3413. 设方程

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

定义 z 为 x 和 y 的函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3414. 设

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

求反函数 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 的一阶和二阶偏导数.

3415. 设 (a) $x = u \cos \frac{v}{u}, y = u \sin \frac{v}{u}$; (b) $x = e^u + u \sin v, y = e^u - u \cos v$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

3416. 函数 $u = u(x)$ 由方程组

$$\begin{cases} u = f(x, y, z), \\ g(x, y, z) = 0, \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

定义, 求 $\frac{du}{dx}$ 和 $\frac{d^2u}{dx^2}$.

3417. 函数 $u = u(x, y)$ 由方程组

$$\begin{cases} u = f(x, y, z, t), \\ g(y, z, t) = 0, \\ h(z, t) = 0 \end{cases}$$

定义, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

3418. 设

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w),$$

求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial z}$.

3419. 设函数 $z = z(x, y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} f(x, y, z, t) = 0, \\ g(x, y, z, t) = 0, \end{cases}$$

式中 t 为参变量, 求 dz .

3420. 设 $u = f(z)$, 其中 $z = z(x, y)$ 为由方程 $z = x + y\varphi(z)$ 定义的隐函数. 证明拉格朗日公式:

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ [\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\}.$$

提示: 对 $n = 1$ 证明公式并运用数学归纳法.

3421. 证明: 由方程

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0 \quad (1)$$

(其中 $\Phi(u, v)$ 是变量 u, v 的任意可微函数, a 和 b 为常数) 定义的函数 $z = z(x, y)$ 为方程

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

的解. 说明曲面 (1) 的几何性质.

3422. 证明: 由方程

$$\Phi \left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0} \right) = 0 \quad (2)$$

(其中 $\Phi(u, v)$ 是变量 u 和 v 的任意可微函数) 定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$(x - x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0.$$

说明曲面 (2) 的几何性质.

3423. 证明: 由方程

$$ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2) \quad (3)$$

(其中 $\Phi(u)$ 是变量 u 的任意可微函数, a, b 和 c 为常数) 定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

说明曲面 (3) 的几何性质.

3424. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$$

给出, 证明:

$$(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

3425. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$F(x + zy^{-1}, y + zx^{-1}) = 0$$

给出. 证明:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

3426. 证明: 由方程组

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha + \ln z = f(\alpha), \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha = f'(\alpha) \end{cases}$$

(其中 $\alpha = \alpha(x, y)$ 为参变量, $f(\alpha)$ 为任意可微函数) 定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2.$$

3427. 证明: 由方程组

$$\begin{cases} z = \alpha x + \frac{y}{\alpha} + f(\alpha), \\ 0 = x - \frac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha) \end{cases}$$

给出的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

3428. 证明: 由方程组

$$\begin{cases} [z - f(\alpha)]^2 = x^2(y^2 - \alpha^2), \\ [z - f(\alpha)] f'(\alpha) = \alpha x^2 \end{cases}$$

给出的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

3429. 证明: 由方程组

$$\begin{cases} z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ 0 = x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha) \end{cases}$$

给出的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

3430. 证明: 由方程

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

定义的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

§4. 变量代换

1. 在含有导数的表达式中的变量代换. 设在微分表达式

$$A = \Phi(x, y, y'_x, y''_{xx}, \dots)$$

中需要把 x, y 换为新的变量 t (自变量) 及 u (函数), 这些变量与旧变量 x, y 之间的关系由方程

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u) \quad (1)$$

给出. 把方程 (1) 微分, 便有

$$y'_x = \frac{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} u'_t}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t}.$$

类似地可表示出高阶导数 y''_{xx}, \dots 结果得

$$A = \Phi_1(t, u, u'_t, u''_{tt}, \dots).$$

2. 在含有偏导数的表达式中自变量的代换. 若在表达式

$$B = F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots \right)$$

中令

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad (2)$$

其中 u 和 v 为新的自变量, 则偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ 由下列方程确定:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v}, \quad \dots$$

3. 在含有偏导数的表达式中自变量和函数的代换. 在更一般的情况下, 设有方程

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w), \quad (3)$$

其中 u, v 为新的自变量, $w = w(u, v)$ 为新的函数, 则对于偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ 得到这样的方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) &= \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) &= \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v}, \quad \dots \end{aligned}$$

在某些情况下, 使用全微分法进行变量代换是方便的.

3431. 把 y 看作新的自变量, 变换方程

$$y'y''' - 3y''^2 = x.$$

3432. 用同样的方法变换方程

$$y'^2 y^{(4)} - 10y'y''y''' + 15y''^3 = 0.$$

3433. 把 x 看作函数, 把 $t = xy$ 看作自变量, 变换方程

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0.$$

引入新变量, 变换下列常微分方程:

3434. $x^2 y'' + xy' + y = 0$, 若 $x = e^t$. **3435.** $y''' = \frac{6y}{x^3}$, 若 $t = \ln|x|$.

3436. $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$, 若 $x = \cos t$.

3437. $y'' + y' \tanh x + \frac{m^2}{\cosh^2 x} y = 0$, 若 $x = \ln \tan \frac{t}{2}$.

3438. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, 若 $y = ue^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}$, 其中 $p(x) \in C^{(1)}$.

3439. $x^4 y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, 若 $x = e^t$, $y = ue^{2t}$, 其中 $u = u(t)$.

3440. $(1 + x^2)^2 y'' = y$, 若 $x = \tan t$, $y = \frac{u}{\cos t}$, 其中 $u = u(t)$.

3441. $(1 - x^2)^2 y'' = -y$, 若 $x = \tanh t$, $y = \frac{u}{\cosh t}$, 其中 $u = u(t)$.

3442. $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, 若 $x = u + t$, $y = u - t$, 其中 $u = u(t)$.

3443. $y''' - x^3 y'' + xy' - y = 0$, 若 $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{u}{t}$, 其中 $u = u(t)$.

3444. 令

$$u = \frac{y}{x - b}, \quad t = \ln \left| \frac{x - a}{x - b} \right|,$$

并把 u 看作变量 t 的函数, 以变换斯托克斯方程

$$y'' = \frac{Ay}{(x - a)^2(x - b)^2}.$$

3445. 证明: 若方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

由代换 $x = \varphi(\xi)$ 变换为方程

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + P(\xi) \frac{dy}{d\xi} + Q(\xi)y = 0,$$

即

$$[2P(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi)] [Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}} = [2p(x)q(x) + q'(x)] [q(x)]^{-\frac{3}{2}}.$$

3446. 在方程

$$\Phi(y, y', y'') = 0$$

(其中 Φ 为变量 y, y', y'' 的齐次函数) 中令 $y = e^{\int_{x_0}^x u dx}$.

3447. 在方程

$$F(x^2y'', xy', y) = 0$$

(其中 F 为其自变量的齐次函数) 中令 $u = x \frac{y'}{y}$.

3448. 证明: 方程 $y'''(1+y'^2) - 3y'y''^2 = 0$ 的形式在单应变换

$$x = \frac{a_1\xi + b_1\eta + c_1}{a\xi + b\eta + c}, \quad y = \frac{a_2\xi + b_2\eta + c_2}{a\xi + b\eta + c}$$

下保持不变.

提示: 该变换是由以下最简单的变换构成的:

$$x = \alpha X + \beta Y + \gamma, \quad y = Y;$$

$$X = \frac{1}{X_1}, \quad Y = \frac{Y_1}{X_1};$$

$$X_1 = a\xi + b\eta + c, \quad Y_1 = a_2\xi + b_2\eta + c_2.$$

3449. 证明: 施瓦茨函数

$$S[x(t)] = \frac{x'''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2} \left[\frac{x''(t)}{x'(t)} \right]^2$$

的值在分式线性变换

$$y = \frac{ax(t) + b}{cx(t) + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

下保持不变.

令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 写出下列方程在极坐标 r, φ 下的形式:

3450. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

3451. $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$.

3452. $(x^2 + y^2)^2 y'' = (x + yy')^3$. 3453. 写出表达式 $\frac{x + yy'}{xy' - y}$ 在极坐标下的形式.

3454. 把平面曲线的曲率

$$K = \frac{|y''_{xx}|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

用极坐标 r 和 φ 表示出来.

3455. 写出方程组

$$\frac{dx}{dt} = y + kx(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2 + y^2)$$

在极坐标下的形式.

3456. 引入新函数 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctan \frac{y}{x}$, 以便变换表达式

$$W = x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}.$$

3457. 在勒让德变换中, 曲线 $y = y(x)$ 的每一点 (x, y) 对应于点 (X, Y) , 其中

$$X = y', \quad Y = xy' - y.$$

求 Y', Y'' 及 Y''' .

引入新变量 ξ 及 η , 解下列方程:

$$3458. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ 令 } \xi = x + y \text{ 和 } \eta = x - y.$$

$$3459. y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ 令 } \xi = x, \eta = x^2 + y^2.$$

$$3460. a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \quad (a \neq 0), \text{ 令 } \xi = x, \eta = y - bz.$$

$$3461. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z, \text{ 令 } \xi = x \text{ 及 } \eta = \frac{y}{x}.$$

把 u 与 v 看作新的自变量, 变换下列方程:

$$3462. x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = xy, \text{ 若 } u = \ln x, v = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

$$3463. (x+y) \frac{\partial z}{\partial x} - (x-y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ 若 } u = \ln \sqrt{x^2+y^2}, v = \arctan \frac{y}{x}.$$

$$3464. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \text{ 若 } u = \frac{y}{x}, v = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

$$3465. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}, \text{ 若 } u = 2x - z^2, v = \frac{y}{z}.$$

$$3466. (x+z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y+z) \frac{\partial z}{\partial y} = x+y+z, \text{ 若 } u = x+z, v = y+z.$$

3467. 取

$$\xi = y + ze^{-x}, \quad \eta = x + ze^{-y}$$

作为新的自变量, 变换表达式

$$(z + e^x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y) \frac{\partial z}{\partial y} - (z^2 - e^{x+y}).$$

3468. 令

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),$$

变换表达式

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

3469. 令 $\xi = x, \eta = y - x, \zeta = z - x$, 变换方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3470. 取 x 作为函数, 而 y 和 z 作为自变量, 变换方程

$$(x-z) \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3471. 取 x 作为函数, 而 $u = y - z, v = y + z$ 作为自变量, 变换方程

$$(y-z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y+z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3472. 取 x 作为函数, 而 $u = xz, v = yz$ 作为自变量, 变换表达式

$$A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

3473. 令 $e^\xi = x - u, e^\eta = y - u, e^\zeta = z - u$, 变换方程

$$(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x} + (x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z} = x+y+z.$$

在下列方程中, 代入新的变量 u, v, w , 其中 $w = w(u, v)$:

3474. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$, 令 $u = x^2 + y^2, v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, w = \ln z - (x+y)$.

3475. $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, 令 $u = x, v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$.

3476. $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y} = x+yz$, 令 $u = yz - x, v = xz - y, w = xy - z$.

3477. $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$, 令 $x = ue^w, y = ve^w, z = we^w$.

3478. 令 $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}, v = \arctan z, w = x+y+z$, 其中 $w = w(u, v)$, 变换表达式

$$\frac{x-y}{\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}}.$$

3479. 令 $u = xe^z, v = ye^z, w = ze^z$, 其中 $w = w(u, v)$, 变换表达式

$$A = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

3480. 令 $\xi = \frac{x}{z}, \eta = \frac{y}{z}, \zeta = z, w = \frac{u}{z}$, 其中 $w = w(\xi, \eta, \zeta)$, 变换方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}.$$

令 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, 写出下列各式在极坐标 r 和 φ 下的形式:

3481. $w = x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}$. 3482. $w = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$.

3483. $w = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$. 3484. $w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3485. $w = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3486. $w = y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

3487. 令 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, 变换表达式

$$I = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3488. 引入新的自变量

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at,$$

解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

取 u 及 v 作新的自变量, 变换下列方程:

$$3489. 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ 设 } u = x + 2y + 2 \text{ 及 } v = x - y - 1.$$

$$3490. (1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ 设 } u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \text{ 及 } v = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

$$3491. ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (a, b, c \text{ 为常数}), \text{ 设 } u = \ln x, v = \ln y.$$

$$3492. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ 设 } u = \frac{x}{x^2+y^2}, v = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$3493. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0, \text{ 设 } x = e^u \cos v, y = e^u \sin v.$$

$$3494. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} \quad (y > 0), \text{ 设 } u = x - 2\sqrt{y} \text{ 及 } v = x + 2\sqrt{y}.$$

$$3495. x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ 设 } u = xy, v = \frac{x}{y}.$$

$$3496. x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ 设 } u = x+y, v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

$$3497. xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ 设 } u = \frac{1}{2}(x^2+y^2), v = xy.$$

$$3498. x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x \sin y \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \sin^2 y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ 设 } u = x \tan \frac{y}{2}, v = x.$$

$$3499. x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (x > 0, y > 0), \text{ 设 } x = (u+v)^2 \text{ 及 } y = (u-v)^2.$$

$$3500. \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^3, \text{ 设 } u = x \text{ 及 } v = y + z.$$

3501. 利用线性变换

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y,$$

把方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

(其中 A, B 和 C 为常数, 且 $AC - B^2 < 0$) 变换为以下形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

求满足方程 (1) 的函数的一般形式.

3502. 证明: 拉普拉斯方程

$$\Delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

的形式在满足条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

的任何非退化变换

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

下保持不变.

3503. 令 $u = f(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 变换方程:

$$(a) \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad (b) \Delta(\Delta u) = 0.$$

3504. 若令

$$w = f(u)$$

其中 $u = (x - x_0)(y - y_0)$, 则方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + cw = 0$$

化为何种形式?

3505. 令

$$x + y = X, \quad y = XY,$$

变换表达式

$$A = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

3506. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3) \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 y^2 z = 0$$

的形式在变换

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{v}$$

下保持不变.

3507. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

的形式在变换

$$u = x + z, \quad v = y + z$$

下保持不变.

3508. 令

$$x = \eta\zeta, \quad y = \xi\zeta, \quad z = \xi\eta,$$

变换方程

$$xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$$

3509. 令

$$y_1 = x_2 + x_3 - x_1, \quad y_2 = x_1 + x_3 - x_2, \quad y_3 = x_1 + x_2 - x_3,$$

变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0.$$

3510. 令

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = \frac{z}{x}, \quad \zeta = y - z,$$

变换方程

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

提示: 把方程写为 $A^2 u - Au = 0$ 的形式, 其中

$$A = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

3511. 令

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

把表达式

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2, \quad \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

变换为球坐标下的形式.

提示: 变换由两个特殊的变换构成:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi, & y &= R \sin \varphi, & z &= z; \\ R &= r \sin \theta, & \varphi &= \varphi, & z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

3512. 引入新函数 w , 令 $w = z^2$, 变换方程

$$z \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2.$$

取 u 和 v 为新的自变量, 而 $w = w(u, v)$ 为新函数, 变换下列方程:

3513. $y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$, 设 $u = \frac{x}{y}, v = x, w = xz - y$.

3514. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 设 $u = x + y, v = \frac{y}{x}, w = \frac{z}{x}$.

3515. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 设 $u = x + y, v = x - y, w = xy - z$.

3516. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z$, 设 $u = \frac{x+y}{2}, v = \frac{x-y}{2}, w = ze^y$.

3517. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 设 $u = x, v = x + y, w = x + y + z$.

3518. $(1 - x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 - y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$, 设 $x = \sin u, y = \sin v, z = e^w$.

3519. $(1 - x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{4}z = 0$ ($|x| < 1$), 设

$$u = \frac{1}{2}(y + \arccos x), \quad v = \frac{1}{2}(y - \arccos x), \quad w = z \sqrt[4]{1 - x^2}.$$

3520. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}}{x^2 - y^2} - \frac{3(x^2 + y^2)z}{(x^2 - y^2)^2}$ ($|x| > |y|$), 设

$$u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

3521. 证明: 任何方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

(a, b, c 为常数) 用代换

$$z = ue^{\alpha x + \beta y}$$

(其中 α 与 β 为常量, $u = u(x, y)$) 可以化为以下形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_1 u = 0 \quad (c_1 \text{ 为常数}).$$

3522. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

的形式在变换

$$x' = \frac{x}{y}, \quad y' = -\frac{1}{y}, \quad u' = \frac{u}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

(u' 为变量 x' 与 y' 的函数) 下保持不变.

3523. 令 $u = x + z, v = y + z, w = x + y + z$, 且认为 $w = w(u, v)$, 变换方程

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

其中 $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

3524. 令 $x = e^\xi, y = e^\eta, z = e^\zeta, u = e^w$, 其中 $w = w(\xi, \eta, \zeta)$, 变换方程

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(z \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

3525. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

的形式与变量 x, y 和 z 所分别担任的角色无关.

3526. 取 x 作为变量 y 和 z 的函数, 解方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3527. 运用勒让德变换

$$X = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad Z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z,$$

其中 $Z = Z(X, Y)$, 变换方程

$$A \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

§5. 几何上的应用

1. 切线和法平面. 曲线

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

在其上一点 $M(x, y, z)$ 的切线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

在此点的法平面方程为:

$$\frac{dx}{dt}(X-x) + \frac{dy}{dt}(Y-y) + \frac{dz}{dt}(Z-z) = 0.$$

2. 切平面和法线. 曲面 $z = f(x, y)$ 在其上一点 $M(x, y, z)$ 的切平面方程为

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y).$$

在点 M 处的法线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z-z}{-1}.$$

若曲面方程以隐函数的形式 $F(x, y, z) = 0$ 给出, 则切平面方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0,$$

法线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

3. 平面曲线族的包络线. 含一个参数的曲线族 $f(x, y, \alpha) = 0$ (α 为参数) 的包络线满足方程组

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

4. 曲面族的包络面. 含一个参数的曲面族 $F(x, y, z, \alpha) = 0$ 的包络面满足方程组

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0.$$

含两个参数的曲面族 $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ 的包络面满足方程组:

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

写出下列曲线在已知点的切线和法平面方程:

3528. $x = a \cos \alpha \cos t, y = a \sin \alpha \cos t, z = a \sin t$; 在点 $t = t_0$.

3529. $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t$; 在点 $t = \frac{\pi}{4}$.

3530. $y = x, z = x^2$; 在点 $M(1, 1, 1)$.

3531. $x^2 + z^2 = 10, y^2 + z^2 = 10$; 在点 $M(1, 1, 3)$.

3532. $x^2 + y^2 + z^2 = 6, x + y + z = 0$; 在点 $M(1, -2, 1)$.

3533. 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求一点, 此处的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$.

3534. 证明: 螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ 的切线与 Oz 轴形成定角.

3535. 证明: 曲线 $x = ae^t \cos t, y = ae^t \sin t, z = ae^t$ 与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的各母线相交的角度相同.

3536. 证明: 斜驶线

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) = e^{k\varphi} \quad (k = \text{常数})$$

(其中 φ 是地球上点的经度, ψ 是地球上点的纬度) 与地球的一切子午线相交成定角.

3537. 求曲线

$$z = f(x, y), \quad \frac{x-x_0}{\cos \alpha} = \frac{y-y_0}{\sin \alpha}$$

(其中 f 为可微函数) 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的切线与 Oxy 平面所成角的正切.

3538. 求函数

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

在点 $M(1, 2, -2)$ 沿曲线

$$x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = -2t^4$$

在此点的切线方向的导数.

写出下列曲面在点 M_0 的切面和法线方程:

3539. $z = x^2 + y^2; M_0(1, 2, 5).$

3540. $x^2 + y^2 + z^2 = 169; M_0(3, 4, 12).$

3541. $z = \arctan \frac{y}{x}; M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right).$

3542. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1; M_0(x_0, y_0, z_0).$

3543. $z = y + \ln \frac{x}{z}; M_0(1, 1, 1).$

3544. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8; M_0(2, 2, 1).$

3545. $x = a \cos \psi \cos \varphi, y = b \cos \psi \sin \varphi, z = c \sin \psi; M_0(\varphi_0, \psi_0).$

3546. $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = r \cot \alpha; M_0(\varphi_0, r_0).$

3547. $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av; M_0(u_0, v_0).$

3548. 求曲面

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3$$

的切平面当切点 $M(u, v)(u \neq v)$ 无限接近于曲面的边界线 $u = v$ 上的点 $M_0(u_0, v_0)$ 时的极限位置.

3549. 在曲面

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$$

上求出切平面平行于坐标平面的诸切点.

3550. 在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

上怎样的点, 椭球面的法线与各坐标轴成等角?

3551. 求曲面

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$$

的平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$ 的各切平面.

3552. 证明: 曲面 $xyz = a^3 (a > 0)$ 的切平面与坐标面形成体积一定的四面体.

3553. 证明: 曲面

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

的切平面在坐标轴上割下的诸线段, 其和为常量.

3554. 证明: 锥面

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

的切平面经过其顶点.

3555. 证明: 旋转面

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (f' \neq 0)$$

的法线与旋转轴相交.

3556. 求椭球面

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$$

在坐标面上的投影.

3557. 分正方形 $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 为直径不大于 δ 的有限个部分 σ . 若曲面

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

在属于同一部分 σ 的任何两点 $P(x, y)$ 及 $P_1(x_1, y_1)$ 的法线方向相差小于 1° , 求数 δ 的上界.

3558. 设

$$z = f(x, y), \quad \text{其中 } (x, y) \in D \quad (1)$$

为曲面的方程, $\varphi(P_1, P)$ 为曲面 (1) 在点 $P(x, y) \in D$ 及 $P_1(x_1, y_1) \in D$ 二点的法线之间的夹角. 证明: 若 D 为有界闭区域, 函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内具有有界的二阶导数, 则李雅普诺夫不等式

$$\varphi(P_1, P) < C\rho(P_1, P) \quad (2)$$

成立, 其中 C 为常数, $\rho(P_1, P)$ 为点 P 与 P_1 之间的距离.

3559. 圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与曲面 $bz = xy$ 在公共点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 相交成怎样的角?

3560. 证明: 球坐标的坐标面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $y = x \tan \varphi$, $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \theta$ 两两正交.

3561. 证明: 球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2by, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$$

形成三重正交坐标系.

3562. 当 $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \lambda = \lambda_3$ 时, 经过每一点 $M(x, y, z)$ 有三个二次曲面:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = -1 \quad (a > b > c > 0).$$

证明: 这些曲面是正交的.

3563. 求函数 $u = x + y + z$ 沿球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的外法线方向的导数. 在球面上怎样的点, 函数 u 的上述法向导数有: (a) 最大值, (b) 最小值, (c) 等于零?

3564. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 沿椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的外法线方向的导数.

3565. 设 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 u 和 v 在曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上的点的法向导数. 证

明:

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv) = u \frac{\partial v}{\partial n} + v \frac{\partial u}{\partial n}.$$

求含一个参变量的平面曲线族的包络线:

3566. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ($p = \text{常数}$). **3567.** $(x - a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

3568. $y = kx + \frac{a}{k}$ ($a = \text{常数}$). **3569.** $y^2 = 2px + p^2$.

3570. 设有长为 l 的线段, 其两端点沿坐标轴滑动, 求如此产生的线段族的包络线.

3571. 求面积 S 为常数的椭圆族 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的包络线.

3572. 炮弹在真空中以初速度 v_0 射出, 当投射角 α 在竖直平面中变化时, 求炮弹轨迹的包络线.

3573. 证明: 平面曲线的法线的包络线是此曲线的渐屈线.

3574. 研究下列曲线族的判别曲线的性质 (c 是参变量):

(a) 立方抛物线 $y = (x - c)^3$; (b) 半立方抛物线 $y^2 = (x - c)^3$;

(c) 尼尔抛物线 $y^3 = (x - c)^2$; (d) 环索线 $(y - c)^2 = x^2 \frac{a - x}{a + x}$.

3575. 求半径为 r , 中心在圆周 $x = R \cos t, y = R \sin t, z = 0$ (t 是参数, $R > r$) 上的球族的包络面.

3576. 求球族

$$(x - t \cos \alpha)^2 + (y - t \cos \beta)^2 + (z - t \cos \gamma)^2 = 1$$

(其中 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, t 是参变量) 的包络面.

3577. 求相应体积 V 是常数的椭球面族 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的包络面.

3578. 求半径为 ρ , 中心在圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 上的球族的包络面.

3579. 有一发光点位于坐标原点. 若 $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2$, 求由球

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2$$

投影所生成的阴影圆锥.

3580. 若参量 p 和 q 满足方程

$$p^2 + q^2 = 1,$$

求平面族

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

的包络面.

§6. 泰勒公式

1. 泰勒公式. 若函数 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 的某邻域内有直到 $n + 1$ 阶 (包括 $n + 1$ 阶) 的连

续偏导数, 则在此邻域内成立公式

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^i f(a, b) + R_n(x, y), \quad (1)$$

其中

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(a + \theta_n(x-a), b + \theta_n(y-b))$$

$$(0 < \theta_n < 1).$$

2. 泰勒级数. 若函数 $f(x, y)$ 无穷次可微且 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, y) = 0$, 则此函数可表示成幂级数的形式:

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i+j \geq 1}^{\infty} \frac{1}{i!j!} f_{x^i y^j}^{(i+j)}(a, b) (x-a)^i (y-b)^j. \quad (2)$$

在 $a = b = 0$ 的特殊情形下, 公式 (1) 和 (2) 分别称为麦克劳林公式和麦克劳林级数. 对于多于两个变量的函数有类似的公式.

3. 平面曲线的奇点. 若可微曲线 $F(x, y) = 0$ 上的点 $M_0(x_0, y_0)$ 满足下列条件:

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0,$$

则称此点为奇点. 设 $M_0(x_0, y_0)$ 是属于光滑曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线的奇点, 且数

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = F''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = F''_{yy}(x_0, y_0)$$

不全为零. 于是, 若

- (1) $AC - B^2 > 0$, 则 M_0 是孤立点;
- (2) $AC - B^2 < 0$, 则 M_0 是二重点 (节点);
- (3) $AC - B^2 = 0$, 则 M_0 是上升点或孤立点.

在 $A = B = C = 0$ 的情形, 奇点的种类可能更复杂. 至于不属于光滑曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线, 奇点还可能更有更复杂的本质: 中断点, 角点等等.

3581. 在点 $A(1, -2)$ 的邻域内根据泰勒公式展开函数

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5.$$

3582. 在点 $A(1, 1, 1)$ 的邻域内根据泰勒公式展开函数

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

3583. 当自变量值从 $x = 1, y = -1$ 变到 $x_1 = 1 + h, y_1 = -1 + k$ 时, 求函数 $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2xy$ 的增量.

3584. 设

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,$$

按数 h, k 和 l 的正整数次幂展开 $f(x+h, y+k, z+l)$.

3585. 写出函数

$$f(x, y) = x^y$$

在点 $A(1, 1)$ 的邻域内的展开式, 到二次项为止.

3586. 根据麦克劳林公式展开函数

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

到四次项为止.

3587. 若 $|x|$ 和 $|y|$ 同 1 比较为很小的量, 对于下列表达式

$$(a) \frac{\cos x}{\cos y}; \quad (b) \arctan \frac{1+x+y}{1-x+y}$$

推出精确到二次项的近似公式.

3588. 假定 x, y, z 的绝对值是很小的量, 简化表达式

$$\cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z.$$

3589. 按 h 的幂次展开函数

$$F(x, y) = \frac{1}{4} [f(x+h, y) + f(x, y+h) + f(x-h, y) + f(x, y-h)] - f(x, y),$$

精确到 h^4 .

3590. 已知中心在点 $P(x, y)$ 半径为 ρ 的圆周, 设 $f(P) = f(x, y)$ 及 $P_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, 3$) 为该圆周的內接正三角形的顶点, 并且 $x_1 = x + \rho, y_1 = y$. 按 ρ 的正整数次幂展开函数

$$F(\rho) = \frac{1}{3} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)],$$

精确到 ρ^2 .

3591. 按 h 与 k 的幂次展开函数

$$\Delta_{xy} f(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y).$$

3592. 依 ρ 的幂次展开函数

$$F(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi) d\varphi.$$

将下列函数展开成麦克劳林级数:

3593. $f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n.$

3594. $f(x, y) = \ln(1+x+y).$

3595. $f(x, y) = e^x \sin y.$

3596. $f(x, y) = e^x \cos y.$

3597. $f(x, y) = \sin x \sinh y.$

3598. $f(x, y) = \cos x \cosh y.$

3599. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2).$

3600. $f(x, y) = \ln(1+x) \ln(1+y).$

3601. 写出函数

$$f(x, y) = \int_0^1 (1+x)^{t^2 y} dt$$

的麦克劳林级数的前三项.

3602. 按二项式 $x-1$ 和 $y+1$ 的正整数次幂将函数 e^{x+y} 展开成幂级数.

3603. 写出函数 $f(x, y) = \frac{x}{y}$ 在点 $M(1, 1)$ 的邻域内的泰勒级数展开式.

3604. 设 z 为由方程 $z^3 - 2xz + y = 0$ 定义的 x 和 y 的隐函数, 且当 $x = 1$ 和 $y = 1$ 时 $z = 1$. 写出函数 z 按二项式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂排列的展开式中的若干项.

研究下列曲线的奇点的种类并大略地画出这些曲线:

3605. $y^2 = ax^2 + x^3.$

3606. $x^3 + y^3 - 3xy = 0.$

3607. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

3608. $x^2 + y^4 = x^6$.

3609. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

3610. $(y - x^2)^2 = x^5$.

3611. $(a + x)y^2 = (a - x)x^2$.

3612. 研究参变量 a, b, c ($a \leq b \leq c$) 的值与曲线 $y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$ 的形状之关系.

研究超越曲线的奇点:

3613. $y^2 = 1 - e^{-x^2}$.

3614. $y^2 = 1 - e^{-x^3}$.

3615. $y = x \ln x$.

3616. $y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

3617. $y = \arctan\left(\frac{1}{\sin x}\right)$.

3618. $y^2 = \sin \frac{\pi}{x}$.

3619. $y^2 = \sin x^2$.

3620. $y^2 = \sin^3 x$.

§7. 多元函数的极值

1. 极值的定义. 若函数 $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$ 在点 P_0 的邻域内有定义, 并且当 $0 < \rho(P_0, P) < \delta$ 时, $f(P_0) > f(P)$ 或 $f(P_0) < f(P)$, 则说, 函数 $f(P)$ 在点 P_0 有极值 (相应地为极大值或极小值).

2. 极值的必要条件. 可微函数 $f(P)$ 仅在临界点 P_0 , 即 $df(P_0) = 0$ 的点 P_0 能达到极值. 所以, 函数 $f(P)$ 的极值点满足方程组 $f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

3. 极值的充分条件. 函数 $f(P)$ 在点 P_0 有:

(a) 极大值, 若 $df(P_0) = 0$, 且当 $\sum_{i=1}^n |dx_i| \neq 0$ 时 $d^2f(P_0) < 0$,

(b) 极小值, 若 $df(P_0) = 0$, 且当 $\sum_{i=1}^n |dx_i| \neq 0$ 时 $d^2f(P_0) > 0$.

为了研究二阶微分 $d^2f(P_0)$ 的符号, 可采用相应二次型为标准形式的方法.

特别是, 对于两个自变量 x 和 y 的函数 $f(x, y)$, 若在临界点 (x_0, y_0) ($df(x_0, y_0) = 0$) 成立条件 $D = AC - B^2 \neq 0$, 其中 $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, 则那里有:

(1) 极小值, 若 $D > 0, A > 0$ ($C > 0$);

(2) 极大值, 若 $D > 0, A < 0$ ($C < 0$);

(3) 极值不存在, 若 $D < 0$.

4. 条件极值. 在关系式 $\varphi_i(P) = 0$ ($i = 1, \dots, m; m < n$) 存在的条件下, 求函数 $f(P_0) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的极值的问题, 可归结为求拉格朗日函数

$$L(P) = f(P) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(P)$$

的普通极值的问题, 其中 λ_i ($i = 1, \dots, m$) 为常数因子^①. 关于条件极值的存在和性质的问题, 在最简单的情况下, 可根据对函数 $L(P)$ 在临界点 P_0 的二阶微分 $d^2L(P_0)$ 的符号的研究来解决,

^①此方法称为拉格朗日乘子法, 因子 λ_i 称为拉格朗日乘子. ——译注

此时变量 dx_1, dx_2, \dots, dx_n 满足以下限制条件:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

5. 绝对极值. 有界闭区域内的可微函数 $f(P)$ 在此区域内或于临界点, 或于区域的边界点达到自己的最大值和最小值.

研究下列多元函数的极值:

3621. $z = x^2 + (y - 1)^2.$

3622. $z = x^2 - (y - 1)^2.$

3623. $z = (x - y + 1)^2.$

3624. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y.$

3625. $z = x^2 y^3 (6 - x - y).$

3626. $z = x^3 + y^3 - 3xy.$

3627. (a) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2;$ (b) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2.$

3628. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0).$

3629. $z = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a > 0, b > 0).$

3630. $z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0).$

3631. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$

3632. $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2).$

3633. $z = e^{x^2-y}(5 - 2x + y).$

3634. $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}.$

3635. $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y.$

3636. $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right).$

3637. $z = \sin x \sin y \sin(x + y) \quad (0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi).$

3638. $z = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \arctan \frac{y}{x}.$

3639. $z = xy \ln(x^2 + y^2).$

3640. $z = x + y + 4 \sin x \sin y.$

3641. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$

3642. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$

3643. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$

3644. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{x^2}{y} + \frac{2}{x} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

3645. $u = xy^2 z^3 (a - x - 2y - 3z) \quad (a > 0).$

3646. $u = \frac{a^2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{b} \quad (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0, b > 0).$

3647. $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z) \quad (0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi; 0 \leq z \leq \pi).$

3648. $u = x_1 x_2^2 \cdots x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - \cdots - nx_n) \quad (x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0).$

3649. $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n} \quad (x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n).$

3650. 惠更斯问题. 在 a 和 b 二正数间插入 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n , 使分数

$$u = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \cdots (x_n + b)}$$

的值最大.

求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值:

$$3651. x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

$$3652. x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

$$3653. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$$

求下列函数的条件极值点:

$$3654. z = xy, \text{ 若 } x + y = 1. \quad 3655. z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \text{ 若 } x^2 + y^2 = 1.$$

$$3656. z = x^2 + y^2, \text{ 若 } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

$$3657. (a) z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \text{ 若 } x^2 + y^2 = 1;$$

$$(b) z = x^2 + 12xy + 2y^2, \text{ 若 } 4x^2 + y^2 = 25.$$

$$3658. z = \cos^2 x + \cos^2 y, \text{ 若 } x - y = \frac{\pi}{4}.$$

$$3659. u = x - 2y + 2z, \text{ 若 } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$3660. u = x^m y^n z^p, \text{ 若 } x + y + z = a \quad (m > 0, n > 0, p > 0, a > 0).$$

$$3661. u = x^2 + y^2 + z^2, \text{ 若 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0).$$

$$3662. u = xy^2 z^3, \text{ 若 } x + 2y + 3z = a \quad (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0).$$

$$3663. (a) u = xyz, \text{ 若 } x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0;$$

$$(b) u = xy + yz, \text{ 若 } x^2 + y^2 = 2, y + z = 2 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

$$3664. u = \sin x \sin y \sin z, \text{ 若 } x + y + z = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

$$3665. u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \text{ 若 } x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0 \quad (a > b > c > 0, \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1).$$

$$3666. u = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2, \text{ 若 } Ax + By + Cz = 0, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \frac{\xi}{\cos \alpha} = \frac{\eta}{\cos \beta} = \frac{\zeta}{\cos \gamma}, \text{ 其中 } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

$$3667. u = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \text{ 若 } \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} = 1 \quad (a_i > 0; i = 1, 2, \cdots, n).$$

$$3668. u = x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p \quad (p > 1), \text{ 若 } x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \quad (a > 0).$$

$$3669. u = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n}, \text{ 若 } \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n = 1 \quad (\alpha_i > 0, \beta_i > 0, x_i > 0; i = 1, 2, \cdots, n).$$

$$3670. u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \text{ 若 } x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \quad (a > 0, \alpha_i > 1, i = 1, 2, \cdots, n).$$

$$3671. \text{ 在 } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \text{ 的条件下, 求二次型 } u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}) \text{ 的极值.}$$

$$3672. \text{ 若 } n \geq 1 \text{ 及 } x \geq 0, y \geq 0, \text{ 证明不等式: } \frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n.$$

提示: 在 $x + y = S$ 的条件下, 求函数 $z = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ 的极小值.

3673. 证明赫尔德不等式:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}}$$

$$\left(a_i \geq 0, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n; k > 1, \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1 \right).$$

提示: 在 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = A$ 的条件下, 求函数

$$u = \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}}$$

的极小值.

3674. 对于 n 阶行列式 $A = |a_{ij}|$, 证明阿达马不等式:

$$A^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right).$$

提示: 在关系式

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = S_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

存在的条件下, 研究行列式 $A = |a_{ij}|$ 的极值.

求下列函数在指定区域内的上确界 (sup) 和下确界 (inf):

3675. $z = x - 2y - 3$, 若 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1$.

3676. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, 若 $x^2 + y^2 \leq 25$.

3677. $z = x^2 - xy + y^2$, 若 $|x| + |y| \leq 1$.

3678. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$.

3679. $u = x + y + z$, 若 $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

3680. 求函数

$$u = (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}$$

在区域 $x > 0, y > 0, z > 0$ 内的下确界 (inf) 与上确界 (sup).

3681. 证明: 函数 $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ 有无穷多个极大值而无一极小值.

3682. 函数 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 有极小值的充分条件是否为此函数在通过点 M_0 的每一条直线上有极小值呢? 研究例子 $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$.

3683. 分解已知正数 a 为 n 个正的因数, 使得它们的倒数的和为最小.

3684. 分解已知正数 a 为 n 个相加数, 使得它们的平方和为最小.

3685. 分解已知正数 a 为 n 个正的因数, 使得它们的已知正数次幂的和为最小.

3686. 已知在平面上的 n 个质点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$, 其质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n .

点 $P(x, y)$ 位于何处时, 该质点系对此点的转动惯量为最小?

3687. 容积为 V 的无盖长方浴盆在何种尺寸下有最小的表面积?

3688. 横截面为半圆形的无盖柱形浴盆, 其表面积等于 S , 在何种尺寸下此盆有最大的容积?

3689. 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 这点到 n 个已知点 $M_i(x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 距离的平方和为最小.

3690. 底面相同的直圆柱体与直圆锥体拼接在一起构成一个物体, 其总表面积 Q 取给定值. 为了使此物体的体积为最大, 求其尺寸大小.

3691. 一长方体的上下两底均为正方形, 分别与同样的两个正四角锥体拼接在一起构成一个物体, 其体积 V 取给定值. 当四角锥的侧面对它们的底成怎样的倾角时, 该物体的总表面积为最小?

3692. 将周长为 $2p$ 的矩形绕其一边旋转, 矩形所扫过的区域构成一旋转体, 求使该旋转体体积为最大的那个矩形.

3693. 将周长为 $2p$ 的三角形绕其一边旋转, 三角形所扫过的区域构成一旋转体, 求使该旋转体体积为最大的那个三角形.

3694. 在半径为 R 的半球内作出具有最大体积的内接长方体.

3695. 在已知的直圆锥内作出具有最大体积的内接长方体.

3696. 在椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

内作出具有最大体积的内接长方体.

3697. 直圆锥的母线 l 与底面成倾角 α , 试在此直圆锥中作出具有最大全表面积的内接长方体.

3698. 在椭圆抛物面 $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 和 $z = c$ 所围区域内作出具有最大体积的内接长方体.

3699. 求点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 至平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 上的点的最短距离.

3700. 求空间二直线

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

之间的最短距离.

3701. 求抛物线 $y = x^2$ 和直线 $x - y - 2 = 0$ 之间的最短距离.

3702. 求有心二次曲线

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$$

的半轴.

3703. 求有心二次曲面

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx = 1$$

的半轴.

3704. 求用平面

$$Ax + By + Cz = 0$$

与柱体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

相交所成椭圆的面积.

3705. 求用平面

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$$

(其中 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$) 与椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

相交所成截面的面积.

3706. 根据费马原理, 光在最短时间内从一点传播至另一点.

假定这两点位于交界面为平面的不同的光介质中, 并且光的传播速度在第一种介质中等于 v_1 , 而在第二种介质中等于 v_2 , 试推出光的折射定律.

3707. 一折射棱镜的折射角^①为 α , 折射率为 n . 光线以怎样的人射角射向此棱镜侧面, 其偏向角 (即入射线与出射线之间的角) 为最小? 求此最小偏向角.

3708. 变量 x 和 y 满足系数待定的线性方程

$$y = ax + b.$$

经过一系列精度相同的测量, 对于量 x 和 y 得到值 $x_i, y_i (i = 1, 2, \dots, n)$. 利用最小二乘法, 求系数 a 和 b 的最可靠数值.

提示: 根据最小二乘法, 系数 a 和 b 的最可靠数值所对应的误差的平方和

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

为最小.

3709. 在平面上已知 n 个点 $M_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$. 直线

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

在怎样的位置时, 这些点与此直线的偏差的平方和为最小?

3710. 在区间 $(1, 3)$ 内用线性函数 $ax + b$ 来近似地代替函数 x^2 , 使得绝对偏差

$$\Delta = \sup |x^2 - (ax + b)| \quad (1 \leq x \leq 3)$$

为最小.

^① 折射棱镜的折射角指两折射面之间的二面角. —— 译注

第七章 带参数的积分

§1. 带参数的常义积分

1. 积分的连续性. 若函数 $f(x, y)$ 在有界区域 $R[a \leq x \leq A; b \leq y \leq B]$ 内有定义并且是连续的, 则

$$F(y) = \int_a^A f(x, y) dx$$

是在闭区间 $b \leq y \leq B$ 上连续的函数.

2. 积分符号下的微分法. 若除在 1 中所列条件之外, 偏导数 $f'_y(x, y)$ 在区域 R 内连续, 则当 $b < y < B$ 时成立莱布尼茨公式

$$\frac{d}{dy} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A f'_y(x, y) dx.$$

在更一般的情况下, 若积分的下限和上限为参数 y 的可微函数 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$, 并且当 $b < y < B$ 时 $a \leq \varphi(y) \leq A, a \leq \psi(y) \leq A$, 则有

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx, \quad b < y < B.$$

3. 积分符号下的积分法. 在 1 的条件下有:

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy.$$

3711. 证明: 不连续函数 $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$ 的积分

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$$

为连续函数. 作出函数 $u = F(y)$ 的图像.

3712. 研究函数

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx$$

的连续性, 其中 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上是正的连续函数.

3713. 求:

$$(a) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}; \quad (b) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+\alpha^2} dx;$$

$$(c) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx;$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n};$$

$$(e) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta.$$

3714.1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[A, B]$ 上连续. 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(a) \quad (A < a < x < B).$$

3714.2. 设: (1) 在 $[-1, 1]$ 上 $\varphi_n(x) \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$); (2) 对于 $0 < \varepsilon \leq |x| \leq 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\varphi_n(x) \rightarrow 0$; (3) 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx \rightarrow 1$. 证明: 若 $f(x) \in C[-1, 1]$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) \varphi_n(x) dx = f(0).$$

3715. 在表达式

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx$$

中, 可否在积分符号下完成极限运算?

3716. 当 $y = 0$ 时可否根据莱布尼茨法则计算函数

$$F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

的导数?

3717. 若

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy,$$

计算 $F'(x)$.

3718. 设:

$$(a) F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(b) F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx;$$

$$(c) F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx;$$

$$(d) F(\alpha) = \int_0^\alpha f(x+\alpha, x-\alpha) dx;$$

$$(e) F(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy.$$

求 $F'(\alpha)$.

3719. 若

$$F(x) = \int_0^x (x+y)f(y) dy,$$

其中 $f(x)$ 为可微函数, 求 $F''(x)$.

3720. 设

$$F(x) = \int_a^b f(y)|x-y| dy,$$

其中 $a < b$, $f(y)$ 为可微函数, 求 $F''(x)$.

3721.1. 设

$$F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta \quad (h > 0),$$

其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $F''(x)$.

3721.2. 设

$$F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt,$$

求 $F^{(n)}(x)$.

3722. 证明公式:

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x y^n \cos \left(y + \frac{n\pi}{2} \right) dy \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

利用公式 (1) 获得以下估计:

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{n+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

3723. 在区间 $1 \leq x \leq 3$ 上用线性函数 $a + bx$ 近似地代替函数 $f(x) = x^2$, 使得

$$\int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx = \min.$$

3724. 依条件: 函数 $a + bx$ 及 $\sqrt{1+x^2}$ 在已知区间 $[0, 1]$ 上的均方偏差为最小, 求近似公式

$$\sqrt{1+x^2} \approx a + bx \quad (0 \leq x \leq 1).$$

3725. 求完全椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 < k < 1)$$

的导数, 并把它们用函数 $E(k)$ 和 $F(k)$ 表示出来.

证明: $E(k)$ 满足微分方程

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

3726. 证明: 阶数 n 为整数的贝塞尔函数

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

满足贝塞尔方程

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

3727. 设

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{\alpha-x}},$$

其中函数 $\varphi(x)$ 及其导数 $\varphi'(x)$ 在闭区间 $0 \leq x \leq a$ 上连续. 证明: 当 $0 < \alpha < a$ 时有

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx.$$

提示: 令 $x = \alpha t$.

3728. 设

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y)v(y) dy,$$

其中

$$K(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & x \leq y, \\ y(1-x), & x > y, \end{cases}$$

及 $v(y)$ 都是连续的, 证明: 函数 $u(x)$ 满足方程

$$u''(x) = -v(x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

3729. 设

$$F(x, y) = \int_{\frac{x}{y}}^{xy} (x - yz)f(z) dz,$$

其中 $f(z)$ 为可微函数, 求 $F''_{xy}(x, y)$.

3730. 设 $f(x)$ 为二阶可微函数, $F(x)$ 为可微函数. 证明: 函数

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz$$

满足弦的振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初始条件: $u(x, 0) = f(x), u'_t(x, 0) = F(x)$.

3731. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, l]$ 上连续, 且当 $0 \leq \xi \leq l$ 时 $(x - \xi)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, 则函数

$$u(x, y, z) = \int_0^l \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2 + z^2}}$$

满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

应用对参数的微分法, 计算下列积分:

3732. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx.$

3733. $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$

3734. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx.$

3735. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1).$

3736. 利用公式

$$\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1 + x^2 y^2},$$

计算积分

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3737. 应用积分号下的积分法, 计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

3738. 计算积分:

$$(a) \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx; (b) \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

3739. 设 $F(k)$ 和 $E(k)$ 为完全椭圆积分 (参阅习题 3725). 证明公式:

$$(a) \int_0^k F(k)k dk = E(k) - k_1^2 F(k);$$

$$(b) \int_0^k E(k)k dk = \frac{1}{3}[(1+k^2)E(k) - k_1^2 F(k)],$$

其中 $k_1^2 = 1 - k^2$.

3740. 证明公式:

$$\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x),$$

其中 $J_0(x)$ 及 $J_1(x)$ 为阶数是 0 与 1 的贝塞尔函数 (参阅习题 3726).

§2. 带参数的广义积分. 积分的一致收敛性

1. 一致收敛性的定义. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $a \leq x < +\infty, y_1 < y < y_2$ 内是连续的. 若对于任何 $\varepsilon > 0$ 都存在数 $B = B(\varepsilon)$, 使得在 $b \geq B$ 的条件下有

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2),$$

则称广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (1)$$

在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛.

积分 (1) 的一致收敛与形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y) dx \quad (2)$$

(其中 $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$) 的一切级数的一致收敛等价.

若积分 (1) 在区间 (y_1, y_2) 中一致收敛, 则在这个区间内它是参数 y 的连续函数.

2. 柯西准则. 积分 (1) 在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛的充分必要条件为: 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在数 $B = B(\varepsilon)$, 使得只要 $b' > B$ 及 $b'' > B$ 则

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2).$$

3. 魏尔斯特拉斯准则. 积分 (1) 一致收敛的充分条件为: 存在与参数 y 无关的强函数 $F(x)$, 使得 (1) 当 $a \leq x < +\infty$ 时 $|f(x, y)| \leq F(x)$, (2) $\int_a^{+\infty} F(x) dx < +\infty$.

4. 对于不连续函数的广义积分有类似的定理.

求积分的收敛域:

3741. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx.$

3742. $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx.$

3743. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx.$

3744. $\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}.$

3745. $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx.$

3746. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx \quad (p > 0).$

利用与级数比较的方法研究下列积分的收敛性:

3747. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx.$

3748. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} \quad (n > 0).$

3749. $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

3750. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx.$

3751. 用肯定的方式陈述, 什么是积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

在已知区间 (y_1, y_2) 内不一致收敛?

3752. 证明: 若 1) 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

收敛, 2) 函数 $\varphi(x, y)$ 有界, 且关于 x 是单调的, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x, y) dx$$

一致收敛 (在相应区域内).

3753. 证明: 一致收敛的积分

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2} dx \quad (0 < y < 1)$$

不能以与参数无关的收敛积分为强函数.

3754. 证明: 积分

$$I = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

(a) 在任何区间 $0 < a \leq \alpha \leq b$ 内一致收敛; (b) 在区间 $0 \leq \alpha \leq b$ 内非一致收敛.

3755.1. 证明: 狄利克雷积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

(a) 在每一个不含数值 $\alpha = 0$ 的闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛, (b) 在含数值 $\alpha = 0$ 的每一个闭区间 $[a, b]$ 上非一致收敛.

3755.2. 研究积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ 在以下区间上的一致收敛性:

(a) $1 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$; (b) $1 < \alpha < +\infty$.

3755.3. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$$

在区间 $1 < \alpha < +\infty$ 上一致收敛.

研究下列积分在所指定区间内的一致收敛性:

3756. (a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$); (b) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$ ($0 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$).

3757. $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$ ($a \leq \alpha \leq b$). 3758. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$ ($-\infty < \alpha < +\infty$).

3759. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\alpha)^2+1}$ ($0 \leq \alpha < +\infty$).

3760. (a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx$ ($0 \leq \alpha < +\infty$); (b) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx$ ($0 \leq p \leq 10$).

3761. $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx$ ($0 \leq \alpha < +\infty$), 其中 $p > 0$ 是常数.

3762. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx$ ($0 \leq \alpha < +\infty$).

3763. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$; (a) $a < \alpha < b$; (b) $-\infty < \alpha < +\infty$.

3764. (a) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy$ ($-\infty < x < +\infty$); (b) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx$ ($p \geq 0$).

3765. 选取数 $b > 0$, 使得在 $1.1 \leq p \leq 10$ 时

$$\int_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p} < \varepsilon,$$

式中 $\varepsilon = 10^{-6}$.

3766. $\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx$; (a) $p \geq p_0 > 0$; (b) $p > 0$ ($q > -1$).

3767. $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ($0 \leq n < +\infty$). 3768. $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^n}$ ($0 < n < 2$).

3769. $\int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}$ ($|\alpha| < \frac{1}{2}$). 3770. $\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx$ ($0 \leq \alpha \leq 1$).

3771. 若积分在参数的已知值的某邻域内一致收敛, 则称此积分对参数的已知值一致收敛.

证明: 积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1+\alpha^2 x^2}$$

对每一个 $\alpha \neq 0$ 的值一致收敛, 而对 $\alpha = 0$ 非一致收敛.

3772. 在下式中

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

把极限移到积分符号内合理吗?

3773. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内可积, 证明公式:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

3774.1. 证明: 若 $f'(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上绝对可积, 则存在 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

3774.2. 证明: 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内绝对可积, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx = 0.$$

3775. 证明: 若 (1) 在每一个有限区间 (a, b) 内 $f(x, y) \Rightarrow f(x, y_0)$; (2) $|f(x, y)| \leq F(x)$, 其中 $\int_a^{+\infty} F(x) dx < +\infty$, 则

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

3776.1. 利用积分号与极限号互换, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n} \right] dx.$$

3776.2. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且有界. 证明:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx = f(0).$$

3777.1. 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1}.$$

3777.2. 证明: 积分

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$$

是参数 a 的连续函数.

3778.1. 证明:

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} dx$$

在区间 $0 < \alpha < 1$ 上是连续函数.

3778.2. 求函数

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-a^2)x}{x} dx$$

的间断点. 作出函数 $y = F(a)$ 的图像.

研究下列函数在所指定区间内的连续性:

3779. $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2 + x^\alpha}$, 当 $\alpha > 2$.

3780. $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$, 当 $\alpha > 0$.

3781. $F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha} dx$, 当 $0 < \alpha < 2$.

$$3782. F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha} dx, \text{ 当 } 0 < \alpha < 1.$$

$$3783. F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-x\alpha^2} dx, \text{ 其中 } -\infty < \alpha < +\infty.$$

§3. 广义积分号下的微分法和积分法

1. 对参数的微分法. 若 1) 函数 $f(x, y)$ 及其导数 $f'_y(x, y)$ 在区域 $a \leq x < +\infty, y_1 < y < y_2$ 内是连续的; 2) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 收敛; 3) $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ 在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛, 则当 $y_1 < y < y_2$ 时

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

(莱布尼茨法则).

2. 对参数积分的公式. 若 1) 函数 $f(x, y)$ 当 $x \geq a$ 及 $y_1 \leq y \leq y_2$ 时是连续的; 2) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 在有限区间 (y_1, y_2) 内一致收敛, 则

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy. \quad (1)$$

若 $f(x, y) \geq 0$, 同时假定等式 (1) 中两个内侧的积分连续, 并且等式 (1) 的一端有意义, 则公式 (1) 对于无穷区间 (y_1, y_2) 也正确.

3784. 利用公式

$$\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0)$$

计算积分

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx, \quad \text{其中 } m \text{ 为正整数.}$$

3785. 利用公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0)$$

计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}, \quad \text{其中 } n \text{ 为正整数.}$$

3786. 证明: 狄利克雷积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

当 $\alpha \neq 0$ 时有导数, 但是不能利用莱布尼茨法则来求它.

提示: 令 $\alpha x = y$.

3787. 证明: 函数

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x + \alpha)^2} dx$$

在区域 $-\infty < \alpha < +\infty$ 内连续并且可微.

3788. 从等式

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$$

出发, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

3789. 证明傅茹兰公式:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0),$$

式中 $f(x)$ 为连续函数, 积分 $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 对任何 $A > 0$ 都有意义.

利用傅茹兰公式, 计算积分:

3790. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$

3791. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$

3792. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$

利用对参数的微分法计算下列积分:

3793. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

3794. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

3795. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

3796. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

计算下列积分:

3797. $\int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx \quad (|\alpha| \leq 1).$ 3798. $\int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad (|\alpha| \leq 1).$

3799. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx.$ 3800. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx.$

3801. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x \arctan \beta x}{x^2} dx.$ 3802. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} dx.$

3803. 从公式

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy$$

出发, 计算欧拉-泊松积分

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

利用欧拉-泊松积分, 求下列积分:

$$3804. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0).$$

$$3805. \int_{-\infty}^{+\infty} (a_1x^2 + 2b_1x + c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0).$$

$$3806. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cosh bx dx \quad (a > 0). \quad 3807. \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{a}{x^2})} dx \quad (a > 0).$$

$$3808. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$3809. \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx \quad (a > 0).$$

$$3810. (a) \int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin bx dx \quad (a > 0);$$

$$(b) \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx dx \quad (n \text{ 为正整数}).$$

3811. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-ax^2 t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0, \delta > 0).$$

3812.1. 从积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx \quad (\alpha \geq 0)$$

出发, 计算狄利克雷积分

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx.$$

3812.2. 积分正弦被定义为

$$\text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

函数 $y = \text{Si } x$ 的图像大致具有怎样的形状?

利用狄利克雷积分和傅茹兰积分, 求下列积分:

$$3813. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx \quad (\alpha > 0). \quad 3814. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx \quad (|\alpha| \neq |\beta|).$$

$$3815. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx. \quad 3816. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx.$$

$$3817. \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^2 dx. \quad 3818. \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^3 dx.$$

$$3819. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx. \quad 3820. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x} dx \quad (\alpha \beta \neq 0).$$

$$3821. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx. \quad 3822. \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx \quad (k \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0).$$

3823. 对于不同的 x 值, 求狄利克雷间断乘子

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda \cos \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

作出函数 $y = D(x)$ 的图像.

3824. 计算积分:

$$(a) \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx; \quad (b) \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+b} dx.$$

3825. 利用公式

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy$$

计算拉普拉斯积分

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx.$$

3826. 计算积分

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx.$$

计算积分:

$$\mathbf{3827.} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx. \quad \mathbf{3828.} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$\mathbf{3829.} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{ax^2 + 2bx + c} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0).$$

3830. 利用公式

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy \quad (x > 0)$$

计算菲涅尔积分

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

求下列积分:

$$\mathbf{3831.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx \quad (a \neq 0).$$

$$\mathbf{3832.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax dx.$$

$$\mathbf{3833.} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cdot \cos 2ax dx.$$

3834. 证明公式:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \sin a\alpha; \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2} dx = -\frac{\pi}{2} \cos a\alpha,$$

这里 $a \neq 0$, 积分应理解为在柯西主值的意义上.

3835. 对于函数 $f(t)$, 求拉普拉斯变换

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (p > 0),$$

设:

- (a) $f(t) = t^n$ (n 为正整数); (b) $f(t) = \sqrt{t}$; (c) $f(t) = e^{\alpha t}$;
 (d) $f(t) = te^{-\alpha t}$; (e) $f(t) = \cos t$; (f) $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$;
 (g) $f(t) = \sin \alpha \sqrt{t}$.

3836. 证明公式: (利普希茨积分)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt) dt = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (a > 0),$$

其中 $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi) d\varphi$ 为 0 阶贝塞尔函数 (参阅习题 3726).

3837. 求魏尔斯特拉斯变换

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y) dy,$$

设: (a) $f(y) = 1$; (b) $f(y) = y^2$; (c) $f(y) = e^{2ay}$; (d) $f(y) = \cos ay$.

3838. 切比雪夫-埃尔米特多项式由公式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

定义, 证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n. \end{cases}$$

3839. 计算在概率论中有重要意义的积分

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{\xi^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-\xi)^2}{\sigma_2^2} \right]} d\xi \quad (\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0).$$

3840. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且绝对可积. 证明: 积分

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初始条件

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x).$$

§4. 欧拉积分

1. Γ 函数. 设 $x > 0$ 时有:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Γ 函数的基本性质可由以下递推公式表达:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

若 n 为正整数, 则

$$\Gamma(n) = (n-1)!; \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

2. 延拓公式. 当 x 不等于整数时有:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

此公式可用来求自变量为负值的 Γ 函数.

3. β 函数. 当 $x > 0$ 且 $y > 0$ 时有

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

成立公式

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

3841. 证明: Γ 函数 $\Gamma(x)$ 在区域 $x > 0$ 内连续, 并且有各阶连续导数.

3842. 证明: β 函数 $\beta(x, y)$ 在区域 $x > 0, y > 0$ 内连续, 并且有各阶连续导数.

利用欧拉积分计算下列积分:

3843. $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx.$

3844. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx \quad (a > 0).$

3845. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$

3846. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

3847. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}.$

3848. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cdot \cos^4 x dx.$

3849. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n > 0).$

3850. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \text{ 为正整数}).$

求下列积分的存在域, 并用欧拉积分表示这些积分:

3851. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx \quad (n > 0).$

3852. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx.$

3853. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} \quad (a > 0, b > 0, n > 0).$

3854. $\int_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}} dx \quad (0 < a < b, c > 0).$

3855. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \quad (m > 0).$

3856. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx.$

3857. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^n x dx.$

3858. $\int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k \cos x)^n} dx \quad (0 < |k| < 1).$

3859. $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad (n > 0).$

3860. $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx.$

3861. $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx.$

3862. $\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx \quad (a > 0).$

3863. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx \quad (p > 0).$

3864. (a) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln^2 x}{1+x} dx \quad (p > 0);$ (b) $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3} dx;$ (c) $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4} dx.$

$$3865. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{(1+x) \ln x} dx. \quad 3866. \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx \quad (0 < p < 1).$$

提示: 此积分可看作 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\beta(p, \varepsilon) - \beta(1-p, \varepsilon)]$.

$$3867. \int_0^{+\infty} \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \beta x} dx \quad (0 < \alpha < \beta). \quad 3868. \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx.$$

$$3869. \int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx \quad (a > 0). \quad 3870. \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x dx.$$

$$3871. \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos 2n\pi x dx \quad (n \text{ 为正整数}).$$

证明等式:

$$3872. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$3873. \int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \cdot \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

$$3874. \prod_{m=1}^n \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

$$3875. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = 1.$$

利用等式 $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt \quad (x > 0)$, 求积分:

$$3876. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m} dx \quad (0 < m < 1). \quad 3877. \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^m} dx \quad (0 < m < 2).$$

3878. 证明欧拉公式:

$$(a) \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x;$$

$$(b) \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x$$

$$\left(\lambda > 0, x > 0, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

3879. 求曲线

$$r^n = a^n \cos n\varphi \quad (a > 0, n \text{ 为正整数})$$

的弧长.

3880. 求曲线

$$|x|^n + |y|^n = a^n \quad (n > 0, a > 0)$$

所围的面积.

§5. 傅里叶积分公式

1. 用傅里叶积分表示函数. 若 1) 函数 $f(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内有定义, (2) 在每一个有限区间内此函数和它的导数 $f'(x)$ 皆是分段连续, (3) $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对可积, 则在函数连续的一切点, 可把函数表示成傅里叶积分的形式:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (1)$$

式中

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \quad \text{及} \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

在函数 $f(x)$ 的各间断点, 公式 (1) 的左端应改为 $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$.

对于偶函数 $f(x)$, 公式 (1) 给出:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad (2)$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi,$$

并且对间断点也有同样的说明.

类似地, 对于奇函数 $f(x)$ 可得:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad (3)$$

其中

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

2. 在区间 $(0, +\infty)$ 内用傅里叶积分表示函数. 若 (1) 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有定义, (2) 此函数及其导数 $f'(x)$ 在每一个有限区间 $(a, b) \subset (0, +\infty)$ 内皆是分段连续, (3) $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上绝对可积, 则在该区间内可按我们的愿望用公式 (2) (偶式延拓) 或公式 (3) (奇式延拓) 来表示出函数 $f(x)$.

用傅里叶积分表示下列函数:

$$3881. f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$3882. f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$3883. f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b) \quad (b > a).$$

$$3884. f(x) = \begin{cases} h \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

$$3885. f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

$$3886. f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

$$3887. f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

$$3888. f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$3889. f(x) = \begin{cases} A \sin \omega x, & |t| \leq \frac{2\pi n}{\omega}, \\ 0, & |t| > \frac{2\pi n}{\omega} \end{cases} \quad (n \text{ 为正整数}).$$

$$3890. f(x) = e^{-\alpha|x|} \quad (\alpha > 0).$$

$$3891. f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x \quad (\alpha > 0).$$

$$3892. f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x \quad (\alpha > 0).$$

$$3893. f(x) = e^{-x^2}.$$

$$3894. f(x) = xe^{-x^2}.$$

3895. 用傅里叶积分来表示函数

$$f(x) = e^{-x} \quad (0 < x < +\infty),$$

(a) 用偶式延拓; (b) 用奇式延拓.

对于下列函数 $f(t)$, 求傅里叶变换

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{-l}^l f(t)e^{-itx} dt :$$

$$3896. f(x) = e^{-\alpha|x|} \quad (\alpha > 0).$$

$$3897. f(x) = xe^{-\alpha|x|} \quad (\alpha > 0).$$

$$3898. f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$3899. f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos \alpha x.$$

3900. 求函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$, 设:

$$(a) \int_0^{+\infty} \varphi(y) \cos xy dy = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(b) \int_0^{+\infty} \psi(y) \sin xy dy = e^{-x} \quad (x > 0).$$

第八章 多重积分和曲线积分

§1. 二重积分

1. 二重积分的直接算法. 所谓连续函数 $f(x, y)$ 在有限封闭可求积二维区域 Ω 上的二重积分, 指的是

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max |\Delta y_j| \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, 而求和是对所有使 $(x_i, y_j) \in \Omega$ 的那些 i, j 值进行的.

若区域 Ω 由以下不等式给出:

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则相应二重积分可按以下公式来计算:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

2. 二重积分中的变量代换. 若连续可微函数

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

给出平面 Oxy 上的有限闭区域 Ω 与平面 Ouv 上的区域 Ω' 之间的一一映射, 且雅可比行列式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

的符号在 Ω 内保持不变 (可能在零测度集上有例外), 则成立以下公式:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v)) |I| du dv.$$

例如, 根据公式 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ 变换为极坐标 r 和 φ 时, 有

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

3901. 把积分 $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy \, dx \, dy$ 当作积分和的极限, 用直线

$$x = \frac{i}{n}, \quad y = \frac{j}{n} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

把积分域分为许多正方形, 并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值, 计算此积分.

3902. 用直线

$$x = 1 + \frac{i}{n}, \quad y = 1 + \frac{2j}{n} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n)$$

把区域 $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$ 分为许多矩形, 列出函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在此区域内的下积分和 \underline{S} 与上积分和 \overline{S} .

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上积分和与下积分和的极限等于什么?

3903. 用一组顶点 A_{ij} 位于整数点的正方形作为积分域的近似域, 并取被积函数在每个正方形距原点最远的顶点之值, 近似地计算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx \, dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

并与精确值加以比较.

3904. 用直线 $x = \text{常数}$, $y = \text{常数}$, $x + y = \text{常数}$ 把积分域 S 分为四个相同的三角形, 并取被积函数在每个三角形的质心之值, 近似地计算积分

$$\iint_S \sqrt{x+y} \, dS.$$

其中 S 是以直线 $x = 0, y = 0$ 及 $x + y = 1$ 为边的三角形.

3905. 把积分域 $S: \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ 分为有限个直径小于 δ 的可求积的子区域 ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, n$). 怎样的值 δ 能保证不等式

$$\left| \iint_S \sin(x+y) \, dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i + y_i) \Delta S_i \right| < 0.001$$

成立? 其中 $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$.

计算积分:

3906. $\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) \, dy.$

3907. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 \, dy.$

3908. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi \, dr.$

3909. 设 R 为矩形

$$a \leq x \leq A, \quad b \leq y \leq B,$$

函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 在相应区间上连续, 证明等式:

$$\iint_R X(x)Y(y) \, dx \, dy = \int_a^A X(x) \, dx \cdot \int_b^B Y(y) \, dy.$$

3910. 设

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y),$$

计算

$$I = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy.$$

3911. 设 $f(x)$ 为区间 $a \leq x \leq b$ 内的连续函数. 证明不等式:

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx,$$

且仅当 $f(x) = \text{常数}$ 时等号成立.

提示: 研究积分

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy.$$

3912. 下列积分有怎样的符号?

$$(a) \iint_{|x|+|y| \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy;$$

$$(b) \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy;$$

$$(c) \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy.$$

3913. 求函数

$$f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$$

在正方形 $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ 内的平均值.

3914. 利用中值定理估计积分

$$I = \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}.$$

3915. 求圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ 上的点到原点的距离之平方的平均值.

在问题 3916—3922 中, 对二重积分 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ 按所给区域 Ω 依两个不同的

顺序安置积分的上下限.

3916. Ω — 以 $O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1)$ 为顶点的三角形.

3917. Ω — 以 $O(0, 0), A(2, 1), B(-2, 1)$ 为顶点的三角形.

3918. Ω — 以 $O(0, 0), A(1, 0), B(1, 2), C(0, 1)$ 为顶点的梯形.

3919. Ω — 圆 $x^2 + y^2 \leq 1$.

3920. Ω — 圆 $x^2 + y^2 \leq y$.

3921. Ω — 被曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所包围的区域.

3922. Ω — 圆环 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

3923. 证明狄利克雷公式:

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx \quad (a > 0).$$

在下列积分中改变积分的顺序:

$$3924. \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$$

$$3925. \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy.$$

$$3926. \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy.$$

$$3927. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy.$$

$$3928. \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$3929. \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy \quad (a > 0).$$

$$3930. \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy.$$

$$3931. \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

计算下列积分:

3932. $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$, 其中 Ω 是被抛物线 $y^2 = 2px$ 和直线 $x = \frac{p}{2}$ ($p > 0$) 所包围的区域.

3933. $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}}$ ($a > 0$), 其中 Ω 是以圆心在点 (a, a) 半径为 a 的圆周 (它与坐标轴相切) 的较短弧和坐标轴为界的区域.

3934. $\iint_{\Omega} |xy| dx dy$, 其中 Ω 是以 a 为半径, 以坐标原点为圆心的圆.

3935. $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$, 其中 Ω 是以 $y = x, y = x + a, y = a$ 和 $y = 3a$ ($a > 0$) 为边的平行四边形.

3936. $\iint_{\Omega} y^2 dx dy$, 其中 Ω 是被横轴和摆线
 $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$
 的第一拱所包围的区域.

在二重积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

中, 令 $x = r \cos \varphi$ 和 $y = r \sin \varphi$, 变换为极坐标 r 和 φ , 并配置积分的上下限, 设:

3937. Ω — 圆 $x^2 + y^2 \leq a^2$.

3938. Ω — 圆 $x^2 + y^2 \leq ax$ ($a > 0$).

3939. Ω — 环 $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$.

3940. Ω — 三角形 $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x$.

3941. Ω — 区域 $-a \leq x \leq a; \frac{x^2}{a} \leq y \leq a$.

3942. 在怎样的情况下, 当变换为极坐标之后, 积分的上下限是常数?

在下列积分中, 令 $x = r \cos \varphi$ 和 $y = r \sin \varphi$, 变换为极坐标 r 和 φ , 并依两种不同的顺序配置积分的上下限:

$$3943. \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$$

$$3944. \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$3945. \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy.$$

$$3946. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

$$3947. \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy, \text{ 其中区域 } \Omega \text{ 由曲线 } (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) (x \geq 0) \text{ 围成.}$$

令 r 和 φ 为极坐标, 在下列积分中变更积分的顺序:

$$3948. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$$

$$3949. \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$$

$$3950. \int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r) dr \quad (0 < a < 2\pi).$$

变换成极坐标, 把二重积分化为一重积分:

$$3951. \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy.$$

$$3952. \iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy, \text{ 其中 } \Omega = \{|y| \leq |x|; |x| \leq 1\}.$$

$$3953. \iint_{x^2 + y^2 \leq x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy.$$

变换成极坐标, 计算下列二重积分:

$$3954. \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

$$3955. \iint_{\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

3956. 利用函数组

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \sqrt{xy}$$

把正方形 $S\{a < x < a + h, b < y < b + h\} (a > 0, b > 0)$ 变换为区域 S' . 求区域 S' 的面积与区域 S 的面积之比. 当 $h \rightarrow 0$ 时, 此比值的极限等于什么?

引入新的变量 u, v 来代替 x, y , 并确定下列二重积分中的积分限:

$$3957. \int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy \quad (0 < a < b; 0 < \alpha < \beta), \text{ 令 } u = x, v = \frac{y}{x}.$$

$$3958. \int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy, \text{ 令 } u = x + y, v = x - y.$$

$$3959. \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是被曲线 } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0 (a > 0) \text{ 所}$$

包围的区域, 令

$$x = u \cos^4 v, \quad y = u \sin^4 v.$$

3960. 证明: 变量代换

$$x + y = \xi, \quad y = \xi\eta$$

把三角形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$ 变为单位正方形 $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$.

3961. 在怎样的变量代换下, 由曲线 $xy = 1, xy = 2, x - y + 1 = 0, x - y - 1 = 0$ ($x > 0, y > 0$) 围成的曲线四边形被变换成矩形, 且其边平行于坐标轴?

进行适当的变量代换, 把二重积分化为一重积分:

$$3962. \iint_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y) dx dy. \quad 3963. \iint_{x^2+y^2\leq 1} f(ax+by+c) dx dy \quad (a^2+b^2 \neq 0).$$

3964. $\iint_{\Omega} f(xy) dx dy$, 其中区域 Ω 由曲线 $xy = 1, xy = 2, y = x, y = 4x$ ($x > 0, y > 0$) 围成.

计算下列二重积分:

$$3965. \iint_{\Omega} (x+y) dx dy, \text{ 其中区域 } \Omega \text{ 由曲线 } x^2 + y^2 = x + y \text{ 围成.}$$

$$3966. \iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x| + |y|) dx dy.$$

$$3967. \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \text{ 其积分域 } \Omega \text{ 是椭圆区域 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

$$3968. \iint_{x^4+y^4\leq 1} (x^2 + y^2) dx dy.$$

$$3969. \iint_{\Omega} (x+y) dx dy, \text{ 其积分域 } \Omega \text{ 由曲线 } y^2 = 2x, x+y=4, x+y=12 \text{ 围成.}$$

$$3970. \iint_{\Omega} xy dx dy, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由曲线 } xy = 1, x+y = \frac{5}{2} \text{ 围成的区域.}$$

$$3971. \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} |\cos(x+y)| dx dy.$$

$$3972. \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy.$$

$$3973. \iint_{\substack{|x|\leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy.$$

计算不连续函数的积分:

$$3974. \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy.$$

$$3975. \iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x + y] dx dy.$$

$$3976. \iint_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{[y - x^2]} dx dy.$$

3977. 设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数, 证明:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0.$$

3978. 求

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy,$$

其中 $f(x, y)$ 为连续函数.

3979. 设

$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{\frac{tx}{y^2}} dx dy,$$

求 $F'(t)$.

3980. 设

$$F(t) = \iint_{(x-t)^2+(y-t)^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

求 $F'(t)$.

3981. 设

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy \quad (t > 0), \textcircled{1}$$

求 $F'(t)$.

3982. 证明: 若 $f(x, y)$ 连续, 则函数

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta) d\eta$$

满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

3983. 设函数 $f(x, y)$ 的等值线是简单封闭曲线, 区域 $S(v_1, v_2)$ 由曲线 $f(x, y) = v_1$ 及 $f(x, y) = v_2$ 围成. 证明:

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv,$$

其中 $F(v)$ 为曲线 $f(x, y) = v_1$ 与 $f(x, y) = v_2$ 所包围的面积.

提示: 用函数 $f(x, y)$ 的无限接近的等值线把积分域分为许多部分.

$\textcircled{1}$ 要求 f 在有关区域上连续. —— 译注

§2. 面积的计算法

Oxy 平面上区域 S 的面积由以下公式给出:

$$S = \iint_S dx dy.$$

求下列曲线所围的面积:

3984. $xy = a^2, x + y = \frac{5}{2}a$ ($a > 0$).

3985. $y^2 = 2px + p^2, y^2 = -2qx + q^2$ ($p > 0, q > 0$).

3986. $(x - y)^2 + x^2 = a^2$ ($a > 0$).

变换为极坐标, 计算下列曲线所围的面积:

3987. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), x^2 + y^2 \geq a^2$.

3988. $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0$.

3989. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)$ ($a > 0$).

3990. $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy, (x - a)^2 + (y - a)^2 \leq a^2$ ($a > 0$).

根据以下公式引入广义极坐标 r 和 φ :

$$x = ar \cos^\alpha \varphi, \quad y = br \sin^\alpha \varphi \quad (r \geq 0),$$

其中 a, b 和 α 为以适当的方法选出的常数, 且考虑到 $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \alpha abr \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi$,

求由下列曲线所围的面积 (假定参数是正的):

3991. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}$. **3992.** $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}; x = 0, y = 0$.

3993. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$ ($x > 0, y > 0$).

3994. (a) $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$ ($x > 0, y > 0$); (b) $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^5 = \frac{x^2 y^2}{c^4}$.

3995. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1; x = 0, y = 0$.

进行适当的变量代换, 求下列曲线所围的面积:

3996. $x + y = a, x + y = b, y = \alpha x, y = \beta x$ ($0 < a < b, 0 < \alpha < \beta$).

3997. $xy = a^2, xy = 2a^2, y = x, y = 2x$ ($x > 0, y > 0$).

3998. (a) $y^2 = 2px, y^2 = 2qx, x^2 = 2ry, x^2 = 2sy$ ($0 < p < q, 0 < r < s$);

(b) $x^2 = ay, x^2 = by, x^3 = cy^2, x^3 = dy^2$ ($0 < a < b, 0 < c < d$);

(c) $y = ax^p, y = bx^p, y = cx^q, y = dx^q$ ($0 < p < q, 0 < a < b, 0 < c < d$).

3999. (a) $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \frac{4x}{a} = \frac{y}{b}$ ($a > 0, b > 0$);

(b) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \frac{8x}{a} = \frac{y}{b} \quad (x > 0, y > 0).$

4000. $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1$, 其中 λ 取下列各值: $\frac{1}{3}c^2, \frac{2}{3}c^2, \frac{4}{3}c^2, \frac{5}{3}c^2 \quad (x > 0, y > 0).$

4001. 求椭圆 $(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1$ (其中 $\delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$) 的面积.

4002. 求椭圆

$$\frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = c^2 \quad (u = u_1, u_2)$$

和双曲线

$$\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = c^2 \quad (v = v_1, v_2)$$

$$(0 < u_1 < u_2; 0 < v_1 < v_2; x > 0, y > 0)$$

所围的面积.

提示: 令 $x = c \cosh u \cos v, y = c \sinh u \sin v.$

4003. 求平面 $x + y + z = b$ 与曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = a^2$ 相截所得截面之面积.

4004. 求平面 $z = 1 - 2(x + y)$ 与曲面 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ 相截所得截面之面积.

§3. 体积的计算法

如图 14 所示, 设柱体顶面位于连续曲面 $z = f(x, y)$, 底面位于平面 $z = 0$, 侧面垂直于底面, 且底面在平面 Oxy 上所占区域 Ω 是可求积的, 则柱体的体积等于:

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

4005. 试绘出一物体, 其体积等于积分

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy.$$

4006. 绘出下列二重积分所表示的体积:

(a) $\iint_{\substack{0 \leq x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} (x+y) dx dy;$

(b) $\iint_{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} dx dy;$

(c) $\iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy;$

(d) $\iint_{x^2+y^2 \leq x} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy;$

(e) $\iint_{\substack{1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x}} \sqrt{xy} dx dy;$

(f) $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sin \pi \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$

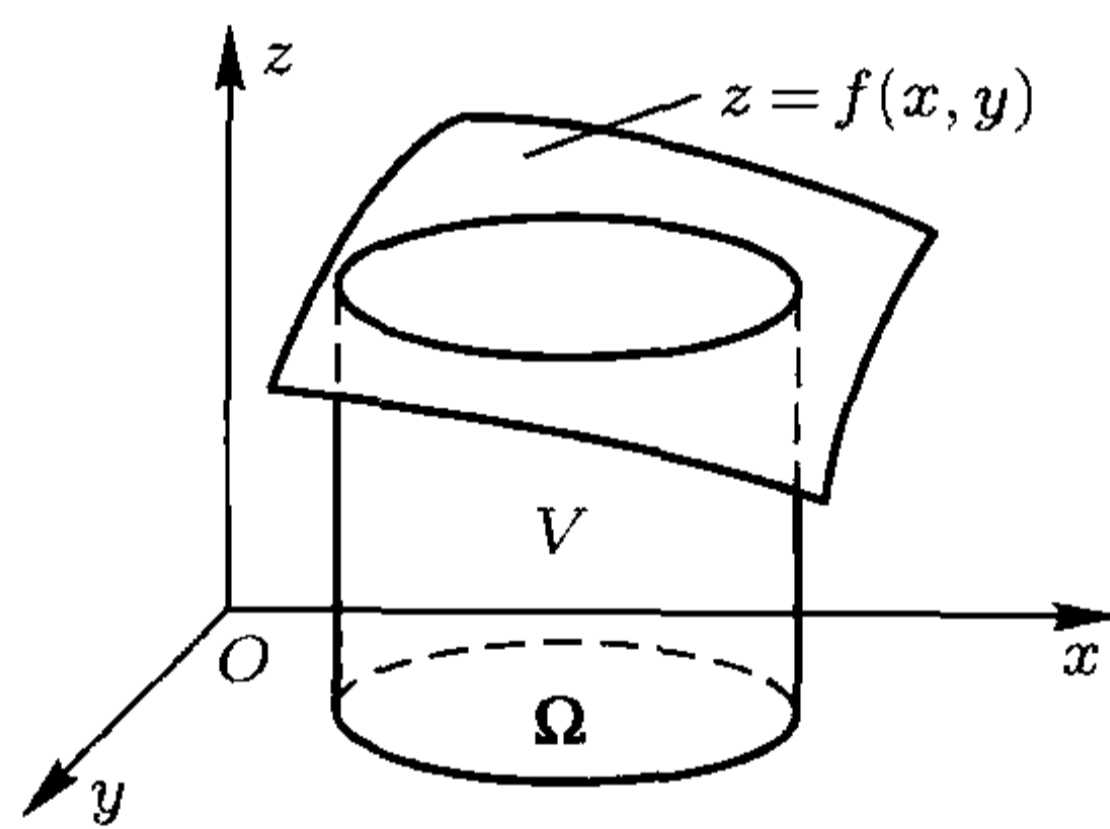


图 14

求下列曲面所围区域的体积:

$$4007. z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0.$$

$$4008. x + y + z = a, x^2 + y^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (a \geq \sqrt{2}R).$$

$$4009. z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$$

$$4010. z = \cos x \cos y, z = 0, |x + y| \leq \frac{\pi}{2}, |x - y| \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$4011. z = \sin \frac{\pi y}{2x}, z = 0, y = x, y = 0, x = \pi.$$

$$4012. z = xy, x + y + z = 1, z = 0.$$

变换成极坐标, 求下列曲面所围区域的体积:

$$4013. z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2.$$

$$4014. z = x + y, (x^2 + y^2)^2 = 2xy, z = 0 \quad (x > 0, y > 0).$$

$$4015. z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0.$$

$$4016. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \geq a|x| \quad (a > 0).$$

$$4017. x^2 + y^2 - az = 0, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), z = 0 \quad (a > 0).$$

$$4018. z = e^{-(x^2+y^2)}, z = 0, x^2 + y^2 = R^2.$$

$$4019. z = c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}{2a}, x^2 + y^2 = a^2, y = x \tan \alpha, y = x \tan \beta \quad (a > 0, c > 0, 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi).$$

$$4020. z = x^2 + y^2, z = x + y.$$

求下列曲面所围区域的体积 (假定参数是正的):

$$4021. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (z > 0).$$

$$4022. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$4023. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, z = 0.$$

$$4024. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z}{c} = 1, z = 0.$$

$$4025. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$4026. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

$$4027. z^2 = xy, x + y = a, x + y = b \quad (0 < a < b).$$

$$4028. z = x^2 + y^2, xy = a^2, xy = 2a^2, y = \frac{x}{2}, y = 2x, z = 0.$$

$$4029. z = xy, x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x, z = 0.$$

$$4030. z = c \sin \frac{\pi xy}{a^2}, z = 0, xy = a^2, y = \alpha x, y = \beta x \quad (0 < \alpha < \beta, x > 0).$$

$$4031. z = x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0.$$

$$4032. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 1, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, z = 0.$$

$$4033. (a) z = c \arctan \frac{y}{x}, z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} = a \arctan \frac{y}{x} \quad (y \geq 0);$$

$$(b) z = ye^{-\frac{xy}{a^2}}, xy = a^2, xy = 2a^2, y = m, y = n, z = 0 \quad (0 < m < n).$$

$$4034. \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (n > 0).$$

$$4035. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (n > 0, m > 0).$$

§4. 曲面面积的计算法

1. 曲面由显函数给出的情形. 光滑曲面 $z = z(x, y)$ 的面积由以下积分表示:

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

其中 Ω 为该曲面在 Oxy 平面上的投影.

2. 曲面由参数方程给出的情形. 若曲面是由参数方程给出的:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

其中 $(u, v) \in \Omega$, Ω 为封闭可求积的有限区域, 且函数 x, y 和 z 在区域 Ω 内连续可微, 则对于曲面的面积有公式

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

其中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4036. 求曲面 $az = xy$ 包含在圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 内那部分的面积.

4037. 求以曲面 $x^2 + z^2 = a^2$ 和 $y^2 + z^2 = a^2$ 为界的物体的表面积.

4038. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 包含在柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b \leq a)$ 内那部分的面积.

4039. 求曲面 $z^2 = 2xy$ 被平面 $x + y = 1, x = 0, y = 0$ 所截部分的面积.

4040. 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在圆柱 $x^2 + y^2 = \pm ax$ 内那部分的面积 (维维亚尼问题).

4041. 求曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 包含在圆柱 $x^2 + y^2 = 2x$ 内那部分的面积.

4042. 求曲面 $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ 包含在柱面 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 内那部分的面积.

4043. 求曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ 被平面 $x - y = \pm 1, x + y = \pm 1$ 所截部分的面积.

4044. 求曲面 $x^2 + y^2 = 2az$ 包含在柱面 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ 内那部分的面积.

4045. (a) 求曲面 $x^2 + y^2 = a^2$ 被平面 $x + z = 0, x - z = 0 (x > 0, y > 0)$ 所截部分的面积;

(b) 求曲面 $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1$ 被平面 $z = 0$ 所截部分的面积;

(c) 求曲面 $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{2z}{c} = 1$ 被平面 $x = 0, y = 0$ 和 $z = 0$ 所截部分的面积;

(d) 求曲面 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$ 被曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (z \geq 0)$ 所截部分的面积;

(e) 求曲面 $\sin z = \sinh x \cdot \sinh y$ 被平面 $x = 1$ 和 $x = 2 (y \geq 0)$ 所截部分的面积.

4046. 求以曲面 $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2$ 和 $x + y + z = 2a (a > 0)$ 为界的物体的表面积和体积.

4047. 求球面在两条纬线和两条经线之间那部分的面积.

4048. 求螺旋面

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h\varphi$$

在 $0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi$ 那部分的面积.

4049. 求环面

$$x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, \quad y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, \quad z = a \sin \psi \quad (0 < a \leq b)$$

在两条经线 $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ 和两条纬线 $\psi = \psi_1, \psi = \psi_2$ 之间那部分的面积. 整个环的表面积等于什么?

4050. 求矩形 $x = a > 0, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ 对坐标原点的立体角 ω . 若 a 很大, 推出 ω 的近似公式.

§5. 二重积分在力学上的应用

1. 质心. 若薄板 Ω 位于平面 Oxy 内, x_0, y_0 为其质心坐标, $\rho = \rho(x, y)$ 为其面密度, 则

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho x \, dx \, dy, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho y \, dx \, dy, \quad (1)$$

其中 $M = \iint_{\Omega} \rho \, dx \, dy$ 为薄板的质量.

若薄板是均质的, 则在公式 (1) 中应令 $\rho = 1$.

2. 转动惯量. I_x 和 I_y 分别为平面 Oxy 内薄板 Ω 对坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量, 可表示为以下公式:

$$I_x = \iint_{\Omega} \rho y^2 \, dx \, dy, \quad I_y = \iint_{\Omega} \rho x^2 \, dx \, dy, \quad (2)$$

其中 $\rho = \rho(x, y)$ 为薄板的面密度.

还可研究惯性积

$$I_{xy} = \iint_{\Omega} \rho xy \, dx \, dy. \quad (3)$$

在公式 (2) 中取 $\rho = 1$, 我们就得到平面图形的几何转动惯量.

4051. 求边长为 a 的正方形薄板的质量, 设薄板上每一点的面密度与该点到正方形顶点之一的距离成正比, 且在正方形中心等于 ρ_0 .

求以下列曲线为界的均匀薄板的质心坐标:

4052. $ay = x^2, x + y = 2a \quad (a > 0).$

4053. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0.$

4054. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (x > 0, y > 0).$

4055. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$ (线圈).

4056. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy \quad (x > 0, y > 0).$

4057. $r = a(1 + \cos \varphi), \varphi = 0.$

4058. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi), y = 0.$

4059. 求圆形薄板 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 的质心坐标. 设它在点 $M(x, y)$ 的面密度与点 M 到点 $A(a, 0)$ 的距离成正比.

4060. 求曲线

$$y = \sqrt{2px}, \quad y = 0, \quad x = X$$

所围图形的质心在参数 X 变化时所描绘的曲线.

求由下列曲线所围的面积 ($\rho = 1$) 对坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量 I_x 和 I_y :

4061. $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1, \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1, y = 0 \quad (b_1 > 0, b_2 > 0, h > 0).$

4062. $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2, x = 0, y = 0 \quad (0 \leq x \leq a).$

4063. $r = a(1 + \cos \varphi).$

4064. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2).$

4065. $xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y \quad (x > 0, y > 0).$

4066.1. 求曲线

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

所围区域 S 的极转动惯量

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy.$$

4066.2. 求曲线

$$ay = x^2, \quad ax = y^2 \quad (a > 0)$$

所围平面图形的惯性积 I_{xy} .

4067. 证明公式:

$$I_l = I_{l_0} + Sd^2,$$

式中 I_l, I_{l_0} 是图形 S 对二平行轴 l 和 l_0 的转动惯量, 其中 l_0 是通过图形的质心, 而 d 为两轴间的距离.

4068. 证明: 平面图形 S 对通过其质心 $O(0, 0)$ 并与 Ox 轴成 α 角的直线的转动惯量等于

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha,$$

其中 I_x 和 I_y 为图形 S 对 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量, I_{xy} 为惯性积:

$$I_{xy} = \iint_S \rho xy \, dx \, dy.$$

4069. 求以 a 为边的正三角形对通过三角形质心并与它的高成 α 角的直线的转动惯量.

4070. 设圆柱形容器 $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ 内盛有水, 水平面为 $z = h$, 求水对容器侧壁 $x \geq 0$ 的压力.^①

4071. 半径为 a 的球体沉入密度为 δ 的液体中深度为 h (由球心算起) 的地方, 这里 $h \geq a$. 求液体对球的上表面和下表面的压力.

4072. 底半径为 a 高为 b 的直圆柱体完全沉入密度为 δ 的液体中, 其中心在水面下的深度为 h , 而圆柱的轴与竖直方向成 α 角. 求液体对圆柱上底和下底的压力.

4073. 求均匀的圆柱体 $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$ 对质点 $P(0, 0, b)$ 的引力, 设圆柱的质量等于 M , 而质点的质量等于 m .

4074. 物体对挤压面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

的压强分布由公式

$$p = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

给出. 求物体对此面的平均压强.

4075. 以 a 和 b 为边的矩形草地上均匀地覆盖有已收割的干草, 其面密度为 ρ . 若运送质量为 M 的货物到距离为 r 的地方所需的功等于 kMr ($0 < k < 1$)^②, 则为了把所有干草集中在草地的中心, 至少应消耗多少功?

§6. 三重积分

1. 三重积分的直接算法. 若函数 $f(x, y, z)$ 是连续的, 且有界区域 V 由下列不等式给出:

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$$

其中 $y_1(x), y_2(x), z_1(x, y), z_2(x, y)$ 皆为连续函数, 则函数 $f(x, y, z)$ 在区域 V 内的三重积分可按公式

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz$$

来计算. 有时采用以下公式也很方便:

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) \, dy \, dz,$$

其中 $S(x)$ 是用平面 $x = \text{常数}$ 截区域 V 所得的截面.

^①关于习题 4070~4072 可参阅 166 页的脚注. —— 译注

^②原书如此, 其实系数 k 是有量纲的, 它的值也不应限制在 0 与 1 之间. —— 译注

2. 三重积分中的变量代换. 若连续可微函数

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

给出 $Oxyz$ 空间的有界可求积三维闭区域 V 与 $O'uvw$ 空间的区域 V' 之间的一一映射, 并且当 $(u, v, w) \in V'$ 时

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0,$$

则成立公式

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |I| du dv dw.$$

在特殊情形下, 有: 1) 圆柱坐标系 φ, r, h , 其中

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, r, h)} = r;$$

2) 球坐标系 φ, ψ, r , 其中

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \psi, r)} = r^2 \cos \psi.$$

计算下列三重积分:

4076. $\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$, 其中 V 是曲面 $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ 所围的区域.

4077. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 V 是曲面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所

围的区域.

4078. $\iiint_V xyz dx dy dz$, 其中 V 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x=0, y=0, z=0$ 所

围的区域.

4079. $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$, 其中 V 是曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围的

区域.

4080. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, 其中 V 是曲面 $x^2 + y^2 = z^2, z=1$ 所围的区域.

在下列三重积分内, 用不同方法配置积分的上下限:

4081. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz.$

4082. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$

4083. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz.$

用一重积分代替三重积分:

$$4084. \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta.$$

$$4085. \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz.$$

4086. 设 $f(x, y, z) = F'''_{xyz}(x, y, z)$, 且 a, b, c, A, B, C 为常数, 求

$$\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z) dz.$$

变换为球坐标, 计算积分:

$$4087. \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \text{ 其中 } V \text{ 是曲面 } x^2 + y^2 + z^2 = z \text{ 所围的区域.}$$

$$4088. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$$

4089. 在积分中变换为球坐标:

$$\iiint_V f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz,$$

其中 V 是曲面 $z = x^2 + y^2, x = y, x = 1, y = 0, z = 0$ 所围的区域.

4090. 进行适当的变量代换, 计算三重积分

$$\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz,$$

其中 V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

4091. 变换为圆柱坐标, 计算积分

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

其中 V 是曲面 $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$ 所围的区域.

4092. 计算积分

$$\iiint_V x^2 dx dy dz,$$

其中 V 是曲面 $z = ay^2, z = by^2, y > 0$ ($0 < a < b$), $z = \alpha x, z = \beta x$ ($0 < \alpha < \beta$), $z = h$ ($h > 0$) 所围的区域.

4093. 求积分

$$\iiint_V xyz dx dy dz,$$

其中区域 V 位于象限 $x > 0, y > 0, z > 0$ 且由下列曲面围成:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{n}, \quad xy = a^2, \quad xy = b^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x$$

$$(0 < a < b; 0 < \alpha < \beta; 0 < m < n).$$

4094. 求函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ 内的平均值.

4095. 求函数

$$f(x, y, z) = e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}$$

在区域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 内的平均值.

4096. 利用中值定理, 估计积分

$$u = \frac{\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

其中 $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$.

4097. 证明: 若函数 $f(x, y, z)$ 在区域 V 内是连续的, 且对于任何区域 $\omega \subset V$ 有

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0,$$

则当 $(x, y, z) \in V$ 时 $f(x, y, z) \equiv 0$.

4098. 求 $F'(t)$, 设:

(a) $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, 其中 f 为可微函数;

(b) $F(t) = \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f(xyz) dx dy dz$, 其中 f 为可微函数.

4099. 求

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz,$$

其中 m, n, p 为非负整数.

4100. 令 $x + y + z = \xi$, $y + z = \xi\eta$, $z = \xi\eta\zeta$, 计算狄利克雷积分

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s dx dy dz \quad (p > 0, q > 0, r > 0, s > 0),$$

其中 V 是平面 $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ 所围的区域.

§7. 利用三重积分计算体积

区域的体积 V 可表示为以下公式:

$$V = \iiint_V dx dy dz.$$

求以下列曲面为界的物体的体积:

4101. $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2$.

4102. $z = x + y, z = xy, x + y = 1, x = 0, y = 0$.

4103. $x^2 + z^2 = a^2, x + y = \pm a, x - y = \pm a$.

4104. $az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0)$.

4105. $az = a^2 - x^2 - y^2, z = a - x - y, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (a > 0)$.

4106. $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

变换为球坐标或圆柱坐标, 计算以下曲面所围的体积:

$$4107. x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \leq z^2.$$

$$4108. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$$

$$4109. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz.$$

$$4110. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0) (0 < a < b).$$

在下列各题中最好利用广义球坐标

$$r, \varphi, \psi \quad \left(r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

它们由以下公式引入:

$$\begin{cases} x = ar \cos^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, \\ y = br \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, \\ z = cr \sin^\beta \psi \end{cases}$$

(a, b, c, α, β 为常数), 并且

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \alpha\beta abc r^2 \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{2\beta-1} \psi \sin^{\beta-1} \psi.$$

求以下列曲面为界的物体的体积:

$$4111. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h}.$$

$$4112. (a) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}; \quad (b) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

$$4113. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$

$$4114. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1. \quad 4115. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1.$$

利用适当的变量代换, 计算以下列曲面为界的物体的体积 (假定参数是正的):

$$4116. (a) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0);$$

$$(b) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k} \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

$$4117. (a) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^4 = \frac{xyz}{abc} \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0);$$

$$(b) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

$$4118. (a) \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0);$$

$$(b) \sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0);$$

$$(c) \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c} \right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

$$4119. z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y \quad (x > 0, y > 0).$$

4120. $x^2 + z^2 = a^2, x^2 + z^2 = b^2, x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (x > 0).$

4121. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 x^2}{x^2 + y^2}.$ 4122. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{z}{h} \cdot e^{-\frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}{h}}.$

4123. $\frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}} = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right), \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x = 0, x = a.$

4124. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \ln \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}, x = 0, z = 0, \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

4125. 曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 将球 $x^2 + y^2 + z^2 = 4az$ 分成两部分, 求这两部分的体积之比.

4126. 求以曲面

$$x^2 + y^2 = az, z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0)$$

为界的物体的体积和表面积.

4127. 求以平面

$$a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$$

为界的平行六面体的体积, 设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

4128. 求以曲面

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2$$

为界的物体的体积, 设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

4129. 求以曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2} \quad (n > 1)$$

为界的物体的体积.

4130. 一物体位于正象限 $Oxyz$ ($x > 0, y > 0, z > 0$), 并以曲面

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = 1 \quad (m > 0, n > 0, p > 0), \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

为界, 求其体积.

§8. 三重积分在力学上的应用

1. 物体的质量. 若一物体占有区域 V , $\rho = \rho(x, y, z)$ 为它在点 (x, y, z) 的密度, 则该物体的质量等于

$$M = \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz. \quad (1)$$

2. 物体的质心. 物体的质心坐标 (x_0, y_0, z_0) 按下列公式来计算:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho x \, dx \, dy \, dz, \\ y_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho y \, dx \, dy \, dz, \\ z_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho z \, dx \, dy \, dz. \end{cases} \quad (2)$$

若物体是均匀的, 则在公式 (1) 和 (2) 中可令 $\rho = 1$.

3. 转动惯量. 积分

$$I_{xy} = \iiint_V \rho z^2 \, dx \, dy \, dz, \quad I_{yz} = \iiint_V \rho x^2 \, dx \, dy \, dz, \quad I_{zx} = \iiint_V \rho y^2 \, dx \, dy \, dz$$

分别称为物体对坐标平面的转动惯量.

积分

$$I_l = \iiint_V \rho r^2 \, dx \, dy \, dz$$

(其中 r 为物体各点 (x, y, z) 与轴 l 的距离) 称为物体对某轴 l 的转动惯量. 特别是, 对于坐标轴 Ox, Oy, Oz 分别有:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

积分

$$I_0 = \iiint_V \rho(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

称为物体对坐标原点的转动惯量.

显然有

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}.$$

4. 引力势. 积分

$$u(x, y, z) = \iiint_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi \, d\eta \, d\zeta}{r}$$

称为物体在点 $P(x, y, z)$ 的牛顿引力势, 式中 V 为物体所占区域, $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ 为物体的密度, 且

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

质量为 m 的质点吸引物体的力在坐标轴 Ox, Oy, Oz 上的投影 X, Y, Z 分别等于:

$$X = Gm \frac{\partial u}{\partial x} = Gm \iiint_V \rho \frac{\xi - x}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Y = Gm \frac{\partial u}{\partial y} = Gm \iiint_V \rho \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Z = Gm \frac{\partial u}{\partial z} = Gm \iiint_V \rho \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

其中 G 为引力常量.

4131. 设物体在点 $M(x, y, z)$ 的密度由公式 $\rho = x + y + z$ 给出, 求占有单位体积 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 之物体的质量.

4132. 若物体的密度按规律 $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (其中 $\rho_0 > 0$ 及 $k > 0$ 为常数) 而变化, 求占有无限区域 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ 的物体的质量.

求以下列曲面为界的均匀物体的质心坐标:

4133. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c.$ **4134.** $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0.$

4135. $x^2 = 2pz, y^2 = 2px, x = \frac{p}{2}, z = 0.$

4136. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

4137. $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0).$ **4138.** $x^2 + y^2 = 2z, x + y = z.$

4139. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{abc} (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, a > 0, b > 0, c > 0).$

4140. $z = x^2 + y^2, z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), x + y = \pm 1, x - y = \pm 1.$

4141. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (n > 0; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$

4142. 求形状为立方体

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

的物体的质心坐标, 设此物体在点 (x, y, z) 的密度等于

$$\rho = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

其中 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1.$

求以下列曲面 (参量是正的) 为界的均匀物体对坐标平面的转动惯量:

4143. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

4144. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

4145. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c.$

4146. (a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a};$ (b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$

$$4147. (a) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2};$$

$$(b) \left(\frac{x}{a} \right)^n + \left(\frac{y}{b} \right)^n + \left(\frac{z}{c} \right)^n = 1, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (n > 0; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

求以下列曲面为界的均匀物体对 Oz 轴的转动惯量:

$$4148. z = x^2 + y^2, x + y = \pm 1, x - y = \pm 1, z = 0.$$

$$4149. (a) x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + y^2 = z^2 \quad (z > 0); (b) (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^5 z.$$

4150. 求质量为 M 的非均匀球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 对其直径的转动惯量, 设球内各点 $P(x, y, z)$ 的密度与该点至球心的距离成正比.

4151. 证明等式:

$$I_l = I_{l_0} + Md^2,$$

其中 I_l 为物体对某轴 l 的转动惯量, I_{l_0} 为对平行于 l 并通过物体质心的轴 l_0 的转动惯量, d 为此二轴之间的距离, M 为物体的质量.

4152. 证明: 占有区域 V 的物体对过其质心 $O(0, 0, 0)$ 并与坐标轴成角 α, β, γ 的轴 l 的转动惯量等于:

$$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\ - 2K_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma,$$

其中 I_x, I_y, I_z 为物体对坐标轴的转动惯量, 而

$$K_{xy} = \iiint_V \rho xy \, dx \, dy \, dz, \quad K_{xz} = \iiint_V \rho xz \, dx \, dy \, dz, \quad K_{yz} = \iiint_V \rho yz \, dx \, dy \, dz$$

为惯性积.

4153. 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱体 $x^2 + y^2 \leq a^2, -h \leq z \leq h$ 对直线 $x = y = z$ 的转动惯量.

4154. 求密度为 ρ_0 , 以曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

为界的均匀物体对坐标原点的转动惯量.

4155. 求密度为 ρ_0 的均匀球体 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ 在点 $P(x, y, z)$ 的牛顿引力势.

提示: 令 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x, y, z)$.

4156. 求球壳层 $R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2$ 在点 $P(x, y, z)$ 的牛顿引力势, 设密度 $\rho = f(R)$, 此处 f 为已知函数, 而

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

4157. 求密度 ρ_0 恒定的圆柱体 $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2, 0 \leq \zeta \leq h$ 在点 $P(0, 0, z)$ 的牛顿引力势.

4158. 半径为 R 质量为 M 的均匀球体 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ 以怎样的力吸引质量为 m 的质点 $P(0, 0, a)$?

4159. 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱体 $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2, 0 \leq \zeta \leq h$ 对单位质量质点 $P(0, 0, z)$ 的引力.

4160. 求密度为 ρ_0 的均匀球锥体对位于其顶点的单位质量质点的引力, 设球面半径为 R , 而轴截面的扇形的角等于 2α .

§9. 二重和三重广义积分

1. 无界区域的情形. 若二维区域 Ω 是无界的, 函数 $f(x, y)$ 在区域 Ω 上连续, 则定义:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y) dx dy, \quad (1)$$

其中 Ω_n 是可求积有界封闭区域, 并且它们组成 Ω 的任意一个竭尽递增序列^①. 若右端的极限存在且与序列 Ω_n 的选择无关, 则相应积分称为收敛的; 否则称为发散的.

类似地定义出连续函数在无界三维区域上的三重广义积分.

2. 不连续函数的情形. 若函数 $f(x, y)$ 在有界封闭区域 Ω 内除了点 $P(a, b)$ 而外处处是连续的, 则定义:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \iint_{\Omega - U_{\varepsilon}} f(x, y) dx dy, \quad (2)$$

其中 U_{ε} 是包含点 P 的以 ε 为直径的区域, 并且当极限存在时, 所研究的积分称为收敛的; 否则称为发散的.

假设在点 $P(a, b)$ 的邻近有等式

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{r^{\alpha}},$$

其中函数 $\varphi(x, y)$ 的绝对值是介于二正数 m 和 M 之间且

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

则 1) 当 $\alpha < 2$ 时, 积分 (2) 收敛; 2) 当 $\alpha \geq 2$ 时, 积分 (2) 发散.

若函数 $f(x, y)$ 有间断线, 也可类似地定义出广义积分 (2).

不连续函数的广义积分的概念易于引申到三重积分的情形.

研究下列具有无界积分域的广义积分的收敛性 ($0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$):

$$4161. \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2 + y^2)^p} dx dy.$$

$$4162. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)}.$$

$$4163. \iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1 + x^2 + y^2)^p} dx dy.$$

$$4164. \iint_{|x|+|y| \geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$$

$$4165. \iint_{x+y \geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy.$$

4166. 证明: 若连续函数 $f(x, y)$ 不为负, S_n ($n = 1, 2, \dots$) 为有界闭区域, 并且组成区域 S 的任意一个竭尽递增序列, 则

^①区域 Ω 的竭尽递增序列是指这样的序列 Ω_n , 对任意正整数 n 有 $\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega$, 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$.

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义.

4167. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{|x| \leq n \\ |y| \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi,$$

然而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2\pi n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0$$

(n 为正整数).

4168. 证明: 尽管二重积分

收敛, 但积分

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad \text{及} \quad \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

发散.

计算下列积分 (参数是正的):

$$4169. \iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q}.$$

$$4170. \iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^p}.$$

$$4171. \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

$$4172. \iint_{x^2 + y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p}.$$

$$4173. \iint_{y \geq x^2 + 1} \frac{dx dy}{x^4 + y^2}.$$

$$4174. \iint_{0 \leq x \leq y} e^{-(x+y)} dx dy.$$

变换为极坐标, 计算下列积分:

$$4175. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy.$$

$$4176. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 + y^2)} \cos(x^2 + y^2) dx dy.$$

$$4177. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 + y^2)} \sin(x^2 + y^2) dx dy.$$

计算下列积分:

$$4178. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f} dx dy, \text{ 其中 } a < 0, ac - b^2 > 0.$$

$$4179. \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy.$$

$$4180. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2\varepsilon \frac{x}{a} \frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy \quad (0 < |\varepsilon| < 1).$$

研究下列不连续函数的二重广义积分的收敛性 ($0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$):

$$4181. \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}, \text{ 式中区域 } \Omega \text{ 由条件 } |y| \leq x^2, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ 确定.}$$

$$4182. \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2 + xy + y^2)^p} dx dy.$$

$$4183. \iint_{|x| + |y| \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$$

$$4184. \int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x, y)}{|x - y|^p} dx dy.$$

$$4185. \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1 - x^2 - y^2)^p} dx dy.$$

4186. 证明: 若 1) 函数 $\varphi(x, y)$ 在有界区域 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ 内连续; 2) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $a \leq x \leq A$ 上连续; 3) $p < 1$, 则积分

$$\int_a^A dx \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy$$

收敛.

计算下列积分:

$$4187. \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

$$4188. \int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} \quad (a > 0).$$

$$4189. \iint_{\Omega} \ln \sin(x - y) dx dy, \text{ 其中区域 } \Omega \text{ 是由直线 } y = 0, y = x, x = \pi \text{ 围成的.}$$

$$4190. \iint_{x^2 + y^2 \leq x} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

研究下列三重积分的收敛性:

$$4191. \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 > 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} dx dy dz, \text{ 其中 } 0 < m \leq |\varphi(x, y, z)| \leq M.$$

$$4192. \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} dx dy dz, \text{ 其中 } 0 < m \leq |\varphi(x, y, z)| \leq M.$$

$$4193. \iiint_{|x| + |y| + |z| > 1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r} \quad (p > 0, q > 0, r > 0).$$

$$4194. \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}, \text{ 其中 } 0 < m \leq |f(x, y, z)| \leq M,$$

而 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是闭区间 $[0, a]$ 上的连续函数.

$$4195. \iiint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z| \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p}.$$

计算下列积分:

$$4196. \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r}.$$

$$4197. \iiint_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

$$4198. \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}.$$

$$4199. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz.$$

4200. 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3,$$

其中 $P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j (a_{ij} = a_{ji})$ 为正定二次型.

§10. 多重积分

1. 多重积分的直接算法. 若函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在由下列不等式确定的有界区域 Ω 内是连续的:

$$\begin{cases} x'_1 \leq x_1 \leq x''_1, \\ x'_2(x_1) \leq x_2 \leq x''_2(x_1), \\ \dots\dots\dots \\ x'_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq x''_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \end{cases}$$

其中 x'_1 和 x''_1 为常数, $x'_2(x_1), x''_2(x_1), \dots, x'_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x''_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ 为连续函数, 则相应的多重积分可按下列公式来计算:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{x'_1}^{x''_1} dx_1 \int_{x'_2(x_1)}^{x''_2(x_1)} dx_2 \dots \int_{x'_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{x''_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n. \end{aligned}$$

2. 多重积分中的变量代换. 若 1) 函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在有界可测区域 Ω 内是一致连续的; 2) 连续可微函数

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

把 $Ox_1x_2 \dots x_n$ 空间内的区域 Ω 一一映射成 $O'\xi_1\xi_2 \dots \xi_n$ 空间内的有界区域 Ω' ; 3) 在区域 Ω' 内雅可比行列式

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} \neq 0,$$

则成立公式

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \cdots \int f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \iint_{\Omega'} \cdots \int f(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) |I| d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n. \end{aligned}$$

特别是, 根据公式

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\cdots \cdots \cdots \\ x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

变换成极坐标 $(r, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1})$ 时, 有:

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2}.$$

4201. 设 $K(x, y)$ 为区域 $R(a \leq x \leq b; a \leq y \leq b)$ 内的连续函数, 且

$$K_n(x, y) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_n, y) dt_1 dt_2 \cdots dt_n,$$

证明:

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y) dt.$$

4202. 设 $f = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为区域 $0 \leq x_i \leq x$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 内的连续函数. 证明等式:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x f dx_1 \quad (n \geq 2).$$

4203. 证明:

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^n,$$

其中 f 为连续函数.

计算下列多重积分:

4204. (a) $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n;$

(b) $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$

4205. $I_n = \iiint_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq a}} \cdots \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$

4206. $\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n.$

$$4207. \iint \cdots \int_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

4208. 求以平面

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \pm h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

为界的 n 维平行 $2n$ 面体的体积, 这里设 $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$.

4209. 求 n 维角锥

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n)$$

的体积.

4210. 求以曲面

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n = a_n$$

为界的 n 维圆锥的体积.

4211. 求 n 维球体

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2$$

的体积.

4212. 求 $\iint \cdots \int_{\Omega} x_n^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n$, 其中区域 Ω 是由以下不等式确定的:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq a^2, \quad -\frac{h}{2} \leq x_n \leq \frac{h}{2}.$$

4213. 计算

$$\iint \cdots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}}.$$

4214. 证明等式:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du.$$

4215. 证明等式:

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du.$$

4216. 证明狄利克雷公式:

$$\begin{aligned} & \iint \cdots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 1)} \quad (p_1, p_2, \dots, p_n > 0). \end{aligned}$$

4217. 证明刘维尔公式:

$$\begin{aligned} & \iint \cdots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du \quad (p_1, p_2, \dots, p_n > 0), \end{aligned}$$

式中 $f(u)$ 为连续函数.

提示: 运用数学归纳法.

4218. 将区域 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2$ 上的 n 重积分 ($n \geq 2$)

$$\iiint \cdots \int_{\Omega} f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

(其中 $f(u)$ 为连续函数) 化为一重积分.

4219. 计算半径为 R , 密度为 ρ_0 的均质球体对自身的引力势, 即求积分

$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \iiint \iiint \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}},$$

$$\begin{aligned} & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2 \\ & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leq R^2 \end{aligned}$$

式中 $r_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

4220. 设 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) 为正定二次型, 计算 n 重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right\}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

§11. 曲线积分

1. 第一型曲线积分. 若函数 $f(x, y, z)$ 在平滑曲线 C

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

的各点上有定义并且连续, ds 为弧长的微分, 则

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

这个积分的特征在于它与曲线 C 的方向无关.

2. 第一型曲线积分在力学上的应用. 若 $\rho = \rho(x, y, z)$ 为曲线 C 在点 (x, y, z) 的线密度, 则曲线 C 的质量等于:

$$M = \int_C \rho(x, y, z) ds.$$

此曲线的质心坐标 (x_0, y_0, z_0) 由以下公式来表示:

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) ds, \quad y_0 = \frac{1}{M} \int_C y \rho(x, y, z) ds, \quad z_0 = \frac{1}{M} \int_C z \rho(x, y, z) ds.$$

3. 第二型曲线积分. 若函数 $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ 在曲线 (1) 上

的各点是连续的,且曲线方向是使参数 t 增加的方向,则

$$\begin{aligned} & \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_{t_0}^T \{P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\} dt. \quad (2) \end{aligned}$$

当沿曲线 C 的方向变更时,此积分的符号也变更.在力学上,积分(2)是当其作用点描绘出曲线 C 时变力 $\{P, Q, R\}$ 所作的功.

4. 全微分的情形. 若

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = du,$$

式中 $u = u(x, y, z)$ 为区域 V 内的单值函数,则积分值与完全位于域 V 内的曲线 C 的形状无关:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1),$$

式中 (x_1, y_1, z_1) 为积分路径的始点, (x_2, y_2, z_2) 为其终点.在最简单的情况下,若区域 V 是单连通的,而函数 P, Q, R 有连续的一阶偏导数,则上式成立的充分必要条件为:在区域 V 内,下列条件恒满足:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

这时,在区域 V 是标准长方体这种简单情形下,函数 u 可按下面的公式来求得.

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + c,$$

其中 (x_0, y_0, z_0) 为区域 V 内某一固定的点,而 c 是任意常数.

计算下列第一型曲线积分:

4221. $\int_C (x + y) ds$, 其中 C 为以 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ 和 $B(0, 1)$ 为顶点的三角形围线.

4222. $\int_C y^2 ds$, 其中 C 为摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一拱.

4223. $\int_C (x^2 + y^2) ds$, 其中 C 为曲线 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

4224. $\int_C xy ds$, 其中 C 为双曲线 $x = a \cosh t$, $y = a \sinh t$ ($0 \leq t \leq t_0$) 的弧.

4225. $\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$, 其中 C 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的弧.

4226. $\int_C e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$, 其中 C 为由曲线 $r = a$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (r 和 φ 为极坐标) 给出的凸围线.

4227. $\int_C |y| ds$, 其中 C 为双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 的弧.

4228. $\int_C x ds$, 其中 C 为对数螺线 $r = ae^{k\varphi}$ ($k > 0$) 在圆 $r = a$ 内的部分.

4229. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$.

4230. $\int_C \frac{ds}{y^2}$, 其中 C 为悬链线 $y = a \cosh \frac{x}{a}$.

求下列空间曲线的弧长 (参数是正的):

4231. $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$, 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(3, 3, 2)$.

4232. $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}$, 当 $0 < t < +\infty$.

4233. $y = a \arcsin \frac{x}{a}, z = \frac{a}{4} \ln \frac{a-x}{a+x}$, 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$.

4234. $(x-y)^2 = a(x+y), x^2 - y^2 = \frac{9}{8}x^2$, 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$.

4235. $x^2 + y^2 = cz, \frac{y}{x} = \tan \frac{z}{c}$, 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$.

4236. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \sqrt{x^2 + y^2} \cosh \left(\arctan \frac{y}{x} \right) = a$, 从点 $A(a, 0, 0)$ 到点 $B(x, y, z)$.

计算沿空间曲线的第一型曲线积分:

4237. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 C 为螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一段.

4238. $\int_C x^2 ds$, 其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$.

4239. $\int_C z ds$, 其中 C 为圆锥螺旋 $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$ ($0 \leq t \leq t_0$).

4240. $\int_C z ds$, 其中 C 为曲线 $x^2 + y^2 = z^2, y^2 = ax$ 上从点 $O(0, 0, 0)$ 到点 $A(a, a, \sqrt{2}a)$ 的弧.

4241.1. 设曲线 $x = a \cos t, y = b \sin t$ ($a \geq b > 0, 0 \leq t \leq 2\pi$) 在点 (x, y) 的线密度等于 $|y|$, 求其质量.

4241.2. 设抛物线 $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq \frac{p}{2}$) 在点 $M(x, y)$ 的线密度等于 $|y|$, 求其质量.

4241.3. 求曲线 $x = at, y = \frac{a}{2}t^2, z = \frac{a}{3}t^3$ ($0 \leq t \leq 1$) 的弧之质量, 其密度按规律 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$ 而变化.

4242. 计算均匀曲线 $y = a \cosh \frac{x}{a}$ 从点 $A(0, a)$ 到点 $B(b, h)$ 的弧的质心的坐标.

4243. 求摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) 的弧的质心.

4244.1. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 的弧 C 对坐标轴的静矩

$$S_y = \int_C x ds, \quad S_x = \int_C y ds.$$

4244.2. 求圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 对其直径的转动惯量.

4244.3. 求下列曲线对点 $O(0,0)$ 的极转动惯量:

(a) 正方形 $\max\{|x|, |y|\} = a$ 的边界 C ;

(b) 以极坐标点 $P(a, 0), Q\left(a, \frac{2\pi}{3}\right), R\left(a, \frac{4\pi}{3}\right)$ 为顶点的正三角形的边界 C .

4244.4. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的平均极半径, 即由以下公式给出的数 r_0 ($r_0 > 0$):

$$I_0 = sr_0^2,$$

其中 I_0 是星形线对坐标原点的极转动惯量 (参见习题 4244.3), s 是星形线的弧长.

4245. 计算球面上的三角形 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的围线的质心的坐标.

4246. 求均匀的弧 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ ($-\infty < t \leq 0$) 的质心的坐标.

4247. 求螺线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{h}{2\pi}t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一支对坐标轴的转动惯量.

4248. 计算第二型曲线积分

$$\int_{OA} x dy - y dx,$$

式中 O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(1, 2)$, 并设: (a) OA 为直线段; (b) OA 为抛物线, 其轴为 Oy ; (c) OA 为由 Ox 轴上的线段 OB 和平行于 Oy 轴的线段 BA 组成的折线.

4249. 对于上题中所指示的途径 (a), (b), (c), 计算

$$\int_{OA} x dy + y dx.$$

在参数增加的方向, 沿所指示的曲线计算下列第二型曲线积分:

4250. $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, 其中 C 为抛物线 $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$).

4251. $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, 其中 C 为曲线 $y = 1 - |1 - x|$ ($0 \leq x \leq 2$).

4252. $\oint_C (x+y) dx + (x-y) dy$, 其中 C 为依逆时针方向通过的椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4253. $\int_C (2a - y) dx + x dy$, 其中 C 为摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一拱.

4254. $\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 C 为依逆时针方向通过的圆周 $x^2 + y^2 = a^2$.

4255. $\oint_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, 其中 $ABCD$ 为以 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$

为顶点的正方形围线.

4256. $\int_{AB} \sin y dx + \sin x dy$, 其中 AB 为介于点 $A(0, \pi)$ 和点 $B(\pi, 0)$ 之间的直线段.

4257. $\oint_{OmAnO} \arctan \frac{y}{x} dy - dx$, 其中 OmA 为抛物线段 $y = x^2$, OnA 为直线段 $y = x$.

验证被积函数为全微分, 并计算下列曲线积分:

4258. $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx$.

4259. $\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x dx + y dy$.

4260. $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y) dx + (x-y) dy$.

4261. $\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx - dy)$.

4262. $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx + dy)$, 其中 $f(u)$ 为连续函数.

4263. $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y dx - x dy}{x^2}$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径.

4264. $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 沿着不通过坐标原点的路径.

4265. $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy$, 其中 φ 和 ψ 为连续函数.

4266. $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$.

4267. $\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2}$ 沿着不与直线 $y = x$ 相交的路径.

4268. $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径.

4269. $\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy)$.

4270. 证明: 若 $f(u)$ 为连续函数且 C 为逐段光滑的封闭围线, 则

$$\oint_C f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0.$$

求原函数 z , 设:

4271. $dz = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$. 4272. $dz = \frac{y dx - x dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$.

$$4273. dz = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy}{(x + y)^3}.$$

$$4274. dz = e^x [e^y(x - y + 2) + y] dx + e^x [e^y(x - y) + 1] dy.$$

$$4275. dz = \frac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^{n+1} \partial y^m} dx + \frac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^n \partial y^{m+1}} dy.$$

$$4276. dz = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dx - \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dy,$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4277. 证明: 下面的估计对于曲线积分是正确的:

$$\left| \int_C P dx + Q dy \right| \leq LM,$$

其中 L 为积分路径的长, $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2}$ (在弧 C 上).

4278. 估计积分

$$I_R = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$$

证明: $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$.

计算沿空间曲线的积分 (假定坐标系是右手的):

4279. $\int_C (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$, 式中 C 为曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ ($0 \leq t \leq 1$), 以参数增加的方向为正.

4280. $\int_C y dx + z dy + x dz$, 式中 C 为纽形螺线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), 以参数增加的方向为正.

4281. $\int_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, 式中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = x \tan \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$), 若从 x 轴的正向看去, 沿逆时针方向为正.

4282. $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 式中 C 为维维亚尼曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$ ($z \geq 0, a > 0$), 若从 Ox 轴的正向 ($x > a$) 看去, 沿逆时针方向为正.

4283. $\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, 式中 C 为球面的一部分 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界, 当沿着它的正向移动时, 这部分球面的外侧面保持在左方.

计算下列全微分的曲线积分:

$$4284. \int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz.$$

$$4285. \int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz.$$

4286. $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中点 (x_1, y_1, z_1) 位于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 之上, 而点 (x_2, y_2, z_2) 位于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ 之上 ($a > 0, b > 0$).

4287. $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy + \chi(z) dz$, 式中 φ, ψ, χ 为连续函数.

4288. $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x + y + z)(dx + dy + dz)$, 其中 f 为连续函数.

4289. $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x dx + y dy + z dz)$, 式中 f 为连续函数.

求原函数 u , 若

$$4290. du = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz.$$

$$4291. du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz.$$

$$4292. du = \frac{(x + y - z) dx + (x + y - z) dy + (x + y + z) dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}.$$

4293. 求当质量为 m 的点从位置 (x_1, y_1, z_1) 移动到位置 (x_2, y_2, z_2) 时, 重力所作的功 (Oz 轴的方向是竖直向上).

4294. 弹性力指向坐标原点, 力的大小与质点到坐标原点的距离成正比. 设此点依逆时针方向描绘出椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的正四分之一, 求弹性力所作的功.

4295. 当单位质量从点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 移动到点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 时, 求引力 $F = \frac{G}{r^2}$ (其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 对它所作的功, 其中 G 是引力常量.

§12. 格林公式

1. 曲线积分与二重积分的关系. 设 C 为分段光滑的简单封闭围线, 它围成单连通的有界区域 S , 并且当沿着围线正方向移动时, 区域 S 保持在左边; 此外, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 及其一阶偏导数 $P'_y(x, y), Q'_x(x, y)$ 在区域 S 内及其边界上皆是连续的, 则成立格林公式

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1)$$

若把区域 S 的边界 C 理解为一切边界围线之和, 并且这样选取沿围线的环绕方向, 使得区域 S 始终位于左侧, 则公式 (1) 对于由几个简单围线围成的有界区域 S 也成立.

2. 平面区域的面积. 以分段光滑的简单围线 C 为界的图形的面积 S 等于:

$$S = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx).$$

在这一节中, 若没有相反的约定, 则假定积分的封闭围线是简单的 (无自交点), 并这样选取围线的正方向, 使得所围不含无穷远点的区域始终位于曲线的左边.

4296. 利用格林公式变换曲线积分

$$I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] dy,$$

式中围线 C 是有界区域 S 的边界.

4297. 应用格林公式, 计算曲线积分

$$I = \oint_K (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy,$$

其中 K 是以 $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(2, 5)$ 为顶点的三角形围线 ABC , 并且积分时的环绕方向为正. 直接计算积分, 以验证所求得的结果.

应用格林公式, 计算下列曲线积分:

4298. $\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$, 式中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$.

4299. $\oint_C (x+y) dx - (x-y) dy$, 式中 C 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4300. $\oint_C e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy]$, 其中 C 为区域 $0 < x < \pi, 0 < y < \sin x$

的边界, 并且积分时的环绕方向为正.

4301. $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$.

4302. 设 AmB 为连接点 $A(1, 1)$ 和点 $B(2, 6)$ 的直线段, AnB 是连接点 A, B 及坐标原点的抛物线段, 且该抛物线的轴垂直于 x 轴. 积分

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy, \quad I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

相差多少?

4303. 计算曲线积分

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

其中 AmO 为由点 $A(a, 0)$ 至点 $O(0, 0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$.

提示: 用 Ox 轴的直线段 OA 与路径 AmO 相连组成封闭围线.

4304. 计算曲线积分

$$\int_{AmB} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy,$$

式中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数, AmB 为连接点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 的任意路径, 但要求此路径与线段 AB 一起围成具有已知面积 S 的区域 $AmBA$.

4305. 求二阶可微的二个连续函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$, 使得曲线积分

$$I = \oint_C P(x + \alpha, y + \beta) dx + Q(x + \alpha, y + \beta) dy$$

对于任何封闭围线 C 与常数 α 和 β 无关.

4306. 为了使曲线积分

$$\int_{AmB} F(x, y)(y dx + x dy)$$

与积分路径的形状无关, 可微函数 $F(x, y)$ 应满足怎样的条件?

4307. 计算

$$I = \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

其中 C 不经过坐标原点的简单封闭围线, 且积分时的环绕方向为正.

提示: 研究两种情况: 1) 坐标原点在围线之外; 2) 围线 C 包围坐标原点.

利用曲线积分计算由下列曲线所围的面积:

4308. $x = a \cos t, y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (椭圆).

4309. $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (星形线).

4310. 轴 Ox 与 $(x + y)^2 = ax$ ($a > 0$) (抛物线).

4311. $x^3 + y^3 = 3axy$ ($a > 0$) (笛卡儿叶形线).

提示: 令 $y = tx$.

4312. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (双纽线).

提示: 令 $y = x \tan \varphi$.

4313. 曲线 $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ 及坐标轴.

4314. 计算由曲线

$$(x + y)^{n+m+1} = ax^n y^m \quad (a > 0, n > 0, m > 0)$$

所围的面积.

4315. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a > 0, b > 0, n > 0)$$

和坐标轴所围的面积.

提示: 令 $\frac{x}{a} = \cos^{\frac{2}{n}} \varphi, \frac{y}{b} = \sin^{\frac{2}{n}} \varphi$.

4316. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \quad (a > 0, b > 0, n > 1)$$

和坐标轴所围的面积.

4317. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n \quad (a > 0, b > 0, c > 0, n > 0)$$

所围的面积.

4318. 一半径为 r 的圆周沿半径为 R 的固定圆周外部滚动而无滑动, 动圆周上的一点所描绘的曲线称为外摆线.

假定比值 $\frac{R}{r} = n$ 是整数 ($n \geq 1$), 求外摆线所围的面积.

研究特殊情况 $r = R$ (心脏线).

4319. 一个半径为 r 的圆周沿半径为 R 的固定圆周内部滚动而无滑动时, 动圆周上的一点所描绘的曲线称为内摆线.

假定比值 $\frac{R}{r} = n$ 是整数 ($n \geq 2$), 求内摆线所围的面积.

研究特殊情况 $r = \frac{R}{4}$ (星形线).

4320.1. 计算圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 被曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所截那部分的面积.

4320.2. 一简单封闭围线 C 位于上半平面 $y \geq 0$, 它在绕 Ox 轴旋转时确定了一个旋转体, 证明: 此旋转体的体积为

$$V = -\pi \oint_C y^2 dx.$$

4321. 计算

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X dY - Y dX}{X^2 + Y^2},$$

若 $X = ax + by, Y = cx + dy$, 且 C 为包围坐标原点的简单封闭围线 ($ad - bc \neq 0$).

4322. 若简单的围线 C 包围坐标原点, $X = \varphi(x, y), Y = \psi(x, y)$, 而曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 和 $\psi(x, y) = 0$ 在围线 C 以内有几个单交点, 计算积分 I (参阅前题).

4323. 证明: 若 C 为封闭围线, l 为任意的方向, 则有

$$\oint_C \cos(l, n) ds = 0,$$

式中 n 为围线 C 的外法向量.

4324. 求积分

$$I = \oint_C [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)] ds$$

之值, 式中 C 是有界区域 S 的边界, 它是简单封闭曲线, 而 n 是它的外法向量.

4325. 求

$$\lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C (F \cdot n) ds,$$

其中 S 为包围点 (x_0, y_0) 的围线 C 所围的面积, $d(S)$ 为区域 S 的直径, n 为围线 C 的单位外法向量, $F\{X, Y\}$ 为 $S + C$ 上的连续可微向量.

§13. 曲线积分在物理学上的应用

4326. 均匀分布在圆 $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$ 的上半部的质量 M 以怎样的力吸引位于 $(0, 0)$ 质量为 m 的质点?

4327. 计算单层的对数势

$$u(x, y) = \oint_C \kappa \ln \frac{1}{r} ds,$$

式中 $\kappa = \text{常数}$, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$, 设围线 C 是圆周 $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

4328. 采用极坐标 ρ 和 φ , 计算单层的对数势

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi \quad \text{和} \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi,$$

式中 r 为点 (ρ, φ) 与动点 $(1, \psi)$ 间的距离, m 为正整数.

4329. 计算高斯积分

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds,$$

式中 $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ 为向量 \mathbf{r} 的长度, 此向量连接点 $A(x, y)$ 和简单封闭光滑围线 C 上的动点 $M(\xi, \eta)$, (\mathbf{r}, \mathbf{n}) 为向量 \mathbf{r} 与曲线 C 在点 M 的外法向量 \mathbf{n} 之间的夹角.

4330. 采用极坐标 ρ 和 φ , 计算双层的对数势

$$K_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} d\psi, \quad K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} d\psi,$$

式中 r 为点 $A(\rho, \varphi)$ 和动点 $M(1, \psi)$ 之间的距离, (\mathbf{r}, \mathbf{n}) 为方向 $\overrightarrow{AM} = \mathbf{r}$ 与引自点 $O(0, 0)$ 的半径 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{n}$ 之间的夹角, m 为正整数.

4331. 若 $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则称二阶可微函数 $u = u(x, y)$ 为调和函数. 证

明: 当且仅当以下条件成立时 u 才是调和函数:

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

式中 C 为任意封闭围线, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿此围线之外法线方向的导数.

4332. 证明:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = - \iint_S u \Delta u dx dy + \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

式中光滑围线 C 是有界区域 S 的边界.

4333. 证明: 若一函数在有界区域 S 内及其边界 C 上为调和函数, 则此函数单值地由它在边界 C 上的值确定 (参考习题 4332).

4334. 证明平面上的格林第二公式:

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

式中光滑围线 C 是有界区域 S 的边界, $\frac{\partial}{\partial n}$ 为沿 C 的外法线方向的导数.

4335. 利用格林第二公式证明: 若 $u = u(x, y)$ 是有界闭区域 S 内的调和函数, 则

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

式中 C 为区域 S 的边界, \mathbf{n} 为围线 C 的外法向量, (x, y) 为区域 S 的内点,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

为点 (x, y) 与围线 C 上的动点 (ξ, η) 之间的距离.

提示: 从区域 S 中除去点 (x, y) 与该点的无穷小圆形邻域, 并对区域 S 的剩余部分应用格林第二公式.

4336. 证明对于调和函数 $u(M) = u(x, y)$ 的中值定理:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \oint_C u(\xi, \eta) ds,$$

式中 C 是以点 M 为中心的圆周.

4337. 证明: 有界闭区域内的非常数调和函数 $u(x, y)$ 在此区域内的点不能达到其最大或最小值 (极大值原理).

4338. 证明黎曼公式:

$$\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

式中

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu, \quad M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} + cv$$

(a, b, c 为常数), P 和 Q 为某些确定的函数, 围线 C 是有界区域 S 的边界.

4339. 设 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 为定常流的速度分量, C 为区域 S 的边界, 求区域 S 内的流体质量的变化率. 若流体是不可压缩的, 且在区域 S 内没有源和汇, 则函数 u 和 v 满足怎样的方程?

4340. 根据毕奥-萨瓦尔定律, 通过导线元 ds 的电流 i 在空间的点 $M(x, y, z)$ 处所对应的磁场强度为

$$d\mathbf{H} = ki \frac{(\mathbf{r} \times d\mathbf{s})}{r^3},$$

其中 \mathbf{r} 为连接导线元 ds 与点 M 的向量, k 为比例系数.

对于封闭导线 C 的情形, 求点 M 的磁场强度 \mathbf{H} 的投影 H_x, H_y 和 H_z .

§14. 曲面积分

1. 第一型曲面积分. 若 S 为分片光滑的双侧曲面

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad ((u, v) \in \Omega), \quad (1)$$

而 $f(x, y, z)$ 为在曲面 S 的各点上有定义并且连续的函数, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (2)$$

式中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

在特别情形下,若曲面 S 的方程具有以下形式:

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \in \sigma),$$

其中 $z(x, y)$ 为单值连续可微函数,则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\sigma} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

此积分与曲面 S 的正反面的选择无关.

若把函数 $f(x, y, z)$ 当作曲面 S 在点 (x, y, z) 的面密度,则积分 (2) 是此曲面的质量.

2. 第二型曲面积分. 若 S 为光滑的双侧曲面, S^+ 为它的正面,即由法向量 $\mathbf{n}\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 确定的一面, $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ 为在曲面 S 上有定义而且连续的三个函数,则

$$\iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \quad (3)$$

若曲面 S 以参数方程 (1) 的形式给出,则法向量 \mathbf{n} 的方向余弦由下列公式来确定:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

其中

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

且根式前的符号用适当的方法来选择.

当变换为曲面 S 的另一面 S^- 时,积分 (3) 的符号相反.

4341. 两个积分

$$I_1 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS, \quad I_2 = \iint_P (x^2 + y^2 + z^2) dP$$

(式中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, P 为其内接八面体的表面 $|x| + |y| + |z| = a$) 相差若何?

4342. 计算 $\iint_S z dS$, 式中 S 为曲面 $x^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) 被曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

所割下的部分.

计算下列第一型曲面积分:

4343. $\iint_S (x + y + z) dS$, 式中 S 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.

4344. $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, 式中 S 为区域 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ 的边界.

4345. $\iint_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$, 式中 S 为四面体 $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的

边界.

4346. $\iint_S |xyz| dS$, 式中 S 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 所截下的部分.

4347. $\iint_S \frac{dS}{h}$, 式中 S 为椭球面, h 为椭球中心到与椭球面微元 dS 相切的平面的距离.

4348. $\iint_S z dS$, 式中 S 为螺旋面的一部分: $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$ ($0 < u < a; 0 < v < 2\pi$).

4349. $\iint_S z^2 dS$, 式中 S 为圆锥面的一部分: $x = r \cos \varphi \sin \alpha, y = r \sin \varphi \sin \alpha, z = r \cos \alpha$ ($0 \leq r \leq a; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$), α 为常数 ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

4350. $\iint_S (xy + yz + zx) dS$, 式中 S 为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被曲面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所割下的部分.

4351. 证明泊松公式:

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du,$$

式中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4352.1. 求抛物面壳

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (0 \leq z \leq 1)$$

的质量, 此壳的面密度按规律 $\rho = z$ 而变.

4352.2. 求半球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geq 0)$$

的质量, 其面密度在半球面上每一点 $M(x, y, z)$ 等于 $\frac{x}{a}$.

4352.3. 求均质三角形板

$$x + y + z = a \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

对坐标平面的静矩.

4353. 求密度为 ρ_0 的均质球面壳

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geq 0)$$

对 Oz 轴的转动惯量.

4354. 求密度为 ρ_0 的均质锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq b)$$

对直线

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$

的转动惯量.

4355. 求下列均质曲面的质心坐标:

- (a) 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被曲面 $x^2 + y^2 = ax$ 所割下的部分;
 (b) 曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ($x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a$).

4356.1. 求下列曲面 S 的极转动惯量 $I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$:

- (a) 立方体表面 $\max\{|x|, |y|, |z|\} = a$;
 (b) 圆柱体 $x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H$ 的全部表面.

4356.2. 求均质三角形板

$$x + y + z = 1 \quad (x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0)$$

对坐标平面的转动惯量.

4357. 密度为 ρ_0 的均质截圆锥面

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < b \leq r \leq a)$$

以怎样的力吸引质量为 m 位于该圆锥面顶点的质点?

4358. 求密度为 ρ_0 的均质球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的势, 即计算积分

$$u = \iint_S \frac{\rho_0 dS}{r},$$

式中 $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

4359. 计算

$$F(t) = \iint_{x+y+z=t} f(x, y, z) dS,$$

式中

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\ 0, & x^2 + y^2 + z^2 > 1. \end{cases}$$

作出函数 $u = F(t)$ 的图像.

4360. 计算积分

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z) dS,$$

式中

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

4361. 计算积分

$$F(x, y, z, t) = \iint_S f(\xi, \eta, \zeta) dS,$$

式中 S 为变球面

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2,$$

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1, & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < a^2, \\ 0, & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq a^2, \end{cases}$$

且假设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > a > 0$.

计算下列第二型曲面积分:

4362. $\iint_S (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy)$, 式中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

4363. $\iint_S f(x) \, dy \, dz + g(y) \, dz \, dx + h(z) \, dx \, dy$, 式中 $f(x), g(y), h(z)$ 为连续函数,

S 为平行六面体 $0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; 0 \leq z \leq c$ 的外表面.

4364. $\iint_S (y - z) \, dy \, dz + (z - x) \, dz \, dx + (x - y) \, dx \, dy$, 式中 S 为圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的外侧.

4365. $\iint_S \left(\frac{dy \, dz}{x} + \frac{dz \, dx}{y} + \frac{dx \, dy}{z} \right)$, 式中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧.

4366. $\iint_S x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy$, 式中 S 为球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 的外侧.

§15. 斯托克斯公式

若 $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ 为连续可微函数, S 为分片光滑的有界双侧曲面, 其边界 C 为分段光滑的简单封闭围线, 则成立斯托克斯公式:

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

式中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的法线的方向余弦, 并且从此法线所指方向来看, 积分时围线 C 的环绕方向是逆时针的 (对于右手坐标系).

4367. 应用斯托克斯公式, 计算曲线积分

$$\oint_C y \, dx + z \, dy + x \, dz,$$

其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$, 并且从 Ox 轴的正向来看, 积分时此圆周的环绕方向是逆时针的. 用直接计算法检验结果.

4368. 计算积分

$$\int_{AmB} (x^2 - yz) \, dx + (y^2 - xz) \, dy + (z^2 - xy) \, dz,$$

此积分是从点 $A(a, 0, 0)$ 至点 $B(a, 0, h)$ 沿着螺旋线 $x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = \frac{h}{2\pi} \varphi$

进行的.

提示: 以直接段与曲线 AmB 相连并应用斯托克斯公式.

4369. 设 C 为平面 $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ ($\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为平面之法线的方向余弦) 上的封闭围线, 所围面积为 S , 求

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

积分沿围线 C 的正方向进行.

应用斯托克斯公式, 计算积分:

4370. $\oint_C (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$, 式中 C 为椭圆周 $x = a \sin^2 t, y = 2a \sin t \cos t, z = a \cos^2 t$ ($0 \leq t \leq \pi$), 并且以参数 t 增大的方向为积分时的正方向.

4371. $\oint_C (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$, 式中 C 为椭圆周 $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$ ($a > 0, h > 0$). 并且若从 Ox 轴正向看去, 积分是沿此椭圆依逆时针方向进行的.

4372. $\oint_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, 式中 C 是曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, x^2 + y^2 = 2rx$ ($0 < r < R, z > 0$), 并且在沿此曲线进行积分时, 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ 外侧被该曲线所围的最小区域始终位于左边.

4373. $\oint_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, 式中 C 为用平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 截立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ 所得截面的边界, 并且若从 Ox 轴的正向看去, 积分是沿 C 依逆时针方向进行的.

4374. $\oint_C y^2 z^2 dx + z^2 x^2 dy + x^2 y^2 dz$, 式中 C 为封闭曲线 $x = a \cos t, y = a \cos 2t, z = a \cos 3t$, 并且以参数 t 增大的方向为积分时的正方向.

4375. 有函数

$$W(x, y, z) = ki \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS \quad (k = \text{常数}).$$

其中曲面 S 的边界为围线 C , \mathbf{n} 为曲面 S 的法向量, \mathbf{r} 为连接空间的点 $M(x, y, z)$ 与围线 C 上的动点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 所成之径向量. 证明: 此函数为通过围线 C 的电流 i 所产生的磁场 \mathbf{H} 的势 (参阅习题 4340).

§16. 奥斯特罗格拉茨基公式

若空间区域 V 的边界 S 为分片光滑曲面,

$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(x, y, z), \quad R = R(x, y, z)$$

和它们的一阶偏导数均为区域 $V + S$ 内的连续函数, 则成立奥斯特罗格拉茨基公式

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

式中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

应用奥斯特罗格拉茨基公式变换下列曲面积分, 设光滑曲面 S 是有界区域 V 的边界, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦:

$$4376. \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy. \quad 4377. \iint_S yz dy dz + zx dz dx + xy dx dy.$$

$$4378. \iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS.$$

$$4379. \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS.$$

$$4380. \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS.$$

4381. 证明: 若 S 为封闭的简单曲面而 l 为任意的固定方向, 则

$$\iint_S \cos(n, l) dS = 0,$$

式中 n 为曲面 S 的外法向量.

4382. 证明: 以曲面 S 为界的物体的体积等于:

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

式中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

4383. 证明: 以光滑锥面 $F(x, y, z) = 0$ 和平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 为界的锥体的体积等于

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

式中 S 为位于该平面上的锥底之面积, H 为锥体的高.

4384. 求以曲面 $z = \pm c$ 及

$$\begin{cases} x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, \\ y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v, \\ z = c \sin u \end{cases}$$

为界的物体的体积.

4385.1. 求以曲面 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = -u + a \cos v (u \geq 0)$ 及平面 $x = 0, x = a (a > 0)$ 为界的物体的体积.

4385.2. 求环面

$$\begin{cases} x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, \\ y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, \\ z = a \sin \psi \end{cases} \quad (0 < a \leq b)$$

所围区域的体积.

4386. 证明公式:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} \\ &= \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t) dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0). \end{aligned}$$

利用奥斯特罗格拉茨基公式计算下列曲面积分:

4387. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 式中 S 为立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq$

$a, 0 \leq z \leq a$ 的外表面.

4388. $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 式中 S 为球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外表面.

4389. $\iint_S (x - y + z) dy dz + (y - z + x) dz dx + (z - x + y) dx dy$, 式中 S 为曲面

$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$ 的外侧.

4390. 计算

$$\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS,$$

式中 S 为部分圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$), $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为此曲面外法线的方向余弦.

提示: 与部分平面 $z = h, x^2 + y^2 \leq h^2$ 组成封闭曲面.

4391. 证明公式:

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS,$$

其中封闭曲面 S 为区域 V 的表面, \mathbf{n} 为曲面 S 上的点 (ξ, η, ζ) 处的外法向量, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, \mathbf{r} 为从点 (x, y, z) 到点 (ξ, η, ζ) 的径向量.

4392. 计算高斯积分

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS,$$

式中 S 为简单封闭光滑曲面, 它是区域 V 的边界, \mathbf{n} 为曲面 S 上在点 (ξ, η, ζ) 处的外

法向量, \mathbf{r} 为连接点 (x, y, z) 和点 (ξ, η, ζ) 的径向量,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

研究两种情形:

(a) 曲面 S 不包围点 (x, y, z) ; (b) 曲面 S 包围点 (x, y, z) .

4393. 证明: 若

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

有界区域 V 的边界 S 为光滑曲面, 则成立下列公式:

$$(a) \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \Delta u dx dy dz;$$

$$(b) \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \iiint_V u \Delta u dx dy dz,$$

式中 u 及其一阶和二阶偏导数是在区域 $V + S$ 内连续的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线的导数.

4394. 证明三维情形的格林第二公式:

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

式中区域 V 以曲面 S 为界, \mathbf{n} 是曲面 S 的外法向量, 而函数 $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$ 在区域 $V + S$ 内二阶可微.

4395. 设函数 $u = u(x, y, z)$ 在某区域内具有连续的一阶和二阶导数, 若

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

则 $u(x, y, z)$ 称为此区域内的调和函数.

证明: 若有界闭区域 V 以光滑曲面 S 为界, u 是此区域内的调和函数, 则成立下列公式:

$$(a) \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0; \quad (b) \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

式中 \mathbf{n} 为曲面 S 的外法向量.

用公式 (b) 证明: 区域 V 内的调和函数由它在边界 S 上的值唯一地确定.

4396. 证明: 若函数 $u = u(x, y, z)$ 是以光滑曲面 S 为界的有界闭区域 V 内的调和函数, 则

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS,$$

式中 \mathbf{r} 是从区域 V 的内点 (x, y, z) 引至曲面 S 上的点 (ξ, η, ζ) 的径向量,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

\mathbf{n} 为曲面 S 在点 (ξ, η, ζ) 的外法向量.

4397. 证明: 若半径为 R 的球的球心位于点 (x_0, y_0, z_0) , $u = u(x, y, z)$ 为此球内的调和函数, 则

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x, y, z) dS$$

(中值定理).

4398. 证明: 若有界闭区域 V 内的连续函数 $u = u(x, y, z)$ 在此区域内部是调和函数, 并且它不是常数, 则此函数在区域内的点不能达到最大值和最小值 (极大值原理).

4399. 设物体 V 全部浸于液体中, 利用帕斯卡定律证明: 液体的浮力等于物体所排开的液体的重量, 其方向是竖直向上 (阿基米德定律).

4400. 设 S_t 是动球面 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$, 而函数 $f(\xi, \eta, \zeta)$ 是连续的, 证明: 函数

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS_t$$

满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

和初始条件 $u|_{t=0} = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = f(x, y, z)$.

提示: 用三重积分表示导数 $\frac{\partial u}{\partial t}$.

§17. 场论初步

1. 梯度. 若 $u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$ (其中 $\mathbf{r} = xi + yj + zk$) 是连续可微标量场, 则称向量

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

为它的梯度, 简记为 $\text{grad } u = \nabla u$, 其中 $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$. 场 u 在已知点 (x, y, z) 的梯度的方向与过此点的等值面 $u(x, y, z) = C$ 的法线方向一致^①. 对于场的每一点, 此向量给出函数 u 变化率最大的方向和大小,

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

场 u 在某方向 $l\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 上的导数等于:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot l = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

2. 场的散度与旋度. 若

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

^①并且指向 u 增加的方向. —— 译注

是连续可微向量场, 则称标量

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

为这个场的散度.

向量

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

称为场的旋度.

3. 向量通过曲面的通量. 若 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 给出区域 Ω 内的向量场, S 是此区域内的曲面, $\mathbf{n} \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 是曲面 S 的单位法向量, 则称积分

$$\iint_S a_n dS = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS$$

(式中 $a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ 为向量的法向分量) 为向量 \mathbf{a} 在单位法向量 \mathbf{n} 所指的方向上通过所给曲面 S 的通量. 以向量形式表述的奥斯特罗格拉茨基公式为

$$\iint_S a_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz,$$

式中曲面 S 为区域 V 的边界, \mathbf{n} 为曲面 S 的单位外法向量.

4. 向量的环量. 数

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz \quad (1)$$

称为向量 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 沿某曲线 C 的曲线积分 (场的功^①).

若 C 是封闭围线, 则称曲线积分为向量 \mathbf{a} 沿围线 C 的环量.

以向量形式表述的斯托克斯公式为

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{a})_n dS,$$

式中封闭围线 C 为曲面 S 的边界, 并且曲面 S 的单位法向量 \mathbf{n} 之方向应当这样来选择, 使得立于曲面 S 上的观察者从法线所指方向来看, 围线 C 的环绕是逆时针的 (对于右手坐标系).

5. 有势场. 若向量场 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 是某标量 u 的梯度, 即

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{a},$$

则 \mathbf{a} 称为有势场, 而标量 u 称为场的势.

若势 u 为单值函数, 则

$$\int_{AB} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = u(B) - u(A).$$

^①原文如此, 这里定义的功并不是物理学意义上的功. 为避免混淆, 译文一律称积分 (1) 为向量 \mathbf{a} 沿曲线 C 的环量. ——译注

特别地, 这时向量 \mathbf{a} 的环量等于零.

在单连通区域内给定的场 \mathbf{a} 为有势场的充要条件是

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

即这样的场应当是无旋场.

4401.1. 求场 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ 在下列各点的梯度的大小和方向: (a) $O(0, 0, 0)$; (b) $A(1, 1, 1)$; (c) $B(2, 1, 1)$. 在场中怎样的点, 梯度等于零?

4401.2. 设

$$u = xy - z^2,$$

求 $\operatorname{grad} u$ 在点 $M(-9, 12, 10)$ 的大小和方向. 沿坐标角 xOy 的等分线方向的导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 等于什么?

4402. 在空间 $Oxyz$ 的哪些点, 场

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

的梯度 (a) 垂直于 Oz 轴; (b) 平行于 Oz 轴; (c) 等于零?

4403. 给定标量场

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. 在空间 $Oxyz$ 的哪些点成立等式

$$|\operatorname{grad} u| = 1?$$

4404. 作标量场

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$$

的等值面. 求通过点 $M(9, 12, 28)$ 的等值面. 在区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ 内 $\max u$ 等于什么?

4405. 求场

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

在点 $A(1, 2, 2)$ 及 $B(-3, 1, 0)$ 的梯度之间的夹角 φ .

4406. 设已知标量场

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

作出场的等值面和梯度的等模面.

求区域 $1 < z < 2$ 内的 $\inf u, \sup u, \inf |\operatorname{grad} u|, \sup |\operatorname{grad} u|$.

4407. 精确到高阶无穷小量, 求在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处之二无限接近的等值面

$$u(x, y, z) = c \quad \text{及} \quad u(x, y, z) = c + \Delta c$$

之间的距离, 其中 $u(x_0, y_0, z_0) = c$ ($\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0) \neq 0$).

4408. 证明公式:

$$(a) \operatorname{grad}(u+c) = \operatorname{grad} u \quad (c \text{ 为常数}); \quad (b) \operatorname{grad} cu = c \operatorname{grad} u \quad (c \text{ 为常数});$$

$$(c) \operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v; \quad (d) \operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u;$$

$$(e) \operatorname{grad}(u^2) = 2u \operatorname{grad} u; \quad (f) \operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u.$$

4409. 计算: (a) $\text{grad } r$; (b) $\text{grad } r^2$; (c) $\text{grad } \frac{1}{r}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4410. 求 $\text{grad } f(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4411. 求 $\text{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})$, 其中 \mathbf{c} 为常向量, \mathbf{r} 为引自坐标原点的径向量.

4412. 求 $\text{grad}\{|\mathbf{c} \times \mathbf{r}|^2\}$ (\mathbf{c} 为常向量).

4413. 证明公式:

$$\text{grad } f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad } u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad } v.$$

4414.1. 证明公式:

$$\begin{aligned} \nabla^2(uv) &= u\nabla^2v + v\nabla^2u + 2\nabla u \nabla v, \\ \nabla &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \nabla^2 &= \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

4414.2. 证明: 若函数 $u = u(x, y, z)$ 在凸区域 Ω 内可微, 且 $|\text{grad } u| \leq M$, 其中 M 为常数, 则对于 Ω 中任意二点 A, B 有:

$$|u(A) - u(B)| \leq M\rho(A, B),$$

式中 $\rho(A, B)$ 为 A 与 B 二点之间的距离.

4415. 对于函数 $u = u(x, y, z)$, 写出 $\text{grad } u$ 在下列坐标系中的表达式: (a) 圆柱坐标系; (b) 球坐标系.

4416. 求场 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 在已知点 $M(x, y, z)$ 处沿此点的径向量 \mathbf{r} 之方向的导数. 在怎样的情况下, 此导数等于梯度的大小?

4417. 求场 $u = \frac{1}{r}$ (其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 在方向 $l\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 上的导数. 在怎样的情况下, 此导数等于零?

4418. 求场 $u = u(x, y, z)$ 在场 $v = v(x, y, z)$ 的梯度方向的导数. 在怎样的情况下, 此导数等于零?

4419. 设

$$u = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

写出

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \text{grad } u$$

通过单位向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 的表达式.

4420. 确定向量场

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

的向量线.

4421. 用直接计算的方法证明: 向量 \mathbf{a} 的散度与直角坐标系的选择无关.

4422. 证明:

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S a_n \, dS,$$

其中 S 表示围绕点 M 的封闭曲面, V 是该曲面所围区域的体积, \mathbf{n} 为曲面 S 的外法向量, $d(S)$ 为曲面 S 的直径.

4423.1. 求场 $\mathbf{a} = \frac{-ix + jy + kz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 在点 $M(3, 4, 5)$ 的散度. 向量 \mathbf{a} 通过无穷小球面 $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = \varepsilon^2$ 的通量 Π 近似地等于什么?

4423.2. 求

$$\operatorname{div} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

4424. 证明:

- (a) $\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}$;
- (b) $\operatorname{div}(u\mathbf{c}) = \mathbf{c} \operatorname{grad} u$ (\mathbf{c} 为常向量, u 为标量);
- (c) $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u$.

4425. 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

4426. 求 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 在什么情况下 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$?

4427. 计算: (a) $\operatorname{div} \mathbf{r}$; (b) $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r}$.

4428. 计算: $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{c}]$, 式中 \mathbf{c} 为常向量.

4429. 求 $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}]$. 在什么情形下该散度等于零?

4430. 求: (a) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$; (b) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

4431. 设流体充满空间并以恒定的角速度 ω 沿逆时针方向绕 Oz 轴旋转, 求速度向量 \mathbf{v} 和加速度向量 \mathbf{w} 在已知时刻在空间点 $M(x, y, z)$ 处的散度.

4432. 求包含多个引力中心的有限系统所产生的引力场之散度.

4433. 求由极坐标 r 与 φ 表示的平面向量 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(r, \varphi)$ 之散度的表达式.

4434. 设

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w),$$

用正交曲线坐标 u, v, w 表示 $\operatorname{div} \mathbf{a}(x, y, z)$.

作为特殊的情形, 求用柱坐标和球坐标表示 $\operatorname{div} \mathbf{a}$ 的表达式.

提示: 研究向量 \mathbf{a} 通过以曲面 $u = \text{常数}$, $v = \text{常数}$, $w = \text{常数}$ 为界的无穷小平行六面体表面的通量.

4435. 证明:

- (a) $\operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \mathbf{b}$;
- (b) $\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} u \times \mathbf{a}$.

4436.1. 求: (a) $\operatorname{rot} \mathbf{r}$; (b) $\operatorname{rot}[f(r)\mathbf{r}]$.

4436.2. 设

$$\mathbf{a} = \frac{y}{z}\mathbf{i} + \frac{z}{x}\mathbf{j} + \frac{x}{y}\mathbf{k},$$

求 $\text{rot } \mathbf{a}$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 的大小和方向.

4437. 求: (a) $\text{rot}[\mathbf{c}f(\mathbf{r})]$; (b) $\text{rot}[\mathbf{c} \times f(\mathbf{r})\mathbf{r}]$ (\mathbf{c} 为常向量).

4438. 证明: $\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b}$.

4439. 求: (a) $\text{rot}(\text{grad } u)$; (b) $\text{div}(\text{rot } \mathbf{a})$.

4440. 设流体充满空间并以恒定的角速度 ω 围绕轴 $l\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 旋转. 求速度向量 \mathbf{v} 在已知时刻在空间点 $M(x, y, z)$ 处的旋度.

4441.1. 求由极坐标 r 和 φ 表示的平面向量 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(r, \varphi)$ 的旋度的表达式.

4441.2. 写出 $\text{rot } \mathbf{a}(x, y, z)$ 在下列坐标系中的表达式:

(a) 圆柱坐标系; (b) 球坐标系.

4442.1. 求径向量 \mathbf{r} 的通量: (a) 通过圆锥体 $x^2 + y^2 \leq z^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的侧表面; (b) 通过此圆锥体的底面.

4442.2. 求向量 $\mathbf{a} = iyz + jxz + kxy$ 的通量: (a) 通过圆柱体 $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的侧表面; (b) 通过此圆柱的全表面.

4443. 求径向量 \mathbf{r} 通过曲面

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leq z \leq 1)$$

的通量.

4444. 求向量 $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ 通过正八分之一球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的通量.

4445.1. 求向量 $\mathbf{a} = yi + zj + xk$ 通过以平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a$ ($a > 0$) 为界的角锥的全表面的通量. 利用奥斯特罗格拉茨基公式验证结果.

4445.2. 求向量 $\mathbf{a} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ 通过球面 $x^2 + y^2 + z^2 = x$ 的通量.

4446. 证明: 向量 \mathbf{a} 通过由方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ($(u, v) \in \Omega$) 给出的曲面 S 的通量等于

$$\iint_S a_n dS = \iint_{\Omega} \left(\mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv,$$

式中 $a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$, \mathbf{n} 为曲面 S 的单位法向量.

4447. 求向量 $\mathbf{a} = m \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ (m 为常数) 通过围绕坐标原点的封闭曲面 S 的通量.

4448. 已知向量

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \text{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right),$$

其中 e_i 为常数, r_i 为点 M_i (点源) 距动点 $M(\mathbf{r})$ 的距离. 求此向量通过围绕点 M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的封闭曲面 S 的通量.

4449. 证明:

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u dx dy dz,$$

其中曲面 S 是区域 V 的边界.

4450. 在温度场 u 内, 在单位时间内通过面微元 dS 的热量等于:

$$dQ = -kn \cdot \text{grad } u dS,$$

其中 k 为热导率, n 为曲面 S 的单位法向量, 求在单位时间内物体 V 所吸收的热量. 研究温度上升的速度, 从而推出物体温度所满足的方程 (热传导方程).

4451. 处于运动状态的不可压缩流体充满区域 V . 假定在区域 V 内没有源和汇, 试推出连续性方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

式中 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ 为流体密度, \mathbf{v} 为速度向量, t 为时间.

提示: 研究流体通过包含在 V 中的任意区域 ω 的流量.

4452.1. 求向量 $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ 沿着一段螺旋线

$$\mathbf{r} = ia \cos t + ja \sin t + kbt \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的环量.

4452.2. 求场 $\mathbf{a} = \frac{1}{y}\mathbf{i} + \frac{1}{z}\mathbf{j} + \frac{1}{x}\mathbf{k}$ 沿 $M(1, 1, 1)$ 和 $N(2, 4, 8)$ 这两点之间的线段的环量.

4452.3. 求场 $\mathbf{a} = ie^{y-z} + je^{z-x} + ke^{x-y}$ 沿 $O(0, 0, 0)$ 和 $M(1, 3, 5)$ 这两点之间的线段的环量.

4453.1. 求场 $\mathbf{a} = (y+z)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ 沿球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 上连接 $M(3, 4, 0)$ 和 $N(0, 0, 5)$ 这两点的最短的一段大圆圆弧的环量.

4453.2. 求向量 $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$ (其中 f 为连续函数) 沿着弧 AB 的环量.

4454.1. 求向量 $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ (c 为常数) 的环量: (a) 沿着圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$; (b) 沿着圆周 $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$.

4454.2. 求向量 $\mathbf{a} = \text{grad} \left(\arctan \frac{y}{x} \right)$ 沿着围线 C 的环量 Γ :

(a) C 不围绕 Oz 轴; (b) C 围绕 Oz 轴.

4455. 已知向量场

$$\mathbf{a} = \frac{y}{\sqrt{x}}\mathbf{i} - \frac{x}{\sqrt{z}}\mathbf{j} + \sqrt{xyz}\mathbf{k}.$$

计算 $\text{rot } \mathbf{a}$ 在点 $M(1, 1, 1)$ 的表达式, 然后近似地求出向量场沿无穷小圆周

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \varepsilon^2, \\ (x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0 \end{cases}$$

(其中 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$) 的环量 Γ .

4456. 平面定常流由速度向量

$$\mathbf{w} = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$$

描述, 试确定: (1) 通过区域 S 的边界 (封闭围线) C 流出的流体的量 Q (流量); (2) 速度向量沿着围线 C 的环量 Γ . 若流体是不可压缩的且流场无旋, 则函数 u 和 v 满足怎样的方程?

4457.1. 证明: 场

$$\mathbf{a} = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$$

是有势场, 并求这个场的势.

4457.2. 确认场

$$\mathbf{a} = \frac{2}{(y+z)^{\frac{1}{2}}}\mathbf{i} - \frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{j} - \frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{k}$$

是有势场, 并求该场沿着正八分之一球面上连接点 $M(1, 1, 3)$ 和 $N(2, 4, 5)$ 的路径的环量.

4458. 求由位于坐标原点的质量 m 所产生的引力场 $\mathbf{a} = -\frac{m}{r^3}\mathbf{r}$ 的势.

4459. 设质置 m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的质点位于点 M_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 求此质点系所产生的引力场的势.

4460. 证明: 场 $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$ (其中 $f(r)$ 是单值连续函数) 是有势场. 求这个场的势.

4461. 证明公式:

$$\operatorname{grad}_P \left\{ \iiint_V \rho(Q) \frac{dV}{r} \right\} = - \iint_S \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r} + \iiint_V \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r},$$

其中 S 为区域 V 的边界曲面, \mathbf{n} 为曲面 S 的外法向量, r 为点 $P(x, y, z)$ 与点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 之间的距离.

4462. 证明: 若 $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$, 其中

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

则

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \rho(x, y, z)$$

(假设相应积分有意义).

答 案

第一章

16. 0; 1. 17. $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$. 22. $-1.01 < x < -0.99$. 23. $x \leq -8; x \geq 12$. 24. $x < -\frac{1}{2}$.
25. $0 < x < \frac{2}{3}$. 26. $|x| \leq 6$. 27. $x > -\frac{1}{2}$. 28. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. 29. $\frac{5-\sqrt{30}}{10} < x < \frac{5-\sqrt{20}}{10}$;
 $\frac{5+\sqrt{20}}{10} < x < \frac{5+\sqrt{30}}{10}$. 31. 第二个. 32. 两位. 33. 不超过 0.41%. 34. $9.9102 \text{ cm}^2 \leq S \leq 10.0902 \text{ cm}^2$; $\Delta \leq 0.0902 \text{ cm}^2$; $\delta \leq 0.91\%$. 35. $3.93 \text{ g/cm}^3 \pm 0.27 \text{ g/cm}^3$; $\delta \leq 7.3\%$.
36. $\delta \leq 3.05\%$. 37. $172.480 \text{ m}^3 \leq V \leq 213.642 \text{ m}^3$; $V = 192.660 \text{ m}^3 \pm 20.982 \text{ m}^3$; $\delta \approx 12\%$.
38. $\Delta \leq 0.17 \text{ mm}$. 39. $\Delta < 0.0005 \text{ m}$. 42. (a) $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$; (b) $N \geq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$; (c) $N \geq 1 + \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$;
(d) $N \geq \frac{\lg \varepsilon}{\lg 0.999} \approx 2330 \lg \frac{1}{\varepsilon}$. 43. (a) $N \geq E$; (b) $N \geq \left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$; (c) $N \geq 10^{10}$. 46. 0.
47. 0. 48. 0. 49. $\frac{1}{3}$. 50. $\frac{1-b}{1-a}$. 51. $\frac{1}{2}$. 52. 不存在. 53. $\frac{1}{3}$. 54. $\frac{4}{3}$. 55. 3. 56. 1.
57. 2. 67. (a) 第二个; (b) 第一个; (c) 第二个. 72. $e = 2.71828 \dots$. 92. 若 $a \neq 0$, 等于 1; 若 $a = 0$ 属于 $[-1, 1]$, 不存在. 96. $x_3 = 1\frac{1}{8}$. 97. $x_{100} = \frac{1}{20}$. 98. $x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!} \approx 2.49 \cdot 10^{452}$.
99. $x_4 = x_5 = -120$. 100. $x_{10} = 20$. 101. (a) 0; 1; 1; 1; (b) $-3\frac{1}{2}; 5; -2; 2$.
102. $-1; 1\frac{1}{2}; 0; 1$. 103. 0; 2; 0; 2. 104. $-4; 6; -4; 6$. 105. $-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}; 1$. 106. $-\infty$;
 $+\infty; -\infty; +\infty$. 107. $-\infty; -1; -\infty; -\infty$. 108. 0; $+\infty$; 0; $+\infty$. 109. $-\infty; +\infty; -\infty$;
 $+\infty$. 110. $-5; 1.25; 0; 0$. 111. $-\frac{1}{2}; 1$. 112. $-\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right); e + 1$. 113. 0; 1. 114. 1; 2.
115. 0; 1. 116. 0; 1. 117. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; 0$. 118. 区间 $(0, 1]$ 上的一切实数. 119. 1; 5.
120. $a; b$. 127. (a) 发散; (b) 可为收敛, 可为发散. 128. (a) 不能; (b) 不能. 129. 不能.
130. 不能. 144. (a) 0; (b) 0. 147. $\ln 2$. 148. $\frac{1}{3}(a+2b)$. 151. $-\infty < x < +\infty, x \neq -1$.
152. $-\infty < x \leq -\sqrt{3}$ 和 $0 \leq x \leq \sqrt{3}$. 153. $-1 \leq x < 1$. 154. (a) $|x| > 2$; (b) $x > 2$.
155. $4k^2\pi^2 \leq x \leq (2k+1)^2\pi^2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). 156. $|x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 和 $\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)} \leq |x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}$ ($k = 1, 2, \dots$).
157. $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ 和 $-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).
158. $x > 0, x \neq n$ ($n = 1, 2, \dots$). 159. $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$. 160. $|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
161. $10^{(2k-\frac{1}{2})\pi} < x < 10^{(2k+\frac{1}{2})\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 162. $x = -1, -2, -3, \dots$ 和 $x \geq 0$.
163. $x < 0, x \neq -n$ ($n = 1, 2, \dots$). 164. $1 < x \leq 2$. 165. (a) $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$; (b) $x > 4$;
(c) $k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); (d) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

166. $-1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1\frac{1}{2}$. 167. $2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{3}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); $-\infty < y \leq \lg 3$. 168. $-\infty < x < +\infty; 0 \leq y \leq \pi$. 169. $1 \leq x \leq 100; -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. 170. $x = \frac{p}{2q+1}, p$ 和 q 为整数; $y = \pm 1$. 171. $P = 2b + 2(1 - \frac{b}{h})x$ ($0 < x < h$); $S = bx(1 - \frac{x}{h})$ ($0 < x < h$). 172. $a = \sqrt{100 - 96 \cos x}$ ($0 < x < \pi$); $S = 24 \sin x$ ($0 < x < \pi$). 173. 若 $0 \leq x \leq \frac{a-b}{2}$, $S = \frac{h}{a-b}x^2$; 若 $\frac{a-b}{2} < x < \frac{a+b}{2}$, $S = h(x - \frac{a-b}{4})$; 若 $\frac{a+b}{2} \leq x \leq a$, $S = h[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b}]$. 174. 若 $-\infty < x \leq 0$, $m(x) = 0$; 若 $0 < x \leq 1$, $m(x) = 2x$; 若 $1 < x \leq 2$, $m(x) = 2$; 若 $2 < x \leq 3$, $m(x) = 3$; 若 $3 < x < +\infty$, $m(x) = 4$. 178. $E_y = \{0 \leq y \leq 4\}$. 179. $E_y = \{1 < y < 3\}$. 180. $E_y = \{0 < y < 1\}$. 181. $E_y = \{1 \leq |y| < +\infty\}$. 182. $E_y = \{1 \leq y \leq 2\}$. 183. 当 $a < b$ 时 $a < y < b$, 当 $a > b$ 时 $b < y < a$. 184. $1 < y < +\infty$. 185. $-\infty < y < 0$ 和 $1 < y < +\infty$. 186. $0 < y \leq \frac{1}{2}$. 187. $-\infty < y < +\infty$. 188. $0 < y < \frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2} \leq y < 2$. 189. 0; 0; 0; 0; 24. 190. 0; -6; 4. 191. 1; 1; 1; 2. 192. -1; 0; 1; 2; 4. 193. $1, \frac{1+x}{1-x}, \frac{-x}{2+x}, \frac{2}{1+x}, \frac{x-1}{x+1}, \frac{1+x}{1-x}$. 194. (a) 若 $x = -1, x = 0$ 和 $x = 1$, $f(x) = 0$; 若 $-\infty < x < -1$ 和 $0 < x < 1$, $f(x) > 0$; 若 $-1 < x < 0$ 和 $1 < x < +\infty$, $f(x) < 0$; (b) 若 $x = \pm \frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, \dots$), $f(x) = 0$; 若 $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ 和 $-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $f(x) > 0$; 若 $\frac{1}{2k+2} < x < \frac{1}{2k+1}$ 和 $-\frac{1}{2k} < x < -\frac{1}{2k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $f(x) < 0$; (c) 若 $x \leq 0$ 和 $x = 1$, $f(x) = 0$; 若 $0 < x < 1$, $f(x) > 0$; 若 $1 < x < +\infty$, $f(x) < 0$. 195. (a) a ; (b) $2x + h$; (c) $a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$. 197. $f(x) = \frac{7}{3}x - 2; f(1) = \frac{1}{3}; f(2) = 2\frac{2}{3}$. 198. $f(x) = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1; f(-1) = -\frac{2}{3}; f(0.5) = 2\frac{17}{24}$. 199. $f(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{6}x + 2$. 200. $f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x$. 203. (a) $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $x \neq \frac{4k+1}{2}\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); (b) $1 < x < e$; (c) $x > 1, x \neq k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). 205. (a) $z = x + y$; (b) $z = \frac{xy}{x+y}$; (c) $z = \frac{x+y}{1-xy}$; (d) $z = \frac{x+y}{1+xy}$. 206. $\varphi(\varphi(x)) = x^4; \psi(\psi(x)) = 2^{2x}; \varphi(\psi(x)) = 2^{2x}; \psi(\varphi(x)) = 2^{x^2}$. 207. $\varphi(\varphi(x)) = \operatorname{sgn} x; \psi(\psi(x)) = x(x \neq 0); \varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = \operatorname{sgn} x(x \neq 0)$. 208. $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x); \psi(\varphi(x)) = \psi(x); \psi(\psi(x)) = \varphi(\psi(x)) = 0$. 209. $-\frac{1-x}{x}; x$ ($x \neq 0, x \neq 1$). 210. $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. 211. $x^2 - 5x + 6$. 212. $x^2 - 2(|x| \geq 2\frac{1}{2})$. 213.1. $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. 213.2. $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$. 221. (a) 当 $a > 0$ 递增, 当 $a < 0$ 递减; (b) 当 $a > 0$ 在区间 $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ 内递减, 在区间 $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 内递增; (c) 递增; (d) 当 $ad - bc > 0$ 在区间 $(-\infty, -\frac{d}{c})$ 和区间 $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ 上递增; (e) 当 $a > 1$ 递增, 当 $0 < a < 1$ 递减. 222. 若对数之底大于 1, 则可能. 224. $\frac{y-3}{2}$ ($-\infty < y < +\infty$). 225. (a) $-\sqrt{y}$ ($0 \leq y < +\infty$); (b) \sqrt{y} ($0 \leq y + \infty$). 226. $\frac{1-y}{1+y}$ ($y \neq -1$). 227. (a) $-\sqrt{1-y^2}$ ($0 \leq y \leq 1$); (b) $-\sqrt{1-y^2}$ ($0 \leq y \leq 1$). 228. $\operatorname{arsinh} y = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$ ($-\infty < y < +\infty$). 229. $\operatorname{artanh} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$ ($-1 < y < 1$). 230. 若 $-\infty < y < 1$, $x = y$; 若 $1 \leq y \leq 16$, $x = \sqrt{y}$; 若 $16 < y < +\infty$, $x = \log_2 y$. 231. (a) 奇函数; (b) 偶函数; (c) 偶函数; (d) 奇函数; (e) 奇函数. 233. (a) 周期函数, $T = \frac{2\pi}{\lambda}$; (b) 周期函数, $T = 2\pi$; (c) 周期函数, $T = 6\pi$; (d) 周期函数, $T = \pi$; (e) 非周期函数; (f) 周期函数, $T = \pi$; (g) 非周期函数; (h) 非周期函数. 241. $t = 1\frac{2}{3}\text{s}, x = -3\frac{1}{3}\text{m}$. 243. $x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$. 244. $y = x - \frac{x^2}{36000}$; 9 km; 36 km. 251. $x_0 = -\frac{d}{c}; y_0 = \frac{a}{c}$. 252. $p = \frac{12}{V}$ ($V > 0$). 263. $k = \frac{a}{a_1}, m = \frac{a_1 b - ab_1}{a_1^2}; n = \frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1^2} (a_1 b - ab_1), x_0 = -\frac{b_1}{a_1}$. 264. $F = \frac{10}{x^2}$. 287. $A = \sqrt{a^2 + b^2}; \sin x_0 = -\frac{a}{A}, \cos x_0 = \frac{b}{A}$. 356. 若 $|x - \pi k| \leq \frac{\pi}{6}, y = 2 \sin x$; 若 $\frac{\pi}{6} < |x - \pi k| < \frac{5\pi}{6}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $y = (-1)^k$.

357. (a) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$; (b) 和 (c) 若 $x \geq 0$, $y = x^2$; 若 $x < 0$, $y = 0$; (d) 若 $x < 0$, $y = x$; 若 $x \geq 0$, $y = x^4$. 358. (a) $y = 1$; (b) 若 $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$, $y = 1$; 若 $|x| < 1$ 或 $|x| > \sqrt{3}$, $y = 0$; (c) 若 $|x| \leq 1$, $y = 1$; 若 $|x| > 1$, $y = 2$; (d) 若 $|x| > 2$, $y = -2$; 若 $|x| \leq 2$, $y = 2 - (2 - x^2)^2$. 359. 当 $x < 0$ 时有: (a) (1) $f(x) = 1 + x$, (2) $f(x) = -(1 + x)$; (b) (1) $f(x) = -2x - x^2$, (2) $f(x) = 2x + x^2$; (c) (1) $f(x) = \sqrt{-x}$, (2) $f(x) = -\sqrt{-x}$; (d) (1) $f(x) = -\sin x$, (2) $f(x) = \sin x$; (e) (1) $f(x) = e^{-x}$, (2) $f(x) = -e^{-x}$; (f) (1) $f(x) = \ln(-x)$, (2) $f(x) = -\ln(-x)$. 360. (a) $x = -\frac{b}{2a}$; (b) $x = \frac{1}{2}$; (c) $x = \frac{b-a}{2}$; (d) $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 361. (a) $(x_0, ax_0 + b)$, 其中 x_0 为任意的; (b) $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$; (c) (x_0, y_0) , 其中 $x_0 = -\frac{b}{3a}$, $y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$; (d) $(2, 0)$; (e) $(2, 1)$. 372. 根: $-1.88; 0.35; 1.53$. 373. $2.11; -0.25; -1.86$. 374. $0.25; 1.49$. 375. 0.64 . 376. $1.37; 10$. 377. -0.54 . 378. $0; 4.49$. 379. $x_1 = -0.57, y_1 = -1.26; x_2 = -0.42, y_2 = 1.19; x_3 = 0.45, y_3 = 0.74; x_4 = 0.54, y_4 = -0.68$. 380. $x_1 = -1.30, y_1 = 9.92; x_2 = 2.30, y_2 = 9.73; x_3 = -0.62, y_3 = -9.98; x_4 = 1.62, y_4 = -9.87$. 382. (a) 一般地说, 不是; (b) 是. 385. 上方有界, 下方无界. 387. 分别为 $f(a)$ 和 $f(b)$. 388. $0; 25$. 389. $0; 1$. 390. $0; 1$. 391. $2; +\infty$. 392. $-1; 1$. 393. $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$. 394. $\frac{1}{2}; 4$. 395. (a) 0.1 ; (b) 0.2 . 396. $0; 1$. 397. (a) 8 ; (b) 0.8 ; (c) 0.08 ; (d) 0.008 . 398. (a) π ; (b) π ; (c) π ; (d) π . 411. (a) 1 ; (b) $\frac{2}{3}$; (c) $\frac{1}{2}$. 412. 6 . 413. 10 . 414. $\frac{1}{2}nm(n-m)$. 415. 5^{-5} . 416. $(\frac{3}{2})^{30}$. 417. $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$. 418. $-\frac{1}{2}$. 419. $\frac{1}{2}$. 420. 1 . 421. $\frac{1}{4}$. 422. $\frac{1}{3}$. 423. $(\frac{3}{2})^{10}$. 424. (a) $\frac{n(n+1)}{2}$; (b) $2\frac{1}{24}$. 425. $\frac{m}{n}$. 426. $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$. 427. $\frac{n(n+1)}{2}$. 428. $\frac{m-n}{2}$. 429. $x + \frac{a}{2}$. 430. $x^2 + ax + \frac{a^2}{3}$. 431. 1 . 432. $\frac{1}{2}$. 433. 3 . 434. $\frac{ab}{3}$. 435. 1 . 436. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 437. $\frac{4}{3}$. 438. -2 . 439. $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. 440. $-\frac{1}{16}$. 441. $\frac{1}{144}$. 442. $\frac{1}{4}$. 443. $\frac{12}{5}$. 444. $\frac{1}{n}$. 445. -2 . 446. $\frac{1}{4}$. 447. $\frac{2}{27}$. 448. $\frac{3}{2}$. 449. $4\frac{4}{27}$. 450. $\frac{7}{36}$. 451. $-\frac{1}{2}$. 452. $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$. 453. $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$. 455.1. $\frac{n}{m}$. 455.2. $\frac{1}{2}$. 456. $\frac{1}{n!}$. 457. $\frac{1}{2}(a+b)$. 458. $\frac{1}{2}$. 459. $-\frac{1}{4}$. 460. 1 . 461. $\frac{2}{3}$. 462. 2 . 463. $\frac{4}{3}$. 464. $-\frac{1}{4}$. 465. $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$. 466. 2^n . 467. $2n$. 468. $\lim_{a \rightarrow 0} x_1 = \infty, \lim_{a \rightarrow 0} x_2 = -\frac{c}{b}$. 469. $a = 1, b = -1$. 470. $a_i = \pm 1; b_i = \mp \frac{1}{2}$ ($i = 1, 2$). 471. 5 . 472. 0 . 473. $(-1)^{m-n} \frac{m}{n}$. 474. (a) $\frac{1}{2}$; (b) 1 ; (c) $\frac{1}{3}$. 475. $\frac{1}{2}$. 476. 2 . 477. 4 . 478. $\frac{1}{p}$. 479. $\frac{1}{2}$. 480. $\frac{2}{\pi}$. 482. $\cos a$. 483. $-\sin a$. 484. $\sec^2 a$ ($a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots$). 485. $-\frac{1}{\sin^2 a}$ ($a \neq k\pi$, 其中 k 是整数). 486. $\frac{\sin a}{\cos^2 a}$ ($a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, 其中 k 是整数). 487. $-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$ ($a \neq k\pi$, 其中 k 是整数). 488. $-\sin a$. 489. $-\cos a$. 490. $\frac{2\sin a}{\cos^3 a}$ ($a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, 其中 k 是整数). 491. $\frac{2\cos a}{\sin^3 a}$ ($a \neq k\pi$, 其中 k 是整数). 492. $\frac{3}{2}\sin 2a$. 493. -3 . 494. 14 . 495. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 496. -24 . 497. $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$ ($a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, 其中 k 是整数). 498. $\frac{3}{4}$. 499. $\frac{1}{4}$. 500. $\frac{4}{3}$. 501. $-\frac{1}{12}$. 502. $\sqrt{2}$. 503. 0 . 504. 3 . 505. 0 . 506. (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; (c) 1 . 507. 0 . 508. 0 . 509. 0 . 510. 0 . 511. 1 . 512. e^3 . 513. 1 . 514. e^{-2} . 515. e^{2a} . 516. 若 $a_1 < a_2$, 0 ; 若 $a_1 > a_2$, $+\infty$; 若 $a_1 = a_2$, $e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}$. 517. e . 518. e^{-1} . 519. (a) 1 ; (b) \sqrt{e} . 520. $e^{\cot a}$ ($a \neq k\pi$, 其中 k 为整数). 521. $e^{\frac{3}{2}}$. 522. e^{-1} . 523. 1 . 524. e^{-2} . 525. e . 526. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 527. e^{x+1} . 528. $e^{-\frac{x^2}{2}}$. 529. 1 . 530. 1 . 531. $\frac{1}{a}$. 532. 0 . 533. $\frac{1}{5}$. 534. -2 . 535. $\frac{3}{2}$. 536. $\frac{3}{2}$. 537. $-\frac{\lg e}{x^2}$. 538. $\frac{2a}{b}$. 539. $(\frac{a}{b})^2$. 540. (a) 0 ; (b) n . 541. $\ln a$. 542. $a^a \ln \frac{a}{e}$. 543. $a^a \ln ea$. 544. e^2 . 545. (a) $\frac{2}{3}$; (b) $e^{\beta^2 - \alpha^2}$; (c) $\frac{\alpha}{\beta}$; (d) -2 . 546. e^2 . 547. 1 . 548. $\frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha - \beta}$. 549. $a^b \ln a$. 550. $a^x \ln^2 a$. 551. $e^{-(a+b)}$. 552. $\ln x$.

553. $\ln x$. 554. $\sqrt[3]{b}$. 555. \sqrt{ab} . 556. $\sqrt[3]{abc}$. 557. $(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$. 558. $\frac{1}{\sqrt{ab}}$. 559. $(\ln \frac{a}{b})^{-1}$. 560. $a^a \ln a$. 561. (a) 0; (b) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$. 562. $\ln 8$. 563. $-\ln 2$. 566. (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{2}$. 567. 1. 568. 0. 569. $\ln a^2$. 570. $\frac{1}{8}$. 571. $\frac{1}{2}$. 572. -2 . 573. e^2 . 574. $e^{\frac{2}{\pi}}$. 575. $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$. 576. (a) 1; (b) $\frac{1}{2}$; (c) 1. 577. (a) $\frac{2}{9}$; (b) $2 \sinh \frac{1}{2}$. 578. (a) $\cosh a$; (b) $\sinh a$; (c) -1 . 579. (a) $\ln 2$; (b) 1. 580. e^{π^2} . 581. $-\frac{\pi}{2}$. 582. $\frac{\pi}{3}$. 583. $-\frac{\pi}{2}$. 584. $\frac{3\pi}{4}$. 585. $\frac{1}{1+x^2}$. 586. 2. 587. $\frac{e^x}{x^2+1}$. 588. $\frac{1}{2}$. 589. 1. 590. $e^{\frac{2}{\pi}}$. 591. (a) 0; (b) 0. 592. (a) $+\infty$; (b) $\frac{1}{2}$. 593. (a) -1 ; (b) 1. 594. $\ln \frac{b^2}{a^2}$. 595. (a) $\frac{\pi}{2}$; (b) $-\frac{\pi}{2}$. 596. (a) 1; (b) 0. 597. (a) 0; (b) 1. 600. 2; 1; 2. 601. 0; $(-1)^{n-1}$; $(-1)^n$. 602. 0. 603. 1. 604. 0. 605. 1. 606. 0. 613. (b) 若 $|x| < 1, y = 1$; 若 $|x| = 1, y = 0$. 614. (b) 若 $0 \leq x < 1, y = 0$; 若 $x = 1, y = \frac{1}{2}$; 若 $1 < x < +\infty, y = 1$. 615. 若 $0 < |x| < 1, y = -1$; 若 $|x| = 1, y = 0$; 若 $|x| > 1, y = 1$. 616. $y = |x|$. 617. 若 $0 \leq x \leq 1, y = 1$; 若 $x > 1, y = x$. 618. 若 $0 \leq x \leq 1, y = 1$; 若 $1 < x < 2, y = x$; 若 $x \geq 2, y = \frac{x^2}{2}$. 619. 若 $0 \leq x < 2, y = 0$; 若 $x = 2, y = 2\sqrt{2}$; 若 $x > 2, y = x^2$. 620. (b) 若 $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, y = 0$; 若 $x = (2k+1)\frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), y = 1$. 621. 若 $0 \leq x \leq 2, y = \ln 2$; 若 $x > 2, y = \ln x$. 622. 若 $-1 < x \leq 1, y = 0$; 若 $x > 1, y = \frac{\pi}{2}(x-1)$. 623. 若 $x \leq -1, y = 1$; 若 $x > -1, y = e^{x+1}$. 624. (a) 若 $x < 0, y = x$; 若 $x = 0, y = \frac{1}{2}$; 若 $x > 0, y = 1$; (b) $\frac{1}{x}$. 625. (a) 若 $0 \leq x < 1$ 和 $4k-1 < x < 4k+1, y = \sqrt{x}$; 若 $4k-3 < x < 4k-2$ 和 $4k-2 < x < 4k-1, y = x$; 若 $x = 2k-1 (k = 1, 2, 3, \dots), y = \frac{1}{2}(\sqrt{x} + x)$; (b) 若 x 是有理数, $y = 0$; 若 x 是无理数, $y = x$; (c) 正方形的闭曲线 $\max\{|x|, |y|\} = 1$. 627. (a) $x = 1, x = -2, y = x - 1$; (b) 若 $x \rightarrow \infty, y = x + \frac{1}{2}$, 若 $x \rightarrow -\infty, y = -x - \frac{1}{2}$; (c) $y = \frac{1}{3} - x$; (d) 若 $x \rightarrow +\infty, y = x$, 若 $x \rightarrow -\infty, y = 0$; (e) 若 $x \rightarrow -\infty, y = 0$, 若 $x \rightarrow +\infty, y = x$; (f) $y = x + \frac{\pi}{2}$. 628. 0. 629. $\frac{1}{1-x}$. 630. $\frac{\sin x}{x}$. 632. $\frac{1}{6}$. 633. $\frac{a}{2}$. 634. $\frac{1}{2} \ln a$. 635. \sqrt{e} . 636. $e^{-\frac{a^2}{6}}$. 637.1. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a})$. 637.2. $\frac{2}{3}$. 637.3. $\frac{b}{1-a}$. 637.4. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 638. (a) $\sqrt{1+x} - 1$; (b) $1 - \sqrt{1-x}$. 641. (a) 2; (b) $+\infty$; (c) 0; (d) 1; (e) 2; (f) 1; (g) $2 \sinh 1$. 643. (a) $l = -1, L = 2$; (b) $l = -2, L = 2$; (c) $l = 2, L = e$. 644. (a) $l = -1, L = 1$; (b) $l = 0, L = +\infty$; (c) $l = \frac{1}{2}, L = 2$; (d) $l = 0, L = +\infty$. 645. (a) 一阶; (b) 二阶; (c) 一阶; (d) 三阶; (e) 三阶; (f) 三阶. 653. (a) $2x$; (b) x ; (c) $\frac{x^2}{2}$; (d) $\frac{x^3}{2}$. 655. (a) $3(x-1)^2$; (b) $\frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$; (c) $x-1$; (d) $e(x-1)$; (e) $x-1$. 656. (a) x^2 ; (b) $2x^2$; (c) $x^{\frac{2}{3}}$; (d) $x^{\frac{1}{8}}$. 657. (a) $(\frac{1}{x})^3$; (b) $\frac{1}{2}(\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}$; (c) $-\frac{1}{4}(\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}}$; (d) $(\frac{1}{x})^2$. 658. (a) $\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1})$; (b) $\sqrt{2}(\frac{1}{1-x})^{\frac{1}{2}}$; (c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(\frac{1}{1-x})^{\frac{1}{3}}$; (d) $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1-x}$; (e) $\frac{1}{x-1}$. 663. (a) $9.95 < x < 10.05$; (b) $9.995 < x < 10.005$; (c) $9.9995 < x < 10.0005$; (d) $\sqrt{100-\varepsilon} < x < \sqrt{100+\varepsilon}$. 664. $\Delta < \frac{\varepsilon}{27}$; (a) $\Delta < 3.7 \text{ mm}$; (b) $\Delta < 0.37 \text{ mm}$; (c) $\Delta < 0.037 \text{ mm}$. 665. $100[1 - 10^{-(n+1)}]^2 < x < 100[1 + 10^{-(n+1)}]^2$; (a) $81 < x < 121$; (b) $98.01 < x < 102.01$; (c) $99.8001 < x < 100.2001$; (d) $99.980001 < x < 100.020001$. 666. $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{11}, 1)$. 667. $\delta = \frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0} \approx 0.001 x_0^2$; (a) $\delta \approx 10^{-5}$; (b) $\delta \approx 10^{-7}$; (c) $\delta \approx 10^{-9}$. 不能. 669. (a) 不能; (b) 可以. 671. 不能; 在点 x_0 有界. 672. 不能. 若函数 $f(x)$ 定义于有限区间 (a, b) , 则这些不等式总是成立; 若至少有一个 a 或 b 为 ∞ , 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty$. 673. 不能. 反函数的单值性和连续性. 675. 连续. 676. 若 $A = 4$, 连续, 若 $A \neq 4$, 当 $x = 2$ 时不连续. 677. 当 $x = -1$ 时不连续. 678. (a) 连续; (b) 当 $x = 0$ 时不连续. 679. 当 $x = 0$ 时不连续.

680. 连续. 681. 连续. 682. 当 $x = 1$ 时不连续. 683. 当 $a = 0$ 时连续, 当 $a \neq 0$ 时不连续. 684. $x = 0$ 时不连续. 685. $x = k$ (k 为整数) 时不连续. 686. $x = k^2$ ($k = 1, 2, \dots$) 时不连续. 687. $x = -1$ 是无穷型间断点. 688. $x = -1$ 是可去间断点. 689. $x = -2$ 和 $x = 1$ 是无穷型间断点. 690. $x = 0$ 和 $x = 1$ 是可去间断点; $x = -1$ 是无穷型间断点. 691. $x = 0$ 是可去间断点; $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 是无穷型间断点. 692. $x = \pm 2$ 是可去间断点. 693. $x = 0$ 是第二类间断点. 694. $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 是第一类间断点; $x = 0$ 是第二类间断点. 695. $x = 0$ 和 $x = \frac{2}{2k+1}$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) 是可去间断点. 696. $x = 0$ 是第一类间断点. 697. $x = 0$ 是可去间断点. 698. $x = 0$ 是第二类间断点. 699. $x = 0$ 是可去间断点; $x = 1$ 是无穷型间断点. 700. $x = 0$ 是无穷型间断点. $x = 1$ 是第二类间断点. 701. $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是第一类间断点. 702. $x = k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是第一类间断点. 703. $x = k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 是第一类间断点. 704. 函数连续. 705. $x = \pm\sqrt{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 是第一类间断点. 706. $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 是第一类间断点; $x = 0$ 是无穷型间断点. 707. $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 是第一类间断点; $x = 0$ 是可去间断点. 708. $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是第一类间断点; $x = 0$ 是第二类间断点. 709. $x = \pm\frac{1}{k}$ 和 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k = 1, 2, \dots$) 是第一类间断点; $x = 0$ 是第二类间断点. 710. $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 是无穷型间断点; $x = 0$ 是第二类间断点. 711. $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是无穷型间断点; $x = 0$ 是第二类间断点. 712. $x = \pm\sqrt{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 是第一类间断点. 713. $x = 0, x = 1$ 和 $x = 2$ 是第一类间断点. 714. $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是无穷型间断点. 715. $x = \pm\sqrt{k\pi}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 是无穷型间断点. 716. $x = -1$ 和 $x = 3$ 是无穷型间断点. 717. $x = 0$ 是第二类间断点. 718. $x = 0$ 可去间断点. 719. $x = \pm 1$ 是第一类间断点. 720. 若 $0 \leq x < 1, y = 1$; 若 $x = 1, y = \frac{1}{2}$; 若 $x > 1, y = 0$; $x = 1$ 是第一类间断点. 721. $y = \operatorname{sgn} x; x = 0$ 是第一类间断点. 722. 若 $|x| \leq 1, y = 1$; 若 $|x| > 1, y = x^2$. 函数连续. 723. 若 $x \neq k\pi$ 时 $y = 0$; 若 $x = k\pi, y = 1; x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是第一类间断点. 724. 若 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{6}, y = x$; 若 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, y = \frac{x}{2}$; 若 $\frac{\pi}{6} < |x - k\pi| < \frac{5\pi}{6}, y = 0; x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是第一类间断点. 725. 若 $k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}x$; 若 $k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi, y = -\frac{\pi}{2}x$; 若 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, y = 0; x = \frac{k\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) 是第一类间断点. 726. 当 $x \leq 0$ 时 $y = x$; 当 $x > 0$ 时 $y = x^2$. 函数连续. 727. 当 $x \leq 0$ 时 $y = 0$; 当 $x > 0$ 时 $y = x$. 函数连续. 728. 当 $x < 0$ 时 $y = -(1+x)$; 当 $x = 0$ 时 $y = 0$; 当 $x > 0$ 时 $y = 1+x$; $x = 0$ 是第一类间断点. 729. 不是. 730. $a = 1$. 731. (a) 函数连续; (b) $x = -1$ 是第一类间断点; (c) $x = -1$ 是第一类间断点; (d) $x = k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是无穷型间断点; (e) $x \neq k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是第二类间断点. 732. 当 $-\infty < x < 0$ 时 $d = -x$; 当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $d = 0$; 当 $1 < x \leq \frac{3}{2}$ 时 $d = x - 1$; 当 $\frac{3}{2} < x < 2$ 时 $d = 2 - x$; 当 $2 \leq x \leq 3$ 时 $d = 0$; 当 $3 < x < +\infty$ 时 $d = x - 3$. 函数连续. 733. 当 $0 \leq y \leq 1$ 时 $S = 3y - \frac{y^2}{2}$; 当 $1 < y \leq 2$ 时 $S = \frac{1}{2} + 2y$; 当 $2 < y \leq 3$ 时 $S = \frac{5}{2} + y$; 当 $3 < y < \infty$ 时 $S = \frac{11}{2}$; 函数连续; 当 $0 \leq y \leq 1$ 时 $b = 3 - y$; 当 $1 < y \leq 2$ 时 $b = 2$; 当 $2 < y \leq 3$ 时 $b = 1$; 当 $3 < y < +\infty$ 时 $b = 0$; $x = 2$ 和 $x = 3$ 是第一类间断点. 735. 当 $x \neq 0$ 时不连续; 当 $x = 0$ 时连续. 737. 对于自变量的一切负值和正有理值不连续. 738. $f(0) = 0.5$. 740. (a) 1.5; (b) 2; (c) 0; (d) e; (e) 0; (f) 1; (g) 0. 741. (a) 是的; (b) 不是. 742. (a) 不是; (b) 不是. 743. 不是. 例: 若 x 为有理数, $f(x) = 1$; 若为无理数, $f(x) = -1$. 744. (a) 当 $x = 0$,

$f(g(x))$ 连续, $g(f(x))$ 不连续; (b) 当 $x = -1, x = 0$ 和 $x = 1$, $f(g(x))$ 不连续, $g(f(x)) = 0$ 连续; (c) $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 均连续. 745. $f(\varphi(x)) \equiv x$. 759. $x = \frac{-dy+b}{cy-a}; a+d=0$. 760. $x = y - k$, 其中 $2k \leq y < 2k+1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 764. $f(f(x)) \equiv x$. 767. $x = -\sqrt{y}$ ($0 \leq y < +\infty$); $x = \sqrt{y}$ ($0 \leq y < +\infty$). 768. $x = 1 - \sqrt{1-y}$ ($-\infty < y \leq 1$); $x = 1 + \sqrt{1-y}$ ($-\infty < y \leq 1$). 769. $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ($-1 \leq y \leq 1$), $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ ($0 < |y| \leq 1$). 770. $x = (-1)^k \arcsin y + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ($-1 \leq y \leq 1$). 771. $x = 2k\pi \pm \arccos y$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ($-1 \leq y \leq 1$). 772. $x = \arctan y + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ($-\infty < y < +\infty$). 776. 若 $xy < 1$, $\varepsilon = 0$; 若 $xy > 1$, $\varepsilon = \operatorname{sgn} x$. 779. (a) 若 $-1 \leq x \leq 0$, $y = -\frac{\pi}{2}$, 若 $0 \leq x \leq 1$ 时 $y = 2 \arcsin x - \frac{\pi}{2}$; (b) 若 $-1 \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -(\pi + 4 \arcsin x)$; 若 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时 $y = 0$; 若 $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$, $y = \pi - 4 \arcsin x$. 780. $y = \frac{\pi}{2} - x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$). 781. $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ($1 \leq x < +\infty$); $y = -\sqrt{x^2 - 1}$ ($1 \leq x < +\infty$). 782. 对于使 $\varphi(t) = x$ 的一切 t , 函数 $\psi(t)$ 有同一个值, 其中 x 为函数 $\varphi(t)$ 的任一值. 783. 若 $\alpha < \tau < \beta$, $\chi(\tau)$ 的值域应为区间 (a, b) . 784. 对于使 $\varphi(x) = u$ 的一切正值 x , 函数 $\psi(x)$ 应该有同一个值, 其中 u 为区间 (A, B) 上的任一数. 785. $|\delta| \leq \frac{\varepsilon}{20}$ cm. (a) 0.5 mm; (b) 0.005 mm; (c) 0.000 05 mm. 786. (a) $\delta < \frac{1}{4}$; (b) $\delta < 2.5 \cdot 10^{-4}$; (c) $\delta < \frac{5}{2} \cdot 10^{-7}$; (d) $\delta < \frac{\varepsilon^3}{4}$ ($\varepsilon \leq 1$). 793. (a) 是的; (b) 不是. 794. 一致连续. 795. 非一致连续. 796. 一致连续. 797. 非一致连续. 798. 一致连续. 799. 一致连续. 800. 非一致连续. 802. (a) $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$; (b) $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$; (c) $\delta = 0.01\varepsilon$; (d) $\delta = \varepsilon^2$ ($\varepsilon \leq 1$); (e) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; (f) $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right)$. 803. $n \geq 1\,800\,000$. 808. (a) $\omega_f(\delta) \leq 3\delta$; (b) $\omega_f(\delta) \leq \sqrt{\delta}$; $\omega_f(\delta) \leq \frac{\delta}{\sqrt{2a}}$; (c) $\omega_f(\delta) \leq \delta\sqrt{\delta}$. 818. $f(x) = \cos ax$ 或者 $f(x) = \cosh ax$. 819. $f(x) = \cos ax; g(x) = \pm \cos ax$ (a 为常数).

第二章

821. $\Delta x = 999; \Delta y = 3$. 822. $\Delta x = -0.009; \Delta y = 990\,000$. 823. (a) $\Delta y = a\Delta x$; (b) $\Delta y = (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2$; (c) $\Delta y = a^x (a^{\Delta x} - 1)$. 825. (a) 5; (b) 4.1; (c) 4.01; (d) $4 + \Delta x$; 4. 826. $3 + 3h + h^2$; (a) 3.31; $\sqrt{3}$; (b) 3.030 1; (c) 3.003 001; 3. 827. (a) $v_{cp} = 215$ m/s; (b) $v_{cp} = 210.5$ m/s; (c) $v_{cp} = 210.05$ m/s; 210 m/s. 828. (a) $2x$; (b) $3x^2$; (c) $-\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$); (d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$); (e) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ($x \neq 0$); (f) $\frac{1}{\cos^2 x}$ ($x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots$); (g) $-\frac{1}{\sin^2 x}$ ($x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \dots$); (h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$); (i) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$); (j) $\frac{1}{1+x^2}$. 829. -8; 0; 0. 830. 4. 831. $1 + \frac{\pi}{4}$. 832. $f'(a)$. 834. $y' = 1 - 2x$; 1, 0, -1, 21. 835. $y' = x^2 + x - 2$; (a) -2; 1; (b) -1; 0; (c) -4; 3. 836. $10a^3x - 5x^4$. 837. $\frac{a}{a+b}$. 838. $2x - (a+b)$. 839. $2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$. 840. $x \sin 2a + \cos 2a$. 841. $mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}]$. 842. (a) $-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x+15x^2+14x^3)$; (b) $-20(17+12x)(5+2x)^9(3-4x)^{19}$. 843. $-\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right)$ ($x \neq 0$). 845. $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ ($|x| \neq 1$). 846. $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$. 847. $\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$ ($|x| \neq 1$). 848. $\frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$ ($x \neq 1$). 849. $-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$ ($x \neq -1$). 850. $\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2} [p - (q+1)x - (p+q-1)x^2]$ ($x \neq -1$). 851. $1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ($x > 0$). 852. $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ ($x > 0$). 853. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$ ($x > 0$). 854. $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. 855. $\frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$ ($x \neq \sqrt[3]{-3}$). 856. $\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)^{n+m}\sqrt{(1-x)^n(1+x)^m}}$.

857. $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ($|x| < |a|$). 858. $\frac{2x^2}{1-x^6} \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ ($|x| \neq 1$). 859. $-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. 860. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ ($x > 0$). 861. $\frac{1}{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2}}$ ($x \neq 0, x \neq -1, x \neq -8$). 862. $-2 \cos x(1+2 \sin x)$. 863. $x^2 \sin x$. 864. $-\sin 2x \cdot \cos(\cos 2x)$. 865. $n \sin^{n-1} x \cdot \cos(n+1)x$. 866. $\cos x \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos[\sin(\sin x)]$. 867. $\frac{2 \sin x(\cos x \sin x^2 - x \sin x \cos x^2)}{\sin^2 x^2}$ ($x^2 \neq k\pi; k = 1, 2, \dots$). 868. $-\frac{1+\cos^2 x}{2 \sin^3 x}$ ($x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 869. $\frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x}$ ($x \neq \frac{2k-1}{2}\pi, k$ 为整数). 870. $\frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}$. 871. $\frac{2}{\sin^2 x}$ ($x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 872. $1 + \tan^6 x$ ($x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 873. $\frac{-8}{3 \sin^4 x \sqrt[3]{\cot x}}$ ($x \neq k\pi, k$ 为整数). 874. $\frac{-16 \cos \frac{2x}{a}}{a \sin^3 \frac{2x}{a}}$ ($x \neq \frac{k\pi a}{2}, k$ 为整数). 875. $-3 \tan^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \sin(2 \tan^3 x) \cdot \cos[\cos^2(\tan^3 x)]$ ($x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, k$ 为整数). 876. $-2xe^{-x^2}$. 877. $-\frac{1}{x^2} \cdot 2^{\tan \frac{1}{x}} \sec^2 \frac{1}{x} \cdot \ln 2$. 878. $x^2 e^x$. 879. $x^2 e^{-x} \sin x$. 880. $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2 \sin^3 \frac{x}{2}}$ ($x \neq 2k\pi, k$ 为整数). 881. $-\frac{1+\ln^2 3}{3^x} \sin x$. 882. $\sqrt{a^2+b^2} e^{ax} \sin bx$. 883. $e^x[1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}})]$. 884. $y(\ln \frac{a}{b} - \frac{a-b}{x})$ ($x > 0$). 885. $a^a x^{a^a-1} + ax^{a-1} a^{x^a} \ln a + a^x a^{a^x} \ln^2 a$. 886. $\frac{6}{x} \lg e \cdot \lg^2 x^2$ ($x \neq 0$). 887. $\frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$ ($x > e$). 888. $\frac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)}$ ($x > e$). 889. $\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}$ ($x > -1$). 890. $\frac{x}{x^4-1}$ ($|x| > 1$). 891. $\frac{1}{x(1+x^4)^2}$ ($x \neq 0$). 892. $\frac{1}{3x^2-2}$ ($|x| > \sqrt{\frac{2}{3}}$). 893. $\frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)}$ ($|x| < 1$). 894. $\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$ ($x > -1$). 895. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. 896. $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$. 897. $\ln^2(x + \sqrt{x^2+1})$. 898. $\sqrt{x^2+a^2}$. 899. $\frac{1}{a-bx^2}$ ($|x| < \sqrt{\frac{a}{b}}$). 900. $-\frac{8}{x^5 \sqrt{1-x^2}}$ ($0 < x < 1$). 901. $\frac{1}{\sin x}$ ($0 < x - 2k\pi < \pi, k$ 为整数). 902. $\frac{1}{\cos x}$ ($|x - 2k\pi| < \frac{\pi}{2}, k$ 为整数). 903. $-\cot^3 x$ ($0 < x - 2k\pi < \pi, k$ 为整数). 904. $-\frac{1}{\cos x}$ ($x \neq \frac{2k-1}{2}\pi, k$ 为整数). 905. $\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$ ($0 < x - 2k\pi < \pi, k$ 为整数). 906. $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b \cos x}$. 907. $-\frac{\ln^3 x}{x^2}$ ($x > 0$). 908. $\frac{1}{x^5} \ln x$ ($x > 0$). 909. $\frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$. 910. $-\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln \frac{1}{x}}{(1+x \ln \frac{1}{x})[1+x \ln(\frac{1}{x}+\ln \frac{1}{x})]}$. 911. $2 \sin(\ln x)$ ($x > 0$). 912. $\sin x \cdot \ln \tan x$ ($0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, k$ 为整数). 913. $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ ($|x| < 2$). 914. $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ ($|x-1| < \sqrt{2}$). 915. $\frac{2ax}{x^4+a^2}$ ($a \neq 0$). 916. $\frac{1}{x^2+2}$ ($x \neq 0$). 917. $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ ($x \geq 0$). 918. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x$ ($|x| < 1$). 919. $\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}$ ($x \geq 0$). 920. $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ ($|x| > 1$). 921. $\operatorname{sgn}(\cos x)$ ($x \neq \frac{2k-1}{2}\pi, k$ 为整数). 922. $\frac{2 \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ ($x \neq 2k\pi, k$ 为整数). 923. $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ ($0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}, k$ 为整数). 924. $\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$ ($0 < |x| < 1$). 925. $\frac{1}{1+x^2}$ ($x \neq 1$). 926. 1 ($x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k$ 为整数). 927. $\frac{1}{a+b \cos x}$. 928. $-\frac{2 \operatorname{sgn} x}{1+x^2}$ ($x \neq 0$). 929. $\frac{4}{\sqrt{1-x^4} \arccos^3(x^2)}$ ($|x| < 1$). 930. $\frac{1+x^4}{1+x^6}$. 931. $-2 \cos x \cdot \arctan(\sin x)$. 932. $\frac{1}{2x\sqrt{x-1} \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}}$ ($x > 1$). 933. $\frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$ ($x > -a$). 934. $\sqrt{a^2-x^2}$. 935. $\frac{1}{x^3+1}$ ($x \neq -1$). 936. $\frac{1}{x^4+1}$ ($|x| \neq -1$). 937. $(\arcsin x)^2$ ($|x| < 1$). 938. $-\frac{\arccos x}{x^2}$ ($0 < |x| < 1$). 939. $\frac{x \ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$ ($x > 1$). 940. $\frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ($|x| < 1$). 941. $\frac{x^3}{x^6+1}$ ($|x| \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$). 942. $\frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}$. 943. $-\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}}$ ($x < 1$). 944. $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$). 945. $\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$ ($0 < x < a$). 946. $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ ($|x+1| < \sqrt{2}$). 947. $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. 948. $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ ($x \neq \frac{2k-1}{2}\pi, k$ 为整数). 949. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ($|x| < 1$). 950. $\frac{x^2}{1+x^2} \cdot \arctan x$.

951. $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. 952. $\frac{1}{2(1+x^2)}$. 953. $\frac{\sin a \operatorname{sgn}(\cos x - \cos a)}{1 - \cos a \cos x}$ ($\cos x \neq \cos a$). 954. $\frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}$ ($0 < |x| < 1$). 955. $\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$ ($|x| \neq 1$). 956. $\frac{4}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$). 957. $\frac{2x(\cos x^2 + \sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}} \left(0 < |x| < \sqrt{(k + \frac{1}{2})\pi}, k = 0, 1, 2, \dots \right)$. 958. $2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2) + \operatorname{sgn}(\sin x^2)]$ ($|x| \neq \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \dots$).
959. $\frac{2m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot e^{m(\arcsin x)} \cos m(\arcsin x)$ ($|x| < 1$). 960. (a) $\frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}$;
 (b) $\frac{x^3}{6\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt[4]{1+x^4})^2} \cdot \sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$; (c) $\frac{1}{x^3 \cos \frac{1}{x^2} (\sin \frac{1}{x^2} + \cos \frac{1}{x^2}) \sqrt{\cot \frac{1}{x^2}}}$;
 (d) $\frac{2^{1+\sqrt[3]{x}} \ln 2 \cdot \sin(2\sqrt[3]{x}) \cdot \ln(\sec 2\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x^2} \cdot \cos^2 2\sqrt[3]{x}}$. 961. $1 + x^x(1 + \ln x) + x^x x^{x^x} (\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x)$ ($x > 0$).
962. $x^{a-1} x^{x^a} (1 + a \ln x) + a^x x^{a^x} (\frac{1}{x} + \ln a \ln x) + x^x a^{x^x} \ln a (1 + \ln x)$ ($x > 0$). 963. $x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x)$ ($x > 0$). 964. $(\sin x)^{1+\cos x} \cdot (\cot^2 x - \ln \sin x) - (\cos x)^{1+\sin x} \cdot (\tan^2 x - \ln \cos x)$ ($0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, k$ 为整数). 965.1. $\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}} \cdot [x - 2 \ln^2 x + x \ln x \ln(\ln x)]$ ($x > 1$). 965.2. $y' = 2y \left\{ \frac{\arctan x}{1+x^2} \ln \frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} + \arctan^2 x \cdot \left[\frac{\sin x \cdot \operatorname{sgn}(\cos x)}{\arcsin(\sin^2 x) \sqrt{1+\sin^2 x}} - \frac{\cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)}{\arccos(\cos^2 x) \sqrt{1+\cos^2 x}} \right] \right\}$ ($x \neq \frac{k\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots$). 966. $-\frac{1}{x} (\log_x e)^2$ ($x > 0, x \neq 1$). 967. $\tanh^3 x$. 968. $-\frac{2}{\sinh^3 x}$ ($x > 0$). 969. $\frac{1}{\cosh 2x}$. 970. $\frac{\operatorname{sgn}(\sinh x)}{\cosh x}$ ($x \neq 0$). 971. $\frac{a+b \cosh x}{b+a \cosh x}$. 972. $-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$. 973. $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x \cdot \ln(\arccos x)$ ($|x| < 1$). 974. $-\frac{x^{-1}}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$. 975. $-\frac{2\pi e^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}$ ($x \neq 0$). 976. $\frac{4a^{2x} \ln a}{(1+a^{2x})^2} \arctan a^{-x}$ ($a > 0$). 977. (a) $\operatorname{sgn} x$ ($x \neq 0$); (b) $2|x|$; (c) $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).
978. (a) $(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$; (b) $\frac{3}{2} \sin 2x \cdot |\sin x|$; (c) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ ($|x| > 1$); (d) $\pi[x] \sin 2\pi x$. 979. 当 $-\infty < x < 1$ 时 $y' = -1$; 当 $1 \leq x \leq 2$ 时 $y' = 2x - 3$; 当 $2 < x < +\infty$ 时 $y' = 1$. 980. 当 $x \in [a, b]$ 时 $y' = 2(x-a) \cdot (x-b)(2x-a-b)$; 当 $x \notin [a, b]$ 时 $y' = 0$.
981. 当 $x < 0$ 时 $y' = 1$; 当 $0 \leq x < +\infty$ 时 $y' = \frac{1}{1+x}$. 982. 当 $-1 < x \leq 1$ 时 $y' = \frac{1}{1+x^2}$; 当 $|x| > 1$ 时 $y' = \frac{1}{2}$. 983. 当 $|x| \leq 1$ 时 $y' = 2xe^{-x^2}(1-x^2)$; 当 $|x| > 1$ 时 $y' = 0$.
984. (a) $\frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$; (b) $\frac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$ ($x \neq 0, x \neq 1, x \neq \pm 3$); (c) $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x-\alpha_i}$; (d) $\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$. 985. (a) $\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}} (\varphi^2(x)+\psi^2(x) \neq 0)$; (b) $\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)} (\varphi^2(x)+\psi^2(x) \neq 0)$; (c) $\varphi(x)\sqrt{\psi(x)} \left\{ \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \ln \psi(x) \right\}$; (d) $\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \frac{1}{\ln \varphi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \frac{\ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)}$. 986.1. (a) $2xf'(x^2)$; (b) $\sin 2x \cdot [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$; (c) $e^{f(x)} [e^x f'(e^x) + f'(x)f(e^x)]$; (d) $f'(x)f'[f(x)] \cdot f'\{f[f(x)]\}$; (e) $1000!$. 988. $3x^2 + 15$. 989. $6x^2$. 992. (a) $n > 0$; (b) $n > 1$; (c) $n > 2$. 993. (a) $n \geq m + 1$; (b) $1 < n < m + 1$. 994. $\varphi(a)$. 995. $f'_-(a) = -\varphi(a), f'_+(a) = \varphi(a)$. 999. (a) 当 $x = 1$ 时不可微; (b) 当 $x = \frac{2k-1}{2}\pi$ 时不可微, k 为整数; (c) 处处可微; (d) 当 $x = k\pi$ 时不可微, k 为整数; (e) 当 $x = -1$ 时不可微. 1000. 当 $x \neq 0$ 时 $f'_- = f'_+ = \operatorname{sgn} x$, 而 $f'_-(0) = -1, f'_+(0) = 1$. 1001. 当 $x \neq$ 整数时 $f'_-(x) = f'_+(x) = \pi[x] \cos \pi x$; 当 $x = k$ (k 为整数) 时 $f'_-(k) = \pi(k-1)(-1)^k, f'_+(k) = \pi k(-1)^k$. 1002. 当 $x \neq \frac{2}{2k+1}$ (k 为整数) 时 $f'_-(x) = f'_+(x) = (\cos \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x}) \operatorname{sgn}(\cos \frac{\pi}{x})$; $f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) = -(2k+1)\frac{\pi}{2}, f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right) = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. 1003. 当 $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时 $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$; $f'_-(0) = -1, f'_+(0) = 1$; $f'_\mp(\sqrt{(2k+1)\pi}) = \mp\infty, f'_\pm(\sqrt{2k\pi}) = \pm\infty$ ($k = 1, 2, \dots$). 1004. 当 $x \neq 0$ 时 $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1+(1+\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$; $f'_-(0) = 1, f'_+(0) = 0$. 1005. 当 $x \neq 0$ 时

$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$; $f'_-(0) = -1$; $f'_+(0) = 1$. **1006.** $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{\varepsilon}{x}$, 其中, 当 $0 < |x| < 1$ 时 $\varepsilon = -1$, 当 $1 < |x| < +\infty$ 时 $\varepsilon = 1$; $f'_-(\mp 1) = -1$, $f'_+(\mp 1) = 1$.
1007. 当 $x \neq \mp 1$ 时 $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{2\text{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$; $f'_-(\mp 1) = \mp 1$, $f'_+(\mp 1) = \pm 1$. **1008.**
 当 $x \neq 2$ 时 $f'_-(x) = f'_+(x) = \arctan \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{(x-2)^2+1}$; $f'_\mp(2) = \mp \frac{\pi}{2}$. **1009.1.** (a) $f'_-(0) = -\frac{1}{2}$, $f'_+(0) = \frac{1}{2}$; (b) $f'_-(1) = f'_+(1) = \frac{1}{2}$; (c) $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$. **1010.** $a = 2x_0$; $b = -x_0^2$.
1011. $a = f'_-(x_0)$; $b = f(x_0) - x_0 f'_-(x_0)$. **1012.** $A = \frac{k_1+k_2}{(b-a)^2}$, $c = \frac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}$. **1013.**
 $a = -\frac{3m^2}{2c}$, $b = -\frac{m^2}{2c^3}$. **1014.** (a) 能; (b) 不能. **1015.** (a) 不能; (b) 不能. **1016.** (a), (b), (c) 函数 $F(x)$ 可能有导数 $F'(x)$, 也可能没有. **1017.** $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). **1018.**
 (a) 不能; (b) 能. **1019.** (a) 不一定; (b) 一定. **1020.** (a) 不一定. **1021.** 不能得到. **1022.**
 不能得到. **1023.** 一般而言, 不能. **1024.** (a) $P_n = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$; (b) $S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$;
 $Q_n = \frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$;
 $T_n = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2}x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$. **1025.** $S_n = \frac{n \sinh \frac{nx}{2} \sinh(n+\frac{1}{2})x - \sinh^2 \frac{nx}{2}}{2 \sinh^2 \frac{x}{2}}$. **1026.** $S_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x$. **1029.** $40\pi \text{ cm}^2/\text{s}$. **1030.** $25 \text{ m}^2/\text{s}$; 0.4 m/s . **1031.** 50 km/h . **1032.** 当
 $0 \leq x \leq 2$ 时, $S(x) = \frac{x^2}{2}$; 当 $x > 2$ 时 $S(x) = x^2 - 2x + 2$; 当 $0 \leq x \leq 2$ 时 $S'(x) = x$; 当 $x > 2$ 时
 $S'(x) = 2x - 2$. **1033.** $S(x) = \frac{|x|}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{|x|}{2}$; $S'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \text{sgn } x$ ($0 < |x| \leq a$).
1034. $y'_x = \frac{1}{3(y^2+1)}$. **1035.** $y'_x = \frac{1}{1-\varepsilon \cos y}$. **1036.** (a) $-\infty < y < +\infty$; $x'_y = \frac{x}{x+1}$; (b)
 $-\infty < y < +\infty$; $x'_y = \frac{1}{1-x+y}$; (c) $-\infty < y < +\infty$; $x'_y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$; (d) $-1 < y < 1$; $x'_y = \frac{1}{1-y^2}$.
1037. (a) $x_1 = -\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ ($-\infty < y \leq 1$); $x_2 = -\sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ ($0 \leq y \leq 1$); $x_3 = \sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ ($0 \leq y \leq 1$);
 $x_4 = \sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ ($-\infty < y \leq 1$); $x'_i = \frac{1}{4x(1-x^2)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$); (b) $x_1 = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ ($0 \leq y < 1$);
 $x_2 = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$ ($0 \leq y < 1$); $x'_i = \frac{x^3}{2y^2}$ ($i = 1, 2$); (c) $x_1 = -\ln(1+\sqrt{1-y})$ ($-\infty < y \leq 1$);
 $x_2 = \ln \frac{1+\sqrt{1-y}}{y}$ ($0 < y \leq 1$); $x'_i = -\frac{1}{2(e^{-x}-e^{-2x})}$ ($i = 1, 2$).
1038. $y'_x = -\frac{3}{2}(1+t)$; -3 ; $-\frac{3}{2}$ 和 $-\frac{9}{2}$; $(-4, 4)$. **1039.** $\sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}$ ($t > 0, t \neq 1$). **1040.**
 $y'_x = -1$ ($0 < x < 1$). **1041.** $y'_x = -\frac{b}{a} \cot t$ ($0 < |t| < \pi$). **1042.** $y'_x = \frac{b}{a} \coth t$ ($|t| > 0$).
1043. $y'_x = -\tan t$ ($t \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k$ 为整数). **1044.** $y'_x = \cot \frac{t}{2}$ ($t \neq 2k\pi, k$ 为整数). **1045.**
 $y'_x = \tan t \cdot \tan(t + \frac{\pi}{4})$ ($t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, t \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$). **1046.** $y'_x = \text{sgn } t$ ($0 < |t| < +\infty$). **1048.**
 $y' = \frac{1-x-y}{x-y}$; $\frac{5}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **1049.** $\frac{p}{y}$. **1050.** $-\frac{b^2x}{a^2y}$. **1051.** $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. **1052.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **1053.** $\frac{x+y}{x-y}$.
1054. (a) $\tan(\varphi + \arctan \varphi)$; (b) $-\cot \frac{3\varphi}{2}$ ($\varphi \neq 0, \varphi \neq \pm \frac{2\pi}{3}$); (c) $\tan(\varphi + \arctan \frac{1}{m})$. **1055.**
 (a) $y = \sqrt[3]{4}(x+1)$; $y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$; (b) $y = 3, x = 2$; (c) $x = 3, y = 0$. **1056.** (a)
 $(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4})$; (b) $(0, 2)$. **1058.** $|x| < \frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3} < |x| \leq \pi$. **1059.** $\max |y'_1 - y'| = 10\pi \approx 31.4$.
1060. $\frac{\pi}{4}$. **1064.** (a) $2 \arctan \frac{1}{|a|}$; (b) $\frac{\pi}{2}$. **1066.** $|\frac{x}{n}|$. **1069.** $\frac{y_0^2}{|a|}$. **1071.** $b^2 - 4ac = 0$.
1072. $(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 = 0$. **1073.** $a = \frac{1}{2e}$. **1077.** (a) $3x - 2y = 0, 2x + 3y = 0$; (b)
 $3x - y - 1 = 0, x + 3y - 7 = 0$. **1078.** (a) $y = x, y = -x$; (b) $3x - y - 4 = 0, x + 3y - 3 = 0$; (c)
 $y = -x, y = x$. **1079.** $y - 2a = (x - at_0) \cot \frac{t_0}{2}$. 摆线的切线垂直于连接切点与滚动的圆的接触
 点所成的线段. **1081.** $3x + 5y - 50 = 0, 5x - 3y - 10.8 = 0$. **1082.** $x + 2y - 3 = 0, 2x - y - 1 = 0$.
1083. $\Delta f(1) = \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $df(1) = \Delta x$. (a) 5, 1; (b) 0.131, 0.1; (c) 0.010
 301, 0.01. **1084.** $\Delta x = 20\Delta t + 5(\Delta t)^2$, $dx = 20\Delta t$; (a) 25 m, 20 m; (b) 2.05 m, 2 m; (c)
 0.020 005 m, 0.02 m. **1085.** $-\frac{dx}{x^2}$ ($x \neq 0$). **1086.** $\frac{dx}{a^2+x^2}$. **1087.** $\frac{dx}{x^2-a^2}$ ($|x| \neq |a|$).

1088. $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. 1089. $\frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ ($|x| < |a|$). 1090. (a) $(1+x)e^x dx$; (b) $x \sin x dx$; (c) $-\frac{3 dx}{x^4}$ ($x \neq 0$); (d) $\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} dx$ ($x > 0$); (e) $\frac{x dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$; (f) $\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ($|x| < 1$); (g) $-\frac{2x dx}{1-x^2}$ ($|x| < 1$); (h) $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ ($|x| > 1$); (i) $\frac{dx}{\cos^3 x}$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k$ 为整数!). 1091. $vw du + uv dv + uv dw$.
1092. $\frac{v du - 2u dv}{v^3}$ ($v \neq 0$). 1093. $-\frac{u du + v dv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$ ($u^2 + v^2 > 0$). 1094. $\frac{v du - u dv}{u^2+v^2}$ ($u^2 + v^2 > 0$). 1095. $\frac{u du + v dv}{u^2+v^2}$ ($u^2 + v^2 > 0$). 1096. (a) $1 - 4x^3 - 3x^6$; (b) $\frac{1}{2x^2} (\cos x - \frac{\sin x}{x})$; (c) $-\cot x$ ($x \neq k\pi, k$ 为整数); (d) $-\tan^2 x$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k$ 为整数); (e) -1 ($|x| < 1$). 1097. (a) 精确解: 增加了 105.2 cm^2 , 近似解: 增加了 104.7 cm^2 ; (b) 减少了 43.6 cm^2 . 1098. 增加 0.0223 m . 1099. 1.007 (查表: 1.0066). 1100. 0.4849 (查表: 0.4848). 1101. -0.8747 (查表: -0.8746). 1102. $0.8104 = \arccos 46^\circ 26'$ (查表: $\arccos 46^\circ 24'$). 1103. 1.043 (查表: 1.041). 1104.1. (a) 2.25 (查表: 2.24); (b) 5.833 (查表: 5.831); (c) 10.9546 (查表: 10.9545). 1105. (a) 2.083 (查表: 2.080); (b) 2.9907 (查表: 2.9907); (c) 1.938 (查表: 1.931); (d) 1.9954 (查表: 1.9953). 1106. $0.24 \text{ m}^2; 4.2\%$. 1107. $\delta_R \leq 0.33\%$. 1108. (a) $\delta_g = \delta_i$; (b) $\delta_g = 2\delta_T$. 1109. 0.43δ . 1111. $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. 1112. $\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ ($|x| < 1$). 1113. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$.
1114. $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$ ($x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k = 0, \pm 1, \dots$). 1115. $\frac{2x}{1+x^2} + 2 \arctan x$. 1116. $\frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2) \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ ($|x| < 1$). 1117. $\frac{1}{x}$ ($x > 0$). 1118. $\frac{f(x)f''(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$ ($f(x) > 0$). 1119. $-\frac{2}{x} \sin(\ln x)$ ($x > 0$). 1120. $y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 0$. 1121. $2(uu'' + u'^2)$. 1122. $\frac{uu''-u'^2}{u^2} - \frac{vv''-v'^2}{v^2}$ ($uv > 0$). 1123. $\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$ ($u^2+v^2 > 0$). 1124. $y'' = u^v \left[\left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right)^2 + v \frac{uu''-u'^2}{u^2} + \frac{2u'v'}{u} + v'' \ln u \right]$. 1125. $y'' = 4x^2 f''(x^2) + 2f'(x^2); y''' = 8x^3 f'''(x^2) + 12x f''(x^2)$. 1126. $y'' = \frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right); y''' = -\frac{1}{x^6} f''' \left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5} f'' \left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^4} f' \left(\frac{1}{x}\right)$. 1127. $y'' = e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x); y''' = e^{3x} f'''(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x)$. 1128. $y'' = \frac{1}{x^2} [f''(\ln x) - f'(\ln x)]; y''' = \frac{1}{x^3} [f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)]$. 1129. $y'' = \varphi'^2(x)f''(\varphi(x)) + \varphi''(x)f'(\varphi(x)); y''' = \varphi'^3(x)f'''(\varphi(x)) + 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(\varphi(x)) + \varphi'''(x)f'(\varphi(x))$.
1130. (a) $e^x dx^2$; (b) $e^x(dx^2 + d^2x)$. 1131. $\frac{dx^2}{(1+x^2)^{3/2}}$. 1132. $\frac{2 \ln x - 3}{x^3} dx^2$ ($x > 0$). 1133. $x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] dx^2$. 1134. $u d^2v + 2 du dv + v d^2u$. 1135. $\frac{v(v d^2u - u d^2v) - 2 dv(v du - u dv)}{v^3}$ ($v > 0$). 1136. $u^{m-2}v^{n-2} \{ [m(m-1)v^2 du^2 + 2mnv du dv + n(n-1)u^2 dv^2] + uv(mv d^2u + nu d^2v) \}$. 1137. $a^u \ln a (du^2 \ln a + d^2u)$. 1138. $[(v^2 - u^2) du^2 - 4uv du dv + (u^2 - v^2) dv^2 + (u^2 + v^2)(u d^2u + v d^2v)](u^2 + v^2)^{-2}$ ($u^2 + v^2 > 0$). 1139. $[-2uv du^2 + 2(u^2 - v^2) du dv + 2uv dv^2 + (u^2 + v^2)(v d^2u - u d^2v)](u^2 + v^2)^{-2}$ ($u^2 + v^2 > 0$). 1140. $y'' = \frac{3}{4(1-t)}; y''' = \frac{3}{8(1-t)^2}$ ($t \neq 1$). 1141. $y'' = -\frac{1}{a \sin^3 t}; y''' = -\frac{3 \cos t}{a^2 \sin^5 t}$ ($t \neq k\pi, k$ 为整数). 1142. $y'' = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}; y''' = \frac{\cos \frac{t}{2}}{4a^2 \sin^7 \frac{t}{2}}$ ($t \neq 2k\pi, k$ 为整数). 1143. $y'' = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cos^3(t + \frac{\pi}{4})}; y''' = \frac{e^{-2t}(2 \sin t + \cos t)}{\sqrt{2} \cos^5(t + \frac{\pi}{4})}$ ($t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 1144. $y'' = \frac{1}{f''(t)}; y''' = \frac{f'''(t)}{f''^3(t)}$ ($f''(t) \neq 0$). 1145. $x' = \frac{1}{y'}; x'' = -\frac{y''}{y'^3}; x''' = -\frac{y' y''' - 3y''^2}{y'^5}; x^{(4)} = \frac{y'^2 y^{(4)} - 10y' y'' y''' + 15y''^3}{y'^7}$ ($y' \neq 0$). 1146. $-\frac{x}{y}, -\frac{25}{y^3}, -\frac{75x}{y^5}, -\frac{3}{4}, -\frac{25}{64}, -\frac{225}{1024}$. 1147. $\frac{p}{y}, -\frac{p^2}{y^3}, \frac{3p^3}{y^5}$. 1148. $y' = \frac{2x-y}{x-2y}, y'' = \frac{6}{(x-2y)^3}, y''' = \frac{54x}{(x-2y)^5}$. 1149. $y' = \frac{2x^3 y}{1+y^2}; y'' = \frac{2x^2 y}{(1+y^2)^3} \cdot [3(1+y^2)^2 + 2x^4(1-y^2)]$.
1150. $y' = \frac{x+y}{x-y}; y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. 1151. $a = \frac{1}{2} f''(x_0); b = f'(x_0); c = f(x_0)$. 1152. $20 - 10t, -10; 0, -10$. 1153. $v = -\frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t, w = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cos \frac{2\pi}{T} t$. 1154. $x = v_0 t \cos \alpha, y =$

$$v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}; v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0gt \sin \alpha + g^2t^2}; w = g; y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}; \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}; \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

1155. $x^2 + y^2 = 25; 5|w|, 5w^2.$ **1156.** $y^{(6)} = 4 \cdot 6!; y^{(7)} = 0.$ **1157.** $y''' = -\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}} (x \neq 0).$

1158. $y^{(10)} = -\frac{17!!}{2^{10}x^9\sqrt{x}} (x > 0),$ 其中 $n!!$ 表示不超过 n 具有相同奇偶性的正整数的乘积, 即 $17!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 17.$

1159. $y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9} (x \neq 1).$ **1160.** $y^{(100)} = \frac{197!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}} (x < 1).$

1161. $y^{(20)} = 2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95).$ **1162.** $y^{(10)} = e^x \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \frac{A_{10}^i}{x^{i+1}},$ 其中

$A_{10}^i = 10 \cdot 9 \cdots (11 - i),$ 而 $A_{10}^0 = 1.$ **1163.** $y^{(5)} = -\frac{6}{x^4} (x > 0).$ **1164.** $y^{(5)} =$

$\frac{274}{x^6} - \frac{120}{x^6} \ln x (x > 0).$ **1165.** $y^{(50)} = 2^{50} \left(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1}{2} \frac{225}{2} \sin 2x \right).$ **1166.**

$y''' = \frac{27(1-3x)^2-36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}} \sin 3x - \frac{27(1-3x)^2-28}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}} \cos 3x (x \neq \frac{1}{3}).$ **1167.** $y^{(10)} = -2^8 \sin 2x - 2^{18} \sin 4x +$

$2^8 \cdot 3^{10} \sin 6x.$ **1168.** $y^{(100)} = x \sinh x + 100 \cosh x.$ **1169.** $y^{(4)} = -4e^x \cos x.$ **1170.**

$y^{(6)} = -\frac{60}{x^6} + \left(\frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^3} + \frac{96}{x} \right) \sin 2x + \left(\frac{60}{x^6} - \frac{180}{x^4} + \frac{120}{x^2} + 32 \ln x \right) \cos 2x.$ **1171.** $120 dx^5.$

1172. $-\frac{15}{8x^3\sqrt{x}} dx^3 (x > 0).$ **1173.** $-1024(x \cos 2x + 5 \sin 2x) dx^{10}.$ **1174.** $e^x \left(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} \right.$

$\left. + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) dx^4.$ **1175.** $8 \sin x \sinh x dx^6.$ **1176.** $2u d^{10}u + 20 du d^9u + 90 d^2u d^8u +$

$240 d^3u d^7u + 420 d^4u d^6u + 252(d^5u)^2.$ **1177.** $e^u (du^4 + 6 du^2 d^2u + 4 du d^3u + 3 d^2u^2 +$

$d^4u).$ **1178.** $\frac{2 du^2}{u^3} - \frac{3 du d^2u}{u^2} + \frac{d^3u}{u}.$ **1179.** $d^2y = y'' dx^2 + y' d^2x; d^3y = y''' dx^3 +$

$3y'' dx d^2x + y' d^3x; d^4y = y^{(4)} dx^4 + 6y''' dx^2 d^2x + 4y'' dx d^3x + 3y'' d^2x^2 + y' d^4x.$ **1180.**

$y'' = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^3}; y''' = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} - 3 d^2x \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^5}.$ **1187.** $P^{(n)}(x) = a_0 n!.$ **1188.**

$\frac{(-1)^{n-1} n! c^{n-1} (ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}.$ **1189.** $n! \left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right].$ **1190.** $(-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right].$

1191. $\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}} (x < \frac{1}{2}).$ **1192.** $\frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 4 \cdots (3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}} (n \geq 2; x \neq -1).$ **1193.**

$-2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right).$ **1194.** $2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right).$ **1195.** $\frac{3}{4} \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) - \frac{3^n}{4} \sin \left(3x + \frac{n\pi}{2} \right).$

1196. $\frac{3}{4} \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{3^n}{4} \cos \left(3x + \frac{n\pi}{2} \right).$ **1197.** $\frac{(a-b)^n}{2} \cos \left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2} \right] - \frac{(a+b)^n}{2}$

$\cos \left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2} \right].$ **1198.** $\frac{(a-b)^n}{2} \cos \left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2} \right] + \frac{(a+b)^n}{2} \cos \left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2} \right].$ **1199.**

$\frac{(a-b)^n}{2} \sin \left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2} \right] + \frac{(a+b)^n}{2} \sin \left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2} \right].$ **1200.** $\frac{b^n}{2} \cos \left(bx + \frac{n\pi}{2} \right) - \frac{(2a-b)^n}{4}$

$\cos \left[(2a-b)x + \frac{n\pi}{2} \right] - \frac{(2a+b)^n}{4} \cos \left[(2a+b)x + \frac{n\pi}{2} \right].$ **1201.** $4^{n-1} \cos \left(4x + \frac{n\pi}{2} \right).$ **1202.** $a^n x \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right) +$

$na^{n-1} \sin \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right).$ **1203.** $a^n \left[x^2 - \frac{n(n-1)}{a^2} \right] \sin \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right) - 2na^{n-1} x \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right).$

1204. $(-1)^n e^{-x} [x^2 - 2(n-1)x + (n-1)(n-2)].$ **1205.** $e^x \left[\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{x^{k+1}} \right].$

1206. $e^x \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cos \left(x + \frac{n\pi}{4} \right).$ **1207.** $e^x \cdot 2^{\frac{n}{2}} \sin \left(x + \frac{n\pi}{4} \right).$ **1208.** $\frac{(n-1)! b^n}{(a^2-b^2x^2)^n} [(a+bx)^n +$

$(-1)^{n-1} (a-bx)^n] (|x| < |\frac{a}{b}|).$ **1209.** $e^{ax} [a^n P(x) + C_n^1 a^{n-1} P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x)].$ **1210.**

$\frac{1}{2} \{ [(x+n) - (-1)^n (x-n)] \cosh x + [(x+n) + (-1)^n (x-n)] \sinh x \}.$ **1211.** $d^n y = e^x \left[x^n +$

$n^2 x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \cdots + n! \right] dx^n.$ **1212.** $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left\{ \ln x - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right\} dx^n (x > 0).$ **1214.**

(a) $(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \left[\cos \left(n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \cosh ax \cos \left(bx + \frac{n\pi}{2} \right) - \sin \left(n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \sinh ax \cdot \sin \left(bx + \frac{n\pi}{2} \right) \right];$

(b) $(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\cos \left(n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \cosh ax \sin \left(bx + \frac{n\pi}{2} \right) + \sin \left(n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \cdot \sinh ax \cos \left(bx + \frac{n\pi}{2} \right) \right],$ 其

中 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$ **1215.** $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p+k} 2^{n-2p+1} (p-k)^n C_{2p}^k$

$\cos \left[(2p - 2k)x + \frac{n\pi}{2} \right]$. **1216.** (a) $\sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} \frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}} \cdot C_{2p+1}^k \sin \left[(2p - 2k + 1)x + \frac{n\pi}{2} \right]$;
 (b) $\sum_{k=0}^{p-1} 2^{n-2p+1} (p-k)^n C_{2p}^k \cos \left[(2p - 2k)x + \frac{n\pi}{2} \right]$; (c) $\sum_{k=0}^p \left\{ \frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}} C_{2p+1}^k \right.$
 $\left. \cos \left[(2p - 2k + 1)x + \frac{n\pi}{2} \right] \right\}$. **1218.** $\frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \sin(n \operatorname{arccot} x) (x \neq 0)$. **1219.** (a)
 $\frac{n!}{3} [2^{n+1} + (-1)^n]$; (b) $\frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}$ ($n > 1$). **1220.** (a) $n(n-1)a^{n-2}$; (b) $f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k+1)}(0) =$
 $(-1)^k (2k)! (k = 0, 1, 2, \dots)$; (c) $f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k+1)}(0) = [1 \cdot 3 \cdots (2k-1)]^2 (k = 0, 1, 2, \dots)$.
1221. (a) $f^{(2k)}(0) = (-1)^k m^2 (m^2 - 2^2) \cdots [m^2 - (2k-2)^2], f^{(2k-1)}(0) = 0$; (b) $f^{(2k)}(0) =$
 $0, f'(0) = m, f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k m (m^2 - 1^2) \cdots [m^2 - (2k-1)^2] (k = 1, 2, \dots)$. **1222.**
 (a) $f^{(2k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot 2(2k-1)! \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1} \right), f^{(2k-1)}(0) = 0 (k = 1, 2, \dots)$;
 (b) $f^{(2k)}(0) = 2^{2k-1} [(k-1)!]^2, f^{(2k-1)}(0) = 0 (k = 1, 2, \dots)$. **1223.** $n! \varphi(a)$. **1228.**
 $L_m(x) = (-1)^m \left[x^m - m^2 x^{m-1} + \frac{m^2(m-1)^2}{1 \cdot 2} x^{m-2} + \cdots + (-1)^m m! \right]$. **1231.** $H_m(x) =$
 $(2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2x)^{m-4} - \cdots$. **1236.** 当 $x = 0$ 时, 有限导
 数 $f'(x)$ 不存在. **1244.** $A(-1, -1), C(1, 1)$. **1245.** 不正确. **1246.1.** (a) $\theta = \frac{1}{2}$; (b)
 $\theta = \frac{\sqrt{x^2 + x\Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2} - x}{\Delta x} (x \geq 0, \Delta x > 0)$; (c) $\theta = \frac{x}{\Delta x} \left(\sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}} - 1 \right) (x(x + \Delta x) > 0)$; (d)
 $\theta = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$. **1248.** $c = \frac{1}{2}$ 或 $\sqrt{2}$. **1250.** 一般说来, 不. **1261.** $f(x) = c_0 + c_1 x +$
 $\cdots + c_{n-1} x^{n-1}$, 其中 $c_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 为常数. **1268.** 当 $-\infty < x < \frac{1}{2}$ 时函数递增,
 当 $\frac{1}{2} < x < +\infty$ 时递减. **1269.** 当 $-\infty < x < -1$ 时函数递减; 当 $-1 < x < 1$ 时递
 增; 当 $1 < x < +\infty$ 时递减. **1270.** 当 $-\infty < x < -1$ 时函数递减; 当 $-1 < x < 1$ 时递
 增; 当 $1 < x < +\infty$ 时递减. **1271.** 当 $0 < x < 100$ 时函数递增; 当 $100 < x < +\infty$ 时
 递减. **1272.** 函数递增. **1273.** 在区间 $(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$ 上函数递增; 在区间 $(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$ 上
 递减 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). **1274.** 在区间 $(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k})$ 和 $(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2})$ 上函数递增; 在
 区间 $(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1})$ 和 $(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1})$ 上递减 ($k = 0, 1, 2, \dots$). **1275.** 当 $-\infty < x < 0$ 时
 函数递减; 当 $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ 时递增; 当 $\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$ 时递减. **1276.** 当 $0 < x < n$ 时
 函数递增; 当 $n < x < +\infty$ 时递减. **1277.** 当 $-\infty < x < -1$ 和 $0 < x < 1$ 时递减; 当
 $-1 < x < 0$ 和 $1 < x < +\infty$ 时递增. **1278.** 在区间 $(e^{-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi}, e^{\frac{13\pi}{12} + 2k\pi})$ 上函数递增; 在区
 间 $(e^{-\frac{13\pi}{12} + 2k\pi}, e^{\frac{17\pi}{12} + 2k\pi})$ 上递减 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). **1283.** 不一定. **1298.** 曲线在点 A 处
 凸, 在点 B 处凹, 点 C 是拐点. **1299.** 当 $-\infty < x < 1$ 时图像凸; 在 $1 < x < +\infty$ 时图像凹;
 $(1, 2)$ 是拐点. **1300.** 当 $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时凹; 当 $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时凸; $(\pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}a)$ 是拐点. **1301.** 当
 $x < 0$ 时凹; 当 $x > 0$ 时凸; $(0, 0)$ 是拐点. **1302.** 凸. **1303.** 当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时凹; 当
 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时凸; $(k\pi, k\pi)$ 是拐点 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). **1304.** 当 $|x| < \sqrt{\frac{1}{2}}$
 时凹; 当 $|x| > \sqrt{\frac{1}{2}}$ 时凸; $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}})$ 是拐点. **1305.** 当 $|x| < 1$ 时凸; 当 $|x| > 1$ 时凹;
 $(\pm 1, \ln 2)$ 是拐点. **1306.** 当 $e^{2k\pi - \frac{3\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$ 时凸; 当 $e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}$ 时凹;
 $(e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}, \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} e^{k\pi + \frac{\pi}{4}})$ 是拐点 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). **1307.** 当 $0 < x < +\infty$ 时凸. **1309.** $h =$
 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. **1310.** 凹 ($a > 0$). **1318.** $\frac{a}{b}$. **1319.** 1. **1320.** 2. **1321.** -2. **1322.** $\frac{1}{3}$. **1323.**
 $-\frac{1}{3}$. **1324.** $\frac{1}{3}$. **1325.** $\frac{1}{6}$. **1326.** $\frac{1}{2}$. **1327.** 1. **1328.** $\frac{a-b}{3ab}$. **1329.** $\frac{1}{6} \ln a$. **1330.** -2.
1331. 1. **1332.** $(\frac{a}{b})^2$. **1333.** $\frac{1}{6}$. **1334.** $\frac{2}{3}$. **1335.** 1. **1336.** 0. **1337.** 0. **1338.** 0.
1339. 0. **1340.** 0. **1341.** 0. **1342.** 1. **1343.** 1. **1344.** -1. **1345.** e^k . **1346.** e^{-1} .
1347. $e^{\frac{2}{\pi}}$. **1348.** e^{-1} . **1349.** 1. **1350.** 1. **1351.** 1. **1352.** $e^{\frac{2}{\sin 2a}}$ ($a \neq \frac{k\pi}{2}, k$ 为整

数). 1353. $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}$. 1354. $\frac{1}{2}$. 1355. $\frac{1}{2}$. 1356. 0. 1357. $-\frac{1}{2}$. 1358. $a^a(\ln a - 1)$.
 1359. $-\frac{e}{2}$. 1360. $\frac{1}{a}$. 1361. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 1362. 1. 1363. (a) $e^{\frac{1}{6}}$; (b) $e^{-\frac{1}{6}}$; (c) $e^{\frac{1}{3}}$; (d) $e^{-\frac{1}{3}}$; (f) $e^{-\frac{1}{6}}$. 1364. $e^{-\frac{1}{2}}$. 1365. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 1366. e^{-1} . 1367. $\frac{mn}{n-m}$. 1368. (a) \sqrt{e} ; (b) 0. 1369. $-\frac{1}{6}$. 1370. a . 1371. $\tan \alpha$. 1373.2. $f'(0) = -\frac{1}{12}$. 1373.3. $y = \frac{1}{e}(x + \frac{1}{2})$. 1374. (a) 洛必达法则不适用, 极限为 0; (b) 洛必达法则不适用, 极限为 1; (c) 形式地应用洛必达法则得到错误结果 (等于 0), 极限不存在; (d) 不能应用洛必达法则, 否则得到错误结果 0, 极限不存在.
 1375. $\frac{4}{3}$. 1376. $5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$. 1377. $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$; -48. 1378. $1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2)$. 1379. $a + \frac{x}{ma^{m-1}} - \frac{(m-1)x^2}{2m^2a^{2m-1}} + o(x^2)$. 1380. $\frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3)$. 1381. $1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$. 1382. $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$. 1383. $x - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3 \cdot 240} + o(x^{13})$. 1384. $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$. 1385. $x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. 1386. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$. 1387. $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6)$. 1388. $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$. 1389. $(x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$. 1390. $y = a + \frac{x^2}{2a} + o(x^2)$. 1391. $\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o(\frac{1}{x^3})$. 1392. $\ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{h^n}{nx^n} + o(h^n)$. 1394. (a) 小于 $\frac{3}{(n+1)!}$; (b) 不超过 $\frac{1}{3 \cdot 840}$; (c) 小于 $2 \cdot 10^{-6}$; (d) 小于 $\frac{1}{16}$. 1395.1. $|x| < 0.222 = \text{arc } 12^\circ 30'$. 1396. (a) 3.107 2; (b) 3.017 1; (c) 1.996 1; (d) 1.648 72; (e) 0.309 017; (f) 0.182 321; (g) 0.674 74 = $\text{arc } 38^\circ 39' 35''$; (h) 0.466 76 = $\text{arc } 26^\circ 44' 37''$; (i) 1.121 17. 1397. (a) 2.718 281 828; (b) 0.017 452 41; (c) 0.987 69; (d) 2.236 1; (e) 1.041 39. 1398. $-\frac{1}{12}$. 1399. $\frac{1}{3}$. 1400. $-\frac{1}{4}$. 1401. $\frac{1}{3}$. 1402. $\frac{1}{6}$. 1403. $\ln^2 a$. 1404. $\frac{1}{2}$. 1405. 0. 1406. (a) $\frac{1}{3}$; (b) $\frac{19}{90}$; (c) $\frac{1}{2}$; (d) $\frac{1}{3}$. 1407. $\frac{x^7}{30}$. 1408. x^2 . 1409. $\frac{x}{2}$. 1410.1. $a = \frac{4}{3}; b = -\frac{1}{3}$. 1410.2. $A = -\frac{2}{5}; B = -\frac{1}{15}$. 1410.3. $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{12}, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{12}$. 1411. (a) $\frac{2x}{R^3}$; (b) $\frac{4}{3}x$; (c) $\frac{An}{100}$; (d) $\frac{70}{x}$. 1412. $\alpha = \frac{2}{3}; \beta = \frac{1}{3}$. 1413. $\frac{\alpha^4}{180}$, 其中 α 为弧所对圆心角的一半. 1414. 当 $x = \frac{1}{2}$ 时极大值 $y = 2\frac{1}{4}$. 1415. 没有极值. 1416. 当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 0$. 1417. 在 $x = 0$ 处, 当 m 为偶数时有极小值 $y = 0$, 当 m 为奇数时在 $x = 0$ 处没有极值; 在 $x = \frac{m}{m+n}$ 处有极大值 $y = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$; 在 $x = 1$ 处, 当 n 为偶数时有极小值 $y = 0$, 当 n 为奇数时在 $x = 1$ 处没有极值. 1418. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 2$. 1419. 在 $x = -1$ 处有极小值 $y = 0$; 在 $x = 9$ 处有极大值 $y = 10^{10} e^{-9} \approx 1\,234\,000$. 1420. 当 n 为奇数时, 在 $x = 0$ 处有极大值 $y = 1$; 当 n 为偶数时, 在 $x = 0$ 处没有极值. 1421. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$. 1422. 在 $x = \frac{1}{3}$ 处有极大值 $y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{4} \approx 0.529$; 在 $x = 1$ 处有极小值 $y = 0$; 在 $x = 0$ 处没有极值. 1423. 当 $\varphi(x_0) > 0$, n 为偶数时, 有极小值 $f(x_0) = 0$, 当 $\varphi(x_0) < 0$, n 为偶数时, 有极大值 $f(x_0) = 0$; n 为奇数时 $f(x_0)$ 不是极值. 1425. 不能. 1427. (a) 极小值 $f(0) = 0$; (b) 极小值 $f(0) = 0$. 1428. 极小值 $f(0) = 0$. 1429. 在 $x = 1$ 处有极大值 $y = 0$; 在 $x = 3$ 处有极小值 $y = -4$. 1430. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$; 在 $x = \pm 1$ 处有极大值 $y = 1$. 1431. 在 $x = \frac{5-\sqrt{13}}{6} \approx 0.23$ 处有极小值 $y \approx -0.76$; 在 $x = 1$ 处有极大值 $y = 0$; 在 $x = \frac{5+\sqrt{13}}{6} \approx 1.43$ 处有极小值 $y \approx -0.05$; 在 $x = 2$ 处没有极值. 1432. 在 $x = -1$ 处有极大值 $y = -2$; 在 $x = 1$ 处有极小值 $y = 2$. 1433. 在 $x = -1$ 处有极小值 $y = -1$; 在 $x = 1$ 处有极大值 $y = 1$. 1434. 在 $x = \frac{7}{5}$ 处有极小值 $y = -\frac{1}{24}$. 1435. 在 $x = 0$ 和 $x = 2$ 处有边界极小值 $y = 0$; 在 $x = 1$ 处有极大值 $y = 1$. 1436. 在 $x = \frac{3}{4}$ 处有极小值 $y = -\frac{3}{8} \sqrt[3]{2} \approx -0.46$; 在 $x = 1$ 处没有极值. 1437. 在 $x = 1$ 处有极大值 $y = e^{-1} \approx 0.368$. 1438. 在 $x = +0$ 处有边界极大值 $y = 0$; 在 $x = e^{-2} \approx 0.135$ 处有极小值 $y = -\frac{2}{e} \approx -0.736$. 1439. 在 $x = 1$ 处有极小值 $y = 0$; 在 $x = e^2 \approx 7.389$ 处有极

大值 $y = \frac{4}{e^2} \approx 0.541$. 1440. 在 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处有极大值 $y = (-1)^k + \frac{1}{2}$; 在 $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处有极小值 $y = -\frac{3}{4}$. 1441. 在 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处有极大值 $y = 10$; 在 $x = \pi(k + \frac{1}{2})$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处有极小值 $y = 5$. 1442. 在 $x = 1$ 处有极大值 $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0.439$. 1443. 在 $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处有极小值 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$; 在 $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处有极大值 $y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}$. 1444. 在 $x = -1$ 处有极大值 $y = e^{-2} \approx 0.135$; 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$ (角点); 在 $x = 1$ 处有极大值 $y = 1$. 1445. $\frac{1}{2}; 32$. 1446. 2; 66. 1447. 0; 132. 1448. 2; 100.01. 1449. 1; 3. 1450. 0; $\frac{100}{e} \approx 36.8$. 1451. 0; 1. 1452. 0; $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) \approx 1.2$. 1453. $-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx -0.067$; 1. 1454.1. $m(x) = -\frac{1}{6}, -\infty < x \leq -3; m(x) = \frac{1+x}{3+x^2}, -3 < x \leq -1; m(x) = 0, -1 < x < +\infty; M(x) = \frac{1}{2}, -\infty < x \leq 1; M(x) = \frac{1+x}{3+x^2}, 1 < x < +\infty$. 1455. (a) $\frac{14^{10}}{2^{14}} \approx 1.77 \cdot 10^7$; (b) $\frac{1}{200}$; (c) $\sqrt[3]{3} \approx 1.44$. 1457. $\frac{9+6\sqrt{3}}{4} \approx 4.85$. 1458. $q = -\frac{1}{2}$. 1459. $\frac{4}{27}$. 1460. $g(x) = (x_1 + x_2)x - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2); \Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2$. 1461. $\frac{2}{3}$. 1462. 一个根: $(3, +\infty)$. 1463. 当 $h > 27$ 时有一个根: $-\infty < x_1 < -1$; 当 $-5 < h < 27$ 时有三个根: $-\infty < x_1 < -1, -1 < x_2 < 3, 3 < x_3 < +\infty$; 当 $h < -5$ 时有一个根: $3 < x_3 < +\infty$. 1464. 两个根: $-\infty < x_1 < -1$ 和 $-1 < x_2 < +\infty$. 1465. 当 $-\infty < a < -4$ 时有一个根: $-\infty < x_1 < -1$; 当 $-4 < a < 4$ 时有三个根: $-\infty < x_1 < -1, -1 < x_2 < 1, 1 < x_3 < +\infty$; 当 $4 < a < +\infty$ 时有一个根: $1 < x_1 < +\infty$. 1466. 当 $-\infty < k < 0$ 时有一个根: $0 < x_1 < 1$; 当 $0 < k < \frac{1}{e}$ 时有两个根: $0 < x_1 < \frac{1}{k}$ 和 $\frac{1}{k} < x_2 < +\infty$; 当 $k > \frac{1}{e}$ 时没有根. 1467. 当 $a < 0$ 时没有根; 当 $0 < a < \frac{e^2}{4}$ 时有一个根: $-\infty < x_1 < 0$; 当 $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$ 时有三个根: $-\infty < x_1 < 0, 0 < x_2 < 2$ 和 $2 < x_3 < +\infty$. 1468. 在 $|a| < \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时有两个根; 当 $|a| > \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时没有根. 1469. 当 $|k| > \sinh \xi \approx 1.50$ 时有两个根: $0 < |x_1| < \xi$ 和 $\xi < |x_2| < +\infty$, 其中 $\xi \approx 1.2$ 是方程 $\coth x = x$ 的正根; 当 $|k| < \sinh \xi$ 时没有根. 1470. (a) $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$; (b) $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$. 1471. ① 关于坐标原点对称. 函数的零点: $x = 0$ 和 $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$. 在 $x = -1$ 处有极小值 $y = -2$; 在 $x = 1$ 时有极大值 $y = 2$. 拐点: $x = 0, y = 0$. 1472. 关于 Oy 轴对称. 零点 $x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}} \approx \pm 1.65$. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 1$; 在 $x = \pm 1$ 时有极大值 $y = 1\frac{1}{2}$. 拐点: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0.58, y = 1\frac{5}{18}$. 1473. 关于点 $A(1, 2)$ 对称. 零点: $x = -1$ 和 $x = 2$. 在 $x = 2$ 处有极小值 $y = 0$; 在 $x = 0$ 处有极大值 $y = 4$. 拐点: $x = 1, y = 2$. 1474. 关于 Oy 轴对称. 函数的零点: $x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1.41$. 在 $x = 0$ 处有极大值 $y = 2$; 在 $x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx \pm 2.06$ 处有极小值 $y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0.12$. 拐点: $x_{1,2} = \pm 0.77, y_{1,2} = 1.04; x_{3,4} \approx \pm 2.67, y_{3,4} \approx -0.010$. 渐近线 $y = 0$. 1475. 间断点: $x = 2$ 和 $x = 3$. 零点: $x = \pm 1$. 在 $x = \frac{7 - \sqrt{24}}{5} \approx 0.42$ 时有极小值 $y = -(10 - \sqrt{96}) \approx -0.20$; 在 $x = \frac{7 + \sqrt{24}}{5} \approx 2.38$ 处有极大值 $y = -(10 + \sqrt{96}) \approx -19.80$. 拐点: $x \approx -0.58, y \approx -0.07$. 渐近线: $x = 2, x = 3$ 和 $y = 1$. 1476. 间断点: $x_1 = -1$ 和 $x_2 = 1$. 函数的零点 $x = 0$. 没有极值点. 拐点: $x \approx -0.22, y \approx -0.19$. 渐近线: $x = -1, x = 1$ 和 $y = 0$. 1477. 函数的零点 $x = 0$. 间断点 $x = -1$. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$; 在 $x = -4$ 处有极大值 $y = -9\frac{13}{27}$. 没有拐点. 渐近线: $x = -1$ 和 $y = x - 3$. 1478. 在 $x = -1$ 处有极小值 $y = 0$; 拐点 $x = -4, y = \frac{81}{625}$. 渐近线: $x = 1$ 和 $y = 1$. 1479. 在 $x = -\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \approx -3.56$ 处有极大值 $y = -\frac{34\sqrt{17} + 142}{32} \approx -8.82$ 和在 $x = 0$ 处有极大值 $y = 0$; 在 $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \approx 0.56$ 处有极小值 $y = \frac{34\sqrt{17} - 142}{32} \approx -0.06$. 拐点

①对于作图的题目, 并非都给出完整答案.

$x = \frac{1}{5}, y = -\frac{1}{45}$. 渐近线: $x = -1$ 和 $y = x - 3$. **1480.** 关于坐标原点对称. 没有极值点; 拐点 $x = 0, y = 0$. 渐近线 $x = -1, x = 1$ 和 $y = 0$. **1481.** 在 $x = 5$ 处有极小值 $y = 13\frac{1}{2}$; 拐点: $x = -1, y = 0$. 渐近线: $x = 1$ 和 $y = x + 5$. **1482.** 在 $x = 2$ 处有极小值 $y = 2\frac{2}{3}$; 在 $x \approx -2.4$ 处有极大值 $y \approx -3.2$; 拐点 $x = 0, y = 8$. 渐近线: $x = -1$ 和 $y = x$. **1483.** 关于 Oy 轴对称. 函数的零点: $x = \pm\sqrt{\frac{10}{4}} \approx \pm 0.79$. 没有极值点. 拐点: $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0.71, y = -2\frac{2}{3}$. 渐近线: $x = -1, x = 0, x = 1$ 和 $y = 0$. **1484.** 定义域: $0 \leq x < +\infty$. 零点: $x = 0$ 和 $x = 3$. 在 $x = 1$ 处有极小值 $y = -2$; 在 $x = 0$ 处有边界极大值 $y = 0$. 凸. **1485.** (a) 定义域: $|x| \leq 2\sqrt{2} \approx 2.83$. 关于坐标原点和坐标轴对称. 零点: $x = 0$ 和 $x = \pm 2\sqrt{2}$. 在 $x = \pm 2$ 处有极大值 $|y| = 4$; 在 $x = 0$ 处有极小值 $|y| = 0$; 在 $x = \pm 2\sqrt{2}$ 处有边界极小值 $|y| = 0$. 没有拐点. (b) 函数零点 $x = 2$. 在 $x = -0.5$ 处有极小值 $y = -\sqrt{5} \approx -2.24$. 拐点 $x_1 = -\frac{3+\sqrt{41}}{8} \approx -1.18; y_1 \approx -2.06$ 和 $x_2 = \frac{\sqrt{41}-3}{8} \approx 0.42; y_2 \approx -1.46$. 渐近线: 在 $x \rightarrow -\infty$ 时 $y = -1$ 和在 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = 1$. **1486.** 定义域: $1 \leq x \leq 2$ 和 $3 \leq x < +\infty$. 零点: $x = 1, x = 2$ 和 $x = 3$. 在 $x = \frac{6-\sqrt{3}}{3} \approx 1.42$ 处有极大值 $y = \frac{1}{3}\sqrt[4]{12} \approx 0.62$; 在 $x = 1, 2, 3$ 处有边界极小值 $|y| = 0$. **1487.** 在 $x = 1$ 处有极小值 $y = 0$; 在 $x = -\frac{1}{3}$ 处有极大值 $y = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4} \approx 1.06$; 拐点 $x = -1, y = 0$. 渐近线 $y = x - \frac{1}{3}$. **1488.** 关于 Oy 轴对称. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = -1$. 凹. 渐近线 $y = 0$. **1489.** 关于坐标原点对称. 函数的零点: $x = 0$. 在 $x = -2$ 处有极小值 $y = -\sqrt[3]{16} \approx -2.52$; 在 $x = 2$ 处有极大值 $y = \sqrt[3]{16}$. 拐点: $x = 0, y = 0$. 渐近线 $y = 0$. **1490.** 关于 Oy 轴对称. 在 $x = \pm 1$ 处有极小值 $y = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$; 在 $x = 0$ 处有极大值 $y = 2$. 凹. **1491.** 关于坐标原点对称. 间断点 $x = \pm 1$. 函数零点 $x = 0$. 在 $x = \sqrt{3}$ 处有极小值 $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 1.38$; 在 $x = -\sqrt{3}$ 处有极大值 $y = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. 拐点 $x_1 = 0, y_1 = 0$ 和 $x_{2,3} = \pm 3, y_{2,3} = \pm 1\frac{1}{2}$. **1492.** 函数定义域: $|x| \geq 1$. 关于 Oy 轴对称. 在 $x = \pm 1$ 处有边界极小值 $y = 0$. 凹. 渐近线: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = \frac{x}{2}$ 和当 $x \rightarrow -\infty$ 时 $y = -\frac{x}{2}$. **1493.** 函数的定义域: $x > 0$. 在 $x = \frac{1}{2}$ 处有极小值 $y = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2.60$. 凸. 渐近线 $y = x + \frac{3}{2}$ 和 $x = 0$. **1494.** 定义域: $x \geq 0$ 和 $x < -3$. 函数的零点 $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4.30$. 在 $x = -4$ 处有极小值 $y = 13$; 在 $x = 0$ 处有边界极大值 $y = 1$. 凸. 渐近线在 $x \rightarrow -\infty$ 时 $y = \frac{5}{2} - 2x$; 在 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = -\frac{1}{2}$; 在 $x \rightarrow -3-0$ 时 $x = -3$. **1495.** 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$; 在 $x = -2$ 处有极大值 $y = -\sqrt[3]{4} \approx -1.59$. 拐点: $x_1 = -(2 - \sqrt{3}) \approx -0.27, y_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{27}-5}{2}} \approx 0.46; x_2 = -(2 + \sqrt{3}) \approx -3.73, y_2 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{27}}{2}} \approx -1.72$. 渐近线 $x = -1$. **1496.** 关于 Oy 轴对称. 函数值为正. 在 $x = 0$ 处有极大值 $y = \sqrt{3} \approx 1.73$; 在 $x = \pm 1$ 处有极小值 $y = \sqrt{2} \approx 1.41$. 拐点: $x_{1,2} \approx \pm 0.47; y_{1,2} \approx 1.14$ 和 $x_{3,4} \approx \pm 4.58, y_{3,4} \approx 4.55$. 渐近线 $y = \pm x$. **1497.** 函数的周期: $T = 2\pi$; 基本区域 $0 \leq x \leq 2\pi$. 函数的零点: $x_1 = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.21\pi$ 和 $x_2 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.79\pi$. 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处有极小值 $y = 1$ 和 $x = \frac{3\pi}{2}$ 处有极小值 $y = -1$; 在 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{5\pi}{6}$ 处有极大值 $y = 1\frac{1}{4}$. 拐点: $x_1 = \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 0.32\pi, y_1 = \frac{19+3\sqrt{33}}{32} \approx 1.13; x_2 = \pi - \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 0.68\pi, y_2 = \frac{19+3\sqrt{33}}{32}; x_3 = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 1.20\pi, y_3 = \frac{19-3\sqrt{33}}{32} \approx 0.055; x_4 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 1.80\pi, y_4 = \frac{19-3\sqrt{33}}{32}$. **1498.** 函数的周期: 2π ; 基本区域 $-\pi \leq x \leq \pi$. 关于坐标原点对称. 零点: $x_1 = 0$ 和 $x_{2,3} = \pm\pi$. 在 $x = -\arccos \frac{1}{4} \approx -0.42\pi$ 处有极小值 $y = -\frac{15}{8}\sqrt{15} \approx -7.3$; 在 $x = \arccos \frac{1}{4} \approx 0.42\pi$ 处有极大值 $y = \frac{15}{8}\sqrt{15} \approx 7.3$. 拐点: $x_1 = 0, y_1 = 0; x_{2,3} = \pm \arccos(-\frac{7}{8}) \approx \pm 0.84\pi, y_{2,3} = \pm \frac{21}{32}\sqrt{15} \approx \pm 2.54; x_{4,5} = \pm\pi, y_{4,5} = 0$. **1499.** 函数的周期: $T = 2\pi$; 基本区域: $-\pi \leq x \leq \pi$. 关于坐标原点对称. 零点: $x_1 = 0$ 和 $x_{2,3} = \pm\pi$. 在 $x = -\frac{3\pi}{4}$ 和 $x = -\frac{\pi}{4}$ 处有极小值 $y = -\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx -0.94$, 在 $x = \frac{\pi}{2}$

处有极小值 $y = \frac{2}{3}$; 在 $x = -\frac{\pi}{2}$ 处有极大值 $y = -\frac{2}{3}$, 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 和 $x = \frac{3\pi}{4}$ 处有极大值 $y = \frac{2}{3}\sqrt{2}$. 拐点: $x_1 = 0, y_1 = 0; x_{2,3} = \pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0.37\pi, y_{2,3} = \pm \frac{4}{27}\sqrt{30} \approx \pm 0.81; x_{4,5} = \pm \left(\pi - \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}}\right) \approx \pm 0.63\pi, y_{4,5} = \pm \frac{4}{27}\sqrt{30}; x_{6,7} = \pm \pi, y_{6,7} = 0$. **1500.** 函数的周期: $T = 2\pi$; 基本区域 $[-\pi; \pi]$. 关于 Oy 轴对称. 函数的零点: $x_{1,2} = \pm \arccos \frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx \pm 0.62\pi$. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = \frac{1}{2}$; 在 $x = \pm\pi$ 处有极小值 $y = -1\frac{1}{2}$; 在 $x = \pm\frac{\pi}{3}$ 处有极大值 $y = \frac{3}{4}$. 拐点: $x_{1,2} = \pm \arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.18\pi, y_{1,2} \approx 0.63; x_{3,4} = \pm \arccos \frac{1-\sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.70\pi, y_{3,4} \approx -0.44$.

1501. 函数的周期: $T = \frac{\pi}{2}$; 基本区域 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. 关于 Oy 轴对称. 函数值为正. 在 $x = 0$ 处有极大值 $y = 1$; 在 $x = \pm\frac{\pi}{4}$ 处有极小值 $y = \frac{1}{2}$. 拐点: $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{8}, y_{1,2} = \frac{3}{4}$. **1502.** 函数的周期: $T = \pi$; 基本区域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 关于 Oy 轴对称. 函数的零点: $x_1 = 0$ 和 $x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{3}$. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$ 和 $x = \pm\frac{\pi}{2}$ 处有极小值 $y = -1$; 在 $x = \pm \arccos \frac{1}{4} \approx \pm 0.21\pi$ 处有极大值 $y = \frac{9}{16}$. 拐点: $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1+\sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.11\pi, y_{1,2} \approx 0.29; x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.36\pi, y_{3,4} \approx -0.24$.

1503. 函数的周期: $T = \pi$; 基本区域 $0 \leq x \leq \pi$. 间断点: $x = \frac{3\pi}{4}$. 零点: $x_1 = 0, x_2 = \pi$. 没有极值点. 函数是递增的. 拐点: $x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 渐近线 $x = \frac{3\pi}{4}$. **1504.** (a) 函数的周期: $T = 2\pi$; 基本区域 $[-\pi, \pi]$. 关于 Oy 轴对称. 函数的零点: $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{2}$. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 1$; 在 $x = \pm\pi$ 处有极大值 $y = -1$. 拐点: $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{2}; y_{1,2} = 0$. 渐近线: $x = \pm\frac{\pi}{4}$ 和 $x = \pm\frac{3\pi}{4}$; (b) 函数的周期: $T = 2\pi$, 基本区域: $-\pi \leq x \leq \pi$. 奇函数. 在 $x = -\frac{2\pi}{3}$ 处有极小值 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0.58$; 在 $x = \frac{2\pi}{3}$ 处有极大值 $y = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.58$. 拐点: $x_1 = 0, y_1 = 0; x_{2,3} = \mp\pi, y_{2,3} = 0$.

1505. 对称中心 $(k\pi, 2k\pi)$. 函数的零点: $x_1 = 0$ 和 $x_{2,3} \approx \pm 0.37\pi, \dots$. 在 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 处有极大值 $y = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$; 在 $x = -(\frac{\pi}{4} + k\pi)$ 处有极小值 $y = -(\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi)$. 拐点: $x = k\pi, y = 2k\pi$. 渐近线: $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ (k 为整数).

1506. 关于直线 $x = 1$ 对称. 函数值为正. 在 $x = 1$ 处有极大值 $y = e$. 拐点: $x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, y_{1,2} = \sqrt{e} \approx 1.65$. 渐近线 $y = 0$. **1507.** 关于 Oy 轴对称. 函数值为正. 在 $x = 0$ 处有极大值 $y = 1$. 拐点: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1.22, y_{1,2} = \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.56$. 渐近线 $y = 0$.

1508. 函数值为正. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 1$. 凸. 渐近线: 在 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = x$. **1509.** (a) 函数值非负; 零点 $x = 0$. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$; 在 $x = \frac{2}{3}$ 处有极大值 $y = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.39$. 拐点: $x_1 = \frac{2-\sqrt{6}}{3} \approx -0.15, y_1 \approx 0.34$ 和 $x_2 = \frac{2+\sqrt{6}}{3} \approx 1.48, y_2 \approx 0.30$. 渐近线: 当 $x \rightarrow +\infty$ 是 $y = 0$. (b) 函数值非负. 在 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处有极小值 $y = 0$; 在 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 处有极大值 $y = \frac{1}{2}e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi}$. 拐点: $x_k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, y_k = \frac{1}{4}e^{-[2k+\frac{1}{2}(-1)^k]\pi}$.

1510. 函数在 $x > -1$ 时是正的, 在 $x < -1$ 时是负的. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 1$. 当 $x > -1$ 时凸和当 $x < -1$ 时凹. **1511.** 关于 Oy 轴对称. 函数值非负; 零点 $x = 0$. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$ (角点). 凹. **1512.** 函数的定义域: $x > 0$. 函数的零点 $x = 1$. 在 $x = e^2 \approx 7.39$ 处有极大值 $y = \frac{2}{e} \approx 0.74$. 拐点: $x = e^{\frac{8}{3}} \approx 14.33, y = \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}} \approx 0.70$. 渐近线: 当 $x \rightarrow +0$ 时 $x = 0$ 和当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = 0$.

1513. 关于坐标原点对称. 零点 $x = 0$. 没有极值点; 函数是递增的. 拐点: $x = 0, y = 0$. **1514.** 关于坐标原点对称. 函数的零点 $x = 0$. 函数是递增的. 在 $x > 0$ 时是凸的和在 $x < 0$ 时是凹的; $O(0, 0)$ 是拐点. **1515.** 函数的定义域: $|x| < 1$. 关于坐标原点对称. 函数是单调递增的. 在 $x > 0$ 时凸和在 $x < 0$ 时凹; 拐点: $x = 0, y = 0$. 渐近线: $x = \pm 1$.

1516. 关于坐标原点对称. 函数的零点: $x = 0$. 没有极值点; 函数是递增的. 拐点: $x = 0, y = 0$. 渐近线: 在 $x \rightarrow -\infty$ 时 $y = x - \frac{\pi}{2}$ 和在 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = x + \frac{\pi}{2}$.

1517. 函数的零点 $x \approx -5.95$. 在 $x = 1$ 处有极小值 $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \approx 1.285$; 在 $x = -1$ 处有极大值 $y = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \approx 1.856$. 在 $x > 0$ 时凸和在 $x < 0$ 时凹; 拐点: $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$. 渐近线: 在

$x \rightarrow -\infty$ 时 $y = \frac{\pi}{2} + \pi$ 和在 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = \frac{\pi}{2}$. **1518.** 关于 Oy 轴对称. 函数值非负; 零点 $x = 0$. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$. 凸. 渐近线: 当 $x \rightarrow -\infty$ 时 $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ 和在 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = \frac{\pi}{2}x - 1$. **1519.** 关于坐标原点对称. 函数的零点 $x = 0$. 在 $x = -1$ 处有极小值 $y = -\frac{\pi}{2}$ (角点); 在 $x = 1$ 处有极大值 $y = \frac{\pi}{2}$ (角点). 拐点: $x = 0, y = 0$. 渐近线 $y = 0$. **1520.** 关于 Oy 轴对称. 函数值非负; 零点 $x = 0$. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$ (角点). 凹. 渐近线 $y = \pi$. **1521.** 函数的间断点 $x = 0$. 函数的零点 $x = -2$. 在 $x = 2$ 处有极小值 $y = 4\sqrt{e} \approx 6.59$; 在 $x = -1$ 处有极大值 $y = \frac{1}{e} \approx 0.37$. 拐点: $x = -\frac{2}{5}, y = \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \approx 0.13$. 渐近线: $x = 0$ 和 $y = x + 3$. **1522.** 函数的定义域 $|x| \geq 1$. 关于 Oy 轴对称. 在 $x = \pm 1$ 处有边界极大值 $y = 2^{\sqrt{2}} \approx 2.67$. 凸. 渐近线 $y = 1$. **1523.** 函数的定义域 $x < 1$ 和 $x > 2$. 与坐标轴的交点为 $(0, \ln 2)$ 和 $(\frac{1}{3}, 0)$. 在 $x = \frac{1-\sqrt{10}}{3} \approx -0.72$ 处有极大值 $y \approx 1.12$. 渐近线 $x = 1, x = 2$ 和 $y = 0$. **1524.** 函数的定义域 $|x| \leq a$. 函数与坐标轴的交点: $(0, -a)$ 和 $(0.67a, 0)$ (近似的!). 函数是单调递增的. 在 $x = -a$ 处有边界极小值 $y = -\frac{\pi}{2}a$ 和在 $x = a$ 处有边界极大值 $y = \frac{\pi}{2}a$. 凸. **1525.** 函数的定义域: $x \leq 0$ 和 $x \geq \frac{2}{3}$. 在 $x = 0$ 处有边界极小值 $y = 0$; 在 $x = \frac{2}{3}$ 处有边界极大值 $y = \pi$. 在 $x \leq 0$ 时是凹的和在 $x \geq \frac{2}{3}$ 时是凸的. 渐近线 $y = \frac{\pi}{3}$. **1526.** 定义域: $x > 0$. 函数值为正. 在 $x = \frac{1}{e} \approx 0.368$ 处有极小值 $y = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} \approx 0.692$; 在 $x = +0$ 处有边界极大值 $y = 1$. 凸. **1527.** 函数的定义域: $x > 0$. 在 $x = +0$ 处有边界极小值 $y = 0$; 在 $x = e$ 处有极大值 $y = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.44$. 渐近线 $y = 1$. **1528.** 定义域: $x > -1, x \neq 0$. 函数值为正. 可去间断点: $x = 0$. 没有极值点; 函数是递减的. 凸. 渐近线: $x = -1$ 和 $y = 1$. **1529.** 函数在 $x > 0$ 时是单调的. 在 $x = +0$ 处有边界极小值 $y = 0$. 渐近线 $y = e(x - \frac{1}{2})$. **1530.** 函数值为正的. 关于 Oy 轴对称. 间断点: $x = \pm 1$. 在 $x = 0$ 处有极小值 $y = e$; 在 $x = \pm\sqrt{3}$ 处有极大值 $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$. 有 4 个拐点. 渐近线: 在 $x \rightarrow -1+0$ 时 $x = -1$, 在 $x \rightarrow 1-0$ 时 $x = 1$ 和当 $x \rightarrow \infty$ 时 $y = 0$. **1531.** 函数 x 和 y 都是非负的; 在 $t = -1$ 时 $x_{\min} = 0$; 在 $t = 1$ 时 $y_{\min} = 0$. 在 $t > -1$ 时凸和在 $t < -1$ 时凹. **1532.** 与坐标轴的交点: $t = 0$ 时 $(0, 0)$, $t = \pm\sqrt{3}$ 时 $(\pm 2\sqrt{3} - 3, 0)$ 和 $t = 2$ 时 $(0, -2)$; 在 $t = 1$ 时 $x_{\max} = 1$ 和 $y_{\max} = 2$ (尖点); 在 $t = -1$ 时 $y_{\min} = -2$. 当 $t < 1$ 时凸和当 $t > 1$ 时凹. **1533.** 与坐标轴的交点: $t = 0$ 时 $(0, 0)$; 在 $t = 0$ 时 $x_{\max} = 0$, 在 $t = 2$ 时 $x_{\min} = 4$; y 在 t 增长时是减少的. 在 $t \approx -0.32$ 时有拐点 $(-0.08, 0.3)$ (近似的). 渐近线: $y = 0, x = -\frac{1}{2}$ 和 $y = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}$. **1534.** 与 Oy 轴的交点: 在 $t = 0$ 时 $(0, 1)$; 与 Ox 轴的交点: 在 $t \rightarrow \infty$ 时 $(-1, 0)$. 边界极值: 在 $t = 0$ 时 $x_{\min} = 0$ 和 $y_{\max} = 1$; 在 $t \rightarrow \infty$ 时 $x_{\max} = -1$ 和 $y_{\min} = 0$. 没有拐点. 渐近线 $y = \frac{1}{2}$. 在 $|t| > 1$ 时凸, 在 $|t| < 1$ 时凹. **1535.** 函数 x 和 y 都是正的; 在 $t = 0$ 时 $x_{\min} = 1$ 和 $y_{\min} = 1$ (尖点). 在 $t < 0$ 时凸; 在 $t > 0$ 时凹. 渐近线在 $t \rightarrow +\infty$ 时 $y = 2x$. **1536.** 基本区域: $[0, \pi]$. 与坐标轴的交点: 在 $t = \frac{\pi}{6}$ 时 $(\frac{a}{2}, 0)$; 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 时 $(0, -\frac{a}{\sqrt{2}})$; 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 时 $(-a, 0)$; 在 $t = \frac{3\pi}{4}$ 时 $(0, \frac{a}{\sqrt{2}})$; 在 $t = \frac{5\pi}{6}$ 时 $(\frac{a}{2}, 0)$. 极值: 在 $t = 0$ 时 $x_{\max} = a$ 和 $y_{\max} = a$; 在 $t = \frac{\pi}{3}$ 时 $y_{\min} = -a$; 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 时 $x_{\min} = -a$; 在 $t = \frac{2\pi}{3}$ 时 $y_{\max} = a$; 在 $t = \pi$ 时 $x_{\max} = a$ 和 $y_{\min} = -a$. 在 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时凸; 在 $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ 时凹. **1537.** 函数 x 和 y 是非负的, 并且是周期的; 基本区域 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. 极值: 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时有 $x_{\min} = 0, y_{\max} = 1$; 当 $t = 0$ 时有 $x_{\max} = 1, y_{\min} = 0$. 凸. **1538.** 定义域: $t > 0$. 关于直线 $x + y = 0$ 对称. 极值: 当 $t = \frac{1}{e}$ 时有 $x_{\min} = -\frac{1}{e} \approx -0.37, y = -e \approx -2.72$; 当 $t = e$ 时有 $y_{\max} = \frac{1}{e}, x = e$. 拐点: 当 $t = e^{-\sqrt{2}} \approx 0.24$ 时, $x_1 = -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} \approx 0.34, y_1 = -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} \approx 5.82$ 和当 $t = e^{\sqrt{2}} \approx 4.10$ 时 $x_2 = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, y_2 = \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$. 当 $t = \frac{1}{e}$ 时改变凹凸性. 渐近线: $x = 0$ 和 $y = 0$. **1539.** 函数 x

和 y 是周期为 $T = 2\pi$ 的周期函数; 基本区域: $-\pi \leq t \leq \pi$. 曲线关于两坐标轴对称. 曲线有两支. 极值: 当 $t = 0$ 时有 $x_{\min} = a, y = 0$; 当 $t = \pm\pi$ 时有 $x_{\max} = -a, y = 0$. 当 $-\pi < t < -\frac{\pi}{2}$ 和 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时凸; 当 $-\frac{\pi}{2} < t < 0$ 和 $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ 时凹. **1540.** 关于 Oy 轴对称; 当 $t = 0$ 时有 $y_{\min} = 0, x = 0$. 凹. **1541.** 参数方程: $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ ($-\infty < t < +\infty$). 关于直线 $y = x$ 对称. 与坐标轴的交点是 $O(0, 0)$ (二重点). 在 $y = a\sqrt[3]{2} \approx 1.2a$ 处有 $x_{\max} = \sqrt[3]{4} \approx 1.59a$; 在 $x = a\sqrt[3]{2}$ 处有 $y_{\max} = a\sqrt[3]{4}$. 渐近线 $x + y + a = 0$. **1542.** 关于坐标原点、坐标轴和坐标的角平分线对称; $O(0, 0)$ 是孤立点. 与坐标轴的交点: $(\pm 1, 0)$ 和 $(0, \pm 1)$. 在 $y = 0$ 处有 $|x|_{\min} = 1$; 在 $|y| = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.71$ 处有 $|x|_{\max} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} \approx 1.10$; 在 $x = 0$ 处有 $|y|_{\min} = 1$; 在 $|x| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ 处有 $|y|_{\max} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$. **1543.** 参数方程: $x = \frac{1-t^3}{t^2}, y = \frac{1-t^3}{t}$, 其中 $t = \frac{y}{x}$ ($-\infty < t < +\infty$). 曲线有两支. 关于直线 $x + y = 0$ 对称. 极值: 当 $t = -\sqrt[3]{2} \approx -1.26$ 时有 $x_{\min} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx 1.89, y = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx -2.38$; 当 $t = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx -0.79$ 时有 $y_{\max} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}, x = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$. 拐点: 当 $t = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})} \approx -1.90$ 时 $x_1 \approx 2.18, y_1 \approx -4.14$; 当 $t = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})} \approx -0.53$ 时 $x_2 \approx 4.14, y_2 \approx -2.18$; 当 $t = -\sqrt[3]{2}$ 时改变凹凸性. **1544.** 曲线由直线 $y = x$ 和双曲线的一支 $x = (1+t)^{\frac{1}{t}}, y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}$ ($-1 < t < +\infty$) 组成. (e, e) 是二重点. 当 $x \neq y$ 时凸. 渐近线: $x = 1$ 和 $y = 1$. **1545.** 定义域: $|x| \geq \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.88$. 关于坐标轴对称. 曲线在 $x = \pm \ln(1+\sqrt{2})$ 处有边界极小值 $|y| = 0$. 当 $y > 0$ 时凹和当 $y < 0$ 时凸. 渐近线: $y = x$ 和 $y = -x$. **1546.** 函数的定义域: $r \geq 0, |\varphi| \leq \alpha$, 其中 $\alpha = \arccos(-\frac{a}{b})$. 曲线是封闭的. 关于极轴对称. 曲线在 $\varphi = 0$ 处有极大值 $r = a + b$; 在 $\varphi = \pm\alpha$ 处有边界极小值 $r = 0$. **1547.** 定义域: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi; \frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$. 函数 r 是以周期为 $\frac{2\pi}{3}$ 的周期函数. 曲线是封闭的, 且有三条相同的蔓叶线. 对称轴: $\varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{5\pi}{6}$ 和 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. 坐标原点 $O(0, 0)$ 为三重重点. 当 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ 时, 在 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 处有极大值 $r = a$, 在 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 时有极小值 $r = 0$. **1548.** 函数的定义域: $|\varphi| < \frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}$; 周期为 $\frac{2\pi}{3}$. 在 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$ 处有极小值 $r = a$. 渐近线: $\varphi = \pm\frac{\pi}{6}, \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ 和 $\varphi = \pm\frac{5\pi}{6}$. **1549.** 以坐标原点为渐近点的螺线; r 随 φ 的递增而单调递减. 渐近线 $\varphi = 1$. **1550.** 定义域 $r \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$. 曲线当 $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时有边界极大值 $\varphi = \pi$; 当 $r = 2$ 时有极小值 $\varphi = \arccos \frac{1}{4} \approx \arccos 75^\circ 30'$. 渐近线: 当 $r \rightarrow +\infty$ 时 $r \cos \varphi = 1$. **1551.** 以 $(1, a-1)$ (极小值) 为顶点的抛物线族. 与坐标轴的交点: $(0, a)$ 和 $(1 \mp \sqrt{1-a}, 0)$ ($a \leq 1$). 凸. **1552.** 当 $a \neq 0$ 时为双曲线族; 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$. 在 $x = |a|$ 处有极小值 $y = 2|a|$; 在 $x = -|a|$ ($a \neq 0$) 处有极大值 $y = -2|a|$. 渐近线 $y = x$ 和 $x = 0$. **1553.** 当 $0 < a < +\infty$ 为椭圆族; 当 $-\infty < a < 0$ 为双曲线族; 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$. 族中的所有的曲线都经过点 $(-1, -1)$ 和 $(1, 1)$. 当 $y \geq x$ 时有: (1) 当 $a > 0$ 时, 在 $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 处有极大值 $y = \sqrt{1+a}$; 当 $-1 < a < 0$ 时, 在 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 处有极大值 $y = -\sqrt{1+a}$; 在 $x = \mp 1$ ($a \neq 0$) 处有边界极小值 $y = \mp 1$. (2) 凹. 在 $y \leq x$ 时有: (1) 当 $a > 0$ 时, 在 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 处有极小值 $y = -\sqrt{1+a}$; 当 $-1 < a < 0$ 时, 在 $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 处有极小值 $y = \sqrt{1+a}$; 在 $x = \mp 1$ 处有边界极大值 $y = \mp 1$; (2) 凸. 渐近线: $y = (1 + \sqrt{-a})x$ 和 $y = (1 - \sqrt{-a})x$ ($a < 0$). **1554.** 当 $a \neq 0$ 时为指数曲线族; 当 $a = 0$ 时为直线 $y = 1 + \frac{x}{2}$. 族的公共点 $(0, 1)$. 当 $a > 0$ 时, 在 $x = \frac{1}{a} \ln 2a$ 处有极小值 $y = \frac{1}{2a}(1 + \ln 2a)$; 当 $a \leq 0$ 时, y 单调递增. 渐近线 $y = \frac{x}{2}$. **1555.** 曲线族过点 $(0, 0)$, 且有公共的切线 $y = x$. 当 $a > 0$ 时, 在 $x = a$ 处有极大值 $y = ae^{-1} \approx 0.37a$; 当 $a < 0$ 时, 在 $x = a$ 处有极小值 $y = ae^{-1}$. 拐点

- $x = 2a, y = 2ae^{-2} \approx 0.27a$. 渐近线 $y = 0$. 1558. $\frac{a^{m+n} m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$. 1559. $(m+n) \left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n} \right)^{\frac{1}{m+n}}$.
 1560. 对数组的底不能超过 $e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$. 1561. 边为 \sqrt{S} 的正方形. 1562. 三角形的锐角为 30° 和 60° . 1563. 罐子的高 $H = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 等于其底的直径; 表面积 $P = \sqrt[3]{54\pi V^2}$. 1564.
 $\cos \varphi = \frac{\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + 8}}{4}$, 其中 2α 为矩形的一边所对应弧的弧度, 2φ 为弓形的弧度. 1565. 矩形的边长分别为 $a\sqrt{2}$ 和 $b\sqrt{2}$. 1566. 若 $h > b$, 则以底为 x 、高为 y 的内接矩形的周长 P 在 $y = h$ 处取得边界最大值; 若 $h < b$, 则 P 在 $y = 0$ 处取得边界最小值; 若 $h = b$, 则周长 P 为常数. 1567. $b = \frac{d}{\sqrt{3}}, h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$. 1568. 长方体的尺寸为 $\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}$ 和 $\frac{R}{\sqrt{3}}$. 1569. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} R^3$.
 1570. $\pi R^2(1+\sqrt{5}) \approx$ 球的表面积的 81%. 1571. 圆锥的体积为球的体积的 2 倍. 1572. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} l^3$. 1573. 若 $\tan \alpha < \frac{1}{2}$, 则圆柱表面积的极大值在 $r = \frac{R}{2(1-\tan \alpha)}$ 时达到, 其中 r 为圆柱底的半径. 若 $\tan \alpha \geq \frac{1}{2}$, 则当 $r = R$ 时有边界极大值. 1574. $p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\frac{2+\sqrt[3]{2}}{2}}$. 1575. 1; 3. 1576.
 若 $b \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$, 则当 $x = \pm \frac{a^2}{c^2} \sqrt{a^2 - 2b^2}, y = \frac{b^3}{c^2}$ 时弦长 MB 达到极大值 $\frac{a^2}{c}$, 其中 $c^2 = \sqrt{a^2 - b^2}$, 且点 M 的坐标为 x 和 y ; 若 $b > \frac{a}{\sqrt{2}}$, 则当 $x = 0, y = b$ 时弦长 MB 达到边界极大值 $2b$.
 1577. $x = \frac{a}{\sqrt{2}}, y = \frac{b}{\sqrt{2}}; ab$. 1578. 当 $r = h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ 时表面积达到极大值, 其中 r 为圆柱的底的半径, h 为它的高. 1579. $\varphi = 60^\circ$. 1580. 外切于圆的梯形. 腰 $AB = CD = a \sec^2 \frac{\alpha}{2}$.
 1581. $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \text{arc } 294^\circ$, 其中 α 为余下部分的中心角. 1582. 当 $\arccos \frac{q}{p} \geq \arctan \frac{a}{b}$ 时 $\varphi = \arccos \frac{q}{p}$; 当 $\arccos \frac{q}{p} < \arctan \frac{a}{b}$ 时 $\varphi = \arctan \frac{a}{b}$. 1583. $\frac{|av \mp bu| \sin \theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta}}$. 1584.
 $AM = a \left(1 + \sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}} \right)^{-1}$. 1585. 发光点到大球中心的距离, 当 $a \geq r + R\sqrt{\frac{R}{r}}$ 时 $x = \frac{a}{1 + (\frac{r}{R})^{\frac{3}{2}}}$, 当 $r + R < a < r + R\sqrt{\frac{R}{r}}$ 时, $x = a - r$, 其中 a 为两球球心之间的距离. 1586. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
 1587. $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$. 1588. $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$, 其中 k 为比例系数. 1589. $\arctan k$. 1590. 当 $l \leq 4a$ 时, 小棒的倾角由公式 $\cos \alpha = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}$ 确定; 当 $l > 4a$ 时没有平衡的位置. 1591.
 $k = -3; b = 3; y = 3(1-x)$. 1592. $a = \frac{1}{2}e^{x_0}; b = e^{x_0}(1-x_0); c = e^{x_0} \left(1 - x_0 + \frac{x_0^2}{2} \right)$. 1593. (a) 一阶; (b) 二阶; (c) 二阶. 1595. (a) $\sqrt{2}, (2, 2)$; (b) 500 000, (150, 500 000) (近似!). 1596. $p \left(1 + \frac{2x}{p} \right)^{\frac{3}{2}}$. 1597. $\frac{(a^2 - \varepsilon^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, 其中 $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 是椭圆的离心率. 1598.
 $\frac{(\varepsilon^2 x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, 其中 $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ 是双曲线的离心率. 1599. $3|axy|^{\frac{1}{3}}$. 1600. $\frac{a^2}{b} (1 - \varepsilon^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$, 其中 ε 为椭圆的离心率. 1601. $2\sqrt{2ay}$. 1602. at . 1604. $\frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}$. 1605. $\frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2}$.
 1606. $r\sqrt{1+m^2}$. 1607. $\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$. 1608. $\frac{a^2}{3r}$. 1609. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2} \right)$. 1610. $x_0 \approx 680$ m. 1611. 半立方抛物线 $27p\eta^2 = 8(\xi - p)^3$. 1612. 星形线 $(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$, 其中 $c^2 = a^2 - b^2$. 1613. 星形线 $(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$. 1614. 悬链线 $\eta = a \cosh \frac{\xi}{a}$. 1615. 对数螺线 $\rho = ma e^{m(\psi - \frac{\pi}{2})}$. 1616. $\xi = \pi a + a(\tau - \sin \tau); \eta = -2a + a(1 - \cos \tau)$, 其中 $\tau = t - \pi$.
 1617. $x_1 = -2.602; x_2 = 0.340; x_3 = 2.262$. 1618. $x_1 = -0.724; x_2 = 1.221$. 1619. $x = 2.087 = \text{arc } 119^\circ 35'$. 1620. ± 0.824 . 1621. $x_1 = 0.472; x_2 = 9.999$. 1622. $x_1 = 2.506$ 2. 1623. $x_1 = 4.730; x_2 = 7.853$. 1624. $x = -0.567$ 15. 1625. $x = \pm 1.199$ 678. 1626.
 $x_1 = 4.493; x_2 = 7.725; x_3 = 10.904$. 1627. $x_1 = 2.081; x_2 = 5.940$.

第三章

为简便起见, 本章答案中要加上的任意常数 C 被省略了.

1628. $27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$. 1629. $\frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7$. 1630. $x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4$. 1631. $x - \frac{1}{x} - 2\ln|x|$. 1632. $a \ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2}$. 1633. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$. 1634. $\frac{4}{5}x^4\sqrt{x} - \frac{24}{17}x^{12}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$. 1635. $-\frac{3}{\sqrt{x}} \cdot (1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3)$. 1636. $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt{x}}$. 1637. $2x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}$. 1638. $\ln|x| - \frac{1}{4x^4}$. 1639. $x - \arctan x$. 1640. $-x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. 1641. $x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. 1642. $\arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. 1643. $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|$. 1644. $\frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9}$. 1645. $-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$. 1646. $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$. 1647. $x - \cos x + \sin x$. 1648. $(\cos x + \sin x) \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)$. 1649. $-x - \cot x$. 1650. $-x + \tan x$. 1651. $a \cosh x + b \sinh x$. 1652. $x - \tanh x$. 1653. $x - \coth x$. 1655. $\ln|x+a|$. 1656. $\frac{1}{22}(2x-3)^{11}$. 1657. $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$. 1658. $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$. 1659. $-\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}}$. 1660. $-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}$. 1661. $\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \arctan\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. 1662. $\frac{2}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{2+x}\sqrt{3}}{\sqrt{2-x}\sqrt{3}}\right|$. 1663. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. 1664. $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln|x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2-2}|$. 1665. $-(e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x})$. 1666. $-x \sin 5\alpha - \frac{1}{5} \cos 5x$. 1667. $-\frac{1}{2} \cot(2x + \frac{\pi}{4})$. 1668. $\tan \frac{x}{2}$. 1669. $-\cot \frac{x}{2}$. 1670. $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$. 1671. $\frac{1}{2}[\cosh(2x+1) + \sinh(2x-1)]$. 1672. $2 \tanh \frac{x}{2}$. 1673. $-2 \coth \frac{x}{2}$. 1674. $-\sqrt{1-x^2}$. 1675. $\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}$. 1676. $-\frac{1}{4} \ln|3-2x^2|$. 1677. $-\frac{1}{2(1+x^2)}$. 1678. $\frac{1}{4} \arctan \frac{x^2}{2}$. 1679. $\frac{1}{8\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^4\sqrt{2}}{x^4\sqrt{2}}\right|$. 1680. $2 \arctan \sqrt{x}$. 1681. $\cos \frac{1}{x}$. 1682. $-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$. 1683. $-\arcsin \frac{1}{|x|}$. 1684. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. 1685. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. 1686. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}$. 1687. $2 \operatorname{sgn} x \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|x+1|})$ ($x(1+x) > 0$). 1688. $2 \arcsin \sqrt{x}$. 1689. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. 1690. $\ln(2+e^x)$. 1691. $\arctan e^x$. 1692. $-\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}})$. 1693. $\frac{1}{3} \ln^3 x$. 1694. $\ln|\ln(\ln x)|$. 1695. $\frac{1}{6} \sin^6 x$. 1696. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}$. 1697. $-\ln|\cos x|$. 1698. $\ln|\sin x|$. 1699. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}$. 1700. (a) $\frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2}$ ($a^2 \neq b^2$); (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2} \cos x + \sqrt{\cos 2x}|$; (c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2} \sin x)$; (d) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} \cosh x + \sqrt{\cosh 2x})$. 1701. $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cot^3 x}$. 1702. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$. 1703. $\ln|\tan \frac{x}{2}|$. 1704. $\ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})|$. 1705. $\ln|\tanh \frac{x}{2}|$. 1706. $2 \arctan e^x$. 1707. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln\left(\frac{\cosh 2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\sinh^4 x + \cosh^4 x}\right)$. 1708. $3\sqrt[3]{\tanh x}$. 1709. $\frac{1}{2}(\arctan x)^2$. 1710. $-\frac{1}{\arcsin x}$. 1711. $\frac{2}{3} \ln^{\frac{2}{3}}(x + \sqrt{1+x^2})$. 1712. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$. 1713. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$. 1714. $-\frac{1}{15(x^5+1)^3}$. 1715. 当 $n \neq -2$ 时为 $\frac{2}{n+2} \ln(x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}})$; 当 $n = -2$ 时为 $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x|$. 1716. $\frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x}$. 1717. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x\right)$. 1718. $\frac{1}{2} \arctan(\cos 2x)$. 1719. $\frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^{x+2^x}}\right|$. 1720. $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. 1721. (a) $\frac{4}{3}x^3 - \frac{12}{5}x^5 + \frac{9}{7}x^7$; (b) $-\frac{(1-x)^{11}}{11} + \frac{(1-x)^{12}}{12}$. 1722. $-x - 2\ln|1-x|$. 1723. $\frac{1}{2}(1-x)^2 + \ln|1+x|$. 1724. $9x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - 27\ln|3+x|$. 1725. $x + \ln(1+x^2)$. 1726. $\frac{3}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}\right| + 2\ln|2-x^2| - x$. 1727. $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}}$. 1728. $\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1|$. 1729. $\frac{1}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}]$. 1730. $-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}}$. 1731. $-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{3}{2}}$. 1732. $\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}$. 1733. $\frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|$. 1734. $\frac{1}{3} \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$. 1735. $\arctan x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}$. 1736. $\frac{1}{10\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{5\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}}$. 1737. $\ln \frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$.

1738. $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{x^2+2}$. 1739. $-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)^3} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right|$. 1740. $\frac{1}{a^2-b^2} \left(\frac{1}{b} \arctan \frac{x}{b} - \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right) (|a| \neq |b|)$. 1741. $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$. 1742. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$. 1743. $\frac{x}{2} \cos \alpha - \frac{1}{4} \sin(2x + \alpha)$. 1744. $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x$. 1745. $3 \sin \frac{x}{6} + \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6}$. 1746. $-\frac{1}{10} \cos(5x + \frac{\pi}{12}) + \frac{1}{12} \cos(x + \frac{5\pi}{12})$. 1747. $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$. 1748. $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$. 1749. $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$. 1750. $\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$. 1751. $-x - \cot x$. 1752. $\frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x|$. 1753. $-\frac{3}{16} \cos 2x - \frac{3}{64} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 6x + \frac{3}{128} \cos 8x - \frac{1}{192} \cos 12x$. 1754. $\tan x - \cot x$. 1755. $-\frac{1}{\sin x} + \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$. 1756. $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\tan x|$. 1757. $\ln |\sin x| - \frac{1}{2} \sin^2 x$. 1758. $\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$. 1759. $x - \ln(1 + e^x)$. 1760. $x + 2 \arctan e^x$. 1761. $-\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2x$. 1762. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2x$. 1763. $\frac{2}{3} \sinh^3 x$. 1764. $\frac{1}{4} \sinh 2x + \frac{1}{8} \sinh 4x$. 1765. $-(\tanh x + \coth x)$. 1766. $-\frac{3}{140} (9 + 12x + 14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}$. 1767. $-\frac{1+55x^2}{6 \cdot 600} (1-5x^2)^{11}$. 1768. $-\frac{2}{15} (32 + 8x + 3x^2) \sqrt{2-x}$. 1769. $-\frac{1}{15} (8 + 4x^2 + 3x^4) \sqrt{1-x^2}$. 1770. $-\frac{6+25x^3}{1000} (2-5x^3)^{\frac{5}{3}}$. 1771. $(\frac{2}{3} - \frac{4}{7} \sin^2 x + \frac{2}{11} \sin^4 x) \sqrt{\sin^3 x}$. 1772. $-\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x)$. 1773. $\frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x$. 1774. $\frac{2}{3} (-2 + \ln x) \sqrt{1 + \ln x}$. 1775. $-x - 2e^{-\frac{x}{2}} + 2 \ln(1 + e^{\frac{x}{2}})$. 1776. $x - 2 \ln(1 + \sqrt{1 + e^x})$. 1777. $(\arctan \sqrt{x})^2$. 1778. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 1779. $\frac{x}{2} \sqrt{x^2-2} + \ln |x + \sqrt{x^2-2}|$. 1780. $\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$. 1781. $\frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}}$. 1782. $-\sqrt{a^2-x^2} + a \arcsin \frac{x}{a}$. 1783. $-\frac{3a+x}{2} \sqrt{x(2a-x)} + 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}}$. 1784. $2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$. 1785. $\frac{2x-(a+b)}{4} \sqrt{(x-a)(b-a)} + \frac{(b-a)^2}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$. 1786. $\frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$. 1787. $\frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$. 1788. 当 $x > a$ 时为 $\sqrt{x^2-a^2} - 2a \ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a})$; 当 $x < -a$ 时为 $-\sqrt{x^2-a^2} - 2a \ln(\sqrt{-x+a} + \sqrt{-x-a})$. 1789. 当 $x+a > 0$ 和 $x+b > 0$ 时为 $2 \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b})$; 当 $x+a < 0$ 和 $x+b < 0$ 时为 $-2 \ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b})$. 1790. 当 $x+a > 0$ 和 $x+b > 0$ 时为 $\frac{2x+a+b}{4} \sqrt{(x+a)(x+b)} - \frac{(b-a)^2}{4} \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b})$. 1791. $x(\ln x - 1)$. 1792. $\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) (n \neq -1)$. 1793. $-\frac{1}{x} (\ln^2 x + 2 \ln x + 2)$. 1794. $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9})$. 1795. $-(x+1)e^{-x}$. 1796. $-\frac{e^{-2x}}{2} (x^2 + x + \frac{1}{2})$. 1797. $-\frac{x^2+1}{2} e^{-x^2}$. 1798. $x \sin x + \cos x$. 1799. $-\frac{2x^2-1}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x$. 1800. $x \cosh x - \sinh x$. 1801. $(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9}) \sinh 3x - (\frac{x^2}{3} + \frac{2}{27}) \cosh 3x$. 1802. $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$. 1803. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. 1804. $-\frac{x}{2} + \frac{1+x^2}{2} \arctan x$. 1805. $-\frac{2+x^2}{9} \sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{3} \arccos x$. 1806. $-\frac{\arcsin x}{x} - \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right|$. 1807. $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$. 1808. $x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$. 1809. $-\sqrt{x} + (1+x) \arctan \sqrt{x}$. 1810. $\ln |\tan \frac{x}{2}| - \cos x \cdot \ln \tan x$. 1811. $\frac{1}{3} (x^3-1)e^{x^3}$. 1812. $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x$. 1813. $\frac{1+x^2}{2} (\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$. 1814. $-\frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{3} \ln |1-x^2| + \frac{x^3}{3} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$. 1815. $\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x$. 1816. $-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x$. 1817. $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} (a \neq 0)$. 1818. $\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} (a \neq 0)$. 1819. $\frac{x}{2} \sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln |x + \sqrt{x^2+a}|$. 1820. $\frac{x(2x^2+a^2)}{8} \sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$. 1821. $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{\cos 2x}{8}$. 1822. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$. 1823. $2(6-x)\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 6(2-x) \sin \sqrt{x}$. 1824. $-\frac{(1-x)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}$. 1825. $\frac{(1+x)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}$. 1826. $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$. 1827. $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$. 1828. $\frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2} e^{ax}$. 1829. $\frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax}$. 1830. $\frac{e^{2x}}{8} (2 - \sin 2x - \cos 2x)$. 1831. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x - e^x (\cos x + \sin x) + \frac{1}{2} e^{2x}$. 1832. $-x + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) - e^{-x} \operatorname{arccot}(e^x)$. 1833. $-[x + \cot x + \cot x \ln(\sin x)]$. 1834. $x \tan x + \ln |\cos x|$. 1835. $\frac{e^x}{x+1}$. 1836. 当 $ab > 0$

- 时为 $\frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{ab}} \arctan \left(x \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$; 当 $ab < 0$ 时为 $\frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{|a|+x}\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|-x}\sqrt{|b|}} \right|$. 1837. $\frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{7}}$.
1838. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{3x+1} \right|$. 1839. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)} \right|$. 1840. $\frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.
1841. $\frac{1}{2} \ln(x^2-2x \cos \alpha + 1) + \cot \alpha \cdot \arctan \frac{x-\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ($\alpha \neq k\pi$, k 为整数). 1842. $\frac{1}{4} \ln(x^4-x^2+2) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}$. 1843. $\frac{1}{9} \ln\{|x^3+1|(x^3-2)^2\}$. 1844. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{3 \sin x - 5 \cos x}{\sin x - \cos x} \right|$. 1845. $\arctan \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{2}$.
1846. 当 $b > 0$ 时为 $\frac{1}{\sqrt{b}} \ln |x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}|$; 当 $a > 0$ 且 $b < 0$ 时为 $\frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin \left(x \sqrt{-\frac{b}{a}} \right)$. 1847. $\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}$. 1848. $\ln |x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}|$. 1849. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + 1} \right)$.
1851. $-\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{21}}$. 1852. $\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right)$.
1853. (a) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}$; (b) $\arcsin \frac{2 \sin x - 1}{3}$. 1854. $\frac{1}{2} \sqrt{x^4-2x^2-1} + \frac{1}{2} \ln |x^2-1 + \sqrt{x^4-2x^2-1}|$.
1855. $-\frac{1}{2} \sqrt{1+x^2-x^4} + \frac{3}{4} \arcsin \frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}$. 1856. $-\ln \left| \frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x} \right|$.
1857. $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-2}{|x|\sqrt{5}}$ ($|x + \frac{1}{2}| > \frac{\sqrt{5}}{2}$). 1858. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x} \right|$.
1859. $\arcsin \frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}$ ($|x| > \sqrt{2}$). 1860. $\frac{1}{5} \frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x+2} + \frac{1}{5\sqrt{5}} \arcsin \frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}}$ ($|x+1| > \sqrt{6}$). 1861. $\frac{2x-1}{4} \sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3}$.
1862. $\frac{2x+1}{4} \sqrt{2+x+x^2} + \frac{7}{8} \ln \left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{2+x+x^2} \right)$. 1863. $\frac{x^2+1}{4} \cdot \sqrt{x^4+2x^2-1} - \frac{1}{2} \ln |x^2+1 + \sqrt{x^4+2x^2-1}|$.
1864. $-\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1-2x}{\sqrt{5}} - \ln \left| \frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x} \right|$ ($|x - \frac{1}{2}| < \frac{\sqrt{5}}{2}$ 及 $x \neq 0$). 1865. $\ln \left| \frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x} \right|$. 1866. $\ln |x-2| + \ln |x+5|$. 1867. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3} \right|$.
1868. $\frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} + 171x + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{(x+2)^{1024}} \right|$. 1869. $x + \frac{1}{6} \ln |x| - \frac{9}{2} \ln |x-2| + \frac{28}{3} \ln |x-3|$.
1870. $x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{8}{3} \arctan \frac{x}{2}$. 1871. $-\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$. 1872. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln |x^2-1|$. 1873. $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right|$.
1874. $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}} \right|$. 1875. $-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$. 1876. $\arctan x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4}$. 1877. $\frac{1}{2} \operatorname{arccot} x + \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.
1878. $-\frac{1}{x-2} - \arctan(x-2)$. 1879. $-\frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{50} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}$. 1880. $\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1+2x}{\sqrt{3}}$.
1881. $\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. 1882. $\frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.
1883. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x$. 1884. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.
1885. $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. 1886. $\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{6} \arctan x^3$.
1887. $-\frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. 1888. $\frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.
1889. $\frac{2}{5} \ln \frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}} + \frac{8}{5} \arctan(x + \frac{1}{2}) - \frac{2}{5} \arctan(2x+1)$. 1890. $a+2b+3c=0$. 1891. $-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$.
1892. $\frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{3}$. 1893. $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \arctan x$. 1894. $\frac{1}{x^2+2x+2} + \arctan(x+1)$.
1895. $\frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{3}{8\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$. 1896. $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.
1897. $\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{128} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{21}{64} \arctan x$. 1898. $\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}$.
1899. $\frac{-486x^5+357x^4-810x^3-315x^2+312x-488}{1922(x^3+x+1)^2}$. 1900. $-\frac{x}{x^5+x+1}$ (整个积分!). 1901. $\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.
1902. $a\gamma + c\alpha = 2b\beta$ 或 $b^2 - ac = 0$. 1903. $\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}}$. 1904. $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| -$

- $\frac{1}{4} \arctan x^2$. 1905. $\frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{x^4}{\sqrt{3}}$. 1906. $\frac{1}{12} \ln \frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{3} \arctan x^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$.
1907. $\frac{5}{8} \ln \frac{x^4}{x^4+2} - \ln \frac{x^4}{x^4+1}$. 1908. $-\frac{1}{100} \left(\frac{x^5}{x^{10}-10} + \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}} \right| \right)$. 1909. $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}$. 1910. $-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)} - \frac{1}{10} \arctan(x^5+1)$. 1911. $\frac{1}{n}(x^n - \ln|x^n+1|) (n \neq 0)$, 当 $n=0$ 时为 $\frac{1}{2} \ln|x|$. 1912. $\frac{1}{2n} \left(\arctan x^n - \frac{x^n}{x^{2n+1}} \right) (n \neq 0)$. 1913. $\frac{1}{20} \ln \frac{x^{10}}{x^{10}+2}$. 1914. $\frac{1}{10(x^{10}+1)} + \frac{1}{10} \ln \frac{x^{10}}{x^{10}+1}$. 1915. $\frac{1}{7} \ln \frac{|x^7|}{(1+x^7)^2}$. 1916. $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1} \right|$. 1917. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$.
1918. $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}$. 1919. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}$. 1920. $\arctan x + \frac{1}{3} \arctan x^3$. 1921. $I_n = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{\Delta} I_{n-1}$, 其中 $\Delta = 4ac - b^2 \neq 0$; $I_3 = \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. $\Delta = 0$ 时, $I_n = \frac{1}{a^n(1-2n)} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^{1-2n}$. 1922. $I = \frac{1}{(b-a)^{m+n-1}} \int \frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m} dt$; $\frac{1}{625} \left(-\frac{1}{t} + 3t - \frac{t^2}{2} - 3 \ln|t|\right)$, 其中 $t = \frac{x-2}{x+3}$. 1923. $-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}} + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} \ln|x-a|$.
1924. $R(x) = P(x^2) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{A_{ij}}{(a_i-x)^j} + \frac{A_{ij}}{(a_i+x)^j} \right]$, 其中 P 为多项式, $\pm a_i (i=1, \dots, k)$ 为分母的根, A_{ij} 为常系数. 1925. $-\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n} \ln \left(1 - 2x \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n} + x^2 \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \sin \frac{\pi(2k-1)}{2n} \arctan \frac{x - \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n}}{\sin \frac{\pi(2k-1)}{2n}} \right\}$. 1926. $2\sqrt{x} - 2 \ln(1 + \sqrt{x})$.
1927. $\frac{3}{4} \ln \frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2(1-\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x})^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{7}}$. 1928. $\frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4} \ln|t-1| + \frac{15}{8} \ln(t^2+t+2) - \frac{27}{8\sqrt{7}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{7}}$, $t = \sqrt[3]{2+x}$. 1929. $6t - 3t^2 - 2t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{7}t^7 + 3 \ln(1+t^2) - 6 \arctan t$, 其中 $t = \sqrt[6]{x+1}$. 1930. $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$. 1931. $\frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-1}|$. 1932. $-\frac{3}{2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. 1933. $-\frac{at^3}{1+t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+t\sqrt{2}+t^2}{1-t\sqrt{2}+t^2} + \frac{a}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}$, 其中 $t = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$. 1934. $-\frac{n}{a-b} \sqrt{\frac{x-b}{x-a}}$. 1935. $\frac{x}{2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \sqrt{x(1+x)} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})$.
1937. $-\frac{3-2x}{4} \sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{8} \ln \left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{1+x+x^2} \right)$. 1938. $-\ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right|$. 1939. $\frac{2-x}{3(1-x)^2} \sqrt{1-x^2}$. 1940. $R + \ln(x+1+R) - \sqrt{2} \ln \left| \frac{x+2+\sqrt{2}R}{x} \right|$, 其中 $R = \sqrt{x^2+2x+2}$. 1941. $\arcsin \frac{1+2x}{\sqrt{5}} + \ln \left| \frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x} \right|$. 1942. $\frac{1-2x}{4} \sqrt{1+x-x^2} - \frac{11}{8} \arcsin \frac{1-2x}{\sqrt{5}}$. 1943. $-\frac{19+5x+2x^2}{6} \sqrt{1+2x-x^2} - 4 \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{2}}$. 1944. $\left(\frac{63}{256}x - \frac{21}{128}x^3 + \frac{21}{160}x^5 - \frac{9}{80}x^7 + \frac{x^9}{10} \right) \sqrt{1+x^2} - \frac{63}{256} \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. 1945. $\left(-\frac{a^4x}{16} - \frac{a^2x^3}{24} + \frac{x^5}{6} \right) \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^6}{16} \arcsin \frac{x}{|a|}$.
1946. $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{14x}{3} + 37 \right) \sqrt{x^2+4x+3} - 66 \ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|$. 1947. $-\frac{1}{2x^2} \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}$. 1948. $\frac{2x^2+1}{3x^3} \sqrt{x^2-1}$. 1949. $\frac{3x-5}{20(x-1)^2} \sqrt{x^2+3x+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1} \right|$. 1950. $\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4} \sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{|x+1|}$, 其中 $x < -2$ 或 $x > 0$. 1951. $4a(ca_1 + bb_1) = 8a^2c_1 + 3b^2a_1 (a \neq 0)$. 1952. $\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x} \right|$.
1953. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1} \right|$. 1954. $-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right|$. 1955. $-\frac{1+x}{2} \sqrt{1+2x-x^2} - 2 \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{|1+x|}$. 1956. $-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} - 2 \arcsin \frac{1}{|x-2|} (x < 1 \text{ 或 } x > 3)$. 1957. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.
1958. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}} \right|$. 1959. $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}} \right|$. 1960. $\ln(x + \sqrt{x^2+2}) -$

- $\arctan \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$. **1961.** $\frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x-1)}} \right|$. **1962.** $\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \arctan \frac{(1-x)\sqrt{2}}{\sqrt{2+2x-x^2}} -$
 $\frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2+2x-x^2}}$. **1963.** $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}$. **1964.** $-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}} +$
 $\frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}} \right| (x+1 > 0)$. **1965.** $\frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} + (x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} - (x-2)} - \frac{1}{3} \arctan \frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}$.
1966. $\frac{3}{2(2z+1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{z^4}{|2z+1|^3}$, 其中 $z = x + \sqrt{x^2+x+1}$. **1967.** $\ln \left| \frac{z-1}{z} \right| - 2 \arctan z$,
 其中 $z = \frac{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}{x}$. **1968.** $\frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3} [(z-1)^3 + (z-1)^{-3}] + [(z-1)^2 - (z-1)^{-2}] + \right.$
 $\left. [(z-1) + (z-1)^{-1}] \right\} + \frac{1}{2} \ln |z-1|$, 其中 $z = x + \sqrt{x^2-2x+2}$. **1969.** $-\frac{5}{18(z+1)} -$
 $\frac{1}{6(z+1)^2} + \frac{3}{4} \ln |z-1| - \frac{16}{27} \ln |z-2| - \frac{17}{108} \ln |z+1|$, 其中 $z = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$. **1970.** $\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)} +$
 $\frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z} \right|$, 其中 $z = -x + \sqrt{x(1+x)}$. **1971.** $\frac{x}{4} (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \right|$.
1972. $\frac{1}{3} \sqrt{z} - \frac{1}{3\sqrt[4]{12}} \left(\ln \frac{z\sqrt{3} + \sqrt[4]{12z^2+1}}{z\sqrt{3} - \sqrt[4]{12z^2+1}} - 2 \arctan \frac{\sqrt[4]{12z^2}}{z\sqrt{3}-1} \right)$, 其中 $z = \frac{1+x}{1-x}$. **1973.** $\sqrt{1+x} -$
 $\sqrt{1-x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin x$. **1974.** $\sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}$. **1975.** $\frac{2}{3} [(x+1)^{\frac{3}{2}} +$
 $x^{\frac{3}{2}}] - \frac{2}{5} [(x+1)^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{2}}]$. **1976.** $-\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$. **1977.** $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^4+1}}{x^2-1} \right|$. **1978.**
 $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}} (|x| > \sqrt{\sqrt{2}-1})$. **1979.** $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2(2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}$. **1981.** $\frac{1}{3} \sqrt{(x+x^2)^3} -$
 $\frac{1+2x}{8} \sqrt{x+x^2} + \frac{1}{8} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) (x > 0)$. **1982.** $\frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} + \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 21 \arctan x^{\frac{1}{6}}$.
1983. $\frac{3}{5} z^5 - 2z^3 + 3z, z = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}$. **1984.** $-z + \frac{2}{3} z^3 - \frac{z^5}{5}$, 其中 $z = \sqrt{1-x^2}$. **1985.**
 $\frac{1}{6} \ln \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, 其中 $z = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$. **1986.** $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - \frac{1}{2} \arctan z$, 其中 $z =$
 $\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$. **1987.** $\frac{1}{6} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{12} \ln \frac{z^2-z+1}{z^2+z+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}$, 其中 $z = \sqrt[6]{1+x^6}$. **1988.**
 $\frac{5}{4} z^4 - \frac{5}{9} z^9$, 其中 $z = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$. **1989.** $\frac{3z}{2(z^3+1)} - \frac{1}{4} \ln \frac{(z+1)^2}{z^2-z+1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{2z-1}{\sqrt{3}}$, 其中 $z =$
 $\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$. **1990.** $m = \frac{2}{k}$, 其中 $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. **1991.** $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x$. **1992.**
 $\frac{5}{16} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x$. **1993.** $\frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x$. **1994.**
 $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48}$. **1995.** $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9}$. **1996.** $-\frac{\cos 2x}{64} + \frac{\cos^3 2x}{96} - \frac{\cos^5 2x}{320}$.
1997. $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$. **1998.** $-\frac{3}{2} \cos x - \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2} \ln |\tan \frac{x}{2}|$. **1999.** $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln |\tan \frac{x}{2}|$.
2000. $\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln |\tan (\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})|$. **2001.** $-8 \cot 2x - \frac{8}{3} \cot^3 2x$. **2002.** $\frac{\tan^4 x}{4} + \frac{3\tan^2 x}{2} -$
 $\frac{\cot^2 x}{2} + 3 \ln |\tan x|$. **2003.** $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \ln |\tan \frac{x}{2}|$. **2004.** $\frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} - \ln |\cos x|$.
2005. $-x - \frac{\cot^5 x}{5} + \frac{\cot^3 x}{3} - \cot x$. **2006.** $\frac{\tan^5 x}{5}$. **2007.** $-2\sqrt{\cot x} + \frac{2}{3} \sqrt{\tan^3 x}$. **2008.**
 $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{(1+t)^3(1-t^3)}{(1-t)^3(1+t^3)} \right| - \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{1-t^2}{t\sqrt{3}}$, 其中 $t = \sqrt[3]{\sin x}$. **2009.** $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$,
 其中 $z = \sqrt{\tan x}$. **2010.** $\frac{1}{4} \ln \frac{(z^2+1)^2}{z^4-z^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{2z^2-1}{\sqrt{3}}$, 其中 $z = \sqrt[3]{\tan x}$. **2011.** $I_n =$
 $-\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}; K_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} K_{n-2}; I_6 = -\frac{1}{6} \cos x \sin^5 x - \frac{5}{24} \cos x \sin^3 x -$
 $\frac{5}{16} \cos x \sin x + \frac{5}{16} x; K_8 = \frac{1}{8} \sin x \cos^7 x + \frac{7}{48} \sin x \cos^5 x + \frac{35}{192} \sin x \cos^3 x + \frac{35}{128} \sin x \cos x + \frac{35}{128} x$.
2012. $I_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}; K_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2}; I_5 = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} +$
 $\frac{3}{8} \ln |\tan \frac{x}{2}|; K_7 = \frac{\sin x}{6\cos^6 x} + \frac{5\sin x}{24\cos^4 x} + \frac{5\sin x}{16\cos^2 x} + \frac{5}{16} \ln |\tan (\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})|$. **2013.** $-\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{12} \cos 6x$.
2014. $\frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24}$. **2015.** $\frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10} \cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14} \cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{22} \cos \frac{11x}{6}$. **2016.**
 $-\frac{1}{2} \cos(a-b) \cos x - \frac{1}{4} \cos(x+a+b) + \frac{1}{12} \cos(3x+a+b)$. **2017.** $\frac{x}{4} + \frac{\sin 2ax}{8a} + \frac{\sin 2bx}{8b} +$
 $\frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)} + \frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}$. **2018.** $-\frac{3}{16} \cos 2x + \frac{3}{64} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 6x - \frac{3}{128} \cos 8x + \frac{1}{192} \cos 12x$.

2019. $\frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right|$ ($\sin(a-b) \neq 0$). 2020. $\frac{1}{\cos(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)} \right|$ ($\cos(a-b) \neq 0$).
2021. $\frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)} \right|$ ($\sin(a-b) \neq 0$). 2022. $\frac{1}{\cos a} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right|$ ($\cos a \neq 0$). 2023. $\frac{1}{\sin a} \ln \left| \frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right|$ ($\sin a \neq 0$).
2024. $-x + \cot a \cdot \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x+a)} \right|$ ($\sin a \neq 0$).
2025. $\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}$. 2026. $\frac{1}{6} \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}$. 2027. $-\frac{1}{5}(2 \sin x + \cos x) + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\arctan 2}{2} \right) \right|$.
2028. (a) $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tan \frac{x}{2} \right)$ ($0 < \varepsilon < 1$); (b) $\frac{2}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \frac{\varepsilon + \cos x + \sqrt{\varepsilon^2-1} \sin x}{1 + \varepsilon \cos x}$ ($\varepsilon > 1$).
2029. $x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x)$. 2030. $\frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{a \tan x}{b} \right)$, $ab \neq 0$.
2031. $\frac{(2b^2)^{-1} z}{a^2 z^2 + b^2} + \frac{1}{2ab^3} \arctan \frac{az}{b}$ ($ab \neq 0$), 其中 $z = \tan x$. 2032. $\frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right|$.
2033. $-\frac{\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)}$. 2034. $-\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2 \cos x - \sin x}{\sqrt{3} \sin x} \right)$.
2035. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}} \right)$. 2036. $\frac{1}{4} \left\{ \sqrt{2 + \sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \right\}$, 其中 $u = \tan 2x$.
2037. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \sin 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x}$. 2038. $\frac{1}{2} \arctan(\sin^2 x)$.
2039. $\arctan \left(\frac{1}{2} \tan 2x \right)$. 2040. $-\frac{z}{4(z^2+2)} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{z}{\sqrt{2}}$, 其中 $z = \tan x$.
2041. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right|$, 其中 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
2043. (a) $-\frac{x}{5} - \frac{3}{5} \ln |\sin x + 2 \cos x|$; (b) $0.1x + 0.3 \ln |\sin x - 3 \cos x|$.
2044. $\frac{3x}{34} + \frac{5}{34} \ln |5 \sin x + 3 \cos x|$. 2045. $-\frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2}$.
- $\frac{1}{a \sin x + b \cos x} + \frac{aa_1 + bb_1}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right|$, 其中 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
2047. $-\frac{3x}{5} + \frac{4}{5} \ln |\sin x - 2 \cos x + 3| - \frac{6}{5} \arctan \frac{5 \tan \frac{x}{2} + 1}{2}$.
2048. $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{2} + \sin x + \cos x|$.
2049. $\frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \ln |3 \sin x + 4 \cos x - 2| + \frac{4}{5\sqrt{21}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}(2 \tan \frac{x}{2} - 1)}{\sqrt{7} - \sqrt{3}(2 \tan \frac{x}{2} - 1)} \right|$.
2051. $-\sin x + 3 \cos x + 2\sqrt{2} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right|$.
2052. $\frac{1}{5}(\sin x + 3 \cos x) + \frac{8}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} - 1 + 2 \tan \frac{x}{2}}{\sqrt{5} + 1 - 2 \tan \frac{x}{2}} \right|$.
2054. $-\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{4} \ln \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x}$.
2055. $\frac{3}{5} \arctan(\sin x - 2 \cos x) + \frac{1}{10\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} + 2 \sin x + \cos x}{\sqrt{6} - 2 \sin x - \cos x} \right|$.
2056. $\frac{3}{4\sqrt{2}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1}{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 1} \right| - \frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3} - \sqrt{2}(\sin x - \cos x)} \right|$.
2058. $\frac{2 \sin x - \cos x}{10(\sin x + 2 \cos x)^2} + \frac{1}{10\sqrt{5}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\arctan 2}{2} \right) \right|$.
2059. $A = -\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $B = \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $C = -\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}$.
2060. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 x}}{|\cos x|}$.
2061. $2\sqrt{\tan x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln \left| \frac{\tan x + \sqrt{2 \tan x} + 1}{\tan x - \sqrt{2 \tan x} + 1} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2 \tan x}}{\tan x - 1}$ ($\tan x > 0$).
2062. $\frac{1}{2} \left(\arcsin \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} \right) \right) - \frac{1}{2} \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x})$.
2063. $-\frac{\varepsilon \sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon \cos x)} + \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \cdot \tan \frac{x}{2} \right)$.
2064. $-\frac{2}{n \cos a} \left(\cos \frac{x+a}{2} \right)^n$ ($\sin \frac{x-a}{2} \neq 0$).
2065. $I_n = 2I_{n-1} \cos a - I_{n-2} + \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-1}$, 其中 $n > 2, t = \sin \frac{x-a}{2} \left(\sin \frac{x+a}{2} \right)^{-1}$.
2068. $e^{3x} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27} \right)$.
2069. $-e^{-x}(x^2 + 2)$.
2070. $-\left(\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{25} + \frac{24x}{625} \right) \cos 5x + \left(\frac{x^4}{5} - \frac{12x^2}{125} + \frac{24}{3125} \right) \sin 5x$.
2071. $(21 - 10x^2 + x^4) \sin x - (20x - 4x^3) \cos x$.
2072. $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6)$.
2073. $2e^t(t^5 - 5t^4 + 20t^3 - 60t^2 + 120t - 120)$, 其中 $t = \sqrt{x}$.
2074. $e^{ax} \left[\frac{1}{2a} + \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)} \right]$.
2075. $\frac{e^{ax}}{4} \left[\frac{3(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} - \frac{a \sin 3bx - 3b \cos 3bx}{a^2 + 9b^2} \right]$.
2076. $\frac{e^x}{2}[x(\sin x - \cos x) + \cos x]$.
2077. $\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x + \cos x) - 2x \sin x + (\sin x - \cos x)]$.
2078. $e^x \left[\frac{x-1}{2} - \frac{x}{10}(2 \sin 2x + \cos 2x) + \frac{1}{50}(4 \sin 2x - 3 \cos 2x) \right]$.
2079. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}x^2 + 3x^2 \cos x - x(6 \sin x + \frac{3}{4} \sin 2x) - (5 \cos x + \frac{3}{8} \cos 2x) - \frac{1}{3} \cos^3 x$.
2080. $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x} \sin(2\sqrt{x}) + \frac{1}{4} \cos(2\sqrt{x})$.
2082. $x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$.
2083. $e^x - \ln(1+e^x)$.
2084. $-\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \ln |e^x - 1| + \frac{1}{6} \ln(e^x + 2)$.

2085. $x - 3 \ln \left\{ (1 + e^{\frac{x}{6}}) \sqrt{1 + e^{\frac{x}{3}}} \right\} - 3 \arctan e^{\frac{x}{6}}$. 2086. $x + \frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}$. 2087. $-2 \arcsin \left(e^{-\frac{x}{2}} \right)$.
 2088. $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin(e^{-x})$. 2089. $\sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} + 2 \ln(e^x + 2 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}) - \arcsin \frac{2e^x - 1}{e^x \sqrt{5}}$. 2090. $-\frac{1}{2} e^{-x} (\sqrt{1 + e^x} - \sqrt{1 - e^x}) + \frac{1}{4} \ln \frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}$. 2092. $a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \dots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0$. 2093. $e^x \left(1 - \frac{4}{x}\right)$. 2094. $-e^{-x} - \text{li}(e^{-x})$. 2095. $e^4 \text{li}(e^{2x-4}) - e^2 \text{li}(e^{2x-2})$. 2096. $\frac{e^x}{x+1}$. 2097. $\frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 + 3x + \frac{21}{2} - \frac{32}{x-2}\right) + 64e^4 \text{li}(e^{2x-4})$. 2098. $x[\ln^n x - n \ln^{n-1} x + n(n-1) \ln^{n-2} x + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n(n-1) \dots 2 \ln x + (-1)^n n!]$. 2099. $\frac{x^4}{4} (\ln^3 x - \frac{3}{4} \ln^2 x + \frac{3}{8} \ln x - \frac{3}{32})$. 2100. $-\frac{1}{2x^2} \left(\ln^3 x + \frac{3}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \ln x + \frac{3}{4}\right)$. 2101. $\ln(x+a) \ln(x+b)$. 2102. $x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x$. 2103. $-\frac{x}{2} + x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} \arcsin x$. 2104. $\frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. 2105. $-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + \frac{x^2}{2} \arctan(x+1)$. 2106. $-\frac{x}{3} + \frac{1}{3} \ln(1+x) + \frac{2x\sqrt{x}}{3} \arctan \sqrt{x}$. 2107. $-\frac{3+x}{4} \sqrt{2x-x^2} + \frac{2x^2-3}{4} \arcsin(1-x)$. 2108. $\frac{1}{2} \sqrt{x-x^2} + (x - \frac{1}{2}) \arcsin \sqrt{x}$. 2109. $-\frac{\text{sgn} x}{2} \sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{2} \arccos \frac{1}{x}$. 2110. $-2\sqrt{x} \text{sgn}(1-x) + (1+x) \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. 2111. $\frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \ln \sqrt{1-x^2}$. 2112. $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$. 2113. $x - \arctan x + \left(\frac{1+x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2}\right) [\ln(1+x^2) - 1]$. 2114. $x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$. 2115. $-\ln \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. 2116. $-\frac{x}{8} + \frac{\sinh 4x}{32}$. 2117. $\frac{3x}{8} + \frac{\sinh 2x}{4} + \frac{\sinh 4x}{32}$. 2118. $\frac{\cosh^3 x}{3} - \cosh x$. 2119. $\frac{\cosh 6x}{24} - \frac{\cosh 4x}{16} - \frac{\cosh 2x}{8}$. 2120. $\ln \cosh x$. 2121. $x - \coth x$. 2122. $0.5 [\ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}) + \arcsin(e^{-2x})]$. 2123. (a) $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan 3^{-\frac{1}{2}} \left(2 \tanh \frac{x}{2} + 1\right)$; (b) $\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{\tanh x - 2}{\sqrt{5}}$; (c) $\frac{20}{3\sqrt{11}} \arctan \left(\frac{3 \tanh \frac{x}{2}}{\sqrt{11}}\right)$; (d) $-\frac{4}{7} x - \frac{3}{7} \ln |3 \sinh x - 4 \cosh x|$. 2124. $\frac{a \cosh ax \sin bx - b \sinh ax \cos bx}{a^2 + b^2}$. 2125. $\frac{a \cosh ax \cos bx + b \sinh ax \sin bx}{a^2 + b^2}$. 2126. $-\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \arctan x$. 2127. $\frac{1}{8} \frac{x+x^3}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{16} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$. 2128. $\frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \ln \frac{1+x\sqrt{3+x^2}}{1-x\sqrt{3+x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}$. 2129. $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) (x > 0)$. 2130. $-\frac{1}{24} (15 + 10x + 8x^2) \sqrt{x(1-x)} + \frac{5}{8} \arcsin \sqrt{x} (0 < x < 1)$. 2131. $-\frac{2}{x} \sqrt{1-x^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} (|x| < 1)$. 2132. $-\frac{4}{3} \sqrt{1-x} \sqrt{x} (x > 0)$. 2133. $\frac{1}{15} (8 - 4x^2 + 3x^4) \sqrt{1+x^2}$. 2134. $\frac{1}{2} \ln \frac{(1+z)^2}{1-z+z^2} - \sqrt{3} \arctan \frac{2z-1}{\sqrt{3}}$, 其中 $z = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$. 2135. $-\frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3} \right|$. 2136. $\frac{1}{2} \arccos \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}$. 2137. $-\frac{2+x^2}{x} - \frac{2}{x} \sqrt{1-x^2} - 2 \arcsin x (|x| < 1)$. 2138. $-\frac{1}{2} (1+x)^2 + \frac{5+2x}{4} \sqrt{x+x^2} + \frac{3}{8} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+x^2} \right| (x > 0; x < -1)$. 2139. $-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} - \frac{1}{2} \ln \frac{(1+x)^2}{1+x+x^2} + \sqrt{3} \arctan \frac{1+2x}{\sqrt{3}}$. 2140. $-\frac{2x+21}{4} \sqrt{-x^2+3x-2} + (x^2+3x-\frac{55}{8}) \arccos(2x-3) (1 < x < 2)$. 2141. $-x^2 + \frac{x^2}{2} \ln(4+x^4) + 2 \arctan \frac{x^2}{2}$. 2142. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \ln |x| + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2$. 2143. $(1+\sqrt{1+x^2}) \ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$. 2144. $-\frac{x^2+7}{9} \sqrt{x^2+1} + \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \ln \sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} \right| (|x| > 1)$. 2145. $\left(\frac{1}{2} - \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}}\right) \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} (0 < x < 1)$. 2146. $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}$ + $\frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}$. 2147. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{7+4\sqrt{2}+\cos 4x}{7-4\sqrt{2}+\cos 4x}$. 2148. $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$. 2149. $a \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)\right] - \frac{a-b}{2} (\arctan x)^2$. 2150. $a \left(x \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \ln |x^2-1|\right) + \frac{a+b}{4} \ln^2 \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$. 2151. $-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} (x > 0)$. 2152. $\sqrt{1+x^2} \arctan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. 2153. $-\ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x})$. 2154. $-\frac{6x+x^3}{9} - \frac{2+x^2}{3} \sqrt{1-x^2} \arccos x (|x| < 1)$. 2155. $-\frac{x^2}{6} - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \arctan x + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + \frac{2}{3} \ln(1+x^2)$. 2156. $-\frac{x}{4(1+x^2)} - \frac{1-x^2}{4(1+x^2)} \arctan x$.

2157. $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}} \right|$ ($|x| < 1$). 2158. $-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \frac{1}{4}(\arcsin x)^2$ ($|x| < 1$). 2159. $\frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}(1+x^2)^2 \operatorname{arccot} x$. 2160. $x^x (x > 0)$. 2161. $x - e^{-x} \arcsin(e^x) - \ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})$ ($x < 0$). 2162. $x - \ln(1+e^x) - 2e^{-\frac{x}{2}} \arctan e^{\frac{x}{2}} - \left(\arctan e^{\frac{x}{2}}\right)^2$. 2163. $-\frac{\coth 1}{4}[x - \ln(1+e^x \cosh 1)] - \frac{e^{-x}}{4 \sinh 1}$. 2164. $-\ln(\tanh x + \sqrt{1+\tanh^2 x}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+\tanh^2 x} + \sqrt{2} \tanh x}{\sqrt{1+\tanh^2 x} - \sqrt{2} \tanh x}$. 2165. $e^x \tan \frac{x}{2}$. 2166. $\frac{x|x|}{2}$. 2167. $\frac{x^2|x|}{3}$. 2168. $\frac{2x^2}{3}(x+|x|)$. 2169. $\frac{(1+x)|1+x|}{2} + \frac{(1-x)|1-x|}{2}$. 2170. 当 $x < 0$ 时为 $e^x - 1$; 当 $x \geq 0$ 时为 $1 - e^{-x}$. 2171. 当 $|x| \leq 1$ 时为 x , 当 $|x| > 1$ 时为 $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{sgn} x$. 2172. $\frac{x}{4} + \frac{1}{4}((x) - \frac{1}{2})\{1 - 2|(x) - \frac{1}{2}|\}$, 其中 $(x) = x - [x]$. 2173. $\frac{[x]}{\pi} \left\{ |x| - (-1)^{[x]} \cos \pi x \right\}$. 2174. 当 $|x| \leq 1$ 时为 $x - \frac{x^3}{3}$; 当 $|x| > 1$ 时为 $x - \frac{x}{2}|x| + \frac{1}{6} \operatorname{sgn} x$. 2175. 当 $-\infty < x < 0$ 时为 x ; 当 $0 \leq x \leq 1$ 时为 $\frac{x^2}{2} + x$; 当 $x > 1$ 时为 $x^2 + \frac{1}{2}$. 2176. $xf'(x) - f(x)$. 2177. $\frac{1}{2}f(2x)$. 2178. $f(x) = 2\sqrt{x}$. 2179. (a) $x - \frac{x^2}{2}$; (b) $f(x) = x$ ($-\infty < x \leq 0$); $f(x) = e^x - 1$ ($0 < x < +\infty$).

第四章

2181. $12\frac{1}{2}$. 2182. (a) $\underline{S}_n = 16\frac{1}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$, $\overline{S}_n = 16\frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$; (b) $\underline{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n}}$, $\overline{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}}$; (c) $\underline{S}_n = \frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}} - 1)}$, $\overline{S}_n = \frac{10230 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}} - 1)}$. 2183. $\underline{S}_n = 31 \frac{\sqrt[2]{2}-1}{\sqrt[32]{2}-1}$; $\frac{31}{5}$. 2184. $v_0 T + \frac{1}{2} g T^2$. 2185. 3. 2186. $\frac{a-1}{\ln a}$. 2187. 1. 2188. $\sin x$. 2189. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. 2190. $\frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$. 2191. $\ln \frac{b}{a}$. 2192. (a) 当 $|\alpha| < 1$ 时为 0; (b) 当 $|\alpha| > 1$ 时为 $\pi \ln \alpha^2$. 2193. $5 \cdot \frac{b-a}{2} [f(a) - f(b)]$. 2201. 一般而言, 否. 2203. 未必. 2206. $11\frac{1}{4}$. 2207. 2. 2208. $\frac{\pi}{6}$. 2209. $\frac{\pi}{3}$. 2210. 1. 2211. 1. 2212. $\frac{\pi}{2 \sin \alpha}$. 2213. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$. 2214. $\frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$. 2215. $\frac{\pi}{2|ab|}$. 2216. (a) 被积函数 $\frac{1}{x}$ 及其原函数 $\ln|x|$ 在积分区间 $[-1, 1]$ 上不连续; (b) 原函数 $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$ 当 $0 \leq x \leq 2\pi$ 时不连续; (c) 函数 $\arctan \frac{1}{x}$ 当 $x = 0$ 时不连续. 2217. $\frac{2}{3}$. 2218. $200\sqrt{2}$. 2219. $\frac{1}{2}$. 2220. $\ln 2$. 2221. $\frac{\pi}{4}$. 2222. $\frac{2}{\pi}$. 2223. $\frac{1}{p+1}$. 2224. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$. 2225. $\frac{1}{e}$. 2226. $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. 2227. $\frac{5}{6}\pi$. 2228. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 2229. $x + \frac{1}{2}$. 2230. $\frac{1}{\ln 2}$. 2231. 0; $-\sin a^2$; $\sin b^2$. 2232. (a) $2x\sqrt{1+x^4}$; (b) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; (c) $(\sin x - \cos x) \cos(\pi \sin^2 x)$. 2233. (a) 1; (b) $\frac{\pi^2}{4}$; (c) 0; (d) A. 2235. 1. 2237. (a) $\frac{5}{6}$; (b) $\frac{t}{2}$. 2238. (a) 当 $\alpha < 0$ 时 $\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2}$; 当 $0 \leq \alpha \leq 1$ 时 $\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{3}$; 当 $\alpha > 1$ 时 $\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}$; (b) 当 $|\alpha| \leq 1$ 时 $\frac{\pi}{2}$; 当 $|\alpha| > 1$ 时 $\frac{\pi}{2\alpha^2}$; (c) 当 $|\alpha| \leq 1$ 时 2; 当 $|\alpha| > 1$ 时 $\frac{2}{|\alpha|}$. 2239. $\frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}$. 2240. π . 2241. 4π . 2242. $2(1 - \frac{1}{e})$. 2243. 1. 2244. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2245. $\frac{1}{6}$. 2246. $\frac{\pi a^4}{16}$. 2247. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. 2248. $2 - \frac{\pi}{2}$. 2249. $\frac{\pi^2}{4}$. 2250. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 2251. (a) 反函数 $x = \pm t^{\frac{3}{2}}$ 是双值的; (b) 函数 $x = \frac{1}{t}$ 在 $t = 0$ 处不连续; (c) 定义于有限区间 $[\alpha, \beta]$ 且取值遍历从 0 到 π 的函数 $x = \arctan t$ 无单值连续的一支. 2252. 不可以. 2253. 可以. 2256. $f(x+b) - f(x+a)$. 2260. $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$. 2261. $\int_0^1 [f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)] dt + \int_{-1}^0 [f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)] dt$. 2262. $4n$. 2263. $\frac{\pi^2}{4}$. 2264. $\arctan \frac{32}{27} - 2\pi$. 2268. $315\frac{1}{26}$. 2269. $\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. 2270. $\frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$. 2271. $-66\frac{6}{7}$. 2272. $-\frac{\pi}{3}$. 2273. $\frac{29}{270}$. 2274. $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$. 2275. $2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. 2276. $2\pi\sqrt{2}$. 2277. $\frac{1}{6}$. 2278. $\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}$. 2279.

- $\frac{3}{5}(e^\pi - 1)$. 2280. $\frac{3}{8} \ln 2 - \frac{225}{1024}$. 2281. 当 $n = 2k$ 时 $I_n = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$; 当 $n = 2k + 1$ 时 $I_n = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$. 2282. 参看习题 2281. 2283. $(-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) \right]$.
 2284. $2^{2n} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. 2285. 参看习题 2281. 2286. $I_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$. 2287. $I_n = (-1)^n \left\{ -\ln \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right] \right\}$. 2290. $\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1} m!n!(m+n)!}$. 2291. 当 n 为偶数时 0, 当 n 为奇数时 π . 2292. $(-1)^n \pi$. 2293. $\frac{\pi}{2^n}$. 2294. $\frac{\pi}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}$. 2295. 0. 2296. 0. 2297. $\frac{1}{2^{2n} a} (1 - e^{-2a\pi}) \cdot \left[C_{2n}^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \frac{a^2}{a^2 + (2n-2k)^2} \right]$. 2298. $\frac{\pi}{4n} (-1)^{n-1}$. 2299. $\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$.
 2302. 在函数 $f(x)$ 的间断点上导数 $F'(x)$ 可能存在, 也可能不存在. 2303. $|x| + C$. 2304. $\arccos(\cos x) + C$. 2305. $x[x] - \frac{|x|(|x|+1)}{2} + C$. 2306. $\frac{x^2[x]}{2} - \frac{|x|(|x|+1)(2|x|+1)}{12} + C$. 2307. $C + \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x)$. 2308. $\frac{1}{2} (|l+x| - |l-x|) + C$. 2309. -1. 2310. $14 - \ln(7!)$. 2311. $\frac{30}{\pi}$. 2312. $-\frac{\pi^2}{4}$. 2313. $\ln(n!)$. 2314. $-\tanh \frac{\pi}{2}$. 2315. $\frac{8}{3}$. 2316. (a) -; (b) +; (c) +; (d) -. 2317. (a) 第二个; (b) 第二个; (c) 第一个. 2318. (a) $\frac{1}{3}$; (b) $6\frac{2}{3}$; (c) 10; (d) $\frac{1}{2} \cos \varphi$.
 2319.1. $\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = b$ 为椭圆的短半轴. 2319.2. $v_{cp} = \frac{1}{2}(v_0 + v_1)$, 其中 v_1 为物体的最终速度. 2320. $\frac{1}{2} i_0^2$. 2321. A. 2322. (a) $\theta = \sqrt{\frac{1}{n+1}}$; (b) $\theta = \frac{1}{e}$; (c) $\theta = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta = 1$. 2323. $\frac{8\pi}{3} \pm \frac{4\pi}{3} \theta$ ($|\theta| < 1$). 2324. 介于 $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ 和 $\frac{1}{10}$ 之间. 2325. $0.01 - 0.005\theta$ ($0 < \theta < 1$). 2326.2. (a) 1; (b) $f(0) \ln \frac{b}{a}$. 2328. $\frac{\theta}{50\pi}$ ($0 < \theta < 1$). 2329. $\frac{2}{a} \theta$ ($|\theta| < 1$). 2330. $\frac{\theta}{a}$ ($|\theta| < 1$). 2334. $\frac{1}{a}$. 2335. -1. 2336. π . 2337. π . 2338. $\frac{2}{3} \ln 2$.
 2339. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. 2340. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 2341. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 2342. $\frac{\pi}{2}$. 2343. $\frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$. 2344. 0. 2345. $\frac{\pi}{2} - 1$. 2346. $\frac{a}{a^2+b^2}$. 2347. $\frac{b}{a^2+b^2}$. 2348. $I_n = n!$. 2349. $I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi a^{n-1} \operatorname{sgn} a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$.
 2350. $I_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k \ln(k+1)$, 其中 C_n^k 为 n 个元素中取 k 个的组合数. 2351. 当 n 为偶数时 $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!} \frac{\pi}{2}$, 当 n 为奇数时 $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!}$. 2352. 当 n 为偶数时 $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!} \frac{\pi}{2}$, 当 n 为奇数时 $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!}$. 2353. (a) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$; (b) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$. 2354. $\frac{2\sqrt[4]{8}e^{-\frac{\pi}{8}}}{1-e^{-\pi}}$. 2356. (a) 1; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) 0. 2357. (a) 1; (b) $\frac{1}{3}$; (c) 1; (d) $\frac{1}{\alpha} f(0)$. 2358. 收敛. 2359. 收敛. 2360. 发散. 2361. 当 $p > 0$ 时收敛. 2362. 当 $p > -1$ 且 $q > -1$ 时收敛. 2363. 当 $m > -1$ 且 $n - m > 1$ 时收敛. 2364. 当 $1 < n < 2$ 时收敛. 2365. 当 $1 < n < 2$ 时收敛. 2366. 当 $m > -2$ 且 $n - m > 1$ 时收敛. 2367. 当 $n > 0$ ($a \neq 0$) 时收敛. 2368. 发散. 2369. 当 $p < 1$ 且 $q < 1$ 时收敛. 2370. (a) 当 $n > -1$ 时收敛; (b) 收敛. 2371. 当 $\min(p, q) < 1$ 且 $\max(p, q) > 1$ 时收敛. 2372. 收敛. 2373. 收敛. 2374. 当 $p > 1$ 且 $q < 1$ 时收敛. 2375. 当 $p > 1, q$ 为任意数, $r < 1$ 时, 以及当 $p = 1, q > 1, r < 1$ 时收敛. 2376. (a) 当 $p_i < 1$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), $\sum_{i=1}^n p_i > 1$ 时收敛; (b) 当 $\alpha > -1, \beta > -1, \alpha + \beta < -1$ 时收敛. 2377. 当 $P_n(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上无根且 $n > m + 1$ 时收敛. 2378. 不是绝对收敛. 2379. 不是绝对收敛. 2380. (a) 当 $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$ 时绝对收敛; 当 $0 \leq \frac{p+1}{q} < 1$ 时条件收敛; (b) 绝对收敛; (c) 收敛. 2381. 当 $p > -2, q > p + 1$ 时绝对收敛; 当 $p > -2, p < q \leq p + 1$ 时条件收敛. 2382. 当 $0 < n < 2$ 时条件收敛. 2383. 当 $n > m + 1$ 时绝对收敛; 当 $m < n = m + 1$ 时条件收敛. 2385. 不可能. 2392. $\ln \frac{1}{2}$. 2393. 0. 2394. π . 2395. 0. 2397. $\frac{a^2}{3}$. 2398. $4\frac{1}{2}$. 2399. $4\frac{1}{2}$. 2400. (a) $9.9 - 8.1 \lg e \approx 6.38$; (b) $2 - \frac{1}{\ln 2} \approx 0.56$; (c) $\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \approx 0.97$. 2401. $\frac{\pi}{2}$. 2402. πa^2 . 2403. πab . 2404. $\frac{4}{3} a^3$. 2405.

- $\frac{88}{15}\sqrt{2}p^2$. 2406. $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. 2407. $3\pi a^2$. 2408. $\frac{\pi a^2}{2}$. 2409. $\frac{2\pi}{n+2}$. 2410. $\frac{1}{2}\coth\frac{\pi}{2}\approx 0.546$. 2411. $(3\pi+2):(9\pi-2)$. 2412. $x = \cosh S, y = \sinh S$. 2413. $3\pi a^2$. 2414. $\frac{8}{15}$. 2415. $\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)$. 2416. $6\pi a^2$. 2417. (a) $\frac{3\pi}{8}\cdot\frac{c^4}{ab}$; (b) $\pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}}-9\right)$. 2418. a^2 . 2419. $\frac{3\pi a^2}{2}$. 2420. $\frac{\pi a^2}{4}$. 2421. $\frac{p^2}{6}(3+4\sqrt{2})$. 2422. (a) $\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$; (b) 11π ; (c) $\frac{1}{\pi}$. 2423. $(\pi-1)\frac{a^2}{4}$. 2424. $\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$. 2425. (a) $\frac{2}{3}$; (b) $\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}$; (c) $4\frac{4}{15}$; (d) $\pi\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$; (e) $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)a^2$. 2426. $\frac{3}{2}a^2$. 2427. $\pi a^2\sqrt{2}$. 2428. a^2 . 2429. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 2430. $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$. 2431. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. 2432. $2\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}+p\ln\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}$. 2433. $\sqrt{h^2-a^2}$. 2434. $x_0-\sqrt{2}+\sqrt{1+e^{2x_0}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}$. 2435. $\frac{e^2+1}{4}$. 2436. $a\ln\frac{a+b}{a-b}-b$. 2437. $\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$. 2438. $a\ln\frac{a}{b}$. 2439. $4a\left(1+3\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$. 2440. $6a$. 2441. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. 2442. $\left[1+\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right]a$. 2443. $8a$. 2444. $2\pi^2 a$. 2445. (a) $2a\left(\cosh\frac{T}{2}\sqrt{\cosh T}-1\right)-\sqrt{2}a\ln\frac{\sqrt{2}\cosh\frac{T}{2}+\sqrt{\cosh T}}{1+\sqrt{2}}$; (b) $\frac{1}{2}(\cosh^{\frac{3}{2}}2T-1)$. 2446. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. 2447. $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}a$. 2448. $8a$. 2449. $p[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. 2450. $\frac{3\pi a}{2}$. 2451. $a(2\pi-\tanh\pi)$. 2452. (a) $2+\frac{1}{2}\ln 3$; (b) $6\frac{1}{3}$; (c) $\sinh R$; (d) T . 2455. $\frac{2\pi}{5\sqrt{3}}\approx 0.73$. 2456. $\frac{bh}{6}(2a+c)$. 2457. $\frac{h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$. 2458. $\frac{\pi h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$. 2459. $\frac{1}{2}SH$. 2462. $\frac{2}{3}abc$. 2463. $\frac{4}{3}\pi abc$. 2464. $\frac{8\pi abc}{3}$. 2465. $\frac{16}{3}a^3$. 2466. $\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. 2467. $\frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}$. 2468. $\frac{\pi a^3}{2}$. 2469. $\frac{4}{15}$. 2470. $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}a^3$. 2472. $\frac{3}{7}\pi ab^2$. 2473. (a) $\frac{16\pi}{15}$; (b) $\frac{8\pi}{3}$. 2474. (a) $\frac{\pi^2}{2}$; (b) $2\pi^2$. 2475. (a) $\frac{4}{15}\pi ab^2$; (b) $\frac{\pi a^2 b}{6}$. 2476. (a) $\frac{\pi}{2}$; (b) 2π . 2477. $2\pi^2 a^2 b$. 2478. $\frac{8\pi a^3}{3}$. 2479. $\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$. 2480. (a) $5\pi^2 a^3$; (b) $6\pi^3 a^3$; (c) $7\pi^2 a^3$. 2481. (a) $\frac{32}{105}\pi ab^2$; (b) $\frac{32}{105}\pi a^2 b$. 2482.1. $V_x = \frac{64}{35}\pi$; $V_y = \frac{64}{105}\pi$. 2483.1. (a) $\frac{8}{3}\pi a^3$; (b) $\frac{13}{4}\pi^2 a^3$. 2483.2. (a) $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right]$; (b) $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$; (c) $\frac{\pi^2 a^3}{4}$. 2484.1. $\frac{2}{3}(\pi^4+6\pi^2)a^3$. 2484.2. $\frac{2}{3}\pi$. 2485. $\frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}$. 2486. $\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$. 2487. $2a\sqrt{\pi^2 a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a+\sqrt{\pi^2 a^2+4b^2}}{2b}$. 2488. $\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$. 2489. (a) $\frac{2\pi}{3}\left[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2\right]$; (b) $\frac{\pi}{4}\left[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right]$. 2490. (a) $2\pi b^2+2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$; (b) $2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]$, 其中 $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率. 2491. $4\pi^2 ab$. 2492. $\frac{12}{5}\pi a^2$. 2493. (a) $\pi a(2b+a\sinh\frac{2b}{a})$; (b) $2\pi a(a+b\sinh\frac{b}{a}-a\cosh\frac{b}{a})$. 2494. $4\pi a^2$. 2495. (a) $\frac{64}{3}\pi a^2$; (b) $16\pi^2 a^2$; (c) $\frac{32}{3}\pi a^2$. 2496. $\frac{3\pi}{5}a^2(4\sqrt{2}-1)$. 2497. $\frac{32}{5}\pi a^2$. 2498. (a) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$; (b) $2\pi a^2\sqrt{2}$; (c) $4\pi a^2$. 2499. $\frac{5}{128}\sqrt[3]{10}[14\sqrt{5}+17\ln(2+\sqrt{5})]\approx 1.013$. 2500. $V = \frac{4\pi}{3}p^2$; $P = 2\pi p^2[(2+\sqrt{2})+\ln(1+\sqrt{2})]$. 2501.1. $M_1 = 2a^2$; $M_2 = \frac{\pi a^3}{2}$. 2501.2. $\frac{p^2}{8}[\sqrt{2}+5\ln(1+\sqrt{2})]$. 2502.1. $M_1 = \frac{bh^2}{6}$; $M_2 = \frac{bh^3}{12}$. 2502.2. $I_x = \frac{8}{35}a^4$, $I_y = \frac{8}{5}a^4$, $r_x = a\sqrt{\frac{6}{35}}$, $r_y = a\sqrt{\frac{6}{5}}$. 2503. $M_2^{(x)} = \frac{\pi ab^3}{4}$; $M_2^{(y)} = \frac{\pi a^3 b}{4}$. 2504.1. $M_1 = \frac{\pi r^2 h^2}{12}$, $M_2 = \frac{\pi}{30}r^2 h^3$. 2504.2. $I = \frac{1}{20}MR^2$. 2507. $x_0 = a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$; $y_0 = 0$. 2508. $(\frac{9}{20}a, \frac{9}{20}a)$. 2509. $(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi})$. 2510. $(0, 0, \frac{3}{8}a)$. 2511. $\varphi_0 = \varphi - \alpha$, 其中 $\alpha = \arctan\frac{1}{2m}$; $r_0 = \frac{mr}{\sqrt{1+4m^2}}$. 对数螺线 $r_0 = \frac{am}{\sqrt{1+4m^2}}e^{m(\varphi_0+\alpha)}$. 2512. $\varphi_0 = 0$, $r_0 = \frac{5}{6}a$. 2513. $x_0 = \pi a$, $y_0 = \frac{5}{6}a$. 2514. $x_0 = \frac{2}{3}a$, $y_0 = 0$. 2515. $(0, 0, \frac{a}{2})$. 2516. 75 kg. 2517. $A_h = mg\frac{Rh}{R+h}$, $A_\infty = mgR$, 其中 g 为地球表面的重力加速度. 2518. 5 J. 2519. 17400 J. 2520. $\frac{2}{3}a^3\rho g$ (ρ 为水的密度, g 为重力加速度). 2521. 7×10^6 N (708 $\frac{1}{3}$ 吨力). 2522. $v_0 T + \frac{a}{2}T^2$. 2523. $\frac{4}{15}\pi\delta\omega^2 R^5$. 2524. 引

力在坐标轴上的射影 $X = 0, y = -\frac{2km\mu_0}{a}$, 其中 k 为引力常数. 2525. $2\pi km\delta_0 \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, 其中 k 为引力常数. 2526. 大约 3 小时. 2527. 容器应当是把曲线 $y = Cx^4$ 环绕 Oy 轴旋转所成的曲面围成的. 2528. $Q = Q_0 \cdot 2^{-\frac{1}{1600}}$. 2529. 99.99%. 2530. $\frac{\rho g H^2}{6E}$. 表中的值给出定积分近似计算出的答案. 2531. -6.283 2. 2532. 0.693 15. 2533. 0.835 66. 2534. 1.467 5. 2535. 17.333. 2536. 5.402 4. 2537. 1.370 39. 2538. 1.229 3. 2539. 0.915 966. 2540. 3.141 59. 2541. 1.463. 2542. 0.317 9. 2543. 0.886 2. 2544. 51.04. 2545.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

第五章

2546. $\frac{2}{3}$. 2547. $\frac{3}{2}$. 2548. 3. 2549. 1. 2550. $\frac{1}{3}$. 2551. (a) $\frac{q \sin \alpha}{1-2q \cos \alpha+q^2}$; (b) $\frac{q \cos \alpha - q^2}{1-2q \cos \alpha+q^2}$. 2552. $1 - \sqrt{2}$. 2553. 仅当 $x = k\pi$ (k 为整数) 时收敛. 2556. 发散. 2557. 发散. 2558. 收敛. 2559. 发散. 2560. 发散. 2561. 发散. 2562. 收敛. 2563. 收敛. 2564. 发散. 2566. 可能收敛, 也可能发散. 2567. (a) 可能收敛, 也可能发散; (b) 发散. 2578. 收敛. 2579. 收敛. 2580. 收敛. 2581. (a) 收敛; (b) 发散. 2582. 收敛. 2583. 收敛. 2584. 收敛. 2585. (a) 收敛; (b) 收敛; (c) 对任意的 α 和 x 都收敛. 2586. 收敛. 2587. 发散. 2588. 发散. 2589. (a) 收敛; (b) 收敛; (c) 收敛; (d) 收敛. 2591.2. $n \geq 13$. 2595. 收敛. 2596. 收敛. 2597. (a) 收敛; (b) 发散. 2598. 当 $p > 2$ 时收敛. 2599. 当 $\frac{b-a}{d} > 1$ 时收敛. 2600. 当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛. 2601. 收敛. 2602. 当 $p+q > 1$ 时收敛. 2603. 当 $q > p$ 时收敛. 2604. 当 $\frac{p}{2} + q > 1$ 时收敛. 2605. 当 $\alpha(q-p) > 1$ 时收敛. 2607. 当 $q > p+1$ 时收敛. 2608. 当 $p > 0$ 时收敛. 2609. 当 $p > 0$ 时收敛. 2610. 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛. 2611. 当 $b \neq 1$ 时收敛. 2612. 当 $p > 1$ 时收敛. 2613. (a) 发散; (b) 发散. 2616. 当 $x < \frac{1}{e}$ 收敛. 2617. 收敛. 2618. 发散. 2619. (a) 当 $p > 1$ 时收敛; (b) 当 $p > 1, q$ 为任意数时, 以及当 $p = 1, q > 1$ 时均收敛. 2620. (a) 发散; (b) 收敛; (c) 发散. 2621. 收敛. 2623. 1.20. 2626. 当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时收敛. 2627. 当 $a = \frac{1}{2}$ 时收敛. 2628. 发散. 2629. 收敛. 2630. 当 $a > 2$ 时收敛. 2631. 收敛. 2632. 收敛. 2633. 收敛. 2634. 当 $c = 0, \frac{a}{d} < -1$ 时收敛. 2635. 发散. 2636. 当 $\alpha \neq 0$ 时收敛. 2637. 收敛. 2638. 发散. 2639. 收敛. 2640. 当 $a = \sqrt{bc}$ 时收敛. 2641. 收敛, 其中 $a < -1$. 2642. 收敛, 其中 $\alpha > \frac{1}{2}$. 2643. 当 $a^b > e, c = 0$ 时, 以及当 $a^c > 1$ 时均收敛. 2644. 当 $a+b > 1$ 时收敛. 2645. 收敛. 2646. 收敛. 2647. 收敛. 2648. 发散. 2649. 收敛. 2650. 收敛. 2651. 收敛. 2652. 当 $\alpha > 2$ 时收敛. 2653. 收敛. 2654. 收敛. 2655. (a) $N > 100\ 000$; (b) $N \geq 12$; (c) $N > 4$. 2659. $\frac{2}{9}$. 2660. $1\frac{3}{7}$. 2661. $\ln 2$. 2662. (a) $\frac{3}{2} \ln 2$; (b) $\frac{1}{2} \ln 2$. 2664. 收敛. 2665. (a) 收敛; (b) 收敛. 2666. 不能得到. 2667. 收敛. 2668. 收敛. 2669. 收敛. 2670. 发散. 2671. 收敛. 2672. 收敛. 2673. (a) 发散; (b) 收敛. 2675. 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛. 2676. 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛. 2677. 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时条件收敛. 2678. 当 $|x - \pi k| < \frac{\pi}{4}$ (k 为整数) 时绝对收

敛; 当 $x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}$ 时条件收敛. **2679.** 当 x 不为任意负整数时条件收敛. **2680.** 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛. **2681.** 当 $p > 2$ 时绝对收敛; 当 $1 < p \leq 2$ 时条件收敛. **2682.** 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时条件收敛. **2683.** 条件收敛. **2684.** 绝对收敛. **2685.** 发散. **2686.** 条件收敛. **2687.** 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时条件收敛. **2688.** 发散. **2689.** 当 $p > 2$ 时绝对收敛; 当 $0 < p \leq 2$ 时条件收敛. **2690.** 收敛. **2691.** 发散. **2692.** 当 $q > p + 1$ 时绝对收敛; 当 $p < q \leq p + 1$ 时条件收敛. **2693.** 当 $p > 1, q > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < p = q \leq 1$ 时条件收敛. **2694.** 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $p = 1$ 时条件收敛. **2695.** (a) 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $p = 1$ 时条件收敛; (b) 当 $p > 1, q > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < p = q \leq 1$ 时条件收敛. **2697.** (a) $p > 1$; (b) $0 < p \leq 1$. **2698.** (a) 收敛; (b) 收敛; (c) 收敛. **2699.** (a) $q > p + 1$; (b) $p < q \leq p + 1$. **2700.** 当 $m \geq 0$ 时绝对收敛; 当 $-1 < m < 0$ 时条件收敛. **2703.** (a) $n \geq 1\,000\,000$; (b) $n \geq 1.32 \cdot 10^{16}$. **2706.** (a) 发散; (b) 可能收敛, 也可能发散. **2707.** $\frac{2}{3}$. **2708.** $\frac{3}{4}$. **2709.** $-\frac{2}{7}$. **2710.** $\frac{1+y}{1-xy}$. **2716.** 当 $|x| > 1$ 时绝对收敛. **2717.** 当 $x > 0$ 时绝对收敛; 当 $x = 0$ 时条件收敛. **2718.** 当 $x > -\frac{1}{3}$ 和 $x < -1$ 时绝对收敛. **2719.** 当 $|x| \neq 1$ 时绝对收敛, 当 $x = -1$ 时条件收敛. **2720.** 当 $-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{17}+3}{6}$ 时绝对收敛. **2721.** 当 $|x - \pi k| \leq \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时绝对收敛. **2722.** 当 $p > 1$ 和 $x \neq k$ ($k = -1, -2, \dots$) 时绝对收敛, 当 $0 < p \leq 1, x \neq k$ 时条件收敛. **2723.** 当 $q > p + 1$ 时绝对收敛, 当 $p < q \leq p + 1$ 时条件收敛. **2724.** 当 $|x| < 1$ 时绝对收敛. **2725.** 当 $|x| < 1$ 时绝对收敛. **2726.** 当 $|x| \neq 1$ 时绝对收敛. **2727.** 当 $x \neq -1$ 时绝对收敛. **2728.** 当 $x > 0$ 时绝对收敛. **2729.** 当 $0 < |x| < +\infty$ 时绝对收敛, 其中 $|a| > 1$; 而当 $|a| \leq 1$ 或 $x = 0$ 时发散. **2730.** 当 $x = 2$ 和 $x > e$ 时绝对收敛. **2731.** 当 $x > 1$ 时绝对收敛. **2732.** 当 $0 < \min(x, y) < 1$ 时收敛. **2733.** 当 $|x| < 1, 0 \leq y < +\infty$ 和 $|x| > 1, y > |x|$ 时绝对收敛; 当 $x = -1, 0 \leq y \leq 1$ 时条件收敛. **2734.** 当 $\max(|x|, |y|) < 1$ 时绝对收敛. **2735.** 绝对收敛域为: (1) $0 \leq x < 1, -\infty < y < +\infty$; (2) $x = 1, y > 1$; (3) $x > 1, y > 2$. **2736.** 当 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ 时绝对收敛, 其中 k 为整数. **2738.** $\frac{1}{2} < |x| < 2; \frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}$. **2739.** (a) 当 $x \geq 0$ 时绝对收敛, 当 $-1 < x < 0$ 时条件收敛; (b) 当 $p + x > 0$ 和 $x = 0, 1, 2, \dots$ 时绝对收敛, 当 $-1 < p + x \leq 0$ 时条件收敛; (c) 绝对收敛域为: (1) $|x| < 1, y$ 为任意数; (2) $x = \pm 1, y > \frac{1}{2}$; (3) x 为任意数, $y = 0, 1, 2, \dots$; 当 $x = 1, -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$ 时条件收敛. **2743.** 当 $\varepsilon = 0.001, x = \sqrt[3]{0.1}$ 时 $N \geq 3m$. 非一致收敛. **2744.** $n > \frac{1}{\varepsilon}$. **2745.** $n \geq 39$. **2746.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **2747.** 一致收敛. **2748.** 非一致收敛. **2749.** 一致收敛. **2750.** 一致收敛. **2751.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛; (c) 一致收敛. **2752.** (a) 非一致收敛; (b) 一致收敛. **2753.** 一致收敛. **2754.** 非一致收敛. **2755.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **2756.** (a) 非一致收敛; (b) 一致收敛. **2757.** 非一致收敛. **2758.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **2759.** 一致收敛. **2760.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **2761.** 一致收敛. **2762.** 一致收敛. **2763.** 不一致收敛. **2767.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **2768.** (a) 一致收敛. (b) 非一致收敛. **2769.** 非一致收敛. **2770.** 一致收敛. **2771.** 非一致收敛. **2772.** 一致收敛. **2773.** (a) 非一致收敛; (b) 一致收敛. **2775.** (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. **2776.** 非一致收敛. **2777.** 一致收敛. **2778.** 一致收敛. **2779.** 一致收敛. **2780.** 一致收敛. **2781.** 一致收敛. **2782.** 一致收敛. **2783.** 能. **2785.** 不一定. **2795.** (a) 当 $|x| < 1$ 时存在且连续; (b) 当 $|x| < +\infty$ 时存在且连续; (c) 当 $|x| < +\infty$ 时存在, 当 $x = 0$ 时不连续. **2799.** (a)

当 $x \neq -k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) 时存在且可微; (b) 当 $|x| < +\infty$ 时存在, 除 $x = 0$ 外处处可微.

2802. (a) α 为任意数; (b) $\alpha < 1$; (c) $\alpha < 2$. **2805.** 不合理. **2806.** $\frac{1}{2} \ln 2$. **2807.** 1. **2808.** (a) 1; (b) $\frac{\pi^2}{6}$. **2809.** 合理. **2810.** 合理. **2811.** (b) 不一定. **2812.** $R = 1; (-1, 1)$. 在 $x = -1$ 处, 当 $p > 1$ 时绝对收敛, 而当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛; 在 $x = 1$ 处, 当 $p > 1$ 时绝对收敛, 而当 $p \leq 1$ 时发散. **2813.** $R = \frac{1}{3}; (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$. 在 $x = -\frac{4}{3}$ 处条件收敛, 在 $x = -\frac{2}{3}$ 处发散. **2814.** $R = 4; (-4, 4)$. 在 $x = \pm 4$ 处发散. **2815.** $R = +\infty; (-\infty, +\infty)$. **2816.** $R = \frac{1}{e}; (-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$. 在 $x = \pm \frac{1}{e}$ 处发散. **2817.** $R = +\infty; (-\infty, +\infty)$. **2818.** $R = 2; (-1, 3)$. 在 $x = -1$ 处, 当 $p > 2$ 时绝对收敛, 当 $0 < p \leq 2$ 时条件收敛; 在 $x = 3$ 处, 当 $p > 2$ 时绝对收敛, 当 $p \leq 2$ 时发散. **2819.** $R = 2^p; (-2^p, 2^p)$. 在 $x = -2^p$ 处, 当 $p > 2$ 时绝对收敛, 当 $p \leq 2$ 时发散; 在 $x = 2^p$ 处, 当 $p > 2$ 时绝对收敛, 当 $0 < p \leq 2$ 时条件收敛. **2820.** $R = 1; (-1, 1)$. 在 $x = -1$ 处, 当 $m \geq 0$ 时绝对收敛, 当 $m < 0$ 时发散; 在 $x = 1$ 处, 当 $m \geq 0$ 时绝对收敛, 当 $-1 < m < 0$ 时条件收敛. **2821.** $R = \min(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}); (-R, R)$. 在 $x = -R$ 处, 当 $a \geq b$ 时条件收敛; 当 $a < b$ 时绝对收敛; 在 $x = R$ 处, 当 $a \geq b$ 时发散, 当 $a < b$ 时绝对收敛. **2822.** $R = \max(a, b); (-R, R)$. 在 $x = \pm R$ 处发散. **2823.** $R = 1; (-1, 1)$. 在 $x = \mp 1$ 处, 当 $a > 1$ 时绝对收敛; 当 $a \leq 1$ 时发散. **2824.** $R = 1; (-1, 1)$. 在 $x = \pm 1$ 处绝对收敛. **2825.** $R = 1; (-1, 1)$. 在 $x = -1$ 处条件收敛; 在 $x = 1$ 处发散. **2826.** $R = 1; (-1, 1)$. 在 $x = -1$ 处发散; 在 $x = 1$ 处条件收敛. **2827.** $R = 1; (-1, 1)$. 在 $x = \pm 1$ 处发散. **2828.** $R = \frac{1}{4}; (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. 在 $x = \pm \frac{1}{4}$ 处发散. **2829.** $R = \frac{1}{3}; (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. 在 $x = \pm \frac{1}{3}$ 处发散. **2830.** $R = 1; (-1, 1)$. 在 $x = \pm 1$ 处绝对收敛. **2831.** (a) $R = 1; (-1, 1)$. 当 $x = \pm 1$ 时条件收敛; (b) 当 $0 < x < 2$ 时绝对收敛, 当 $x = 2$ 时条件收敛; (c) 仅当 $x = 0$ 时收敛. **2832.** $R = 1; (-1, 1)$. 在 $x = -1$ 处, 当 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时绝对收敛, 当 $-1 < \gamma - \alpha - \beta \leq 0$ 时条件收敛; 在 $x = 1$ 处, 当 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时绝对收敛, 当 $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$ 时发散. **2833.** $x > 0$. **2834.** $|x| > \frac{1}{2}$. **2835.** $0 < |x| < +\infty$. **2836.** $x > -1$. **2837.** $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$, 其中 k 为整数. **2838.** $-1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3$. **2839.** (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$ ($|x| < |a|$); (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$ ($|x-b| < |a-b|$); (c) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}}$ ($|x| > |a|$). **2840.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$ ($0 < x \leq 2$); $\ln 2$. **2841.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ($|x| < +\infty$). **2842.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ($|x| < +\infty$). **2843.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ ($|x| < +\infty$). **2844.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n$ ($|x| < +\infty$). **2845.** $\mu x + \frac{\mu(1-\mu^2)}{3!} x^3 + \frac{\mu(1-\mu^2)(3^2-\mu^2)}{5!} x^5 + \dots$ ($|x| < 1$). **2846.** $1 - \frac{\mu^2}{2!} x^2 - \frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{4!} x^4 - \dots$ ($|x| < 1$). **2847.** $1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} + \dots$ ($0 < x < 2$). **2848.** $e(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24} x^2 - \frac{7}{16} x^3 + \dots)$ ($|x| < 1$). **2849.** $\sin(x+h) = \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \dots$ ($|h| < +\infty$); $\cos(x+h) = \cos x - h \sin x - \frac{h^2}{2!} \cos x + \frac{h^3}{3!} \sin x + \dots$ ($|h| < +\infty$). **2850.1.** (a) $(-2, 2)$; (b) $(3, 7)$. **2850.2.** 不存在. **2851.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ ($|x| < +\infty$). **2852.** $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ ($|x| < +\infty$). **2853.** $\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n-1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ ($|x| < +\infty$). **2854.** $\sum_{n=10}^{\infty} x^n$ ($|x| < 1$). **2855.** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ ($|x| < 1$). **2856.** $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1}$ ($-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$). **2857.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ($|x| < 1$). **2858.** $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n$ ($|x| < \frac{1}{2}$). **2859.** $\sum_{n=0}^{\infty} [1 + \frac{(-1)^n}{6^n}] x^n$ ($|x| < 1$).

2860. $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n + \frac{1-(-1)^n}{2} \right] x^n$ ($|x| < 1$). 2861. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 其中 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} \right]$ (斐波那契数), $x \in \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$. 2862. (a) $\frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin \frac{2\pi(n+1)}{3}$ ($|x| < 1$); (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, 其中当 $n = 4k$ 时 $c_n = 1$; 当 $n = 4k + 1$ 时 $c_n = -1$; 当 $n = 4k + 2$ 或者 $n = 4k + 3$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时 $c_n = 0$. $f^{(1000)}(0) = 1000!$. 2863. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha$ ($|x| < 1$). 2864. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin n\alpha$ ($|x| < 1$). 2865. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sinh n\alpha$ ($|x| < e^{-|\alpha|}$). 2866. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$ ($|x| < 1$). 2867. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + [1+(-1)^n](-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}}{n} x^n$ ($-1 < x \leq 1$). 2868. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!} x^n$ ($|x| < +\infty$). 2869. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ($|x| \leq 1$); $\frac{\pi}{4}$. 2870. $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ($|x| \leq 1$). 2871. $x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right\}$ ($|x| \leq 1$). 2872. $-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n$ ($|x| < 1$). 2873. (a) $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ ($-1 \leq x \leq 1$); (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ ($-1 < x < 1$); (c) $\arctan 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ ($-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$); (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)} \right\}$ ($|x| \leq \sqrt{2}$); (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ ($|x| \leq 1$); (f) 当 $0 \leq x \leq 1, -1 \leq x \leq 0$ 时 $2|x| \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n}}{2n+1} \right\}$; (g) $1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \right\}$ ($|x| \leq 1$); (h) $-1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}$ ($|x| \leq 1$). 2874. (a) $e^{x^2} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots \right]$; (b) $\frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \left[a^n + \frac{n(n-1)}{1!} a^{n-1} x + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} a^{n-2} x^2 + \dots \right]$; (c) $(-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \left[\frac{1}{3} x^{n-1} + \frac{1}{5} (n-1)x^{n-2} + \dots \right]$. 2875. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x+1)^{2n}$ ($-2 \leq x \leq 0$). 2876. $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ ($|x| > 1$). 2877. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1}$ ($x > 0$). 2878. $\frac{x}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{n+1}$ ($x \geq -\frac{1}{2}$). 2881. $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \dots$ ($|x| < 1$). 2882. $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} x^n$ ($|x| < +\infty$). 2883. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} + \frac{1}{(2n-4)!} \right] x^n$ ($|x| < +\infty$), 其中 $0! = 1, (-1)! = \infty, (-2)! = \infty$, 等等. 2884. $2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ($-1 \leq x < 1$). 2885. $x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1}$ ($|x| \leq 1$). 2886. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n$ ($|x| < +\infty$). 2887. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n$ ($|x| < +\infty$). 2888. $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n \right\}$ ($-1 < x < 1$). 2889. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) \frac{x^n}{n}$ ($|x| \leq 1$). 2890. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n}$ ($|x| \leq 1$). 2891. $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$ ($|x| < \frac{\pi}{2}$). 2892. $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$ ($|x| < \frac{\pi}{2}$). 2893. $-\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots$ ($|x| < \pi$). 2894. $E_0 = 1, \sum_{k=0}^n \left\{ (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!} \right\} = 0, n = 1, 2, \dots$. 2895. $P_0(t) = 1; P_n(t) = \frac{(2n-1)!!}{n!} \left[t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} t^{n-4} - \dots \right]$ ($n \geq 1$) (勒让德多项式). 2896. $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$, 其中 $s_n = \sum_{k=0}^n a_k, x \in (-1, 1)$. 2897. (a) $R \geq \min(R_1, R_2)$; (b) $R \geq R_1 R_2$. 2901. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$

- ($|x| < +\infty$). **2902.** $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ ($|x| \leq 1$). **2903.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ ($|x| < +\infty$). **2904.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ ($|x| \leq 1$). **2905.** $x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} - \dots$ ($|x| < 1$).
- 2906.** $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ($|x| < 1$). **2907.** $\arctan x$ ($|x| \leq 1$). **2908.** $\cosh x$ ($|x| < +\infty$). **2909.** $1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x)$ ($0 < |x| < 1$). **2910.** $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ($-1 \leq x < 1$). **2911.** $\frac{x}{(1-x)^2}$ ($|x| < 1$). **2912.** $\frac{x(1-x)}{(1-x)^3}$ ($|x| < 1$). **2913.** $\frac{2x}{(1-x)^3}$ ($|x| < 1$). **2916.** $R = 2; (x-1)^2 + (y-1)^2 < 4$. **2917.** $R = \frac{1}{\sqrt{2}}; x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$. **2918.** $R = 1; x^2 + y^2 < 1$. **2919.** $R = 1; x^2 + y^2 < 1$. **2920.** $R = |2 \sin \frac{\alpha}{2}|; (x - \cos \alpha)^2 + (y - \sin \alpha)^2 < 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. **2921.** 2.080, $|R_3| < 0.001$. **2922.** (a) $0.87606 = \arcsin 50^\circ 11' 40''$; (b) 1.995 27; (c) 0.606 53; (d) 0.223 14. **2923.** 0.309 02. **2924.** 0.999 848. **2925.** 0.158. **2926.** 2.718 282. **2927.** 0.182 3. **2928.** 3.141 6. **2929.** 3.142. **2930.** 3.141 592 654. **2931.** $\ln 2 = 0.693 15; \ln 3 = 1.098 61$. **2932.** (a) 0.747; (b) 2.835; (c) 1.605; (d) 0.905; (e) 1.057; (f) 0.119; (g) 0.337; (h) 0.927; (i) 8.041; (j) 0.488; (k) 0.507; (l) 0.783. **2933.** 3.82. **2934.** 4.84. **2935.** 20.02 m. **2936.** $\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$. **2937.** 傅里叶级数就是多项式 $P_n(x)$. **2938.** $\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}; \frac{\pi}{4}$. **2939.** $\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi x}{l}$. **2940.** $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$. **2941.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. **2942.** $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2943.** $\frac{(b-a)\pi}{4} + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)} + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$. **2944.** $\frac{2}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$. **2945.** $\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a \cos nx}{n^2 - a^2} \right]$. **2946.** $\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 - a^2}$. **2947.** $\frac{2 \sinh \pi a}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 + a^2}$. **2948.** $2 \sinh ah \left[\frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos \frac{n\pi x}{h} - \pi n \sin \frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2 + (\pi n)^2} \right]$. **2949.** $a + l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$ ($a < x < a + 2l$). **2950.** $1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos nx$. **2951.** $\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2 - 1)^2} \sin 2nx$. **2952.** $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} \right\}$. **2953.** $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)x$. **2954.** $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2955.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}$ ($x \neq$ 整数). **2956.** $\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **2957.** $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$. **2958.** $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \cos 2kx$. **2959.** $\frac{\alpha}{1-\alpha^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2} \cos nx$. **2960.** $\frac{4}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{(4k-3)(4k-1)} \right] \cos 4nx$ ($-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$). **2961.** (a) $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$ ($-\pi \leq x \leq \pi$); (b) $2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$ ($0 \leq x < \pi$); (c) $\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ ($0 < x < 2\pi$); $\frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^2}{12}, \frac{\pi^2}{8}$. **2962.** $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$; $x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3}$; $x^4 = \frac{1}{5} \pi^4 + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos nx$. **2963.** $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}; \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}$. **2964.** $\frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2\pi nx}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{n^2}$ ($0 \leq x \leq 3$). **2965.** $\frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=1}^m C_{2m}^{m-k} \cos 2kx$. **2966.** $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$ ($|q| < 1$). **2967.** $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx$ ($|q| < 1$). **2968.** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$. **2969.** $-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx$.

- 2970.** $-\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$. **2971.** $-\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n}$. **2972.** $-2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$. **2973.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2974.** $x(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a}$; $y(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a}$. **2975.** $f(-x) = f(x)$; $f(\pi - x) = -f(x)$. **2976.** $f(-x) = -f(x)$; $f(\pi - x) = f(x)$. **2977.** (a) $-\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{(2k+1)^2} - \frac{8}{\pi} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \right] \cos(2k+1)x \right\}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$); (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{8}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^3} \right] \sin(2k+1)x \right\}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$). **2978.** $a_{2n} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $b_{2n} = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). **2979.** $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). **2980.** (a) $a_n = 0, b_{2k-1} = 0$; (b) $a_n = 0, b_{2k} = 0$. **2981.** $\alpha_n = a_n, \beta_n = -b_n$. **2982.** $\alpha_n = -a_n, \beta_n = b_n$. **2983.** $\bar{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh, \bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh$. **2984.** $A_0 = a_0, A_n = a_n \frac{\sin nh}{nh}, B_n = b_n \frac{\sin nh}{nh}$ ($n = 1, 2, \dots$). **2985.** $A_0 = a_0^2, A_n = a_n^2 + b_n^2; B_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). **2986.** $\frac{1}{2}$. **2987.** $\frac{1}{4}$. **2988.** $2 \ln 2 - 1$. **2989.** $\frac{1}{4}$. **2990.** $\frac{1}{m} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m})$. **2991.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$. **2992.** $\frac{3}{4}$. **2993.** 1 . **2994.** $2(1 - \ln 2)$. **2995.** $2e$. **2996.** $3e^2$. **2997.** $\frac{\pi^2}{3} - 3$. **2998.** $\frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}$. **2999.** $\frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1)$. **3000.** $\frac{1}{3} (2 \ln 2 - \frac{5}{6})$. **3001.** $e^x (\alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_0)$, 其中系数 α_k ($k = 0, 1, \dots, m$) 由等式 $P(n) = \alpha_m n(n-1) \dots (n-m+1) + \alpha_{m-1} n(n-1) \dots (n-m+2) + \dots + \alpha_1 n + \alpha_0$ 所确定. **3002.** $e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1 \right)$. **3003.** $(x^2 + x + \frac{1}{x}) e^{-x} - \frac{1}{x}$. **3004.** $(1 - \frac{x^2}{2}) \cos x - \frac{x}{2} \sin x$. **3005.** 当 $x > 0$ 时 $\frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \sinh \sqrt{x} - \cosh \sqrt{x} \right)$; 当 $x < 0$ 时 $\frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{|x|} - \cos \sqrt{|x|} \right)$; 当 $x = 0$ 时级数和为 0 . **3006.** $\ln \frac{1}{1-x}$. **3007.** $2x \arctan x - \ln(1+x^2)$ ($|x| \leq 1$). **3008.** $\frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ($|x| < 1$). **3009.** $(1-x)^{-\frac{a}{2}} - 1$ ($|x| < 1$). **3010.** $(1 - \frac{x}{2})^{-\frac{1}{3}} - 1$. **3011.** $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ ($|x| < 1$). **3012.** $\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$ ($|x| < 1$). **3013.** $(1+2x^2)e^{x^2}$. **3014.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2$. **3015.** $\frac{\pi}{4}$. **3016.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **3017.** $\frac{\pi}{2}$. **3018.** $\frac{\pi-x}{2}$ ($0 < x < 2\pi$). **3019.** $-\ln |2 \sin \frac{x}{2}|$ ($0 < x < 2\pi$). **3020.** $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin \frac{x+\alpha}{2}}{\sin \frac{x-\alpha}{2}} \right|$. **3021.** 当 $0 < x < 2\alpha$ 时 $\frac{\pi}{4}$; 当 $2\alpha < x < 2\pi - 2\alpha$ 时 0 ; 当 $2\pi - 2\alpha < x < 2\pi$ 时 $-\frac{\pi}{4}$. **3022.** $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x$ ($|x| < \pi$). **3023.** $\frac{1}{2} (1 - \frac{\cos x}{2}) - \frac{x}{2} \sin x$ ($|x| < \pi$). **3024.** $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} |x|$ ($|x| \leq \pi$). **3025.** $\frac{x}{2} (1 + \cos x) - \sin x \ln (2 \cos \frac{x}{2})$ ($|x| < \pi$). **3026.** $e^{\cos x} \cos(\sin x)$ ($|x| < +\infty$). **3027.** $x = i\pi, y = j\pi$ ($i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). **3028.** $2(\arcsin x)^2$ ($|x| \leq 1$). **3029.** 当 $x \geq 0$ 时 $\frac{4}{4-x} + \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2}$; 当 $x < 0$ 时 $\frac{4}{4-x} - \frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \ln \frac{\sqrt{|x|} + \sqrt{4-x}}{2}$. **3030.** $\frac{1}{x-1}$. **3031.** $\frac{a_1}{x}$. **3032.** (a) $\frac{x}{1-x}$; (b) $\frac{1}{1-x}$. **3033.** (a) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$; (b) $\frac{x}{(x-1)^2}$. **3034.** 1 . **3035.** $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{(2n+1)^2}$. **3036.** $\frac{\pi^2}{12}$. **3037.** $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(p+nq)}$. **3038.** $2 - \frac{\pi^2}{6}$. **3039.** $\frac{1}{24}$. **3040.** $\frac{\pi^2}{12}$. **3041.** $F(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \right\}$. **3042.** $E(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\}$. **3043.** $2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon^4}{3} - \dots \right]$, 其中 ε 为椭圆的离心率. **3047.** $\frac{2\pi a^n}{n!}$. **3048.** 当 $\alpha = -1$ 时为 ∞ ; 当 $\alpha = 0$ 时为 π ; 当 $|\alpha| < 1$ ($\alpha \neq 0$) 时为 $\frac{\pi}{\alpha} \ln(1+\alpha)$; 当 $|\alpha| > 1$ 时 $\frac{\pi}{\alpha} \ln(1 + \frac{1}{\alpha})$. **3049.** 当 $|\alpha| \leq 1$ 时 0 ; 当 $|\alpha| > 1$ 时 $\pi \ln \alpha^2$. **3050.** $2 \cdot 10^{-6}$. **3061.** $\frac{1}{4}$. **3062.** 2 . **3063.** $\frac{3}{7}$. **3064.** $a^{-\ln 2}$. **3065.** (a) 不能; (b) 能; (c) 能; (d) 能. **3066.** 发散于 0 . **3067.** 收敛. **3068.** 当 $p > 1$ 时收敛. **3069.** 发散于 0 . **3070.** 对任意 p 均收

敛. 3071. 当 $a_1 = a$ 时收敛. 3072. 当 $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^p b_i$ 时收敛. 3073. 发散于 0. 3074. 收敛. 3075. 收敛. 3076. 收敛. 3077. 对任意 x 均收敛. 3078. 对任意 x 均收敛. 3079. 当 $|x| < 1$ 时收敛. 3080. 当 $|x| < 2$ 时收敛. 3081. 当 $|x| > e$ 时收敛. 3082. 对任意 x 均收敛. 3083. 当 $|x| < 1, p$ 为任意数, 以及 $x = \pm 1, p > 1, q > \frac{1}{2}$ 时收敛. 3084. 对任意 x 和 p 均收敛. 3085. 发散. 3088. 条件收敛. 3089. 发散. 3090. 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时条件收敛. 3091. 发散. 3092. 发散. 3093. 发散. 3094. 条件收敛. 3095. 条件收敛. 3096. 发散. 3097. 当 $\alpha > 1$ 时绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ 时条件收敛. 3109. $F'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}$; $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty, |f'_n(x)| < c_n (n = 1, 2, \dots)$, 其中 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$. 3111. $157.970 + \theta \cdot 0.0004 (0 < \theta < 1)$. 3112. $10^{2866} \cdot 7.7 (1 + \frac{\theta}{12000}) (|\theta| < 1)$. 3113. $0.0798 \cdot (1 + \frac{\theta}{300}) (|\theta| < 1)$. 3114. $10^{28} \cdot 1.378 (1 + \frac{\theta}{288}) (|\theta| < 1)$. 3115. $10^{42} \cdot 4.792 (1 + \frac{\theta}{120}) (|\theta| \leq 1)$. 3116. $0.124 (1 + \frac{\theta}{300}) (|\theta| < 1)$. 3117. $0.355 (1 + \frac{\theta}{600}) (|\theta| < 1)$. 3118. $(2n-1)!! = \sqrt{2}(2n)^n e^{-n + \frac{\theta_n}{12n}} (|\theta_n| < 1)$. 3119. $\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{\theta_n}{6n}} (|\theta_n| < 1)$. 3120. (a) 1; (b) e; (c) $\frac{e}{2}$; (d) 1. 3121. $P_3(x) = 1 - \frac{55}{21}x - \frac{1}{14}x^2 + \frac{5}{42}x^3; P_3(-1) \approx 3.43; P_3(1) = -1.57; P_3(6) \approx 8.43$. 3122. $y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2h}(x - x_0) + \frac{y_1 - 2y_0 + y_0}{2h^2}(x - x_0)^2$. 3123. $y = 0.808 + 0.193x - 0.00101x^2$. 3124. $\sin x^\circ \approx \frac{5x}{288} \left[1 - \left(\frac{x}{150} \right)^2 \right]; \sin 20^\circ \approx 0.341; \sin 40^\circ \approx 0.645; \sin 80^\circ \approx 0.994$. 3125. $P(x) = \frac{1}{3}(7x^2 - 4x^4)$. 3126. $7\frac{1}{3}$. 3127. $B_n(x) = x; B_n(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}; B_n(x) = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})x^3 + \frac{3}{n}(1 - \frac{1}{n})x^2 + \frac{1}{n^2}x$. 3128. $B_n(x) = \sum_{i=0}^n f(a + \frac{i}{n}l) \cdot C_n^i \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{l^n}$, 其中 $l = b - a$. 3129. $B_n(x) = \frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3 + \frac{1}{16}(1+x)^4$. 3130. $B_{2n}(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \sum_{i=1}^n i C_{2n}^{n-i} \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^i + \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^i \right]$. 3131. $B_n(x) = e^{ka} \left[1 + \left(e^{\frac{kl}{n}} - 1 \right) \frac{x-a}{l} \right]^n$, 其中 $l = b - a$. 3132. $B_n(x) = \frac{1}{2} \left[\left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n + \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n \right]$, 其中 $i = \sqrt{-1}$. 3135. $\sigma_{2n-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

第六章

3136. 半平面 $y \geq 0$. 3137. $|x| \leq 1; |y| \geq 1$. 3138. 圆 $x^2 + y^2 \leq 1$. 3139. 圆的外部 $x^2 + y^2 > 1$. 3140. 环 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. 3141. 月形 $x \leq x^2 + y^2 \leq 2x$. 3142. $-1 \leq x^2 + y \leq 1$. 3143. 半平面 $x + y < 0$. 3144. 一对对顶的直角 $|y| \leq |x| (x \neq 0)$. 3145. 由直线 $y = 0$ 和 $y = -2x$ 所围成的一对对顶的角, 包含边界, 但不包括公共顶点 $O(0, 0)$. 3146. 由抛物线 $y^2 = x, y^2 = -x$ 和直线 $y = 2$ 所围成的曲边三角形, 不包括顶点 $O(0, 0)$. 3147. 同心环族 $2\pi k \leq x^2 + y^2 \leq \pi(2k+1) (k = 0, 1, 2, \dots)$. 3148. 圆锥 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 的外部, 除去顶点, 包含边界在内. 3149. 空间四个卦限的总体. 3150. 双叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ 的内部. 3151. 平行直线. 3152. 同心圆. 3153. 以 $y = \pm x$ 为公共渐近线的等轴双曲线族. 3154. 平行直线. 3155. 以坐标原点为顶点的直线束, 但顶点除外. 3156. 相似椭圆族. 3157. 位于第一、三象限内且以坐标轴为渐近线的等轴双曲线. 3158. 两节的折线族, 其顶点位于 Oy 轴. 3159. (a) 在 $z = 0$ 时为第一、三象限; 在 $z > 0$ 时为两节的折线族, 它的各节平行于坐标轴, 而顶点位于直线 $x + y = 0$ 上; (b) 两节折线, 各节分别平行于 Ox 轴和 Oy 轴, 并指向其正

向, 顶点位于直线 $y = x$ 上; (c) 带有公共中心 $O(0, 0)$ 的正方形围线族, 其边在 $z > 0$ 时平行于 Ox 轴和 Oy 轴; 在 $z = 0$ 时退化为点 $O(0, 0)$; (d) 当 $z < 0$ 时, 平行于 Ox 轴的直线; 当 $z > 0$ 时, 顶点在抛物线 $y = x^2$ 上的折线的二节, 此二节分别平行于 Ox 轴和 Oy 轴, 其中一节指向 Oy 轴的正向; 当 $z = 0$ 时, Oy 轴的正半轴. **3160.** 经过坐标原点 (不包括此原点在内) 且与 Ox 轴正交的圆束. **3161.** 曲线 $y = \frac{C}{\ln x}$. **3162.** 曲线 $y = \frac{C+x}{\ln x}$. **3163.** 圆心在 Ox 轴上且与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 正交的圆族. **3164.** 与 Oy 轴正交且经过点 $(-a, 0), (a, 0)$ 的圆族 (不包括这两点). **3165.** 若 $z = 0$ 直线族 $x = m\pi, y = n\pi$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); 若 $z = -1$ 或 $z = 1$, 正方形族 $m\pi < x < (m+1)\pi, n\pi < y < (n+1)\pi$, 其中 $(-1)^{m+n} = z$. **3166.** 平行平面族. **3167.** 中心在坐标原点的同心球族. **3168.** 当 $u < 0$, 双叶双曲面族; 当 $u > 0$, 单叶双曲面族; 当 $u = 0$, 圆锥. **3169.** 椭圆柱族, 其公共轴为 $x + y = 0, z = 0$. **3170.** 若 $u = 0$, 同心球族 $x^2 + y^2 + z^2 = \pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$); 若 $u = -1$ 或 $u = 1$, 球层族 $\pi n < x^2 + y^2 + z^2 < \pi(n+1)$, 其中 $(-1)^n = u$. **3171.** 方向为 $z = f(y), x = 0$ 的圆柱面, 其母线平行于直线 $y = ax, z = 0$. **3172.** 曲线 $z = f(x), y = 0$ 绕 Oz 轴旋转所成的曲面. **3173.** 顶点在坐标原点, 方向为 $x = 1, z = f(y)$ 的圆锥面. **3174.** 方向为 $x = 1, z = f(y)$ 且母线平行于 Oxy 平面的曲面. **3176.** $f(1, \frac{y}{x}) = f(x, y)$. **3177.** $\sqrt{1+x^2}$. **3178.** $f(t) = 2 + t^2; z = x - 1 + \sqrt{y}$ ($x > 0$). **3179.** $f(x) = x^2 - x; z = 2y + (x-y)^2$. **3180.** $f(x, y) = x^2 \frac{1-y}{1+y}$. **3183.2.** 不存在. **3183.3.** 0; 不能. **3184.** (a) 0, 1; (b) $\frac{1}{2}, 1$; (c) 0, 1; (d) 0, 1; (e) 1, ∞ . **3185.** 0. **3186.** 0. **3187.** a . **3188.** 0. **3189.** 0. **3190.** 1. **3191.** e . **3192.** $\ln 2$. **3193.** (a) $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$; (b) $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$ 和 $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$. **3194.** 间断点 $x = 0, y = 0$. **3195.** 直线 $x + y = 0$ 的所有点. **3196.** $O(0, 0)$ 是无穷型间断点; 直线 $x + y = 0$ ($x \neq 0$) 上的点为可去间断点. **3197.** 在坐标轴上的诸点. **3198.** 直线 $x = m\pi$ 和 $y = n\pi$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 上的点的全体. **3199.** 圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点. **3200.** 坐标平面 $x = 0, y = 0$ 和 $z = 0$ 上的点. **3201.** (a, b, c) . **3203.1.** 一致连续. **3203.2.** 一致连续. **3203.3.** 非一致连续. **3203.4.** 函数在 E 上连续, 但非一致连续. **3211.2.** $f'_x(x, 1) = 1$. **3212.1.** $f'_x(0, 0) = 0, f'_y(0, 0) = 0$; 函数在点 $O(0, 0)$ 不可微. **3212.2.** 函数在点 $O(0, 0)$ 不可微. **3212.3.** 函数在点 $O(0, 0)$ 可微. **3213.** $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -16xy, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$. **3214.** $\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$. **3215.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{y^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}$. **3216.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$. **3217.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(x+y) + x \cos(x+y), \frac{\partial u}{\partial y} = x \cos(x+y), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \cos(x+y) - x \sin(x+y), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos(x+y) - x \sin(x+y), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x \sin(x+y)$. **3218.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x \sin x^2}{y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2x \sin x^2}{y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2 \cos x^2}{y^3}$. **3219.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{8x^2}{y^2} \sin \frac{x^2}{y} \sec^3 \frac{x^2}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y} - \frac{4x^3}{y^3} \sin \frac{x^2}{y} \sec^3 \frac{x^2}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^4} \sin \frac{x^2}{y} \sec^3 \frac{x^2}{y}$. **3220.** $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1+y \ln x), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x$ ($x > 0$). **3221.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$. **3222.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. **3223.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$ ($xy \neq 1$). **3224.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2-y^2) \operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$ ($y \neq 0$). **3225.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

- $-\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. **3226.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln \frac{x}{y},$
 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z(z-1)}{x^2} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z(z+1)}{y^2} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln^2 \frac{x}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{z^2}{xy} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} =$
 $\frac{1}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^z \left(1 + z \ln \frac{x}{y}\right), \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z \left(1 + z \ln \frac{x}{y}\right) \left(\frac{x}{y} > 0\right)$. **3227.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yu}{xz}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u \ln x}{z},$
 $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{yu}{z^2} \ln x, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y(y-z)u}{x^2 z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u \ln^2 x}{z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{yu \ln x}{z^4} (2z + y \ln x), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$
 $\frac{(z+y \ln x)u}{xz^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -\frac{yu(z+y \ln x)}{xz^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{u \ln x(z+y \ln x)}{z^3} (xz \neq 0)$. **3228.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^z}{x} u, \frac{\partial u}{\partial y} =$
 $zy^{z-1} u \ln x, \frac{\partial u}{\partial z} = y^z u \ln x \ln y, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^z(y^z-1)}{x^2} u, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = zy^{z-2} u(z-1 + zy^z \ln x) \ln x, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} =$
 $y^z u(1 + y^z \ln x) \ln x \ln^2 y, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{zy^{z-1} u}{x} (1 + y^z \ln x), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{y^z u \ln y}{x} (1 + y^z \ln x), \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} =$
 $y^{z-1} u \ln x [1 + z \ln y(1 + y^z \ln x)] (x > 0, y > 0)$. **3230.2.** $f''_{xy}(0,0)$ 不存在. **3235.** $du =$
 $x^{m-1} y^{n-1} (my dx + nx dy), d^2 u = x^{m-2} y^{n-2} [m(m-1)y^2 dx^2 + 2mnxy dx dy + n(n-1)x^2 dy^2]$. **3236.** $du = \frac{y dx - x dy}{y^2}, d^2 u = -\frac{2}{y^3} dy(y dx - x dy)$. **3237.** $du = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, d^2 u = \frac{(y dx - x dy)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.
3238. $du = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}, d^2 u = \frac{(y^2 - x^2)(dx^2 - dy^2) - 4xy dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$. **3239.** $du = e^{xy}(y dx + x dy);$
 $d^2 u = e^{xy}[y^2 dx^2 + 2(1 + xy) dx dy + x^2 dy^2]$. **3240.** $du = (y + z) dx + (z + x) dy + (x +$
 $y) dz, d^2 u = 2(dx dy + dy dz + dz dx)$. **3241.** $du = \frac{(x^2 + y^2) dz - 2z(x dx + y dy)}{(x^2 + y^2)^2},$
 $d^2 u = \frac{2z[(3x^2 - y^2) dx^2 + 8xy dx dy + (3y^2 - x^2) dy^2] - 4(x^2 + y^2)(x dx + y dy) dz}{(x^2 + y^2)^3}$. **3242.** $dx - dy, -2(dx -$
 $dy)(dy + dz)$. **3244.** (a) $1 + mx + ny$; (b) xy ; (c) $x + y$. **3245.** (a) 108.972; (b) 1.055; (c) 2.95;
(d) 0.502; (e) 0.97. **3246.** 对角线减小约 3 mm; 面积减小约 140 cm². **3247.** 减小 1.7 mm.
3249. $\Delta \approx 10.2 \text{ m}^3; \delta \approx 13\%$. **3250.** $\Delta \approx 7.6 \text{ m}$. **3251.** $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的邻
域内无界. **3256.** $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24, \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = 0, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -16$. **3257.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0$. **3258.** $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} =$
 $-6(\cos x + \cos y)$. **3259.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0$. **3260.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz} (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2)$. **3261.**
 $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta} = -\frac{6}{r^4} + \frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$, 其中 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$. **3262.** $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q} = p!q!$.
3263. $\frac{2(-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$. **3264.** $e^{x+y} \cdot [x^2 + y^2 + 2(mx + ny) + m(m-1) + n(n-1)]$.
3265. $(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$. **3266.** $\sin \frac{n\pi}{2}$. **3267.** $F(t) = f'(t) + 3tf''(t) + t^2 f'''(t)$.
3268. $d^4 u = 24(dx^4 - 2dx^3 dy - 2dx dy^3 + dy^4)$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24, \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = -12, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} =$
 $-12, \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 24$. **3269.** $d^3 u = 6(dx^3 - 3dx^2 dy + 3dx dy^2 + dy^3)$. **3270.** $d^3 u = -8(x dx +$
 $y dy)^3 \cos(x^2 + y^2) - 12(x dx + y dy)(dx^2 + dy^2) \sin(x^2 + y^2)$. **3271.** $d^{10} u = -\frac{9!(dx + dy)^{10}}{(x+y)^{10}}$.
3272. $d^6 u = -(dx^6 - 15dx^4 dy^2 + 15dx^2 dy^4 - dy^6) \cos x \cosh y - 2dx dy(3dx^4 - 10dx^2 dy^2 +$
 $3dy^4) \sin x \sinh y$. **3273.** $d^3 u = 6dx dy dz$. **3274.** $d^4 u = 2\left(\frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3}\right)$. **3275.**
 $d^n u = e^{ax+by}(a dx + b dy)^n$. **3276.** $d^n u = \sum_{k=0}^n C_n^k X^{(n-k)}(x) Y^{(k)}(y) dx^{n-k} dy^k$. **3277.**
 $d^n u = f^{(n)}(x+y+z)(dx + dy + dz)^n$. **3278.** $d^n u = e^{ax+by+cz}(a dx + b dy + c dz)^n$. **3280.**
(a) $Au = -u, A^2 u = u$; (b) $Au = 1, A^2 u = 0$. **3281.** (a) $\Delta u = 0$; (b) $\Delta u = 0$. **3282.** (a)
 $\Delta_1 u = 9[(x^2 - yz)^2 + (y^2 - xz)^2 + (z^2 - xy)^2], \Delta_2 u = 6(x + y + z)$; (b) $\Delta_1 u = \frac{1}{r^4}$, 其中
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \Delta_2 u = 0$. **3283.** $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2 + z^2); \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) +$
 $4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2); \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xy f''(x^2 + y^2 + z^2)$. **3284.** $\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y} f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right); \frac{\partial u}{\partial y} =$
 $-\frac{x}{y^2} f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right); \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11}\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{2}{y} f''_{12}\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2} f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right); \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x^2}{y^2} f''_{12}\left(x, \frac{x}{y}\right) -$
 $\frac{x}{y^3} f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y^2} f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right); \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{y^4} f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{2x}{y^3} f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right)$. **3285.** $\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + y f'_2 +$
 $yz f'_3; \frac{\partial u}{\partial y} = x f'_2 + xz f'_3; \frac{\partial u}{\partial z} = xy f'_3; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} + y^2 f''_{22} + y^2 z^2 f''_{33} + 2y f''_{12} + 2yz f''_{13} + 2y^2 z f''_{23}; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$
 $x^2 f''_{22} + 2x^2 z f''_{23} + x^2 z^2 f''_{33}; \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 y^2 f''_{33}; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy f''_{22} + xyz^2 f''_{33} + x f''_{12} + xz f''_{13} + 2xyz f''_{23} +$
 $f'_2 + z f'_3; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = xy f''_{13} + xy^2 f''_{23} + xy^2 z f''_{33} + y f'_3; \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x^2 y f''_{23} + x^2 yz f''_{33} + x f'_3$. **3286.**

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{11} + (x+y)f''_{12} + xyf''_{22} + f'_2$. **3287.** $\Delta u = 3f''_{11} + 4(x+y+z)f''_{12} + 4(x^2+y^2+z^2)f''_{22} + 6f'_2$.
3288. $du = f'(t)(dx + dy)$; $d^2u = f''(t)(dx + dy)^2$. **3289.** $du = f'(t)\frac{x dy - y dx}{x^2}$; $d^2u = f''(t)\frac{(x dy - y dx)^2}{x^4} - 2f'(t)\frac{dx(x dy - y dx)}{x^3}$. **3290.** $du = f' \cdot \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $d^2u = f'' \cdot \frac{(x dx + y dy)^2}{x^2 + y^2} + f' \cdot \frac{(y dx - x dy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$. **3291.** $du = f'(t) dt$; $d^2u = f''(t) dt^2 + f'(t) d^2t$, 其中 $dt = yz dx + zx dy + xy dz$, $d^2t = 2(z dx dy + y dx dz + x dy dz)$. **3292.** $du = 2f' \cdot (x dx + y dy + z dz)$; $d^2u = 4f'' \cdot (x dx + y dy + z dz)^2 + 2f' \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. **3293.** $du = af'_1 dx + bf'_2 dy$; $d^2u = a^2 f''_{11} dx^2 + 2abf''_{12} dx dy + b^2 f''_{22} dy^2$. **3294.** $du = f'_1 \cdot (dx + dy) + f'_2 \cdot (dx - dy)$; $d^2u = f''_{11} \cdot (dx + dy)^2 + 2f''_{12} \cdot (dx^2 - dy^2) + f''_{22} \cdot (dx - dy)^2$. **3295.** $du = f'_1 \cdot (y dx + x dy) + f'_2 \cdot \frac{y dx - x dy}{y^2}$; $d^2u = f''_{11} \cdot (y dx + x dy)^2 + 2f''_{12} \cdot \frac{y^2 dx^2 - x^2 dy^2}{y^2} + f''_{22} \cdot \frac{(y dx - x dy)^2}{y^4} + 2f'_1 \cdot dx dy - 2f'_2 \cdot \frac{(y dx - x dy) dy}{y^3}$. **3296.** $du = f'_1 \cdot (dx + dy) + f'_2 \cdot dz$; $d^2u = f''_{11} \cdot (dx + dy)^2 + 2f''_{12} \cdot (dx + dy) dz + f''_{22} \cdot dz^2$. **3297.** $du = f'_1 \cdot (dx + dy + dz) + 2f'_2 \cdot (x dx + y dy + z dz)$; $d^2u = f''_{11} \cdot (dx + dy + dz)^2 + 4f''_{12} \cdot (dx + dy + dz)(x dx + y dy + z dz) + 4f''_{22} \cdot (x dx + y dy + z dz)^2 + 2f'_2 \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. **3298.** $du = f'_1 \cdot \frac{y dx - x dy}{y^2} + f'_2 \cdot \frac{z dy - y dz}{z^2}$; $d^2u = f''_{11} \cdot \frac{(y dx - x dy)^2}{y^4} + 2f''_{12} \cdot \frac{(y dx - x dy)(z dy - y dz)}{y^2 z^2} + f''_{22} \cdot \frac{(z dy - y dz)^2}{z^4} - 2f'_1 \cdot \frac{(y dx - x dy) dy}{y^3} - 2f'_2 \cdot \frac{(z dy - y dz) dz}{z^3}$. **3299.** $du = (f'_1 + 2t f'_2 + 3t^2 f'_3) dt$; $d^2u = (f''_{11} + 4t f''_{12} + 4t^2 f''_{22} + 6t^2 f''_{13} + 12t^3 f''_{23} + 9t^4 f''_{33} + 2f'_2 + 6t f'_3) dt^2$. **3300.** $du = af'_1 dx + bf'_2 dy + cf'_3 dz$; $d^2u = a^2 f''_{11} dx^2 + b^2 f''_{22} dy^2 + c^2 f''_{33} dz^2 + 2abf''_{12} dx dy + 2acf''_{13} dx dz + 2bcf''_{23} dy dz$. **3301.** $du = 2f'_1 \cdot (x dx + y dy) + 2f'_2 \cdot (x dx - y dy) + 2f'_3 \cdot (y dx + x dy)$; $d^2u = 4f''_{11} \cdot (x dx + y dy)^2 + 4f''_{22} \cdot (x dx - y dy)^2 + 4f''_{33} \cdot (y dx + x dy)^2 + 8f''_{12} \cdot (x^2 dx^2 - y^2 dy^2) + 8f''_{13} \cdot (x dx + y dy)(y dx + x dy) + 8f''_{23} \cdot (x dx - y dy)(y dx + x dy) + 2f'_1 \cdot (dx^2 + dy^2) + 2f'_2 \cdot (dx^2 - dy^2) + 4f'_3 \cdot dx dy$. **3302.** $d^n u = f^{(n)}(ax + by + cz)(a dx + b dy + c dz)^n$. **3303.** $d^n u = \left(a dx \frac{\partial}{\partial \xi} + b dy \frac{\partial}{\partial \eta} + c dz \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^n f(\xi, \eta, \zeta)$, 其中 $\xi = ax, \eta = by, \zeta = cz$. **3304.** $d^n u = \left[dx \left(a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + dy \left(b_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + b_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + dz \left(c_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + c_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right]^n f(\xi, \eta, \zeta)$. **3305.** $F(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$. **3316.** 1. **3319.** xyz . **3331.** $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x$. **3332.** $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$. **3333.** $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. **3334.** $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. **3335.** $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. **3336.** $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$. **3337.** $z \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$. **3338.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. **3339.** $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$. **3340.** $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. **3341.** $1 - \sqrt{3}$. **3342.** $\frac{\partial z}{\partial l} = \cos \alpha + \sin \alpha$; (a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; (b) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; (c) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 及 $\alpha = \frac{7\pi}{4}$. **3343.** $\frac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$. **3344.** $\frac{1}{ab} \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. **3345.** $\frac{\partial u}{\partial l} = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$; $|\text{grad } u| = \sqrt{3}$. **3346.** $|\text{grad } u| = \frac{1}{r_0}$; $\cos(\widehat{\text{grad } u, x}) = -\frac{x_0}{r_0}$; $\cos(\widehat{\text{grad } u, y}) = -\frac{y_0}{r_0}$; $\cos(\widehat{\text{grad } u, z}) = -\frac{z_0}{r_0}$, 其中 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. **3347.** $\frac{\pi}{2}$. **3348.** ≈ 3.142 . **3350.** $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos^2 \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cos^2 \gamma + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \alpha \cos \beta + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \cos \alpha \cos \gamma + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cos \beta \cos \gamma$. **3352.** $\frac{\partial u}{\partial y} = -0.5$. **3353.** $u''_{xx}(x, 2x) = u''_{yy}(x, 2x) = -\frac{4x}{3}$, $u''_{xy}(x, 2x) = \frac{5x}{3}$. **3354.** $z = x\varphi(y) + \psi(y)$. **3355.** $z = \varphi(x) + \psi(y)$. **3356.** $z = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + \cdots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)$. **3357.** $u = \varphi(x, y) + \psi(x, z) + \chi(y, z)$. **3358.** $u = 1 + x^2 y + y^2 - 2x^4$. **3359.** $z = 1 + xy + y^2$. **3360.** $z = x + y^2 + 0.5xy(x + y)$. **3362.** 函数 $f(x)$ 的零点集合在区间 (a, b) 内应为处处不稠密, 即函数 $f(x)$ 的零点不能完全填满任何的区间 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. **3363.** 函数 $f(x)$ 的零点集合在区间 (a, b) 内应为处处不稠密, 且函数 $f(x)$ 的零点 ξ 同时为函数 $g(x)$ 的零点, 此外存在有限极限 $\lim_{x \rightarrow \xi} [g(x)/f(x)]$. **3364.** (i) 无限集; (ii) 两个; (iii) (a) 一个; (b) 两个. **3365.** (i) 无限集; (ii) 四个: $y = x; y =$

$-x; y = |x|$ 和 $y = -|x|$; (iii) 两个; (iv) (a) 两个, (b) 四个; (v) 一个. **3366.** (1) 没有; (2) $0 < |x| < 1, |x| = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$; (3) $x = 0, |x| = 1$; (4) $1 < |x| < \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$; 单值分支 $y = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}} \left(|x| \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \right); y = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}} \left(1 \leq |x| \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \right),$

其中 $\varepsilon = -1, 1$. **3367.** 分支点: $(-1, 0), (0, 0), (1, 0); y = \varepsilon(x) \frac{\sqrt{\sqrt{8x^2+1}-(2x^2+1)}}{2} \left(|x| \leq 1 \right)$, 其中 $\varepsilon(x) = -1, 1, \operatorname{sgn} x$ 和 $-\operatorname{sgn} x$. **3368.** 函数 $\varphi(y)$ 的值集与函数 $f(x)$ 的值集应有公共点.

3371. $y' = -\frac{x+y}{x-y}; y'' = \frac{2a^2}{(x-y)^3}$. **3372.** $y' = \frac{x+y}{x-y}; y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. **3373.** $y' = \frac{1}{1-\varepsilon \cos y}; y'' = \frac{-\varepsilon \sin y}{(1-\varepsilon \cos y)^3}$. **3374.** $y' = \frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}; y'' = \frac{y^2[y(1-\ln x)^2-2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y)-x(1-\ln y)^2]}{x^4(1-\ln y)^3}$. **3375.**

$y' = \frac{y}{x}; y'' = 0$. **3378.** $y'_1(0) = -1; y'_2(0) = 1$. **3379.** $y'_1(0) = 0; y'_2(0) = -\sqrt{3}; y'_3(0) = \sqrt{3}$.

3380. $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}; y'' = -\frac{18}{(x+2y)^3}; y''' = -\frac{162x}{(x+2y)^5}$. **3381.** $y' = 0; y'' = -\frac{2}{3}; y''' = -\frac{2}{3}$.

3383. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2+z^2}{z^3}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2+z^2}{z^3}$. **3384.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2-xy}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2-xy}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$. **3385.**

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y+z-1}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$. **3386.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xz}{x^2-y^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{yz}{x^2-y^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}$. **3387.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = -1, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. **3388.** (a) -2 ; (b) -1 . **3389.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{5}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{5}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{394}{125}$. **3390.**

$dz = -\frac{c^2}{z} \left(\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} \right); d^2z = -\frac{c^4}{z^3} \left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2b^2} dx dy + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \frac{dy^2}{b^2} \right]$. **3391.**

$dz = -\frac{(1-yz)dx+(1-xz)dy}{1-xy}; d^2z = -\frac{2\{y(1-yz)dx^2+[x+y-z(1+xy)]dx dy+x(1-xz)dy^2\}}{(1-xy)^2}$. **3392.**

$dz = \frac{z(y dx+z dy)}{y(x+z)}; d^2z = -\frac{z^2(y dx-x dy)^2}{y^2(x+z)^3}$. **3393.** $dz = dx - \frac{(x-z)dy}{(x-z)^2+y(y+1)}$;

$d^2z = \frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(y+1)]^3} dy^2$. **3394.** $du = -\frac{u^2(dx+dy)-z^2 dz}{u[2(x+y)-u]}$. **3395.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

$-\frac{4(x-z)(y-z)}{(F'_1+2zF'_2)^3} [F_2'^2 F_{11}'' - 2F_1' F_2' F_{12}'' + F_1'^2 F_{22}'] - \frac{2(F_1'+2x F_2')(F_1'+2y F_2') F_2'}{(F_1'+2z F_2')^3}$. **3396.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_1 - F'_3}{F'_2 - F'_3}; \frac{\partial z}{\partial y} =$

$\frac{F'_2 - F'_1}{F'_2 - F'_3}$. **3397.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(1 + \frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} \right); \frac{\partial z}{\partial y} = -\left(1 + \frac{F'_2}{F'_3} \right); \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -F_3'^{-3} [F_3'^2 (F_{11}'' + 2F_{12}'' +$

$F_{22}'') - 2(F_1' + F_2') F_3' (F_{13}'' + F_{23}'') + (F_1' + F_2')^2 F_{33}']$. **3398.** (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(xF_1' + yF_2')^{-3} [y^2 z^2 (F_2'^2 F_{11}'' - 2F_1' F_2' F_{12}'' + F_1'^2 F_{22}'') - 2z(xF_1' + yF_2') F_1'^2]$; (2) (a) $d^2z = -\frac{F_2'^2 F_{11}'' - 2F_1' F_2' F_{12}'' + F_1'^2 F_{22}''}{(F_1' + F_2')^3}$

$(dx - dy)^2$; (b) $d^2z = \frac{F_2'^2 F_{11}'' - 2F_1' F_2' F_{12}'' + F_1'^2 F_{22}''}{(xF_1' + yF_2')^3} (y dx - x dy)^2$. **3399.** $dz = \frac{1}{9}(2dx - dy); d^2z =$

$-\frac{2}{243}(2dx^2 - 5dx dy + 2dy^2)$. **3401.** $\frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y}; \frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y}$. **3402.** (a) $\frac{dx}{dz} = 0, \frac{dy}{dz} =$

$-1, \frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{1}{4}$; (b) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}; \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu-xv}{x^2+y^2}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv-yu}{x^2+y^2}; \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2} \left(x^2 + y^2 >$

$0 \right)$. **3403.** $du = -\frac{1}{3} dy, dv = -dx + \frac{1}{3} dy$. **3404.** $du = \frac{(\sin v + x \cos v) dx - (\sin u - x \cos u) dy}{x \cos v + y \cos u}; dv =$

$-\frac{(\sin v - y \cos u) dx + (\sin u + y \cos u) dy}{x \cos v + y \cos u}; d^2u = -d^2v = \frac{(2 dx \cos v - x dv \sin v) dv}{x \cos v + y \cos u} - \frac{(2 dy \cos u - y du \sin u) du}{x \cos v + y \cos u}$.

3405. $du = \frac{1}{2}(dx + dy); dv = \frac{\pi}{4} dy - \frac{1}{2}(dx - dy); d^2u = dx^2; d^2v = \frac{1}{2}(dx - dy)^2$. **3406.**

$\frac{dy}{dx} = 2\left(t + \frac{1}{t}\right); \frac{dz}{dx} = 3\left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1\right); \frac{d^2y}{dx^2} = 2; \frac{d^2z}{dx^2} = 6\left(t + \frac{1}{t}\right)$. **3407.** $y \geq \frac{x^2}{2}; \frac{\partial z}{\partial x} =$

$-3uv; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u + v) \left(u \neq v \right)$. **3408.** (a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{2}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}$; (b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{26}{121}$; (c)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{\sin^3 \varphi}$. **3409.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sin 2v}{u^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin 2v}{u^2}$. **3410.** $dz =$

$0; d^2z = \frac{1}{2}(dx^2 - dy^2)$. **3411.** $\frac{dz}{dx} = \frac{2(x^2 - y^2)}{x - 2y}; \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4x - 2y}{x - 2y} + \frac{6x}{(x - 2y)^3}$. **3412.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y+z} +$

$\frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)} e^{x-z}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x+z}{(y+z)^2} + \frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2} e^{y-z}$. **3413.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{I} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial u} \right); \frac{\partial z}{\partial y} =$

$-\frac{1}{I} \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)$, 其中 $I = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$. **3414.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I} \frac{\partial \psi}{\partial v}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial v}; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$-\frac{1}{I^3} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right) \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 \right\};$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{I^3} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\}$

- $\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u}$ }; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{I^3} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 \right\}$, 其中 $I = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u}$. **3415.** (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \frac{v}{u}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin \frac{v}{u}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\sin \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} \right)$; $\frac{\partial v}{\partial y} = \cos \frac{v}{u} + \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u}$; (b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-(e^u - \cos v)}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}$; $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^u + \sin v}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}$. **3416.** $\frac{du}{dx} = \frac{I}{I_1}$; $\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{I_1^3} \left\{ \frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)} \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial(h, f)}{\partial(y, z)} \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h \right\}$, 其中 $I_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)}$, $I_2 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, x)}$, $I_3 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y)}$ 和 $I = \frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)}$. **3417.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{I_2}{I_1} \frac{\partial g}{\partial y}$, 其中 $I_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, t)}$, $I_2 = \frac{\partial(h, f)}{\partial(x, t)}$. **3418.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{I_1}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{I_2}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{I_3}{I}$, 其中 $I_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(v, w)}$, $I_2 = \frac{\partial(h, f)}{\partial(v, w)}$, $I_3 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(v, w)}$, $I = \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)}$. **3419.** $dz = -\frac{I_1 dx + I_2 dy}{I_3}$, 其中 $I_1 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, t)}$, $I_2 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, t)}$, $I_3 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, t)}$. **3431.** $x''' + xx^{15} = 0$. **3432.** $x^{(4)} = 0$. **3433.** $\frac{d^2 x}{dt^2} - t \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 = 0$. **3434.** $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$. **3435.** $\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - 6y = 0$. **3436.** $\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0$. **3437.** $\frac{d^2 y}{dt^2} + m^2 y = 0$. **3438.** $u'' + [q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x)]u = 0$. **3439.** $\frac{d^2 u}{dt^2} + (u+3) \frac{du}{dt} + 2u = 0$. **3440.** $\frac{d^2 u}{dt^2} = 0$. **3441.** $\frac{d^2 u}{dt^2} = 0$. **3442.** $\frac{d^2 u}{dt^2} + 8u \left(\frac{du}{dt} \right)^3 = 0$. **3443.** $t^5 \frac{d^3 u}{dt^3} + (3t^4 + 1) \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = 0$. **3444.** $u'' - u' = \frac{A}{(a-b)^2} u$. **3446.** $\Phi(1, u, u' + u^2) = 0$. **3447.** $F(xu' + u^2 - u, u, 1) = 0$. **3450.** $\frac{dr}{d\varphi} = r$. **3451.** $r'^2 = \frac{1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi} r^2$. **3452.** $r(r^2 + 2r'^2 - rr'') = r'^3$. **3453.** $\frac{r'}{r}$. **3454.** $K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$. **3455.** $\frac{dr}{dt} = kr^3$; $\frac{d\varphi}{df} = -1$. **3456.** $w = \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)$. **3457.** $Y' = x$; $Y'' = \frac{1}{y''}$; $Y''' = -\frac{y'''}{y''^3}$. **3458.** $z = \varphi(x+y)$, 其中 φ 为任意可微函数. **3459.** $z = \varphi(x^2 + y^2)$. **3460.** $z = \frac{x}{a} + \varphi(y - bz)$. **3461.** $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. **3462.** $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = e^u \sinh v$. **3463.** $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}$. **3464.** $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}$. **3465.** $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{z}{v} \cdot \frac{z^2 + u}{z^2 - u}$. **3466.** $(2u + v - z) \frac{\partial z}{\partial u} + (u + 2v - z) \frac{\partial z}{\partial v} = u + v - z$. **3467.** $\frac{e^{x+y} - z^2}{1 - e^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta}}$. **3468.** $\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2 + v^2}$. **3469.** $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$. **3470.** $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x-z}{y}$. **3471.** $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v}$. **3472.** $A = \frac{u^2 \left\{ x^2 - 2xu \frac{\partial x}{\partial u} + u^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right] \right\}}{x^4 \left(u \frac{\partial x}{\partial u} + v \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2}$. **3473.** $\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} + 3u + (e^\xi + e^\eta + e^\zeta) = 0$. **3474.** $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$. **3475.** $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$. **3476.** $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$. **3477.** $u^2 \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 = w^2 \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v}$. **3478.** $\frac{e^{2u} \left(1 - \frac{\partial w}{\partial v} \cos^2 v \right)}{\frac{\partial w}{\partial u}}$. **3479.** $A = \frac{\partial w}{\partial u} : \frac{\partial w}{\partial v}$. **3480.** $\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\xi \eta}{\zeta}$. **3481.** $w = \frac{\partial u}{\partial \varphi}$. **3482.** $w = r \frac{\partial u}{\partial r}$. **3483.** $w = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2$. **3484.** $w = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. **3485.** $w = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$. **3486.** $w = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. **3487.** $I = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial r} \right)$. **3488.** $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, 其中 φ 和 ψ 为任意函数. **3489.** $3 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$. **3490.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$. **3491.** $a \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u} \right) + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + c \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0$. **3492.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$. **3493.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + m^2 e^{2u} z = 0$. **3494.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$. **3495.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u} \frac{\partial z}{\partial v}$. **3496.** $\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \frac{2}{u(4-uv)} \frac{\partial z}{\partial v}$. **3497.** $(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = v \frac{\partial z}{\partial u}$. **3498.** $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{2u}{u^2 + v^2} \frac{\partial z}{\partial u}$. **3499.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{u^2 - v^2} \left(v \frac{\partial z}{\partial u} - u \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0$. **3500.** $\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 1$. **3501.** $u = \varphi(x + \lambda_1 y) + \psi(x + \lambda_2 y)$, 其中 λ_1 和 λ_2 为方程 $A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$ 的根. **3503.** (a) $\Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$; (b) $\Delta(\Delta u) = \frac{d^4 u}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 u}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{du}{dr}$. **3504.** $u \frac{d^2 w}{du^2} + \frac{dw}{du} + cw = 0$. **3505.** $A = X \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - Y \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X}$. **3508.** $\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = 2 \left(\xi \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \xi \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + \eta \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} \right)$. **3509.** $\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2} = 0$. **3510.** $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$. **3511.** $\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2$; $\Delta_2 u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right]$. **3512.** $w \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$. **3513.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$ **3514.** $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$ **3515.**

- $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$. **3516.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 2w$. **3517.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + (\frac{v}{u} - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$. **3518.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + (\frac{\partial w}{\partial u})^2 + (\frac{\partial w}{\partial v})^2 = 0$. **3519.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{w}{4 \sin^2(u-v)}$. **3520.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$. **3523.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$. **3524.** $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} + (e^w - 1) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \right]$.
- 3526.** $x = y\varphi(z) + \psi(z)$. **3527.** $A(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - 2B(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} + C(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0$. **3528.** $\frac{x-x_0}{-\cos \alpha \sin t_0} = \frac{y-y_0}{-\sin \alpha \cos t_0} = \frac{z-z_0}{\cos t_0}$; $z - z_0 = (x - x_0) \cos \alpha \tan t_0 + (y - y_0) \sin \alpha \tan t_0$, 其中 $x_0 = a \cos \alpha \cos t_0$, $y_0 = a \sin \alpha \cos t_0$, $z_0 = a \sin t_0$. **3529.** $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1, y = \frac{b}{2}; ax - cz = \frac{1}{2}(a^2 - c^2)$.
- 3530.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}; x + y + 2z = 4$. **3531.** $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1}; 3x + 3y - z = 3$.
- 3532.** $x + z = 2, y + 2 = 0; x - z = 0$. **3533.** $M_1(-1, 1, -1); M_2(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$. **3537.** $\tan \varphi = f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha$. **3538.** $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{16}{243}$. **3539.** $2x + 4y - z - 5 = 0; \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$. **3540.** $3x + 4y + 12z = 169; \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12}$. **3541.** $z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - y); \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$. **3542.** $ax_0x + by_0y + cz_0z = 1; \frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}$. **3543.** $x + y - 2z = 0; \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. **3544.** $x + y - 4z = 0; \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}$. **3545.** $\frac{x}{a} \cos \psi_0 \cos \varphi_0 + \frac{y}{b} \cos \psi_0 \sin \varphi_0 + \frac{z}{c} \sin \psi_0 = 1; \frac{x \sec \psi_0 \sec \varphi_0 - a}{bc} = \frac{y \sec \psi_0 \csc \varphi_0 - b}{ac} = \frac{z \csc \psi_0 - c}{ab}$.
- 3546.** $x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 - z \tan \alpha = 0; \frac{x-r_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0} = \frac{y-r_0 \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0} = \frac{z-r_0 \cot \alpha}{-\tan \alpha}$. **3547.** $ax \sin v_0 - ay \cos v_0 + u_0z = au_0v_0; \frac{x-u_0 \cos v_0}{a \sin v_0} = \frac{y-u_0 \sin v_0}{-a \cos v_0} = \frac{z-av_0}{u_0}$. **3548.** $\frac{3x}{u_0} - \frac{3y}{u_0^2} + \frac{z}{u_0^3} = 2$.
- 3549.** $A(0, \pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2}); B(\pm 2, \mp 4, \pm 2); C(\pm 4, \mp 2, 0)$. **3550.** $x = \pm \frac{a^2}{d}, y = \pm \frac{b^2}{d}, z = \pm \frac{c^2}{d}$, 其中 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **3551.** $x + 4y + 6z = \pm 21$. **3556.** $x^2 + y^2 - xy = 1, z = 0; 3y^2 + 4x^2 = 4, x = 0; 3x^2 + 4z^2 = 4, y = 0$. **3557.** $\delta < 0.003$. **3559.** $\cos \varphi = \frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}$.
- 3563.** $\frac{\partial u}{\partial n} = x_0 + y_0 + z_0$; (a) $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; (b) $x_0 = y_0 = z_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; (c) 在圆周 $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上. **3564.** $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}$. **3566.** $x^2 + y^2 = p^2$.
- 3567.** $y = \pm x$. **3568.** $y^2 = 4ax$. **3569.** 无包络线. **3570.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. **3571.** $|xy| = \frac{S}{2\pi}$. **3572.** $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$. **3574.** (a) $y = 0$ 是包络线 (拐点的几何轨迹); (b) $y = 0$ 是包络线; (c) $y = 0$ 是奇点的几何轨迹 (尖点); (d) $x = 0$ 为二重点的几何轨迹, $x = a$ 为包络线. **3575.** 圆环 $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$. **3576.** $x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta + z^2 \sin^2 \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma = 1$. **3577.** $|xyz| = \frac{V}{4\pi\sqrt{3}}$. **3578.** $|z \pm \sqrt{x^2 + y^2}| = \rho\sqrt{2}$. **3579.** $\left| \begin{matrix} x & y \\ x_0 & y_0 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} y & z \\ y_0 & z_0 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} z & x \\ z_0 & x_0 \end{matrix} \right|^2 \leq R^2(x^2 + y^2 + z^2)$. **3580.** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (z - z_0)^2$. **3581.** $f(x, y) = 5 + 2(x - 1)^2 - (x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2$. **3582.** $f(x, y, z) = 3[(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - (x - 1)(y - 1) - (x - 1)(z - 1) - (y - 1)(z - 1)] + (x - 1)^3 + (y - 1)^3 + (z - 1)^3 - 3(x - 1)(y - 1)(z - 1)$. **3583.** $\Delta f(1, -1) = h - 3k + (-h^2 - 2hk + k^2) + (h^2k + hk^2)$.
- 3584.** $f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + 2[h(Ax + Dy + Ez) + k(Dx + By + Fz) + l(Ex + Fy + Cz)] + f(h, k, l)$. **3585.** $x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + R_2(1 + \theta(x-1), 1 + \theta(y-1))$ ($0 < \theta < 1$), 其中 $R_2(x, y) = \frac{1}{6}x^y \left[\left(\frac{y}{x} dx - \ln x \cdot dy \right)^3 + 3 \left(\frac{y}{x} dx + \ln x \cdot dy \right) \left(-\frac{y}{x^2} dx^2 + \frac{2}{x} dx dy \right) + \left(\frac{2y}{x^3} dx^3 - \frac{3}{x^2} d^2x dy \right) \right]$, $dx = x - 1, dy = y - 1$. **3586.** $1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2$. **3587.** (a) $1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$; (b) $\frac{\pi}{4} + x - xy$. **3588.** $-(xy + xz + yz)$. **3589.** $F(x, y) = \frac{h^2}{4}(f''_{xx} + f''_{yy}) + \frac{h^4}{48}(f^{(4)}_{xxxx} + f^{(4)}_{yyyy}) + \dots$. **3590.** $F(\rho) = f(x, y) + \frac{\rho^2}{4}[f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y)]$. **3591.**

$\Delta_{xy} = f(x, y) = hk \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^{m-1} k^{n-m-1}}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right]$. **3592.** $F(\rho) = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \Delta^n f(x, y)$, 其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. **3593.** $1 + mx + ny + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + mnxy + \frac{n(n-1)}{2!} y^2 + \dots$ ($|x| < 1, |y| < 1$). **3594.** $\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1} (m+n-1)!}{m!n!} x^m y^n$ ($|x| + |y| < 1$). **3595.** $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n+1}}{m!(2n+1)!}$ ($|x| < +\infty, |y| < +\infty$). **3596.** $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n}}{m!(2n)!}$ ($|x| < +\infty, |y| < +\infty$). **3597.** $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1} y^{2n+1}}{(2m+1)!(2n+1)!}$ ($|x| < +\infty, |y| < +\infty$). **3598.** $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m} y^{2n}}{(2m)!(2n)!}$ ($|x| < +\infty, |y| < +\infty$). **3599.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2 + y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ($x^2 + y^2 < +\infty$). **3600.** $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{x^m y^n}{mn}$ ($|x| < 1, |y| < 1$). **3601.** $f(x, y) = 1 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^2}{2}\right) y$. **3602.** $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^m (y+1)^n}{m!n!}$ ($|x| < +\infty, |y| < +\infty$). **3603.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1 + (x-1)](y-1)^n$ ($-\infty < x < +\infty, 0 < y < 2$). **3604.** $z = 1 + [2(x-1) - (y-1)] - [8(x-1)^2 - 10(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2] + \dots$. **3605.** 若 $a < 0$, $(0,0)$ 是孤立点; 若 $a = 0$, $(0,0)$ 是尖点; 若 $a > 0$, $(0,0)$ 为二重点. **3606.** $(0,0)$ 为二重点. **3607.** $(0,0)$ 为孤立点. **3608.** $(0,0)$ 为孤立点. **3609.** $(0,0)$ 为二重点. **3610.** $(0,0)$ 为(第二类)尖点. **3611.** $(0,0)$ 为二重点. **3612.** 若 $a < b < c$, 则曲线由长圆形和无穷的一支所组成; 若 $a = b < c$, 则 $A(a,0)$ 为孤立点; 若 $a < b = c$, 则 $B(b,0)$ 为二重点; 若 $a = b = c$, 则 $A(a,0)$ 是尖点. **3613.** $(0,0)$ 为二重点. **3614.** $(0,0)$ 为尖点. **3615.** $(0,0)$ 为静止点. **3616.** $(0,0)$ 为角点. **3617.** $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第一类间断点. **3618.** $x = 0$ 为第二类间断点. **3619.** $x = 0$ 为二重点. **3620.** $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为尖点. **3621.** 在 $x = 0$ 和 $y = 1$ 时 $z_{\min} = 0$. **3622.** 无极值点. **3623.** 在直线 $x - y + 1 = 0$ 上的点有准极小值 $z = 0$. **3624.** 在 $x = 1$ 和 $y = 0$ 时 $z_{\min} = -1$. **3625.** 在 $x = 2, y = 3$ 时 $z_{\max} = 108$; 在 $x = 0, 0 < y < 6$ 时有准极小值 $z = 0$; 在 $x = 0, -\infty < y < 0$ 和 $6 < y < +\infty$ 时有准极大值 $z = 0$. **3626.** 在 $x = 1$ 和 $y = 1$ 时 $z_{\min} = -1$. **3627.** (a) 在 $x_1 = -1, y_1 = -1$ 和 $x_2 = 1, y_2 = 1$ 时 $z_{\min} = -2$; 在 $x = 0, y = 0$ 时无极值; (b) 在 $x = 0, y = 0$ 时极大值 $z = 0$; 在 $x = \pm \frac{1}{2}, y = \pm 1$ 时极小值 $z = -1\frac{1}{8}$; 在 $x = 0, y = \pm 1$ 时鞍点 $z = -1$, 以及在 $x = \pm \frac{1}{2}, y = 0$ 时鞍点 $z = -\frac{1}{8}$. **3628.** 在 $x = 5, y = 2$ 时极小值 $z = 30$. **3629.** 在 $\frac{x}{a} = -\frac{y}{b} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时 $z_{\min} = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$; 在 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时 $z_{\max} = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$. **3630.** 在 $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}, c > 0$ 时 $z_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; 在 $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}, c < 0$ 时 $z_{\min} = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; 在 $c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$ 时无极值. **3631.** 在 $x = 0, y = 0$ 时 $z_{\max} = 1$. **3632.** 在 $x = 0, y = 0$ 时极小值 $z = 0$; 在 $x = -\frac{1}{4}, y = -\frac{1}{2}$ 时鞍点 $z = \frac{1}{2}e^{-2}$. **3633.** 在 $x = 1, y = -2$ 时鞍点 $z = e^3$. **3634.** 在 $x = 1, y = 3$ 时极大值 $z = e^{-13} \approx 2.26 \cdot 10^{-6}$; 在 $x = -\frac{1}{26}, y = -\frac{3}{26}$ 时极小值 $z = -26e^{-\frac{1}{52}} \approx -25.51$. **3635.** 在 $x = 1, y = 2$ 时极小值 $z = 7 - 10 \ln 2 \approx 0.0685$. **3636.** 在 $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}$ 时 $z_{\max} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. **3637.** 在 $x = y = \frac{2\pi}{3}$ 时 $z_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$; 在 $x = y = \frac{\pi}{3}$ 时 $z_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. **3638.** 在 $x = 1, y = 1$ 时鞍点 $z = -1 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3}{4}\pi \approx 1.70$. **3639.** 当 $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2e}} \approx \pm 0.43$ 时极小值 $z = -\frac{1}{2e} \approx -0.184$; 当 $x = -y = \pm \frac{1}{\sqrt{2e}}$ 时极大值 $z = \frac{1}{2e}$; 在静止点 $x = 0, y = \pm 1$ 和 $x = \pm 1, y = 0$ 上无极值. **3640.** 静止点 $x = \frac{\pi}{12}(-1)^{m+1} + (m+n)\frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{12}(-1)^{m+1} + (m-n)\frac{\pi}{2}$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 极值为 $z = m\pi + \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)(-1)^{m+1} + 2 \cdot (-1)^n$, 若 m 和 n 有不同的奇偶性 (m 奇 n 偶时为极大值, m 偶 n 奇时为极小值); 若 m 和 n 有相同奇偶性, 无极值. **3641.** 当 $x = 0, y = 0$ 时 $z_{\min} = 0$; 当 $x^2 + y^2 = 1$ 时准极大值 $z = e^{-1}$. **3642.** 当 $x = -1, y = -2, z = 3$ 时 $u_{\min} = -14$. **3643.** 当 $x = 24, y = -144, z = -1$ 时极小值 $u = -6913$. **3644.** 当 $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1$ 时极小值 $u = 4$. **3645.** 当 $x = y = z = \frac{a}{7}$ 时 $u_{\max} = \frac{a^7}{7^7}$; 当 $y = 0, x \neq 0, z \neq 0, x + 2y + 3z \neq a$ 时准

极值 $u = 0$. **3646.** 当 $x = \frac{1}{2} \sqrt[15]{16a^4b}, y = \frac{1}{4} \sqrt[5]{16a^4b}, z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^8b^7}{4}}$ 时极小值 $u = \frac{15a}{4} \sqrt{\frac{a}{16b}}$.
3647. 当 $x = y = z = \frac{\pi}{2}$ 时极大值 $u = 4$; 当 $x = y = z = 0$ 和 $x = y = z = \pi$ 时边界极小值 $u = 0$.
3648. 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{2}{n^2+n+2}$ 时, $u_{\max} = \left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$. **3649.** 当 $x_1 = 2^{\frac{1}{n+1}}, x_2 = x_1^2, \cdots, x_n = x_1^n$ 时极小值 $u = (n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$. **3650.** 数 $a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$ 构成以公比为 $q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$ 的等比数列. **3651.** 当 $x = 1, y = -1$ 时极小值 $z_1 = -2$, 极大值 $z_2 = 6$.
3652. 当 $x = y = -(3 + \sqrt{6})$ 时 $z_{\min} = -(4 + 2\sqrt{6})$; 当 $x = y = -(3 - \sqrt{6})$ 时 $z_{\max} = 2\sqrt{6} - 4$.
3653. 当 $x^2 + y^2 = \frac{3a^2}{8}, z < 0$ 时准极小值 $z = -\frac{a}{2\sqrt{2}}$; 当 $x^2 + y^2 = \frac{3a^2}{8}, z > 0$ 时准极大值 $z = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. **3654.** 当 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ 时 $z_{\max} = \frac{1}{4}$. **3655.** 当 $x = -\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = -\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时 $z_{\min} = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$; 当 $x = \frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = \frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时 $z_{\max} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$, 其中 $\varepsilon = \operatorname{sgn}ab \neq 0$.
3656. 当 $x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$ 时 $z_{\min} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. **3657.** (a) $z_{\min} = \lambda_1, z_{\max} = \lambda_2$, 其中 λ_1 和 λ_2 为方程 $(A - \lambda)(C - \lambda) - B^2 = 0$ 的根, 且 $\lambda_1 < \lambda_2$; (b) 在 $x = \pm 1\frac{1}{2}, y = \pm 4$ 时极大值 $z = 106\frac{1}{4}$; 当 $x = \pm 2, y = \mp 3$ 时极小值 $z = -50$. **3658.** 当 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, y = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 时极值 $z = 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$ (k 为偶数时为极大值, k 为奇数时为极小值). **3659.** 当 $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{2}{3}$ 时 $u_{\min} = -3$; 当 $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = \frac{2}{3}$ 时 $u_{\max} = 3$. **3660.** 当 $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{a}{m+n+p}$ 时 $u_{\max} = \frac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$. **3661.** 当 $x = 0, y = 0, z = \pm c$ 时 $u_{\min} = c^2$; 当 $x = \pm a, y = 0, z = 0$ 时 $u_{\max} = a^2$. **3662.** 当 $x = y = z = \frac{a}{6}$ 时 $u_{\max} = \left(\frac{a}{6}\right)^6$. **3663.** (a) 当 $x = y = \frac{1}{\sqrt{6}}$ 和 $z = -\frac{2}{\sqrt{6}}, x = z = \frac{1}{\sqrt{6}}$ 和 $y = -\frac{2}{\sqrt{6}}, y = z = \frac{1}{\sqrt{6}}$ 和 $x = -\frac{2}{\sqrt{6}}$ 时 $u_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$; 当 $x = y = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ 和 $z = \frac{2}{\sqrt{6}}, x = z = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ 和 $y = \frac{2}{\sqrt{6}}, y = z = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ 和 $x = \frac{2}{\sqrt{6}}$ 时 $u_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$; (b) 当 $x = 1, y = 1, z = 1$ 时有条件极大值 $u = 2$. **3664.** 当 $x = y = z = \frac{\pi}{6}$ 时 $u_{\max} = \frac{1}{8}$. **3665.** $u_{\min} = \lambda_1$ 和 $u_{\max} = \lambda_2$, 其中 λ_1 和 λ_2 是方程 $\lambda^2 - \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{c^2}\right) \lambda + \left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2 c^2} + \frac{\cos^2 \beta}{a^2 c^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{a^2 b^2}\right) = 0$ ($\lambda_1 < \lambda_2$) 的根. **3666.** 设 $\rho = \frac{\xi}{\cos \alpha}, u_{\min} = R^2 + \rho^2 - 2\rho R \sqrt{1 - \frac{(A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}$; $u_{\max} = R^2 + \rho^2 + 2\rho R \times \sqrt{1 - \frac{(A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}$. **3667.** 当 $x_i = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 时 $u_{\min} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$. **3668.** 当 $x_i = \frac{a}{n}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 时 $u_{\min} = \frac{a^p}{n^{p-1}}$. **3669.** 当 $x_i = \sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}} \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j \beta_j}\right)^{-1}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 时 $u_{\min} = \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j \beta_j}\right)^2$. **3670.** 当 $\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{x_n}{\alpha_n} = \frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$ 时 $u_{\max} = \left(\frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_n^{\alpha_n}$.
3671. 由方程 $|a_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$ 确定的极值 $u = \lambda$, 其中当 $i \neq j$ 时 $\delta_{ij} = 0$, 而 $\delta_{ii} = 1$.
3675. $\inf z = -5, \sup z = -2$. **3676.** $\inf z = -75; \sup z = 125$. **3677.** $\inf z = 0; \sup z = 1$. **3678.** $\inf u = 0; \sup u = 300$. **3679.** $\inf u = -\frac{1}{2}; \sup u = 1 + \sqrt{2}$. **3680.** $\inf u = 0; \sup u = e^{-1} \approx 0.37$. **3682.** 不是. **3683.** 极小值为 $\frac{n}{\sqrt{a}}$. **3684.** 加项相等. **3685.** 因子

等于 $x_i = \frac{\left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}} \cdots \alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}}}}{(\alpha_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 其中 α_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 为相应的幂指数; 和的最小值为 $\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}\right) \left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}} \cdots \alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}}}$. **3686.**

$x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$, 其中 $M = \sum_{i=1}^n m_i$. **3687.** 浴缸的尺寸为 $\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. **3688.** $H = 2R = 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, 其中 R 为圆柱面的半径, H 为它的母线.

3689. $x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i, y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i, z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n z_i$, 其中 $N = \sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i)^2 + (\sum_{i=1}^n y_i)^2 + (\sum_{i=1}^n z_i)^2}$. 距离的平方和最小值为 $n - 2N + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$.

3690. 圆锥的母线与其底之间的夹角为 $\arcsin \frac{2}{3}$. **3691.** 角锥侧面与其底面之间的夹角为 $\arcsin \frac{2}{3}$. **3692.** 矩形的边长为 $\frac{2p}{3}$ 和 $\frac{p}{3}$. **3693.** 三角形的边长为 $\frac{p}{2}, \frac{3p}{4}, \frac{3p}{4}$. **3694.** 长方体的尺寸为 $\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}$ 和 $\frac{R}{\sqrt{3}}$.

3695. 长方体的高为圆锥高的 $\frac{1}{3}$. **3696.** 长方体的尺寸为 $\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{2c}{\sqrt{2}}$. **3697.** 当 $\alpha \geq \arctan \sqrt{2}$ 时, 长方体的高 $h = l \sin \alpha \cdot \frac{\tan \alpha - \sqrt{2}}{2 \tan \alpha - \sqrt{2}}$, 而当 $0 < \alpha < \arctan \sqrt{2}$ 时 $h = 0$.

3698. 长方体的尺寸为 a, b 和 $\frac{c}{2}$. **3699.** $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3700. $d = \frac{1}{\pm \Delta} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$, 其中 $\Delta = \sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}$.

3701. $\frac{7}{4\sqrt{2}}$. **3702.** 半轴的平方 $a^2 = \lambda_1$ 和 $b^2 = \lambda_2$ 是方程 $(1 - \lambda A)(1 - \lambda C) - \lambda^2 B^2 = 0$ 的

根. **3703.** 半轴的平方 $a^2 = \lambda_1, b^2 = \lambda_2$ 和 $c^2 = \lambda_3$ 是方程 $\begin{vmatrix} A\lambda - 1 & D\lambda & F\lambda \\ D\lambda & B\lambda - 1 & E\lambda \\ F\lambda & E\lambda & C\lambda - 1 \end{vmatrix} =$

0 的根. **3704.** $\frac{\pi ab}{|C|} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. **3705.** $\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}}$. **3707.** 入射角

等于 $\arcsin(n \sin \frac{\alpha}{2})$; 偏向角等于 $2 \arcsin(n \sin \frac{\alpha}{2}) - \alpha$. **3708.** 未知系数 a 和 b 由方程组 $a[xx] + b[x1] = [xy], a[x1] + bn = [y1]$ 确定, 其中 $[xy] = \sum_{i=1}^n x_i y_i, [x1] = \sum_{i=1}^n x_i, [y1] = \sum_{i=1}^n y_i$. 当 $\sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 \neq 0$ 时, 问题有确定的解.

3709. $\tan 2\alpha = \frac{2(\bar{x}\bar{y} - \overline{xy})}{[x^2 - (\bar{x})^2] - [y^2 - (\bar{y})^2]}$, $p =$

$\bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha$, 其中 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$ 等为平均值. **3710.** $4x - \frac{7}{2}; \Delta_{\min} = \frac{1}{2}$.

第七章

3711. 当 $-\infty < y < 0$ 时 $F(y) = 1$; 当 $0 \leq y \leq 1$ 时 $F(y) = 1 - 2y$; 当 $1 < y < +\infty$ 时 $F(y) = -1$. **3712.** 当 $y = 0$ 时 $F(y)$ 不连续. **3713.** (a) $\frac{\pi}{4}$; (b) 1; (c) $\frac{8}{3}$; (d)

$\ln \frac{2e}{1+e}$; (e) 0. **3715.** 不能. **3716.** 不能. **3717.** $F'(x) = 2xe^{-x^5} - e^{-x^3} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy$.

3718. (a) $-(e^{|\sin \alpha|} \sin \alpha + e^{|\cos \alpha|} \cos \alpha) + \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} e^{\alpha} \sqrt{1-x^2} dx$; (b) $(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b+\alpha}) \sin \alpha \cdot$

$(b + \alpha) - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a+\alpha}) \sin \alpha (a + \alpha)$; (c) $\frac{2}{\alpha} \ln(1 + \alpha^2)$; (d) $f(\alpha, -\alpha) + 2 \int_0^\alpha f'_u(u, v) dx$, 其中

$u = x + \alpha$ 和 $v = x - \alpha$; (e) $2\alpha \int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha} \sin(y^2 + \alpha^4 - \alpha^2) dy + 2 \int_0^{\alpha^2} \sin 2x^2 \cos 2\alpha x dx -$

$2\alpha \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy$. **3719.** $F''(x) = 3f(x) + 2xf'(x)$. **3720.** 当 $x \in$

(a, b) 时 $F''(x) = 2f(x)$, 当 $x \notin (a, b)$ 时 $F''(x) = 0$. **3721.1.** $F''(x) = \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}$, 其中

$\Delta^2 f(x) = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)$. **3721.2.** $F^{(n)}(x) = (n - 1)!f(x)$. **3723.** $4x - \frac{11}{3}$.

3724. $0.934 + 0.428x$ (近似!). **3725.** $\frac{dE}{dk} = \frac{E-F}{k}; \frac{dF}{dk} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{F}{k}$. **3729.** $F''_{xy}(x, y) =$

$x(2 - 3y^2)f(xy) + \frac{x}{y^2} f(\frac{x}{y}) + x^2 y(1 - y^2)f'(xy)$. **3732.** $\pi \ln \frac{|a|+|b|}{2}$. **3733.** 当 $|a| \leq 1$ 时 0; 当

$|a| > 1$ 时 $\pi \ln a^2$. **3734.** $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \ln(1 + |a|)$. **3735.** $\pi \arcsin a$. **3736.** $\frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$. **3737.**

$\ln \frac{b+1}{a+1}$. **3738.** (a) $\arctan \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$; (b) $\frac{1}{2} \ln \frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$. **3741.** $a \geq 0$. **3742.** $\max(p, q) >$

1. **3743.** $|\frac{p-1}{q}| < 1$. **3744.** $p < 1$. **3745.** $n < 0$ 和 $n > \frac{1}{2}$. **3746.** $p > \frac{1}{2}$. **3747.**

当 $a > 0$ 和 $a = \frac{2n-1}{2}\pi$ ($n = 1, 2, \dots$) 时收敛. 3748. 当 $n > 4$ 时收敛. 3749. 当 $p > 1$ 时收敛. 3750. 当 $-1 < n < 2$ 时收敛. 3755.2. (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. 3756. (a) 非一致收敛; (b) 一致收敛. 3757. 一致收敛. 3758. 一致收敛. 3759. 非一致收敛. 3760. (a) 一致收敛; (b) 一致收敛. 3761. 一致收敛. 3762. 非一致收敛. 3763. (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. 3764. (a) 非一致收敛; (b) 一致收敛. 3765. $b \geq 10^{70}$. 3766. (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛. 3767. 一致收敛. 3768. 非一致收敛. 3769. 一致收敛. 3770. 一致收敛. 3772. 不能. 3776.1. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 3777.1. 1. 3778.2. $a = \pm 1$. 3779. 连续. 3780. 连续. 3781. 连续. 3782. 连续. 3783. 在 $\alpha = 0$ 处不连续. 3784. $\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$. 3785. $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{-(n+\frac{1}{2})}$. 3788. $\ln \frac{b}{a}$. 3790. $\ln \frac{b}{a}$. 3791. 0. 3792. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$. 3793. $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$. 3794. $\ln \frac{(2\alpha)^{2\alpha} (2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}$. 3795. $\arctan \frac{\beta}{m} - \arctan \frac{\alpha}{m}$ ($m \neq 0$). 3796. $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$. 3797. $-\pi(1 - \sqrt{1-a^2})$. 3798. $\pi \ln \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$. 3799. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot (1 + |\alpha| - \sqrt{1+\alpha^2})$. 3800. $\frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|)$ ($\beta \neq 0$). 3801. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$). 3802. $\frac{2\pi}{3} [\alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha^3 \ln \alpha + \beta^3 \ln \beta - (\alpha^3 + \beta^3) \ln(\alpha + \beta)]$ ($\alpha > 0, \beta > 0$). 3803. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 3804. $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ac-h^2}{a}}$. 3805. $\frac{(a+2b^2)a_1-4abb_1+2a^2c_1}{2a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$. 3806. $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$. 3807. $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$. 3808. $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$. 3809. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$. 3810. (a) $\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$; (b) $(-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \frac{d^{2n}}{db^{2n}} (e^{-b^2})$. 3812.1. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta$. 3812.2. 奇函数. 当 $x > 0$ 时在点 $2k\pi$ 处有极小值, 在点 $(2k-1)\pi$ 处有极大值, 其中 $k = 1, 2, 3, \dots$. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时有渐近线 $y = \frac{\pi}{2}$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时有渐近线 $y = -\frac{\pi}{2}$. 3813. $\pi \frac{|\beta|}{2} - \sqrt{\pi\alpha}$. 3814. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \right|$. 3815. 当 $|\alpha| < |\beta|$ 时 0; 当 $|\alpha| = |\beta|$ 时 $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha$; 当 $|\alpha| > |\beta|$ 时 $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha$. 3816. $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha$. 3817. $\frac{\pi}{2} |\alpha|$. 3818. $\frac{3\pi}{8} \alpha |\alpha|$. 3819. $\frac{\pi}{4}$. 3820. $\frac{3}{8} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$. 3821. $\frac{\pi}{4}$. 3822. $\frac{\alpha+\beta}{2} \arctan \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \arctan \frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{k}{4} \ln \frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}$. 3823. 当 $|x| < 1$ 时 $D(x) = 1$; 当 $x = \pm 1$ 时 $D(x) = \frac{1}{2}$; 当 $|x| > 1$ 时 $D(x) = 0$. 3824. (a) $\pi \operatorname{sgn} a \cos ab$; (b) $\pi \operatorname{sgn} a \sin ab$. 3825. $\frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$. 3826. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha e^{-|\alpha|}$. 3827. $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-2})$. 3828. $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4} e^{-|\alpha|}$. 3829. $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} \cos \frac{b\alpha}{a} e^{-\frac{|\alpha|}{a} \sqrt{ac-b^2}}$. 3830. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 3831. $\sqrt{\frac{\pi}{|\alpha|}} \sin \left(\frac{ac-b^2}{a} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha \right)$. 3832. $\sqrt{\pi} \cos \left(a^2 + \frac{\pi}{4} \right)$. 3833. $\sqrt{\pi} \sin \left(a^2 + \frac{\pi}{4} \right)$. 3835. (a) $\frac{n!}{p^{n+1}}$; (b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$; (c) 当 $p > \alpha$ 时 $\frac{1}{p-\alpha}$; (d) $\frac{1}{(p+\alpha)^2}$; (e) $\frac{p}{p^2+1}$; (f) $\ln \left(1 + \frac{1}{p} \right)$; (g) $\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$. 3837. (a) 1; (b) $x^2 + \frac{1}{2}$; (c) e^{2ax+a^2} ; (d) $e^{-\frac{a^2}{4}} \cos ax$. 3839. $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, 其中 $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. 3843. $\frac{\pi}{8}$. 3844. $\frac{\pi a^4}{16}$. 3845. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 3846. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 3847. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 3848. $\frac{3\pi}{512}$. 3849. $\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$. 3850. $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$. 3851. $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$ ($0 < m < n$). 3852. $B(n-m, m)$ ($0 < m < n$). 3853. $\frac{a^{-p}}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{m+1}{n}} \cdot B \left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n} \right)$ ($0 < \frac{m+1}{n} < p$). 3854. $\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}} B(m+1, n+1)$ ($m > -1, n > -1$). 3855. $\frac{1}{m} B \left(\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m} \right)$ ($n < 0$ 或者 $n > 1$). 3856. $\frac{1}{2} B \left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2} \right)$ ($m > -1, n > -1$). 3857. $\frac{\pi}{2 \cos \frac{n\pi}{2}}$ ($|n| < 1$). 3858. $\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} B \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)$ ($n > 0$). 3859. $\frac{1}{n} \Gamma \left(\frac{1}{n} \right)$ ($n > 0$). 3860. $\frac{1}{|n|} \Gamma \left(\frac{m+1}{n} \right)$ ($\frac{m+1}{n} > 0$). 3861. $\Gamma(p+1)$ ($p > -1$). 3862. $\frac{d}{dp} \left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}} \right]$ ($p > -1$). 3863. $-\frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$ ($0 < p < 1$). 3864. (a) $\pi^3 \frac{1+\cos^2 p\pi}{\sin^3 p\pi}$ ($0 < p < 1$); (b) $\frac{2}{27} \pi^2$; (c) $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$. 3865. $\ln \left| \frac{\tan \frac{p\pi}{2}}{\tan \frac{q\pi}{2}} \right|$ ($0 < p < 1, 0 < q < 1$). 3866. $\pi \cot \pi p$. 3867. $\frac{\pi}{2\beta} \tan \frac{\alpha\pi}{2\beta}$. 3868. $\ln \sqrt{2\pi}$. 3869. $\ln \sqrt{2\pi} + a(\ln a - 1)$. 3870. $\frac{1}{\pi} \left(1 + \ln \frac{\pi}{2} \right)$. 3871. $\frac{1}{4n}$. 3876. $\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2}}$ ($a > 0$).

3877. $\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m) \sin \frac{m\pi}{2}}$ ($a > 0$). 3879. $aB\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right)$. 3880. $\frac{2a^2 \Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$. 3881. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda$. 3882. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \lambda}{\lambda} \sin \lambda x d\lambda$. 3883. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(x-a) - \sin \lambda(x-b)}{\lambda} d\lambda$. 3884. $f(x) = \frac{2h}{\pi a} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos a\lambda}{\lambda^2} \cos \lambda x d\lambda$. 3885. $\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \cos \lambda x d\lambda$. 3886. $\frac{x^2}{a^2+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \sin \lambda x d\lambda$. 3887. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \pi}{1-\lambda^2} \sin \lambda x d\lambda$. 3888. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\lambda \pi}{2}}{1-\lambda^2} \cos \lambda x d\lambda$. 3889. $f(t) = \frac{2A\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{2\pi n \lambda}{\omega}}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \lambda t d\lambda$. 3890. $f(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + \alpha^2} d\lambda$. 3891. $f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(\lambda-\beta)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(\lambda+\beta)^2 + \alpha^2} \right] \cdot \cos \lambda x d\lambda$. 3892. $f(x) = \frac{4\alpha\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{[(\lambda-\beta)^2 + \alpha^2][(\lambda+\beta)^2 + \alpha^2]} d\lambda$. 3893. $e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \cos \lambda x d\lambda$. 3894. $xe^{-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \sin \lambda x d\lambda$. 3895. (a) $e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+\lambda^2} d\lambda$ ($0 \leq x < +\infty$); (b) $e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{1+\lambda^2} d\lambda$ ($0 < x < +\infty$). 3896. $F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}$. 3897. $F(x) = -i\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\alpha x}{(x^2 + \alpha^2)^2}$. 3898. $F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. 3899. $F(x) = e^{-\frac{x^2 + \alpha^2}{2}} \cosh \alpha x$. 3900. (a) $\varphi(y) = e^{-y}$ ($y \geq 0$); (b) $\psi(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y}{1+y^2}$ ($y \geq 0$).

第八章

3901. $\frac{1}{4}$. 3902. $\underline{S} = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}$; $\overline{S} = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}$; $13\frac{1}{3}$. 3903. 9.88. 精确值 $2\pi(7 - \sqrt{24}) \approx 13.20$. 3904. 0.402. 精确值 0.4. 3905. $\delta < 0.00022$. 3906. 1. 3907. $\frac{1}{40}$. 3908. $\frac{\pi a^3}{3}$. 3910. $I = F(A, B) - F(A, b) - F(a, B) + F(a, b)$. 3912. (a) 负的; (b) 负的; (c) 正的. 3913. $\frac{1}{4}$. 3914. $1.96 < I < 2$. 3915. $a^2 + b^2 + \frac{R^2}{2}$. 3916. $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$. 3917. $\int_{-2}^2 dx \int_{\frac{|x|}{2}}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$. 3918. $\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx$. 3919. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$. 3920. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$. 3921. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$. 3922. $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \left\{ \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right\} + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$. 3924. $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx$. 3925. $\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y) dx$. 3926. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx$. 3927. $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx$. 3928. $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$. 3929. $\int_0^a dy \left\{ \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx \right\} + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx$. 3930. $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$. 3931. $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x, y) dx$. 3932. $\frac{p^5}{21}$. 3933. $(2\sqrt{2} - \frac{8}{3})a\sqrt{a}$. 3934. $\frac{a^4}{2}$. 3935. $14a^4$. 3936. $\frac{35\pi a^4}{12}$. 3937. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr$. 3938. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr$. 3939. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{|a|}^{|b|} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr$. 3940. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2} \csc(\varphi + \frac{\pi}{4})}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr$. 3941. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr$. 3942. 若积分域是

由中心在原点的两同心圆和由原点引出的两条射线所围成, 则将会出现题设的情况.

3943. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr =$
 $\int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$ 3944. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot$
 $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}} \csc(\varphi + \frac{\pi}{4})}^1 r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_{\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$ 3945.
 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} r f(r) dr = \frac{\pi}{12} \int_0^{2\sqrt{2}} r f(r) dr + \int_{2\sqrt{2}}^4 (\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{2}{r}) r f(r) dr.$ 3946. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\sin\varphi}}$
 $r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_0^1 r dr \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2-1}}{2r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \cdot$
 $\int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2-1}}{2r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$ 3947. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr =$
 $\int_0^a r dr \int_{-\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$ 3948. $\int_0^a dr \int_{-\arccos \frac{r}{a}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(\varphi, r) d\varphi.$
 3949. $\int_0^a dr \int_{\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r) d\varphi.$ 3950. $\int_0^a dr \int_r^a f(\varphi, r) d\varphi.$ 3951. $2\pi \int_0^1 r f(r) dr.$
 3952. $\pi \int_0^1 r f(r) dr + \int_1^{\sqrt{2}} (\pi - 4 \arccos \frac{1}{r}) r f(r) dr.$ 3953. $\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\tan \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi.$
 3954. $\frac{2\pi a^3}{3}.$ 3955. $-6\pi^2.$ 3956. $\frac{6}{5} \frac{b^2 + b(b+h) + (b+h)^2 + (2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a} + \sqrt{a+h})(\sqrt{b} + \sqrt{b+h})}; \frac{3}{2} (\frac{b}{a})^{\frac{3}{2}}.$
 3957. $\int_a^b u du \int_a^\beta f(u, uv) dv.$ 3958. $\frac{1}{2} \int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}) dv.$
 3959. $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 v \cos^3 v dv \int_0^a u f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) du.$ 3961. $u = xy, v = x - y.$ 3962.
 $\int_{-1}^1 f(u) du.$ 3963. $2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2} + c) du.$ 3964. $\ln 2 \int_1^2 f(u) du.$ 3965. $\frac{\pi}{2}.$
 3966. $\frac{4}{3}.$ 3967. $\frac{2}{3} \pi ab.$ 3968. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$ 3969. $543 \frac{11}{15}.$ 3970. $1 \frac{37}{128} - \ln 2.$ 3971. $2\pi.$ 3972.
 $\frac{9}{16} \pi.$ 3973. $\frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.$ 3974. $\frac{4}{3} \pi + 8 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$ 3975. $6.$ 3976. $\frac{4}{3} (4 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}).$ 3978.
 $f(0, 0).$ 3979. $\frac{2}{t} F(t),$ 其中 $t > 0.$ 3980. $\iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$ 3981. $F'(t) =$
 $\int_0^{2\pi} t f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) d\varphi.$ 3984. $(\frac{15}{8} - 2 \ln 2) a^2.$ 3985. $\frac{2}{3} (p+q) \sqrt{pq}.$ 3986. $\pi a^2.$ 3987.
 $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3} a^2.$ 3988. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3} \ln(1 + \sqrt{2}).$ 3989. $\frac{\pi a^2}{4}.$ 3990. $a^2 (\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}).$
 3991. $\frac{\pi ab}{4} (\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}).$ 3992. $\frac{ab}{3} [\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} (\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}) + \frac{a^2 b^2}{h^2 k^2}].$ 3993. $\frac{ab}{6} (\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}).$ 3994. (a)
 $\frac{a^4 bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2};$ (b) $\frac{1}{1260} \frac{(ab)^5}{c^8}.$ 3995. $\frac{ab}{70}.$ 3996. $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}.$ 3997. $\frac{a^2}{2} \ln 2.$ 3998. (a)
 $\frac{4}{3} (q-p)(s-r);$ (b) $\frac{1}{15} (b^5 - a^5)(c^{-3} - d^{-3});$ (c) $\frac{q-p}{(p+1)(q+1)} (b^{\frac{q+1}{q-p}} - a^{\frac{q+1}{q-p}}) (c^{-\frac{p+1}{q-1}} - d^{-\frac{p+1}{q-1}}).$
 3999. (a) $\frac{65}{108} ab;$ (b) $\frac{189}{16} (\arctan \frac{1}{3} + \frac{12}{25}) ab.$ 4000. $\frac{c^2}{6} (\sqrt{10} - 2) \arcsin \frac{1}{3}.$ 4001. $\frac{\pi}{|\delta|}.$ 4002.
 $\frac{c^2}{4} [(v_2 - v_1)(\sinh 2u_2 - \sinh 2u_1) - (u_2 - u_1)(\sin 2v_2 - \sin 2v_1)].$ 4003. $\frac{2}{3} \pi a^2.$ 4004. $\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}.$
 4007. $\frac{5}{6}.$ 4008. $\frac{\pi R^2 a}{4} - \frac{2}{3} R^3.$ 4009. $\frac{88}{105}.$ 4010. $\pi.$ 4011. $\pi.$ 4012. $\frac{17}{12} - 2 \ln 2.$ 4013.
 $\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \Gamma^2(\frac{3}{4}) a^3.$ 4014. $\frac{\pi}{8}.$ 4015. $\frac{45}{32} \pi.$ 4016. $\frac{16}{9} a^3.$ 4017. $\frac{\pi a^3}{8}.$ 4018. $\pi(1 - e^{-R^2}).$
 4019. $2a^2 c \frac{(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}.$ 4020. $\frac{\pi}{8}.$ 4021. $\frac{1}{3} \pi abc (2 - \sqrt{2}).$ 4022. $\frac{4}{3} \pi abc (2\sqrt{2} - 1).$ 4023.
 $\frac{3\pi abc}{8}.$ 4024. $\frac{2}{3} \pi abc.$ 4025. $\frac{abc}{3}.$ 4026. $\frac{2}{9} abc (3\pi + 20 - 16\sqrt{2}).$ 4027. $\frac{\pi(b^3-a^3)}{12}.$ 4028.
 $\frac{9}{2} a^4.$ 4029. $\frac{3}{4}.$ 4030. $\frac{a^2 c}{\pi} \ln \frac{\beta}{\alpha}.$ 4031. $\frac{8}{35}.$ 4032. $\frac{75}{256} \pi abc.$ 4033. (a) $\frac{\pi^4 a^2 c}{128};$ (b) $(n -$
 $m)(e^{-1} - e^{-2}) a^2.$ 4034. $\frac{abc}{3n^2} \frac{\Gamma^3(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{3}{n})}.$ 4035. $\frac{abc}{2m+n} \frac{\Gamma(\frac{1}{m}) \Gamma(\frac{2}{n})}{\Gamma(\frac{1}{m} + \frac{2}{n})}.$ 4036. $\frac{2}{3} \pi a^2 (2\sqrt{2} - 1).$ 4037.
 $16a^2.$ 4038. $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}.$ 4039. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$ 4040. $8a^2.$ 4041. $\pi\sqrt{2}.$ 4042. $\frac{\pi a^2}{2}.$ 4043. $-\frac{2\pi}{3} +$
 $\frac{2\sqrt{2}}{3} (1 + \frac{7}{4} \ln 3) + \frac{8}{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}.$ 4044. $\frac{a^2}{9} (20 - 3\pi).$ 4045. (a) $2a^2;$ (b) $\frac{\pi}{6} [3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10})];$

(c) $\frac{1}{3}abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{c^3}\right]$; (d) $\frac{4}{3}ab(2\sqrt{2}-1)\arctan\sqrt{\frac{a}{b}}$; (e) $\frac{\pi}{2}\ln(e+e^{-1})$.

4046. $S = 4\pi(3+2\sqrt{3})a^2$; $V = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}a^3$. **4047.** $(\varphi_2 - \varphi_1)(\sin\psi_2 - \sin\psi_1)R^2$, 其中 φ_1, φ_2 为经线的经度, ψ_1, ψ_2 为纬线的纬度, R 为球的半径. **4048.** $\pi \left\{ a\sqrt{a^2+h^2} + h^2 \ln \frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h} \right\}$.

4049. $S = a(\varphi_2 - \varphi_1)[b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin\psi_2 - \sin\psi_1)]$; $4\pi^2 ab$. **4050.** $\omega = \arcsin \frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$; $\omega \approx \frac{bc}{a^2}$. **4051.** $\frac{\rho_0 a^2}{3}[2 + \sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2})]$. **4052.** $x_0 = -\frac{a}{2}$; $y_0 = \frac{8}{5}a$. **4053.** $x_0 = y_0 = \frac{a}{5}$.

4054. $x_0 = y_0 = \frac{256}{315\pi}a$. **4055.** $x_0 = \frac{a^2 b}{14c^2}$; $y_0 = \frac{ab^2}{14c^2}$. **4056.** $x_0 = y_0 = \frac{\pi a}{8}$. **4057.** $x_0 = \frac{5}{6}a$; $y_0 = \frac{16}{9\pi}a$. **4058.** $x_0 = \pi a$; $y_0 = \frac{5}{6}a$. **4059.** $x_0 = -\frac{a}{5}$; $y_0 = 0$. **4060.** 抛物线 $y_0 = \frac{1}{8}\sqrt{30px_0}$. **4061.** $I_x = \frac{bh^3}{12}$; $I_y = \frac{h|b_1^3 - b_2^3|}{12}$ ($b = |b_1 - b_2|$). **4062.** $I_x = I_y = \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi)$. **4063.** $I_x = \frac{21\pi a^4}{32}$; $I_y = \frac{49\pi a^4}{32}$. **4064.** $I_x = I_y = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$. **4065.** $I_x = I_y = \frac{9}{8}a^4$.

4066.1. $I_0 = \frac{\pi a^4}{8}$. **4066.2.** $\frac{a^4}{12}$. **4069.** $I_\alpha = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}$. **4070.** $X = \rho g a h^2$, $Y = 0$, 其中 X, Y 为压力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影, ρ 为液体密度, g 为重力加速度. **4071.** $P_1 = \pi a^2 \delta g (h - \frac{2}{3}a)$; $P_2 = \pi a^2 \delta g (h + \frac{2}{3}a)$ (g 为重力加速度). **4072.** 坐标轴位于过圆柱轴的垂直平面上, Ox 轴是水平的, 而 Oz 轴是垂直的, 压力在坐标 Oxz 的轴上的投影分别等于: $X_1 = -\pi a^2 \delta g (h - \frac{b}{2} \cos \alpha) \sin \alpha$, $Z_1 = -\pi a^2 \delta g (h - \frac{b}{2} \cos \alpha) \cos \alpha$; $X_2 = \pi a^2 \delta g (h + \frac{b}{2} \cos \alpha) \sin \alpha$, $Z_2 = \pi a^2 \delta g (h + \frac{b}{2} \cos \alpha) \cos \alpha$ (g 为重力加速度). **4073.** 引力在 Ox, Oy, Oz 轴上的投影分别等于: $X = 0, Y = 0, Z = -\frac{2kmM}{a^2 h} \times \left\{ |b| - |b-h| + \sqrt{a^2 + (b-h)^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \right\}$, 其中 k 为引力常数. **4074.** $p_{cp} = \frac{1}{2}p_0$. **4075.** $A = \frac{k\rho}{12} \left\{ 2ab\sqrt{a^2+b^2} + a^3 \ln \frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a} + b^3 \ln \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b} \right\}$.

4076. $\frac{1}{364}$. **4077.** $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$. **4078.** $\frac{1}{48}$. **4079.** $\frac{4}{5}\pi abc$. **4080.** $\frac{\pi}{6}$. **4081.** $\int_0^1 dx \left\{ \int_0^x dz \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy + \int_x^1 dz \int_{z-x}^{1-x} f(x, y, z) dy \right\} = \int_0^1 dz \left\{ \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_x^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx \right\}$.

4082. $\int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy = \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx$. **4083.** $\int_0^1 dx \left\{ \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy \right\} = \int_0^1 dz \left\{ \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_{\sqrt{x-y^2}}^1 f(x, y, z) dx + \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dx \right\} + \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx$. **4084.** $\frac{1}{2} \int_0^x (x-\zeta)^2 f(\zeta) d\zeta$. **4085.** $\frac{1}{2} \int_0^1 (2-z^2)f(x) dz + \frac{1}{2} \int_1^2 (2-z^2)f(x) dz$. **4086.** $F(A, B, C) - F(A, B, c) - F(A, b, C) - F(a, B, C) + F(A, b, c) + F(a, B, c) + F(a, b, C) - F(a, b, c)$. **4087.** $\frac{\pi}{10}$. **4088.** $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$.

4089. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\arctan \frac{1}{\cos \varphi}} \cos \psi d\psi \int_{\frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi}}^1 r^2 f(r) dr$. **4090.** $\frac{\pi^2 abc}{4}$. **4091.** $\frac{16\pi}{3}$.

4092. $\frac{2}{27} \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) h^4 \sqrt{h}$. **4093.** $\frac{1}{32} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) (b^8 - a^8) \left[(\beta^2 - \alpha^2) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \right) + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha} \right]$. **4094.** $\frac{6}{5}$. **4095.** $3(e-2)$. **4096.** $u = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\theta R}}$, 其中 $|\theta| < 1$. **4098.** (a) $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$; (b) $F'(t) = \frac{3}{t} \left[F(t) + \iiint_V xyz f'(xyz) dx dy dz \right]$, 其中 $t > 0, V = \{0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t, 0 \leq z \leq t\}$. **4099.** 若数 m, n, p 中有一个非偶数时, 0; 当数 m, n, p 中都是偶数时, $\frac{4\pi}{m+n+p+3} \frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$. **4100.** $\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$. **4101.** $\frac{3}{35}$. **4102.** $\frac{7}{24}$.

4103. $\frac{2}{3}a^3(3\pi-4)$. **4104.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **4105.** $\frac{a^3}{24}(3\pi-4)$. **4106.** $\frac{32}{3}\pi$. **4107.** πa^3 . **4108.** $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$. **4109.** $\frac{1}{2}$. **4110.** $\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)$. **4111.** $\frac{\pi}{3} \frac{a^2 bc}{h}$. **4112.** (a) $\frac{\pi^2}{4} abc$; (b) $\frac{\pi^2 abc}{4\sqrt{2}}$. **4113.**

- $\frac{5\pi abc}{12}(3 - \sqrt{5})$. 4114. $\frac{8\pi}{5}abc$. 4115. $\frac{abc}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$. 4116. (a) $\frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$; (b) $\frac{abc}{3}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\frac{a}{h} + \frac{b}{k}}$. 4117. (a) $\frac{abc}{554400}$; (b) $\frac{abc}{3}$. 4118. (a) $\frac{abc}{90}$; (b) $\frac{abc}{1680}$; (c) $\frac{4\pi}{35}abc$. 4119. $\frac{9}{4}a^2$.
 4120. $\frac{1}{3}(b^3 - a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$. 4121. $\frac{4\pi}{3}a^3$. 4122. $\frac{\pi abc^2}{3h}(1 - e^{-1})$. 4123. $\frac{3}{2}abc$. 4124. $5abc\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3}\right)$. 4125. 37 : 27. 4126. $V = \frac{5\pi a^3}{6}$; $S = \frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 1)$. 4127. $\frac{8h_1 h_2 h_3}{|\Delta|}$.
 4128. $\frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}$. 4129. $\frac{\pi^2}{3n \sin \frac{\pi}{n}} \frac{abc^2}{h}$. 4130. $\frac{abc}{mn+mp+np} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)}$. 4131. $\frac{3}{2}$. 4132. $4\pi\rho_0\left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right)e^{-k}$. 4133. $(0, 0, \frac{3}{4}c)$. 4134. $x_0 = y_0 = \frac{2}{5}a$; $z_0 = \frac{7}{30}a^2$. 4135. $x_0 = \frac{7}{18}p$; $y_0 = 0$; $z_0 = \frac{7}{176}p$. 4136. $x_0 = \frac{3}{8}a$; $y_0 = \frac{3}{8}b$; $z_0 = \frac{3}{8}c$. 4137. $x_0 = y_0 = 0$; $z_0 = \frac{3a}{8}$.
 4138. $x_0 = y_0 = 1$; $z_0 = \frac{5}{3}$. 4139. $x_0 = \frac{9\pi}{448}a$; $y_0 = \frac{9\pi}{448}b$; $z_0 = \frac{9\pi}{448}c$. 4140. $x_0 = y_0 = 0$; $z_0 = \frac{7}{20}$. 4141. $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} = \frac{3}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$. 4142. $x_0 = \alpha$; $y_0 = \beta$; $z_0 = \gamma$. 4143. $I_{xy} = \frac{abc^3}{60}$; $I_{yz} = \frac{a^3bc}{60}$; $I_{zx} = \frac{ab^3c}{60}$. 4144. $I_{xy} = \frac{4}{15}\pi abc^3$; $I_{yz} = \frac{4}{15}\pi a^3bc$; $I_{zx} = \frac{4}{15}\pi ab^3c$.
 4145. $I_{xy} = \frac{\pi abc^3}{5}$; $I_{yz} = \frac{\pi a^3bc}{20}$; $I_{zx} = \frac{\pi ab^3c}{20}$. 4146. (a) $I_{xy} = \frac{2abc^3}{225}(15\pi - 16)$; $I_{xz} = \frac{2ab^3c}{1575}(105\pi - 272)$; $I_{yz} = \frac{2a^3bc}{1575}(105\pi - 92)$; (b) $I_{xy} = \frac{7}{2}\pi abc^3$; $I_{xz} = \frac{4}{3}\pi ab^3c$; $I_{yz} = \frac{4}{3}\pi a^3bc$.
 4147. (a) $I_{yz} = \frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}}a^3bc$; $I_{zx} = \frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}}ab^3c$; $I_{xy} = \frac{\pi^2}{128\sqrt{2}}abc^3$; (b) $I_{yz} = \frac{1}{5n^2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}a^3bc$; $I_{zx} = \frac{1}{5n^2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}ab^3c$; $I_{xy} = \frac{1}{5n^2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}abc^3$. 4148. $I_z = \frac{14}{45}$. 4149. (a) $I_z = \frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2} - 5)$; (b) $\frac{\pi}{5}a^5$. 4150. $\frac{4}{9}MR^2$. 4153. $I = \frac{M}{3}(a^2 + \frac{2}{3}h^2)$, 其中 $M = 2\pi\rho_0 a^2 h$ 为圆柱体的质量. 4154. $I_0 = \frac{\pi^2 a^5 \rho_0}{8}$. 4155. $u = 2\pi\rho_0\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)$, 其中 $r \leq R$; $u = \frac{4\pi R^3 \rho_0}{3r}$, 其中 $r > R$, 而 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 4156. $u = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} f(\rho) \min\left(\frac{\rho^2}{r}, \rho\right) d\rho$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 4157. $u = \pi\rho_0\left\{(h-z)\sqrt{a^2 + (h-z)^2} + z\sqrt{a^2 + z^2} - [(h-z)|h-z| + z|z|] + a^2 \ln \left| \frac{h-z + \sqrt{a^2 + (h-z)^2}}{\sqrt{a^2 + z^2} - z} \right| \right\}$. 4158. $X = 0$; $Y = 0$; 当 $|a| \geq R$ 时 $Z = -\frac{GMm}{a|a|}$, 当 $|a| < R$ 时 $Z = -\frac{GMm}{R^3}a$. 4159. $X = 0$; $Y = 0$; $Z = -2\pi\rho_0 G \left\{ \sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + (h-z)^2} - (|z| - |h-z|) \right\}$.
 4160. $X = 0$; $Y = 0$; $Z = -k\pi\rho_0 R \sin^2 \alpha$. 4161. 当 $p > 1$ 时收敛. 4162. 当 $p > 1$ 且 $q > 1$ 时收敛. 4163. 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛. 4164. 当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ 时收敛. 4165. 发散. 4169. $\frac{1}{(p-q)(q-1)}$ ($p > q > 1$). 4170. $\frac{1}{p-1}$ ($p > 1$). 4171. 2π . 4172. $\frac{\pi}{p-1}$ ($p > 1$).
 4173. $\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$. 4174. $\frac{1}{2}$. 4175. π . 4176. $\frac{\pi}{2}$. 4177. $\frac{\pi}{2}$. 4178. $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\delta}{2}}$, 其中 $\delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$. 4179. $\frac{\pi}{e}ab$. 4180. $-\frac{\pi\epsilon a^2 b^2}{2(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$. 4181. 收敛. 4182. 当 $p < 1$ 时收敛. 4183. 当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ 时收敛. 4184. 当 $p < 1$ 时收敛. 4185. 当 $p < 1$ 时收敛. 4187. $\frac{\pi}{2}$. 4188. πa . 4189. $-\frac{\pi^2}{2} \ln 2$. 4190. 2. 4191. 当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛. 4192. 当 $p < \frac{3}{2}$ 时收敛. 4193. 当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ 时收敛. 4194. 当 $p < 1$ 时收敛. 4195. 当 $p < 1$ 时收敛. 4196. $(1-p)^{-1}(1-q)^{-1}(1-r)^{-1}$ ($p < 1, q < 1, r < 1$). 4197. $\frac{4\pi}{3}$. 4198. $2\pi B\left(\frac{1}{2}, 1-p\right)$ ($p < 1$). 4199. $\pi^{\frac{3}{2}}$. 4200. $\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}$, 其中 $\Delta = |a_{ij}|$. 4204. (a) $\frac{n}{3}$; (b) $\frac{n(3n+1)}{12}$. 4205. $\frac{a^n}{n!}$. 4206. $\frac{1}{2^n n!}$. 4207. $\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}$. 4208. $\frac{2^n h_1 h_2 \cdots h_n}{|\Delta|}$. 4209. $\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!}$. 4210. $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_1 a_2 \cdots a_n$. 4211. $\frac{\pi^{\frac{n}{2}} a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$. 4212. $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} a^{n-1} h^3}{12\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. 4213. $\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

4218. $R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 f(R\sqrt{u}) u^{\frac{n}{2}-1} du$. 4219. $u = \frac{16}{15} \pi^2 \rho_0^2 R^5$. 4220. $\sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}} e^{-\frac{\Delta}{\delta}}$, 其中 $\delta = |a_{ij}|$, 而 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{ij} & b_i \\ b_j & c \end{vmatrix}$ 为加边行列式. 4221. $1 + \sqrt{2}$. 4222. $\frac{256}{15} a^3$. 4223. $2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2)$. 4224. $\frac{a^3}{6} (\cosh^{\frac{3}{2}} 2t_0 - 1)$. 4225. $4a^{\frac{7}{3}}$. 4226. $2(e^a - 1) + \frac{\pi}{4} a e^a$. 4227. $2a^2 (2 - \sqrt{2})$. 4228. $\frac{2ka^2 \sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$. 4229. $2a^2$. 4230. $\frac{\pi}{a}$. 4231. 5. 4232. $\sqrt{3}$. 4233. $|x_0| + |z_0|$, 其中 $|x_0| < a$. 4234. $\frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{3z_0^4}{a}} + 2\sqrt{\frac{az_0^2}{3}} \right)$. 4235. $(1 + \frac{2z_0}{3c}) \sqrt{cz_0}$. 4236. $a\sqrt{2} \arctan \frac{|z|}{\sqrt{a^2 - z^2}}$. 4237. $\frac{2\pi}{3} (3a^2 + 4\pi^2 b^2) \sqrt{a^2 + b^2}$. 4238. $\frac{2}{3} \pi a^3$. 4239. $\frac{1}{3} \left[(2 + t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right]$. 4240. $\frac{a^2}{256\sqrt{2}} \left[100\sqrt{38} - 72 - 17 \ln \frac{25+4\sqrt{38}}{17} \right]$. 4241.1. $2b(b + a \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon})$, 其中 $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率. 4241.2. $\frac{2}{3} p^2 (2\sqrt{2} - 1)$. 4241.3. $\frac{a}{8} \left[(3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2} \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \right]$. 4242. $x_0 = b - a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}$; $y_0 = \frac{h}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{h^2 - a^2}}$. 4243. $x_0 = y_0 = \frac{4}{3}a$. 4244.1. $S_x = S_y = \frac{3}{5}a^2$. 4244.2. πa^3 . 4244.3. (a) $\frac{32}{3}a^3$; (b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$. 4244.4. $r_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. 4245. $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{4a}{3\pi}$. 4246. $x_0 = \frac{2}{5}$; $y_0 = -\frac{1}{5}$; $z_0 = \frac{1}{2}$. 4247. $I_x = I_y = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$; $I_z = a^2 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$. 4248. (a) 0; (b) $\frac{2}{3}$; (c) 2. 4249. (a) 2; (b) 2; (c) 2. 4250. $-\frac{14}{15}$. 4251. $\frac{4}{3}$. 4252. 0. 4253. $-2\pi a^2$. 4254. -2π . 4255. 0. 4256. 0. 4257. $\frac{\pi}{4} - 1$. 4258. 8. 4259. 12. 4260. 4. 4261. -2. 4262. $\int_0^{a+b} f(u) du$. 4263. $-\frac{3}{2}$. 4264. 9. 4265. $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy$. 4266. 62. 4267. 1. 4268. $\pi + 1$. 4269. $e^a \cos b - 1$. 4271. $z = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C$. 4272. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{3x-y}{2y\sqrt{2}} + C$. 4273. $z = -\frac{2y^2}{(x+y)^2} + \ln|x+y| + C$. 4274. $z = e^{x+y}(x - y + 1) + ye^x + C$. 4275. $z = \frac{\partial^{n+m} u}{\partial x^n \partial y^m} + C$. 4276. $z = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} (\arctan \frac{x}{y}) + C$. 4278. $|I_R| \leq \frac{8\pi}{R^2}$. 4279. $\frac{1}{35}$. 4280. $-\pi a^2$. 4281. $2\pi\sqrt{2}a^2 \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$. 4282. $-\frac{\pi a^3}{4}$. 4283. -4. 4284. $-53\frac{7}{12}$. 4285. 0. 4286. $b - a$. 4287. $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy + \int_{z_1}^{z_2} \chi(z) dz$. 4288. $\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u) du$. 4289. $\int \frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} uf(u) du$. 4290. $u = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$. 4291. $u = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C$. 4292. $u = \ln \sqrt{(x+y)^2 + z^2} + \arctan \frac{z}{x+y} + C$. 4293. $A = -mg(z_2 - z_1)$. 4294. $A = \frac{k}{2}(a^2 - b^2)$, k 为弹性系数. 4295. $A = G \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$, 其中 $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ ($i = 1, 2$). 4296. $I = \iint_S y^2 dx dy$. 4297. $-46\frac{2}{3}$. 4298. $\frac{\pi a^4}{2}$. 4299. $-2\pi ab$. 4300. $-\frac{1}{5}(e^\pi - 1)$. 4301. 0. 4302. $I_1 - I_2 = 2$. 4303. $\frac{\pi m a^2}{8}$. 4304. $mS + e^{x_2} \varphi(y_2) - e^{x_1} \varphi(y_1) - m(y_2 - y_1) - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)$. 4305. $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = kx + \frac{\partial u}{\partial y}$, 其中 u 为二阶可微函数, k 为常数. 4306. $\frac{\partial}{\partial x} [xF(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y} [yF(x, y)]$. 4307. (1) $I = 0$; (2) $I = 2\pi$. 4308. πab . 4309. $\frac{3}{8} \pi ab$. 4310. $\frac{a^2}{6}$. 4311. $\frac{3}{2} a^2$. 4312. a^2 . 4313. $\frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$. 4314. $\frac{a^2}{2} B(2m+1, 2n+1)$. 4315. $\frac{ab}{2n} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}$. 4316. $\frac{ab}{n} \left[1 + \frac{(1-\frac{1}{n})\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \right]$. 4317. $\frac{abc^2}{2(2n+1)}$. 4318. $\pi(n+1)(n+2)r^2$; $6\pi r^2$. 4319. $\pi(n-1)(n-2)r^2$; $6\pi r^2$. 4320.1. $4a^2$. 4321. $\text{sgn}(ad - bc)$. 4322. $I = \sum \text{sgn} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}$, 其中求和遍历曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 和 $\psi(x, y) = 0$ 在闭曲线 C 内的所有交点. 4324. $I = 2S$, 其中 S 为闭曲线 C 所围的面积. 4325. $X'_x(x_0, y_0) + Y'_y(x_0, y_0)$. 4326. 力在坐标轴上的投影等于: $X = 0$; $Y = \frac{2GmM}{\pi a^2}$, 其中 G 为引力常数. 4327. 当 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R$ 时, $u = 2\pi\kappa R \ln \frac{1}{R}$; 当 $\rho > R$ 时 $u = 2\pi\kappa R \ln \frac{1}{\rho}$. 4328. $I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^m \cos m\varphi$, $I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^m \sin m\varphi$,

其中 $0 \leq \rho \leq 1$; $I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi$, $I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi$, 其中 $\rho > 1$. **4329.** 若点 $A(x, y)$ 位于闭曲线 C 内, $u = 2\pi$; 若点 $A(x, y)$ 位于闭曲线 C 上, $u = \pi$; 若点 $A(x, y)$ 位于闭曲线 C 外, $u = 0$. **4330.** 当 $0 \leq \rho < 1$ 时, $K_1 = \pi \rho^m \cos m\varphi$, $K_2 = \pi \rho^m \sin m\varphi$; 当 $\rho = 1$ 时, $K_1 = 0$, $K_2 = 0$; 当 $\rho > 1$ 时, $K_1 = -\frac{\pi}{\rho^m} \cos m\varphi$, $K_2 = -\frac{\pi}{\rho^m} \sin m\varphi$. **4339.** $Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$; $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. **4340.** $H_x = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\eta - y) dz - (\zeta - z) dy]$; $H_y = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\zeta - z) dx - (\zeta - x) dz]$; $H_z = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - x) dy - (\eta - y) dx]$. **4341.** $I_1 - I_2 = (4\pi - 2\sqrt{3})a^4$. **4342.** $\frac{7}{2}\pi\sqrt{2}a^3$. **4343.** πa^3 . **4344.** $\frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$. **4345.** $\frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1)\ln 2$. **4346.** $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$. **4347.** $\frac{4\pi}{3}abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$. **4348.** $\pi^2 [a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})]$. **4349.** $\frac{\pi a^4}{2} \sin \alpha \cos^2 \alpha \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$. **4350.** $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$. **4352.1.** $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$. **4352.2.** πa^2 . **4352.3.** $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **4353.** $\frac{4}{3}\pi\rho_0 a^4$. **4354.** $\frac{\pi\rho_0 a(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{12}$. **4355.** (a) $x_0 = \frac{a}{2}$; $y_0 = 0$; $z_0 = \frac{16}{9\pi}a$; (b) $x_0 = y_0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$; $z_0 = \frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)$. **4356.1.** (a) $40a^4$; (b) $\pi R[R(R+H)^2 + \frac{2}{3}H^3]$. **4356.2.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **4357.** 引力在坐标轴上的投影 $X = 0$; $Y = 0$; $Z = \pi k m \rho_0 \ln \frac{a}{b}$. **4358.** $u = 4\pi\rho_0 \min \left(a, \frac{a^2}{r_0} \right)$, 其中 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. **4359.** 当 $|t| \leq \sqrt{3}$ 时 $F(t) = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$; 当 $|t| > \sqrt{3}$ 时 $F(t) = 0$. **4360.** $F(t) = \frac{\pi(8-5\sqrt{2})}{6}t^4$. **4361.** 当 $t \leq r-a$ 时 $F = 0$; 当 $r-a < t < r+a$ 时 $F = \frac{\pi t}{r}[a^2 - (r-t)^2]$; 当 $t \geq r+a$ 时 $F = 0$ ($t \geq 0$). **4362.** $4\pi a^3$. **4363.** $\left[\frac{f(a)-f(0)}{a} + \frac{g(b)-g(0)}{b} + \frac{h(c)-h(0)}{c} \right] abc$. **4364.** 0 . **4365.** $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$. **4366.** $\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$. **4367.** $-\pi a^2\sqrt{3}$. **4368.** $\frac{h^3}{3}$. **4369.** $2S$. **4370.** 0 . **4371.** $-2\pi a(a+h)$. **4372.** $2\pi Rr^2$. **4373.** $-\frac{9}{2}a^3$. **4374.** 0 . **4376.** $3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$. **4377.** 0 . **4378.** $2 \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **4379.** $\iiint_V \Delta u dx dy dz$, 其中 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **4380.** 0 . **4384.** $\frac{4\pi}{3} \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) |c|$. **4385.1.** $\frac{2}{9}a^3$. **4385.2.** $2\pi^2 a^2 b$. **4387.** $3a^4$. **4388.** $\frac{12}{5}\pi a^5$. **4389.** 1 . **4390.** $-\frac{\pi h^4}{2}$. **4392.** (a) $I = 0$; (b) $I = 4\pi$. **4401.1.** (a) $\text{grad } u(0) = 3i - 2j - 6k$; $|\text{grad } u(0)| = 7$, $\cos \alpha = \frac{3}{7}$, $\cos \beta = -\frac{2}{7}$, $\cos \gamma = -\frac{6}{7}$. (b) $\text{grad } u(A) = 6i + 3j$, $|\text{grad } u(A)| = 3\sqrt{5}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \gamma = 0$. (c) $\text{grad } u(B) = 7i$, $|\text{grad } u(B)| = 7$, $\cos \alpha = 1$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 0$; 在点 $M(-2, 1, 1)$ 上 $\text{grad } u = 0$. **4401.2.** $\text{grad } u(M) = 12i - 9j - 20k$, $|\text{grad } u(M)| = 25$, $\cos \alpha = \frac{12}{25}$, $\cos \beta = -\frac{9}{25}$, $\cos \gamma = -\frac{4}{5}$; $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{3}{\sqrt{2}}$. **4402.** (a) $xy = z^2$; (b) $x = y = 0$ 和 $x = y = z$; (c) $x = y = z$. **4403.** $r = 1$. **4404.** $\frac{4(x^2+y^2)}{u^2-256} + \frac{4z^2}{u^2} = 1$ ($u \geq 16$); $\frac{x^2+y^2}{960} + \frac{z^2}{1024} = 1$; $\max u = 20$. **4405.** $\cos \varphi = -\frac{8}{9}$. **4406.** 等值面——圆锥孔; 梯度的等模面——圆环; $\inf u = 0$, $\sup u = 1$; $\inf |\text{grad } u| = 0$, $\sup |\text{grad } u| = \frac{1}{2}$. **4407.** $\frac{|\Delta c|}{|\text{grad } u(x_0, y_0, z_0)|}$. **4409.** (a) $\frac{r}{r}$; (b) $2r$; (c) $-\frac{r}{r^3}$. **4410.** $f'(r)\frac{r}{r}$. **4411.** c . **4412.** $2r(c \cdot c) - 2c(c \cdot r)$. **4415.** (a) $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z$, 其中 $e_r = i \cos \varphi + j \sin \varphi$, $e_\varphi = -i \sin \varphi + j \cos \varphi$, $e_z = k$ 为相应坐标线的单位切向量. (b) $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi$, 其中 $e_r = i \cos \varphi \sin \theta + j \sin \varphi \sin \theta + k \cos \theta$, $e_\theta = i \cos \varphi \cos \theta + j \sin \varphi \cos \theta - k \sin \theta$, $e_\varphi = -i \sin \varphi + j \cos \varphi$ 为相应坐标线的单位切向量. **4416.** $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2u}{r}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial r} = |\text{grad } u|$, 其中 $a = b = c$. **4417.** $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{\cos(l, r)}{r^2}$; $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, 其中 $l \perp r$. **4418.** $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\text{grad } u \cdot \text{grad } v}{|\text{grad } v|}$; $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, 其中 $\text{grad } u \perp \text{grad } v$. **4419.** $a = \frac{i(x^2+y^2+yz) - j(x^2+y^2+xz) + k(x-y)z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$. **4420.** $y = c_1 x$, $z = c_2 x^2$. **4423.1.** $\text{div } a(M) =$

$\frac{18}{125}$; $\Pi = \frac{24}{125} \pi \varepsilon^3$. **4423.2.** 0. **4425.** $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$, 其中 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **4426.** $f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$; $f(r) = c + \frac{c_1}{r}$, 其中 c 和 c_1 为常数. **4427.** (a) 3; (b) $\frac{2}{r}$. **4428.** $\frac{f'(r)}{r}(c \cdot r)$. **4429.** $3f(r) + rf'(r)$; $f(r) = \frac{c}{r^3}$, c 为常数. **4430.** (a) $u\Delta u + (\operatorname{grad} u)^2$; (b) $u\Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v$, 其中 Δu 为拉普拉斯算子. **4431.** $\operatorname{div} v = 0$; $\operatorname{div} w = -2\omega^2$. **4432.** 0, 在引力中心之外. **4433.** $\operatorname{div} a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]$, 其中 a_r, a_φ 为向量 a 在坐标线 $\varphi = \text{常数}$ 和 $r = \text{常数}$ 上的投影. **4434.** $\operatorname{div} a = \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMA_w) \right]$, 其中 a_u, a_v, a_w 为向量 a 在对应坐标线上的投影, 而 $L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2}$, $M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}$, $N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}$. 若 r, φ, z 为圆柱坐标, 则 $\operatorname{div} a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z} \right]$; 若 r, θ 和 φ 为球坐标, 则 $\operatorname{div} a = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r \sin \theta) + r \frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta \sin \theta) + r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]$. **4436.1.** (a) 0; (b) 0. **4436.2.** $\operatorname{rot} a(M) = -\frac{5}{4}i - j + \frac{5}{2}k$, $|\operatorname{rot} a(M)| = \frac{1}{4}\sqrt{141}$, $\cos \alpha = \frac{-5}{\sqrt{141}}$, $\cos \beta = \frac{-4}{\sqrt{141}}$, $\cos \gamma = \frac{10}{\sqrt{141}}$. **4437.** (a) $\frac{f'(r)}{r}[r \times c]$; (b) $2f(r)c + \frac{f'(r)}{r}[c(r \cdot r) - r(c \cdot r)]$. **4439.** (a) 0; (b) 0. **4440.** $\operatorname{rot} v = 2\omega$. **4441.1.** $\operatorname{rot} a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right] k$, 其中 a_φ 和 a_r 为向量 a 分别在坐标线 $\varphi = \text{常数}$ 和 $r = \text{常数}$ 上的投影. **4441.2.** (a) $\operatorname{rot} a = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) e_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) e_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right] e_z$, 其中 $a_r = a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi$, $a_\varphi = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi$, $a_z = a_z$; (b) $\operatorname{rot} a = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right] e_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) \right] e_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right] e_\varphi$, 其中 $a_r = a_x \cos \varphi \sin \theta + a_y \sin \varphi \sin \theta + a_z \cos \theta$, $a_\theta = a_x \cos \varphi \cos \theta + a_y \sin \varphi \cos \theta - a_z \sin \theta$, $a_\varphi = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi$. **4442.1.** (a) 0; (b) πh^3 . **4442.2.** (a) 0; (b) 0. **4443.** π . **4444.** $\frac{3\pi}{8}$. **4445.1.** 0. **4445.2.** $\frac{\pi}{5}$. **4447.** $4\pi m$. **4448.** $\sum_{i=1}^n e_i$. **4450.** $c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$, 其中 c 为质量热容, ρ 为物体密度. **4452.1.** $2\pi^2 b^2$. **4452.2.** $8\frac{20}{21} \cdot \ln 2$. **4452.3.** $\frac{3}{4}(3 + e^4 - 12e^2)$. **4452.4.** -12. **4453.** $\int_{r_A}^{r_B} f(r)r dr$. **4454.1.** (a) 2π ; (b) 2π . **4454.2.** (a) $\Gamma = 0$; (b) $\Gamma = 2\pi n$, 其中 n 为闭曲线 C 绕 Oz 轴的周数. **4455.** $\operatorname{rot} a(M) = -j - 2k$, $\Gamma = -\pi(\cos \beta + 2 \cos \gamma)\varepsilon^2$. **4456.** $Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$; $\Gamma = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$; $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. **4457.1.** $u = xyz(x + y + z) + C$. **4457.2.** $\frac{1}{3}$. **4458.** $u = \frac{m}{r}$. **4459.** $u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}$, 其中 r_i 为点 $M(x, y, z)$ 与点 $M_i(i = 1, 2, \dots, n)$ 之间的距离. **4460.** $u(x, y, z) = \int_{r_0}^r tf(t) dt$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

人名译名对照表

A

阿贝尔, N. H. Abel
阿达马, J. Hadamard
阿基米德, Archimedes
埃尔米特, C. Hermite
奥斯特罗格拉茨基, М. В. Остроградский

B

贝塞尔, F. W. Bessel
毕奥, J. B. Biot
波尔查诺, B. Bolzano
玻意耳, R. Boyle
伯恩斯坦, С. Н. Бернштейн
伯努利, J. Bernoulli
布尼亚科夫斯基, В. Я. Буняковский

D

达朗贝尔, J. L. R. d'Alembert
狄利克雷, P. G. L. Dirichlet
笛卡儿, R. Descartes
棣莫弗, A. de Moivre

F

范德瓦耳斯, J. D. van der Waals
菲涅尔, A. J. Fresnel
斐波那契, Fibonacci
费马, P. de Fermat

费耶, L. Fejér
傅里叶, J. B. J. Fourier
傅茹兰, Frullani

G

高斯, C. F. Gauss
格林, G. Green
古尔丹, P. Guldin

H

亥姆霍兹, H. L. F. Helmholtz
赫尔德, O. L. Hölder
胡克, R. Hooke
惠更斯, C. Huygens

J

吉米多维奇, Б. П. Демидович
В. Б. Демидович
П. П. Демидович

K

卡塔兰, E. C. Catalan
开普勒, J. Kepler
柯西, A. L. Cauchy

L

拉比, J. L. Raabe

拉盖尔, E. N. Laguerre
 拉格朗日, J. L. Lagrange
 拉普拉斯, P. S. Laplace
 莱布尼茨, G. W. Leibniz
 兰伯特, J. H. Lambert
 勒让德, A. M. Legendre
 黎曼, G. F. B. Riemann
 李雅普诺夫, A. M. Ляпунов
 利普希茨, R. O. S. Lipschitz
 刘维尔, J. Liouville
 罗巴切夫斯基, Н. И. Лобачевский
 罗尔, M. Rolle
 洛必达, G. F. A. de L'Hospital
 洛朗, P. A. Laurent

M

马略特, E. Mariotte
 麦克劳林, C. Maclaurin

N

尼尔, W. Neile
 涅梅茨基, В. В. Немьцкий
 牛顿, I. Newton

O

欧拉, L. Euler

P

帕斯卡, B. Pascal
 普林斯海姆, A. Pringsheim
 泊松, S. D. Poisson

Q

切比雪夫, П. Л. Чебышев

S

萨瓦尔, F. Savart
 施托尔茨, O. Stolz
 斯捷克洛夫, В. А. Стеклов
 斯捷潘诺夫, В. В. Степанов
 斯特林, J. Stirling
 斯托克斯, G. G. Stokes

T

泰勒, B. Taylor
 托里拆利, E. Torricelli

W

维维亚尼, V. Viviani
 魏尔斯特拉斯, K. T. W. Weierstrass
 沃利斯, J. Wallis

X

辛普森, T. Simpson

Y

雅可比, C. G. J. Jacobi
 雅姆, Jame
 杨, T. Young
 叶尔马科夫, V. P. Ермаков

Z

卓里奇, В. А. Зорич

译后记

Б. П. 吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部久负盛名的著作, 在中国尤其具有非同寻常的地位. 我曾经听不止一位老教授讲, 当年教数学分析习题课的时候, 不提前把吉米多维奇习题集做完一遍是不敢上讲台的. 直到今天, 以全部做完此习题集为荣者仍不在少数. 各种版本的吉米多维奇习题集解答在市面上一直热销, 这是此习题集长盛不衰的最好证据. 在北京大学图书馆开架阅览室内, 与吉米多维奇习题集解答有关的书占据了整整一组书架, 而且几乎每本书都“体无完肤”; 然而, 我却发现,《习题集》本身竟然不在架上——必须专门填写借书单才能从书库中借出. 究其原因,大概是原书中译本版本较早之故. 与此形成鲜明对比的是, 俄文版的《习题集》不断再版, 至今已有 2010 年版. 由此可见, 修订出版新的中译本早就大有必要.

由李荣涑先生翻译的《数学分析习题集》出版于 20 世纪 50 年代. 第一版是根据 1952 年的原书第一版译出的, 由商务印书馆于 1953 年出版. 译者在几年之后又根据原书第三版进行了修订, 修订版由高等教育出版社于 1958 年出版, 包含 4462 道习题 (按大题号计算). 1958 年版中译本曾经多次重印, 其影响持续至今, 很多相关题解都是基于这个版本.

本书根据 АСТ: Астрель 出版社的 2010 年俄文版译出, 是对 1958 年版中译本的全面修订和增补. 由于原译者李荣涑先生已经辞世, 高等教育出版社委托我负责这项工作. 说来也巧, 我在莫斯科大学力学数学系上大学期间, 数学分析习题课所用教材就是这本习题集. 对我而言, 成为本书的继任译者既是荣誉更是义务——我理应在力所能及的翻译工作中贡献自己的力量.

由于时间跨度很大, 2010 年俄文版在内容上与 1958 年中译本有一些不同, 这主要表现在后来的版本包含一些新题. 新题或者以子题的形式出现, 如习题 101 (b), 或者具有带点的题号, 如习题 235.2, 但习题 235.1 是原习题 235. 绝大多数老题的题号保持不变, 习题集最后一题的题号仍是 4462, 但习题总数已经达到大约 5000 道. 此外, 个别旧题被替换为新题, 少量文字有变化.

在这次修订增补过程中,我完成了以下工作:

(1) 对照原文检查并修订旧版译文,补译新版增加和变更的内容.整体而言,原中译本的翻译水平是相当高的,尤其在纯数学的部分,错漏之处极少.原中译本对力学和物理学方面的内容处理得不够理想,这大概与当时还没有形成统一规范的术语体系有关.

(2) 根据《数学名词 1993》、《物理学名词 1996》、《力学名词 1993》和相关国家标准把过去曾经使用的不规范术语改为规范术语,按照现在的标准或通用译法重新翻译人名,并在书末添加了外国人名译名对照表.

(3) 按照更加符合当前语言习惯的方式对全部译文进行适当改写,同时尽量保持原中译本简洁凝练的语言风格.

(4) 在个别地方添加了译注,并改正了原书的少量印刷错误以及个别习题的答案.

在本书的出版过程中,我得到了多方面的帮助.首先要感谢苏州大学的谢惠民、卫瑞霞和吴茂庆三位老师,他们在编写与本习题集配套的学习指引的过程中,发现了原书中的一些错误和纰漏,为进一步提高本书的质量作出了贡献.特别要提的是,谢惠民教授在翻译过程中耐心解答了我就一些疑难习题提出的问题,并帮助撰写了 3 条译注.

高等教育出版社的资深数学编审郭思旭先生帮助我校订了第一章全部内容和第二章部分内容,在此表示衷心感谢.

我还要感谢华东师范大学数学系的倪明康老师,他协助高等教育出版社联系了本书的著作权所有者、B. П. 吉米多维奇之子——莫斯科大学的 B. Б. 吉米多维奇教授,并亲自将新版俄文书从俄罗斯带回国内.

本书的出版得到高等教育出版社的大力支持,特别要感谢张小萍女士、赵天夫先生和李鹏先生,他们对本书的出版提供了很多实际的帮助.

此外,杨延涛博士和曾利博士阅读了部分译稿并提出了许多有价值的修改建议,在此一并致谢.

最后,感谢倪明先生为本书出版所做作的贡献.

由于整个修订和翻译工作是在较短时间内完成的,虽竭尽全力,疏漏之处仍在所难免,恳请各位专家和广大读者批评指正,以便有机会再版时加以改正.

李 植

2010年6月于北京大学

zhili@pku.edu.cn

相关图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

书号	书名	著译者
18303-0	微积分学教程 (第一卷) (第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18304-7	微积分学教程 (第二卷) (第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18305-4	微积分学教程 (第三卷) (第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18302-3	数学分析 (第一卷) (第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
20257-1	数学分析 (第二卷) (第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
18306-1	数学分析讲义 (第 3 版)	[俄] Г. И. 阿黑波夫、В. А. 萨多夫尼齐、 В. Н. 丘巴里阔夫
★25439-6	数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
★	工科数学分析习题集 (根据 2006 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
★29531-3	吉米多维奇数学分析习题集学习指引 (第一册)	沐定夷、谢惠民 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
★30578-4	复分析导论 (第一卷) (第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
22360-6	复分析导论 (第二卷) (第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
18407-5	函数论与泛函分析初步 (第 7 版)	[俄] А. Н. 柯尔莫戈洛夫、С. В. 佛明
★29221-3	实变函数论 (第 5 版)	[俄] И. П. 那汤松
18398-6	复变函数论方法 (第 6 版)	[俄] М. А. 拉夫连季耶夫、Б. В. 沙巴特
18399-3	常微分方程 (第 6 版)	[俄] Л. С. 庞特里亚金
22521-1	偏微分方程讲义 (第 2 版)	[俄] О. А. 奥列尼克
25766-3	偏微分方程习题集 (第 2 版)	[俄] А. С. 沙玛耶夫
23063-5	奇异摄动方程解的渐近展开	[俄] А. Б. 瓦西里亚娃、В. Ф. 布图索夫
★27249-9	数值方法 (第 5 版)	[俄] Н. С. 巴赫瓦洛夫, Н. П. 热依德科 夫, Г. М. 柯别里科夫
20525-1	代数学引论 (第一卷) 基础代数 (第 2 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
21491-8	代数学引论 (第二卷) 线性代数 (第 3 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
22506-8	代数学引论 (第三卷) 基本结构 (第 2 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
18946-9	现代几何学：方法与应用 (第一卷) 曲面 几何、变换群与场 (第 5 版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、 А. Т. 福明柯

书号	书名	著译者
21492-5	现代几何学：方法与应用 (第二卷) 流形上的几何与拓扑 (第5版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、A. T. 福明柯
21434-5	现代几何学：方法与应用 (第三卷) 同调论引论 (第2版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、A. T. 福明柯
18405-1	微分几何与拓扑学简明教程	[俄] A. C. 米先柯、A. T. 福明柯
★28888-9	微分几何与拓扑学习题集 (第2版)	[俄] A. C. 米先柯、Ю. П. 索洛维约夫、A. T. 福明柯
22059-9	概率 (第一卷) (第3版)	[俄] A. H. 施利亚耶夫
22555-6	概率 (第二卷) (第3版)	[俄] A. H. 施利亚耶夫
22554-9	概率论习题集	[俄] A. H. 施利亚耶夫
22359-0	随机过程论	[俄] A. B. 布林斯基、A. H. 施利亚耶夫
22634-8	随机金融基础 (第一卷) 事实. 模型	[俄] A. H. 施利亚耶夫
23983-6	随机金融基础 (第二卷) 理论	[俄] A. H. 施利亚耶夫
18403-7	经典力学的数学方法 (第4版)	[俄] B. H. 阿诺尔德
18530-0	理论力学 (第3版)	[俄] A. П. 马尔契夫
22155-8	连续介质力学 (第一卷) (第6版)	[俄] Л. И. 谢多夫
22633-1	连续介质力学 (第二卷) (第6版)	[俄] Л. И. 谢多夫
★29223-7	非线性动力学定性理论方法 (第一卷)	[俄] L. P. Shilnikov 等
★29464-4	非线性动力学定性理论方法 (第二卷)	[俄] L. P. Shilnikov 等

说明：加★者为最新出版。

网上购书：academic.hep.com.cn

其他订购办法：

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购。书款通过邮局汇款或银行转账均可。

购书免邮费，发票随后寄出。

单位地址：北京西城区德外大街4号

电话：010-58581118/7/6/5/4

传真：010-58581113

通过邮局汇款：

北京西城区德外大街4号高教读者服务部
 邮政编码：100120

通过银行转账：

户名：北京蓝畅书店有限责任公司

开户行：交通银行北京亚运村支行

马甸分理处

银行账号：110060437018010030287